# ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ, ЇХ КАНОНІЧНІ РІВНЯННЯ ТА ЗОБРАЖЕННЯ

*Приклад 1* Звести до канонічного вигляду рівняння поверхні

$$3x^2+5y^2+3z^2-2xy+2xz-2yz-12x-10=0.$$

*Розв'язання*. Випишемо матрицю старших членів:

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ -1 & 5 & -1\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix}.$$

Знайдемо власні значення цієї матриці. Для цього складемо характеристичне рівняння та розв'яжемо його:

$$\begin{vmatrix}3-\lambda & -1 & 1\\ -1 & 5-\lambda & -1\\ 1 & -1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=0,$$

$$(3-\lambda)^2(5-\lambda)+2-(5-\lambda)-2(3-\lambda)=0,$$

$$(3-\lambda)(\lambda^2-8\lambda+12)=0,$$

$$\lambda_1=2,\ \lambda_2=3,\ \lambda_3=6.$$

Для знаходження перетворення координат, знайдемо власні вектори, що відповідають знайденим власним значенням. Для цього розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{pmatrix}3-\lambda & -1 & 1\\ -1 & 5-\lambda & -1\\ 1 & -1 & 3-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

При $\lambda_1=2$:

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 3 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 3 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ +\mathrm{I}\\ -\mathrm{I}\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix},$$

$$\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0,\\ \qquad x_2 \qquad =0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-x_3,\\ x_2=0.\end{cases}$$

Таким чином, для $\lambda_1=2$ власний вектор $X_1=c_1(1;0;-1)$, $c_1=const\neq 0$, який після нормування буде: $E_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}};0;-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

При $\lambda_2=3$:

$$\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ -1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \leftrightarrow \mathrm{I} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ +\mathrm{I} \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ +\mathrm{II} \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \qquad = 0, \\ \qquad x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2, \\ x_3 = x_2. \end{cases}$$

Таким чином, для $\lambda_2 = 3$ власний вектор $X_2 = c_2(1;1;1)$, $c_2 = const \neq 0$, який після нормування буде: $E_2 = \left( \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$.

При $\lambda_3 = 6$:

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \cdot 3 - \mathrm{I} \\ +\mathrm{II} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \cdot(-1/2) \\ -\mathrm{II} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} -3x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ \qquad x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3, \\ x_2 = -2x_3. \end{cases}$$

Таким чином, для $\lambda_3 = 6$ власний вектор $X_3 = c_3(1;-2;1)$, $c_3 = const \neq 0$, який після нормування буде: $E_3 = \left( \frac{1}{\sqrt{6}}; -\frac{2}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}} \right)$.

Можна перевірити, що отримані нормовані власні вектори попарно ортогональні, тому можемо скласти матрицю перетворення координат:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Звідси будемо мати формули перетворення координат:

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{x} + \frac{1}{\sqrt{3}}\bar{y} + \frac{1}{\sqrt{6}}\bar{z}, \\ y = \qquad\qquad \frac{1}{\sqrt{3}}\bar{y} + \frac{2}{\sqrt{6}}\bar{z}, \\ z = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{x} + \frac{1}{\sqrt{3}}\bar{y} - \frac{1}{\sqrt{6}}\bar{z}. \end{cases}$$

Підставимо знайдені вирази до рівняння поверхні, спростимо його та виділимо повні квадрати відносно кожної змінної:

$$2\bar{x}^2+3\bar{y}^2+6\bar{z}^2-6\sqrt{2}\bar{x}-4\sqrt{3}\bar{y}-2\sqrt{6}\bar{z}-10=0,$$

$$2\left(\bar{x}-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2+3\left(\bar{y}-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2+6\left(\bar{z}-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2=24,$$

$$\frac{\left(\bar{x}-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}{12}+\frac{\left(\bar{y}-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}{8}+\frac{\left(\bar{z}-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2}{4}=1.$$

