

ЛІНІЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Приклад 1 Скласти канонічне рівняння еліпса, що проходить через точки $M\left(\frac{5}{2}; \frac{\sqrt{6}}{4}\right)$ і $N\left(-2; \frac{\sqrt{15}}{5}\right)$.

Розв'язання. Нехай $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ – шукане рівняння еліпса. Це рівняння повинні задовольняти координати даних точок. Маємо

$$\begin{cases} \frac{25}{4a^2} + \frac{3}{8b^2} = 1, \\ \frac{4}{a^2} + \frac{3}{b^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 10, \\ b^2 = 1. \end{cases}$$

Отже, рівняння шуканого еліпса має вигляд

$$\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{1} = 1.$$

Приклад 2 Задані точки $A(1; 0)$ і $B(2; 0)$. Точка M рухається так, що в трикутнику AMB $\angle B$ у два рази більший за $\angle A$. Знайти рівняння кривої, яку описує точка M .

Розв'язування. Візьмемо точку M з координатами x і y . Виразимо $\operatorname{tg}\angle B$ і $\operatorname{tg}\angle A$ через координати точок A , B і M :

$$\operatorname{tg}\angle B = \frac{y}{2-x}, \quad \operatorname{tg}\angle A = \frac{y}{x+1}.$$

Згідно з умовою $\angle B = 2\angle A$, тобто

$$\operatorname{tg}\angle B = \frac{2\operatorname{tg}\angle A}{1 - \operatorname{tg}^2\angle A} \quad \text{або} \quad \frac{y}{2-x} = \frac{2 \frac{y}{x+1}}{1 - \left(\frac{y}{x+1}\right)^2}.$$

Після спрощення дістаємо $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$. Отже, шукана крива – гіпербола.

Приклад 3 Скласти рівняння параболи, симетричної відносно осі Ox , з вершиною в початку координат, якщо довжина деякої хорди цієї параболи, що перпендикулярна до осі Ox , дорівнює 16, а відстань до цієї хорди від вершини дорівнює 6.

Розв'язання. Оскільки відома довжина хорди й відстань до неї від вершини, то відомі координати кінця цієї хорди – точки M , що лежить на параболі. У рівнянні параболи $y^2 = 2px$ покладемо $x = 6$, $y = 8$. Тоді $2p = \frac{32}{3}$. Отже, рівняння шуканої параболи

$$y^2 = \frac{32x}{3}.$$

Задачі для самостійного розв'язування

№ 1 Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, якщо:

- його півосі дорівнюють 5 і 2;

- 2) його велика вісь дорівнює 10, а відстань між фокусами $2c = 8$;
- 3) його мала вісь дорівнює 24, а відстань між фокусами $2c = 10$;
- 4) відстань між фокусами $2c = 6$ і ексцентриситет $e = \frac{3}{5}$;
- 5) його велика вісь дорівнює 20, а ексцентриситет $e = \frac{3}{5}$;
- 6) його мала вісь дорівнює 10, а ексцентриситет $e = \frac{12}{13}$;
- 7) відстань між директрисами дорівнює 5 і відстань між фокусами $2c = 4$;
- 8) його велика вісь дорівнює 8, а відстань між директрисами дорівнює 16;
- 9) його мала вісь дорівнює 6, а відстань між директрисами дорівнює 13;
- 10) відстань між директрисами дорівнює 32 і $e = \frac{1}{2}$;
- 11) точка $M(-2\sqrt{5}; 2)$ еліпсу і його мала піввісь дорівнює 3;
- 12) точка $M(2; -2)$ еліпсу і його велика піввісь дорівнює 4;
- 13) точки $M(4; -\sqrt{3})$ і $N(2\sqrt{2}; 3)$ еліпсу.

№ 2 Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої лежать на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, якщо:

- 1) її вісі $2a = 10$ і $2b = 8$;
- 2) відстань між фокусами $2c = 10$ і вісь $2b = 8$;
- 3) відстань між фокусами $2c = 6$ і ексцентриситет $e = \frac{3}{2}$;
- 4) вісь $2a = 16$ і ексцентриситет $e = \frac{5}{4}$;
- 5) рівняння асимптот $y = \pm \frac{4}{3}x$ і відстань між фокусами $2c = 20$;
- 6) відстань між директрисами $22\frac{2}{13}$ і відстань між фокусами $2c = 26$;
- 7) відстань між директрисами $\frac{32}{5}$ і вісь $2b = 6$;
- 8) відстань між директрисами дорівнює $\frac{8}{3}$ і $e = \frac{3}{2}$;
- 9) рівняння асимптот $y = \pm \frac{3}{4}x$ і відстань між директрисами $12\frac{4}{5}$;
- 10) точки $M(6; -1)$ і $N(-8; 2\sqrt{2})$ гіперболи;
- 11) точка $M(-5; 3)$ гіперболи і ексцентриситет $e = \sqrt{2}$;
- 12) точка $M(\frac{9}{2}; -1)$ гіперболи і рівняння асимптот $y = \pm \frac{2}{3}x$;
- 13) точка $M(-3; \frac{5}{2})$ гіперболи і рівняння директрис $x = \pm \frac{4}{3}$;
- 14) рівняння асимптот $y = \pm \frac{3}{4}x$ і рівняння директрис $x = \pm \frac{16}{5}$.

