2.1 Норма матриці, обумовленість матриці

```
> # норма матриці ||A||=max_j(Sum_i|aij|) (norm)
> A := Matrix(2, 2, {(1, 1) = 4, (1, 2) = 4, (2, 1) = 4, (2, 2) = 8});
```

$$A := \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

```
> norm(A);
```

$$12$$

```
> # обернена матриця (inverse)
> A1:=inverse(A);
```

$$A1 := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

```
> norm(A1);
```

$$\frac{3}{4}$$

```
> # Обумовленість матриці cond(A)=norm(A)*norm(A1)- чим більше обумовленість матриці, тим більші можливі похибки при розв'язанні відповідної системи лінійних рівнянь/
> cond(A);
```

$$9$$

2.2 Розв'язання системи лінійних рівнянь

```
(A x = b) - (linsolve)
> A := matrix([[1, 1, 1, 1, 0], [1, 1, 1, 0, 1], [1, 1, 0, 1, 1], [1, 0, 1, 1, 1], [0, 1, 1, 1, 1]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> b := vector([20, 16, 12, 8, 4]);
```

$$b := \begin{bmatrix} 20 & 16 & 12 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

```
>  x := linsolve(A, b);
```

$$x := \begin{bmatrix} 11 & 7 & 3 & -1 & -5 \end{bmatrix}$$

```
> A:=matrix([[1,2],[2,4]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

```
> b := vector([3,6]);
```

$$b := \begin{bmatrix} 3 & 6 \end{bmatrix}$$

```
> x := linsolve(A, b);
```

$$x := \begin{bmatrix} 3 - 2\_t_1 & \_t_1 \end{bmatrix}$$

```
> # Число обумовленості матриці може бути визначено як
частка максимального та мінімального за модулем її
власних значень; сингулярна матриця має нульове власне
значення, тому cond(A)=infinity/
```

2.3 Продуктивність моделі Леонтьєва

Означення продуктивної моделі (технологічної матриці):

Якщо для будь-якого невід'ємного вектора кінцевого споживання $\boldsymbol{y} \geq \mathbf{0}$ система

$$x = Ax + y, \qquad \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$$

сумісна (має розв'язок), то відповідну модель Леонтьєва (технологічну матрицю А) називають продуктивною.

Означення продуктивної матриці:

Матриця А називається продуктивною, якщо існує вектор $\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$, який дозволяє отримати невід'ємний вектор кінцевої продукції:

$$(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \geq \mathbf{0}.$$

Термін продуктивність можна вважати синонімом термінів «незбитковість», чи «рентабельність».

Достатньою ознакою продуктивності матриці $\boldsymbol{A}$ є обмеження на її норму, тобто на значення найбільшої із сум елементів матриці $\boldsymbol{A}$ в кожному стовпці.

Якщо норма матриці $\boldsymbol{A}$ строго менша за одиницю, то ця матриця продуктивна. Ще раз наголосимо, що ця умова є тільки достатньою, і матриця $\boldsymbol{A}$ може бути продуктивною і тоді, коли її норма більша за одиницю.

Проаналізуємо матрицю коефіцієнтів повних матеріальних витрат, тобто матрицю $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})^{-1}$. Коефіцієнт цієї матриці $\boldsymbol{b_{ij}}$ показує, скільки всього потрібно виробити продукції $\boldsymbol{i}$-й галузі, щоб одержати одиницю кінцевої продукції $\boldsymbol{j}$-ї галузі.

Найбільший за модулем корінь характеристичного рівняння, наведеного в умові 3 продуктивності матриці А (позначимо його через λ^*), може бути оцінкою загального рівня коефіцієнтів прямих матеріальних витрат, а отже, значення $(1 - \lambda^*)$ характеризує залишок після витрат, тобто продуктивність.

Чим більше $(1 - \lambda^*)$, тим більші можливості досягти ще й інших цілей, крім поточного виробничого споживання.

Це означає, **що вищий загальний рівень коефіцієнтів матриці А, тим більше найбільше за модулем власне значення λ^* і тим нижчий рівень продуктивності,** та навпаки: **чим нижчий загальний рівень коефіцієнтів матриці А, тим менше найбільше за модулем власне значення і тим вища продуктивність.**