

ЗАГАЛЬНЕ РІВНЯННЯ КРИВОЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Приклад 1 Звести до канонічного вигляду рівняння кривої другого порядку, використовуючи перетворення координат, а саме перетворення повороту та паралельного переносу: $5x^2 - 4\sqrt{2}xy + 3y^2 - 14 = 0$.

Розв'язання. У загальному рівнянні кривої присутній член xy , тому виконаємо перетворення повороту. У вихідному рівнянні $a_{22} = 3 \neq a_{11} = 5$, тому

$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2 \cdot (-2\sqrt{2})}{5 - 3} = -2\sqrt{2}$. Знайдемо $\sin \varphi$ та $\cos \varphi$, використовуючи формули:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2\operatorname{tg} \varphi}{1 - \operatorname{tg}^2 \varphi}, \quad \sin \varphi = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}, \quad \cos \varphi = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}.$$
 Будемо мати: $\operatorname{tg} \varphi = \left\{ -\frac{1}{\sqrt{2}}; \sqrt{2} \right\}$,

а $\sin \varphi$ і $\cos \varphi$ візьмемо, наприклад, $\sin \varphi = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Запишемо формули перетворення

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{3}(\bar{x} - \bar{y}\sqrt{2}), \\ y = \frac{\sqrt{3}}{3}(\bar{x}\sqrt{2} + \bar{y}), \end{cases}$$

за допомогою яких отримаємо рівняння кривої в новій системі координат:

$$3\bar{x}^2 + 5\bar{y}^2 - 42 = 0 \quad \text{або} \quad \frac{\bar{x}^2}{14} + \frac{5\bar{y}^2}{42} = 1.$$

Маємо рівняння еліпса у новій системі координат: $\frac{\bar{x}^2}{14} + \frac{5\bar{y}^2}{42} = 1$ з центром в початку координат та осями $\sqrt{14}$ та $\sqrt{\frac{42}{5}}$, при цьому системи координат зв'язані

формулами:
$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{x\sqrt{3}}{3} + \frac{y\sqrt{6}}{3}, \\ \bar{y} = -\frac{x\sqrt{6}}{3} + \frac{y\sqrt{3}}{3}. \end{cases}$$

Приклад 2 Звести до канонічного вигляду рівняння кривої другого порядку, використовуючи теорію квадратичних форм:

$$5x^2 - 4\sqrt{2}xy + 3y^2 - 14 = 0.$$

Розв'язання. Випишемо матрицю старших членів:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо власні значення цієї матриці. Для цього складемо характеристичне рівняння та розв'яжемо його:

$$\begin{vmatrix} 5 - \lambda & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \\ (3 - \lambda)(5 - \lambda) - 8 = 0,$$

$$\lambda^2 - 8\lambda + 7 = 0,$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 7.$$

Для знаходження перетворення координат, знайдемо власні вектори, відповідні знайденим власним значенням. Для цього розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{pmatrix} 5-\lambda & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 3-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

При $\lambda_1 = 1$:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \cdot \sqrt{2} + I \sim \begin{pmatrix} 4 & -2\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & -2\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

$$4x_1 - 2\sqrt{2}x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}x_2.$$

Таким чином, для $\lambda_1 = 1$ власний вектор $X_1 = c_1(\sqrt{2}; 2)$, $c_1 = \text{const} \neq 0$, який після нормування буде: $E_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$.

При $\lambda_2 = 7$:

$$\begin{pmatrix} -2 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & -4 \end{pmatrix} - I \cdot \sqrt{2} \sim \begin{pmatrix} -2 & -2\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & -2\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

$$-2x_1 - 2\sqrt{2}x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{2}x_2.$$

Таким чином, для $\lambda_2 = 7$ власний вектор $X_2 = c_2(-2; \sqrt{2})$, $c_2 = \text{const} \neq 0$, який після нормування буде: $E_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Можна перевірити, що отримані нормовані власні вектори попарно ортогональні, тому можемо скласти матрицю перетворення координат:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Звідси будемо мати формули перетворення координат:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{3}}\bar{x} - \frac{2}{\sqrt{6}}\bar{y}, \\ y = \frac{2}{\sqrt{6}}\bar{x} + \frac{1}{\sqrt{3}}\bar{y}. \end{cases}$$