№ 3 Скласти рівняння параболи, вершина якої знаходиться в початку координат, якщо:

- 1) парабола розташована в правій півплощині симетрично відносно вісі Ox , і її параметр $p = 3$;
- 2) парабола розташована в лівій півплощині симетрично відносно вісі Ox , і її параметр $p = 0,5$;
- 3) парабола розташована в верхній півплощині симетрично відносно вісі Oy , і її параметр $p = \frac{1}{4}$;
- 4) парабола розташована в нижній півплощині симетрично відносно вісі Oy , і її параметр $p = 3$;
- 5) парабола розташована симетрично відносно вісі Ox і проходить через точку $A(9; 6)$;
- 6) парабола розташована симетрично відносно вісі Ox і проходить через точку $B(-1; 3)$;
- 7) парабола розташована симетрично відносно вісі Oy і проходить через точку $C(1; 1)$;
- 8) парабола розташована симетрично відносно вісі Oy і проходить через точку $D(4; -8)$.

№ 4 Із точки $A\left(\frac{10}{3}; \frac{5}{3}\right)$ проведені дотичні до еліпса $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$. Скласти їх рівняння.

№ 5 Скласти рівняння дотичних до гіперболи $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$, які перпендикулярні до прямої $4x + 3y - 7 = 0$.

№ 6 Скласти рівняння гіперболи, якщо відомо її ексцентриситет $e = \sqrt{5}$, фокус $F(2; -1)$ і рівняння відповідної директриси $3x - y + 3 = 0$.

№ 7 Скласти рівняння параболи, якщо заданий її фокус $F(4; 3)$ і директриса $y + 1 = 0$.

№ 8 Скласти рівняння двох спряжених гіпербол, якщо відстань між директрисами першої з них дорівнює 7,2 і відстань між директрисами другої дорівнює 12,8.

№ 9 Скласти рівняння параболи, якщо:

- 1) фокус має координати $(5, 0)$, а вісь ординат є директрисою;
- 2) парабола симетрична відносно осі Ox , проходить через початок координат і через точку $M(1; -4)$;
- 3) парабола симетрична відносно осі Oy , фокус знаходиться в точці $(0; 2)$, а вершина збігається з початком координат;
- 4) парабола симетрична відносно осі Oy , проходить через початок координат і через точку $M(6; -2)$.

№ 10 Точка $M\left(-\frac{5}{2}; 1\right)$ лежить на гіперболі $4x^2 - 5y^2 = 20$. Знайти її фокальні радіуси.

№ 11 На еліпсі $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$ знайти точку з фокальним радіусом $r = \frac{10}{3}$.

№ 12 Знайти точки перетину еліпса $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ з прямою $x - 2y + 2 = 0$.

№ 13 Знайти точки перетину гіперболи $\frac{x^2}{90} - \frac{y^2}{36} = 1$ з прямою $x - y + 5 = 0$.

№ 14 Через точку $M(2; 4)$ провести дотичні до еліпса $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

№ 15 Скласти рівняння дотичних, проведених через точку $M\left(0; -\frac{1}{4}\right)$ до гіперболи $9x^2 - 2y^2 = 1$.

№ 16 Знайти дотичні до гіперболи $x^2 - y^2 = 16$, паралельні до прямої $5x - 3y - 17 = 0$.

№ 17 Знайти дотичну до параболи $y^2 = 2x$, перпендикулярну до прямої $4x + y - 23 = 0$.

№ 18 Із правого фокуса еліпса $\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{20} = 1$ під кутом α до осі Ox напрямлено промінь світла. Дійшовши до еліптичного дзеркала, промінь відбивається. Написати рівняння відбитого променя, якщо $\operatorname{tg}\alpha = -2$.

№ 19 З фокуса параболічного дзеркала $y^2 = 12x$ під кутом α напрямлено промінь світла. Дійшовши до параболи, промінь відбивається. Написати рівняння відбитого променя, якщо $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$.