ПЛОЩИНА У ПРОСТОРІ

Приклад 1 Трикутна піраміда задана вершинами $A_1(-1,0,1)$, $A_2(1,-1,1)$, $A_3(-1,-2,0)$, $A_4(5,2,10)$. Потрібно знайти: 1) рівняння грані $A_1A_2A_3$; 2) довжину висоти піраміди, яка проходити через вершину A_4.

Розв'язання.

1) Складемо детермінантне рівняння грані $A_1A_2A_3$:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-0 & z-1 \\ -1+1 & -1-0 & 1-1 \\ -1+1 & -2-0 & 0-1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x+1 & y & z-1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$x+1=0,$$

$$x+1=0 \text{ – рівняння грані } A_1A_2A_3.$$

2) Довжину висоти A_4D знайдемо як відстань вершини A_4 від грані $A_1A_2A_3$ за формулою відстані від точки до площини. Будемо мати:

$$d = \frac{|1\cdot 5 + 0\cdot 2 + 0\cdot 10 + 1|}{\sqrt{1^2+0^2+0^2}} = \frac{6}{\sqrt{1+0+0}} = \frac{6}{1} = 6.$$

Приклад 2 Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M(3;\,-1;\,-5)$ і перпендикулярна площинам $3x-2y+7=0$ і $5x-4y+3z+1=0$.

Розв'язання. Оскільки за нормальний вектор $\overline{n}$ шуканої площини можна взяти векторний добуток нормальних векторів $\overline{n}_1(3;\,-2;\,2)$ і $\overline{n}_2(5;\,-4;\,3)$ заданих площин, то

$$\overline{n} = \overline{n}_1 \times \overline{n}_2 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 2\overline{i} + \overline{j} - 2\overline{k}.$$

Скористаємося рівнянням площини, що проходить через задану точку $M(3;\,-1;\,-5)$ перпендикулярно вектору $\overline{n}(2,1,-2)$. Отримаємо

$$2(x-3)+(y+1)-2(z+5)=0 \text{ або } 2x+y-2z-15=0.$$

Приклад 3 Скласти рівняння площини, що проходить через початок координат і перпендикулярна до площин $2x-y+3z-1=0$ та $x+2y+z=0$.

Розв'язання. Нехай рівняння шуканої площини має вигляд $Ax+By+Cz=0$, тоді нормальні вектори площин $\overline{n}_1(2;\,-1;\,3)$ і $\overline{n}_2(1;\,2;\,1)$ за умовою задачі будуть перпендикулярні до вектора $\overline{n}(A,B,C)$, тобто справедливі рівності

$$\begin{cases} 2A-B+3C=0, \\ A+2B+C=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-\dfrac{7}{5}C, \\ B=\dfrac{1}{5}C. \end{cases}$$

Отже, шукане рівняння площини має вигляд

$$-\frac{7}{5}Cx+\frac{1}{5}Cy+Cz=0.$$

Оскільки $C\neq 0$, то рівняння площини $7x-y-5z=0$.

Задачі для самостійного розв’язування

№ 1 Знайти довжину перпендикуляра, опущеного з точки $M_0(2; 3; -5)$ на площину $4x-2y+5z-12=0$.

№ 2 Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M(0; 2; 1)$ і паралельна векторам $\bar{a}=\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}$ та $\bar{b}=\bar{i}+\bar{j}-\bar{k}$.

№ 3 Перевірити, які з точок $A(-1; 2; 3)$, $B(1; -2; 1)$, $C(0; 1; 2)$, $D(3; 0; 3)$ та $E(5; -7; 11)$ лежать на площині $2x-3y+z-9=0$.

№ 4 Визначити координати нормального вектора площини, яка проходить через точки $A(2; -1; 1)$, $B(3; 1; 0)$ і $C(1; 5; -2)$.

№ 5 Скласти рівняння площини, якщо точки $A(1; -2; 0)$ і $B(3; 2; 6)$ симетричні відносно неї.

№ 6 Скласти рівняння площини, якщо точка $A(-1; 2; 3)$ є основою перпендикуляра, опущеного з початку координат на площину.

№ 7 Площина проходить через точки $A(1; 2; 1)$ та $B(0; 3; -1)$ паралельно до осі Oz. Написати її рівняння.

№ 8 Скласти рівняння площини, що проходить через точку $P(-1; 2; 3)$ і відтинає від осей Ox та Oy відрізки $a=2$, $b=-1$.

№ 9 Через точку $P(1; 2; -1)$ провести площину, що відтинає від осей координат рівні відрізки.

№ 10 Через лінію перетину площин $x+y-z+5=0$ та $2x+y+z-3=0$ провести площину, яка:

1) проходить через точку $M(-1; 3; 4)$;
2) паралельна осі Oy;
3) перпендикулярна до площини $3x-y+2z-11=0$;
4) утворює з площиною $x-2y+2z-17=0$ кут $\alpha=\arccos\frac{1}{3\sqrt{3}}$.

№ 11 Через точку перетину площин $5x+8y-z-7=0$, $x+2y+3z-1=0$ та $2x-3y+2z-9=0$ провести площину, яка:

1) проходить через точки $P_1(1; 2; 4)$ і $P_2(-1; 3; 1)$;
2) проходить через вісь Oy;
3) проходить через пряму $\begin{cases} y+2=0, \\ x+2z+1=0; \end{cases}$
4) паралельна площині $3x-5y+8z-19=0$;
5) перпендикулярна до площин $y=0$ і $2x+3z-11=0$.

№ 12 Знайти відстань між площинами $2x+2y-z-15=0$ і $4x+4y-2z+11=0$.