Підставимо знайдені вирази до рівняння кривої, спростимо його, будемо мати:

$$\bar{x}^2 + 7\bar{y}^2 - 42 = 0,$$

$$\frac{\bar{x}^2}{42} + \frac{\bar{y}^2}{6} = 1 - \text{еліпс.}$$

Задачі для самостійного розв'язування

№ 1 Звести до канонічного вигляду рівняння кривої другого порядку, використовуючи перетворення координат, а саме перетворення повороту та паралельного переносу. Побудувати криву (якщо вона існує):

- 1) $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 3 = 0;$
- 2) $25x^2 - 14xy + 25y^2 + 64x - 64y - 224 = 0;$
- 3) $7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0;$
- 4) $5x^2 - 2xy + 5y^2 - 4x + 20y + 20 = 0;$
- 5) $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0;$
- 6) $9x^2 + 12xy + 4y^2 - 24x - 16y + 3 = 0;$
- 7) $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 160x + 120y + 425 = 0;$
- 8) $4x^2 + 12xy + 9y^2 - 4x - 6y + 1 = 0;$
- 9) $19x^2 + 6xy + 11y^2 + 38x + 6y + 29 = 0;$
- 10) $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0;$
- 11) $17x^2 + 12xy + 8y^2 + 46x - 28y + 17 = 0;$
- 12) $x^2 + 2xy + y^2 + 4x + 4y + 3 = 0.$

№ 2 Привести рівняння кривої до канонічного виду за допомогою теорії квадратичних форм, визначити її тип і схематично побудувати:

- | | |
|--|--|
| 1) $5x^2 + 4xy + 2y^2 - 18 = 0;$ | 2) $x^2 + 2xy - y^2 - 8\sqrt{2} = 0;$ |
| 3) $4x^2 + 2\sqrt{6}xy + 3y^2 - 24 = 0;$ | 4) $5x^2 - 2\sqrt{45}xy + y^2 - 5 = 0;$ |
| 5) $6x^2 + 2\sqrt{5}xy + 2y^2 - 21 = 0;$ | 6) $7x^2 - 8xy + y^2 - 9 = 0;$ |
| 7) $3x^2 - 4\sqrt{6}xy + 5y^2 + 18 = 0;$ | 8) $2\sqrt{6}xy + 5y^2 + 6 = 0;$ |
| 9) $9x^2 + 8\sqrt{3}xy + 6y^2 - 36 = 0;$ | 10) $5x^2 + 12xy - 19 = 0;$ |
| 11) $4x^2 + 4\sqrt{3}xy + 5y^2 - 16 = 0;$ | 12) $5x^2 + 8xy + 5y^2 + 9 = 0;$ |
| 13) $2x^2 - 4\sqrt{2}xy + y^2 + 4 = 0;$ | 14) $x^2 - 4xy + 4y^2 + 2 = 0;$ |
| 15) $2x^2 - 6\sqrt{2}xy - y^2 + 40 = 0;$ | 16) $6xy + 8y^2 + 11 = 0;$ |
| 17) $x^2 + 6\sqrt{10}xy - y^2 + 32 = 0;$ | 18) $3x^2 - 4xy - 5 = 0;$ |
| 19) $7x^2 + 2\sqrt{18}xy + 4y^2 - 15 = 0;$ | 20) $5x^2 + 6xy + 5y^2 + 9 = 0;$ |
| 21) $9x^2 + 4\sqrt{2}xy + 2y^2 - 20 = 0;$ | 22) $x^2 - 2xy + y^2 + 9 = 0;$ |
| 23) $9x^2 + 24xy + 16y^2 + 25 = 0;$ | 24) $8x^2 - 4xy + 5y^2 - 319 = 0;$ |
| 25) $3x^2 + 2\sqrt{14}xy + 8y^2 - 10 = 0;$ | 26) $4x^2 - 12xy + 9y^2 + 100 = 0;$ |
| 27) $7x^2 + 2\sqrt{6}xy + 2y^2 - 24 = 0;$ | 28) $6x^2 + 2\sqrt{10}xy + 3y^2 - 16 = 0;$ |
| 29) $4x^2 + 4\sqrt{3}xy + 5y^2 - 40 = 0.$ | |