Зробимо паралельне перенесення осей, будемо мати:

$$\begin{cases} x'=\bar{x}-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}, \\ y'=\bar{y}-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}, \\ z'=\bar{z}-\dfrac{\sqrt{6}}{6}, \end{cases}$$

$$\frac{x'^2}{12}+\frac{y'^2}{8}+\frac{z'^2}{4}=1 \text{ – еліпсоїд.}$$

*Приклад 2* Звести до канонічного вигляду рівняння поверхні

$$2x^2+y^2+2z^2-2xy+2yz-4x-2y=0.$$

*Розв'язання*. Випишемо матрицю старших членів:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо власні значення цієї матриці. Для цього складемо характеристичне рівняння та розв'яжемо його:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}=0,$$

$$(2-\lambda)^2(1-\lambda)-2(2-\lambda)=0,$$

$$(2-\lambda)(\lambda^2-3\lambda)=0,$$

$$\lambda_1=3,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=0.$$

Для знаходження перетворення координат, знайдемо власні вектори, що відповідають знайденим власним значенням. Для цього розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

При $\lambda_1=3$:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ -1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ -\mathrm{I}\\ \\\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ +\mathrm{I}\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix},$$

$$\begin{cases}-x_1-x_2 & =0,\\ \quad -x_2+x_3 & =0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-x_2,\\ x_3=x_2.\end{cases}$$

Таким чином, для $\lambda_1=3$ власний вектор $X_1=c_1(1;-1;-1)$, $c_1=const\neq 0$, який після нормування буде: $E_1=\left(\frac{1}{\sqrt{3}};-\frac{1}{\sqrt{3}};-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

При $\lambda_2=2$:

$$\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \leftrightarrow\mathrm{I}\\ \\\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ +\mathrm{II}\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix},$$

$$\begin{cases}-x_1-x_2+x_3=0,\\ \qquad x_2 \qquad =0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=x_3,\\ x_2=0.\end{cases}$$

Таким чином, для $\lambda_2=2$ власний вектор $X_2=c_2(1;0;1)$, $c_2=const\neq 0$, який після нормування буде: $E_2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}};0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

При $\lambda_3=0$:

$$\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \cdot 2+\mathrm{I}\\ \\\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ -\mathrm{II}\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix},$$

$$\begin{cases}2x_1-x_2 & =0,\\ \quad x_2+2x_3 & =0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{1}{2}x_2,\\ x_3=-\frac{1}{2}x_2.\end{cases}$$

Таким чином, для $\lambda_3=0$ власний вектор $X_3=c_3(1;2;-1)$, $c_3=const\neq 0$, який після нормування буде: $E_3=\left(\frac{1}{\sqrt{6}};\frac{2}{\sqrt{6}};-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

Можна перевірити, що отримані нормовані власні вектори попарно ортогональні, тому можемо скласти матрицю перетворення координат:

$$Q=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Звідси будемо мати формули перетворення координат:

$$\begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{3}}\bar{x}+\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{y}+\frac{1}{\sqrt{6}}\bar{z}, \\ y=-\frac{1}{\sqrt{3}}\bar{x} \qquad +\frac{2}{\sqrt{6}}\bar{z}, \\ z=-\frac{1}{\sqrt{3}}\bar{x}+\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{y}-\frac{1}{\sqrt{6}}\bar{z}. \end{cases}$$

Підставимо знайдені вирази до рівняння поверхні, спростимо його, будемо мати:

$$3\bar{x}^2+2\bar{y}^2+2\sqrt{3}\bar{x}+2\sqrt{2}\bar{y}=0,$$

$$3\left(\bar{x}+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+2\left(\bar{y}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=2,$$

$$\frac{3\left(\bar{x}+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}{2}+\left(\bar{y}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=1.$$

Зробимо паралельне перенесення осей, будемо мати:

$$\begin{cases} x'=\bar{x}+\frac{\sqrt{3}}{3}, \\ y'=\bar{y}+\frac{\sqrt{2}}{2}, \end{cases}$$

$$\frac{3x'^2}{2}+y'^2=1 \text{ – еліптичний циліндр.}$$

### Задачі для самостійного розв'язування

**№ 1** Визначте вид фігури, яка задана співвідношенням:

1) $x+2y-z=1$; 2) $x^2-z^2=0$; 3) $x^2+y^2=1$;

4) $(x-1)^2+(y-5)^2+(z-2)^2\le a$; 5) $x^2+y^2+z^2+4x-2y+6z+4=0$;

6) $xy=0$; 7) $xyz=0$; 8) $yz+z^2=0$; 9) $\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{16}=1$;

10) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$; 11) $x^2=6z$; 12) $x^2+y^2=0$; 13) $x^2+z^2=2z$;

14) $(x-3y+z-2)(2x+y-4z+1)=0$; 15) $(x^2+y^2-4)(y^2+z^2-1)=0$;

16) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{1}$; 17) $\frac{x}{0}=\frac{y}{2}=\frac{z}{0}$; 18) $\begin{cases} x=y, \\ y=z; \end{cases}$

19) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=9, \\ y=0; \end{cases}$ 20) $\begin{cases} x^2+z^2=9, \\ x^2+y^2+z^2=9; \end{cases}$ 21) $\begin{cases} x^2+y^2=9, \\ y=0; \end{cases}$

22) $\begin{cases} (x-1)^2+(y+4)^2+z^2=25, \\ y+1=0; \end{cases}$ 23) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1, \\ x-2=0; \end{cases}$

24) $\begin{cases} x^2+z^2=16, \\ z=3; \end{cases}$ 25) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}+\dfrac{z^2}{25}=1$; 26) $\dfrac{x^2}{4}-y^2+\dfrac{z^2}{4}=0$;

27) $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{6}=2z$; 28) $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{z^2}{3}=y$; 29) $x^2+y^2-z^2=-1$;

30) $x^2+y^2-z^2=1$; 31) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{32}-\dfrac{y^2}{18}+\dfrac{z^2}{2}=1, \\ z+2=0; \end{cases}$

32) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{4}=6z, \\ y+6=0; \end{cases}$ 33) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{81}+\dfrac{y^2}{36}+\dfrac{z^2}{9}=1, \\ \dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y-4}{-6}=\dfrac{z+2}{4}; \end{cases}$

34) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{z^2}{4}=1, \\ \dfrac{x}{4}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z+2}{4}; \end{cases}$ 35) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{3}=z, \\ \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z+3}{-2}; \end{cases}$

36) $\begin{cases} x=2t-1, \\ y=1-2t, \\ z=t; \end{cases}$ 37) $\begin{cases} x=2u-v, \\ y=u+v, \\ z=u-v; \end{cases}$

38) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{16}+\dfrac{z^2}{4}=1, \\ x-y=1; \end{cases}$ 39) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=2z, \\ x-2y+z=0; \end{cases}$ 40) $\begin{cases} y^2=x, \\ z^2=1-x. \end{cases}$

**№ 2** Привести рівняння поверхні до канонічного вигляду, визначити її тип й схематично побудувати:

1) $9x^2-4y^2-81z^2-36=0$; 2) $x^2+2y^2+3z^2-6z+3=0$;

3) $x^2+2y^2+2z^2-2x-4y-4z=0$; 4) $x^2+2y^2-z^2+2x-4y+2z+1=0$;

5) $x^2+2y^2-4z^2+2x-2y+2=0$; 6) $x^2+8z^2-4x+16z+6=0$;

7) $3y^2+4z^2+24x+12y-72z+360=0$; 8) $x^2-3y^2-2x+18y-z=0$;

9) $x^2-3y^2-2x+18y-26=0$; 10) $x^2-8z^2-4x+16z-12=0$;

11) $y^2-10z-2y-19=0$; 12) $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+2=0$;

13) $3x^2+2y^2-6x+4y-1=0$; 14) $3x^2+3y^2-3z^2-6x+4y+4z+3=0$;

15) $4x^2+y^2-4xy-36=0$; 16) $x^2+4y^2+9z^2-6x+8y-36z=0$;

17) $x^2-2x+4y-z^2+10=0$; 18) $6y^2+6z^2+5x+6y+30z-11=0$;

19) $2x^2+2y^2-6x-2y-z=0$;

20) $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 8xz - 4yz - 14x - 4y + 14z + 16 = 0$;

21) $x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz - 6 = 0$;

22) $2x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz + x - 4y - 3z + 2 = 0$;

23) $6x^2 - 2y^2 + 6z^2 + 4xz + 8x - 4y - 8z + 1 = 0$;

24) $3x^2 - y^2 + 3z^2 - 18x + 10y + 12z + 14 = 0$;

25) $x^2 + y^2 + 5z^2 - 6xy + 2xz - 21yz - 4x + 8y - 12z + 14 = 0$;

26) $4x^2 + 5y^2 + 6z^2 - 4xy + 4yz + 4x + 6y + 4z - 27 = 0$;

27) $x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy + 2xz + 2x + y + z = 0$;

28) $2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy - 4xz + 2yz + 2x - 10y - 2z - 1 = 0$;

29) $4x^2 + y^2 + 9z^2 + 4xy - 12xz - 6yz + 6x - 2y - 6z + 2 = 0$.