

**Державний вищий навчальний заклад  
«Запорізький національний університет»  
Міністерства освіти і науки України**

**Методичні матеріали  
для практичних занять**

**з курсу**

**«ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ»**

**для студентів денної форми навчання  
спеціальності 6.080101 – математика**

**Укладачі: Грищак В.З.,  
Леонтська В.В.,  
Кондрат'єва Н.О.**

**Запоріжжя**

**2018**

## Стислі теоретичні відомості

### ЗАГАЛЬНІ ПОНЯТТЯ ПРО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

*Диференціальним* називається рівняння, в яке, крім функції  $y$  і незалежної змінної  $x$ , входять похідні функції  $y', y'', \dots, y^{(n)}$  (або диференціали  $dx$  і  $dy$ ).

Загальний вигляд диференціального рівняння у випадку функції однієї змінної:

$$F_1(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

або

$$F_2(x, y, dx, dy) = 0.$$

Найвищий порядок похідної, яка входить до диференціального рівняння, називають *порядком диференціального рівняння*.

Диференціальне рівняння називається *лінійним*, якщо невідома функція  $y$  та її похідні  $y', y'', \dots$  входять у рівняння тільки в першому ступені. В іншому випадку – рівняння *нелінійне*.

*Розв'язком звичайного диференціального рівняння  $n$ -го порядку* називається кожна функція  $y = f(x)$ , підстановка якої, разом з її похідними, перетворює його в тотожність.

Процедуру знаходження розв'язків диференціального рівняння називають *інтегруванням* цього рівняння.

У випадку функції однієї змінної ( $y = f(x)$ ) рівняння називають *звичайним диференціальним рівнянням*.

У випадку двох ( $y = f(x_1, x_2)$ ) та більше змінних рівняння називають *диференціальним рівнянням в частинних похідних*.

## Розділ 1. ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ І-ГО ПОРЯДКУ

### Тема 1. РІВНЯННЯ ЗІ ЗМІННИМИ, ЩО РОЗДІЛЯЮТЬСЯ

#### Аудиторне заняття

Знайти загальний розв'язок рівняння:

- $x(1 + y^2) + y(1 + x^2) \frac{dy}{dx} = 0.$
- $x^2 y^2 y' + 1 = y.$
- $(x^2 - 1) \frac{dy}{dx} + 2xy^2 = 0.$
- $\frac{dy}{dx} = xy^2 + 2xy.$
- $xydy + (x + 1)dy = 0.$
- $\sqrt{y^2 + 1}dx = xydy.$
- $2chydx - (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})dy = 0.$
- $y' = \cos(y - x).$
- $\frac{dy}{dx} = \cos(x - y - 1).$
- $\frac{dy}{dx} = k \frac{y}{x}.$

#### Домашнє завдання:

Знайти загальний розв'язок рівняння:

- $y' - y = 2x - 3.$
- $(x + 2y)y' = 1.$
- $y' = \sqrt{4x + 2y - 1}.$
- $y^2 + x^2 y' = xyu'.$
- $3y^2 y' + 16x = 2xy^2.$

### Тема 2. ОДНОРІДНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

#### Аудиторне заняття

Знайти загальний розв'язок рівняння:

- $(x + 2y)dx - xdy = 0.$
- $(x - y)dx - (x + y)dy = 0.$
- $(y^2 - 2xy)dx + x^2 dy = 0.$
- $\frac{dy}{dx} = \frac{xy + y^2 e^{-x/y}}{x^2}.$
- $2x^3 y' = y(2x^2 - y^2).$
- $y^2 + x^2 y' = xyu'.$
- $(x^2 + y^2)y' = 2xy.$
- $x - y - 1 + (y - x + 2)y' = 0.$

9.  $(x + 4y)y' = 2x + 3y - 5$ .

10.  $2xdy + (x^2y^4 + 1)ydx = 0$ .

**Домашнє завдання:**

Знайти загальний розв'язок рівняння:

1.  $2x^2y' = y^3 + xy$ .

2.  $x^3(y' - x) = y^2$ .

3.  $y' = \frac{y+2}{x+1} + \operatorname{tg}\left(\frac{y-2x}{x+1}\right)$ .

4.  $(y' + 1)\ln \frac{y+x}{x+3} = \frac{y+x}{x+3}$ .

5.  $y' = 2\left(\frac{y+2}{x+y-1}\right)^2$ .

**Тема 3. ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ. РІВНЯННЯ БЕРНУЛЛІ І РІКАТТІ.****Аудиторне заняття**

Знайти загальний розв'язок рівняння:

1.  $xydy = (y^2 + x)dx$ .

2.  $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$

3.  $xy' + 2y + x^5y^3e^x = 0$ .

4.  $2y' - \frac{x}{y} = \frac{xy}{x^2 - 1}$ .

5.  $y'x^3 \sin y = xy' - 2y$ .

6.  $(2x^2y \ln y - x)y' = y$ .

7.  $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x^2$ .

8.  $(x+1)(y' + y^2) = -y$ .

9.  $(1 - 2xy)y' = y(y - 1)$ .

10.  $y' = \frac{y}{3x - y^2}$ .

**Домашнє завдання:**

Знайти загальний розв'язок рівняння:

1.  $y' + 2y = y^2e^x$ .

2.  $y' = y^4 \cos x + y \operatorname{tg} x$ .

3.  $(2e^y - x)y' = 1$ .

4.  $(2x + y)dy = ydx + 4 \ln y dy$ .

5.  $(\sin^2 y + x \operatorname{ctg} y)y' = 1$ .

**Тема 4. РІВНЯННЯ В ПОВНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛАХ. ІНТЕГРУЮЧИЙ  
МНОЖНИК**

**Аудиторне заняття**

Знайти загальний розв'язок рівняння:

1.  $(2x + 3x^2y)dx + (x^3 - 3y)dy = 0$ .
2.  $(2xy + 3y^2y)dx + (x^2 + 6xy - 3y^2)dy = 0$ .
3.  $(2 - 9xy^2)xdx + (4y^2 - 6x^3)ydy = 0$ .
4.  $2xydx + (x^3 - y^2)dy = 0$ .
5.  $\left(\frac{x}{\sin y} + 2\right)dx + \frac{(x^2 + 1)\cos y}{\cos 2y - 1}dy = 0$ .
6.  $(3y^2 + 2xy + 2x)dx + (6xy + x^2 + 3)dy = 0$ .
7.  $(x + y + 1)dx + (x - y^2 + 3)dy = 0$ .
8.  $e^y dx + (xe^y - 2y)dy = 0$ .
9.  $\left(4 - \frac{y^2}{x^2}\right)dx + \frac{2y}{x}dy = 0$ .
10.  $(y')^2 + 4xy' - y^2 - 2x^2y = x^4 - 4x^2$ .

**Домашнє завдання:**

Знайти загальний розв'язок рівняння:

1.  $xy^2 dx + y(x^2 + y^2)dy = 0$ .
2.  $\left(xe^x + \frac{y}{x^2}\right)dx - \frac{1}{x}dy = 0$ .
3.  $\left(\frac{2x}{y^3}\right)dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0$ .
4.  $3x^2 e^y dx + (x^3 e^y - 1)dy = 0$ .
5.  $(x \cos 2y + 1)dx + (x^2 + 6xy - 3y^2)dy = 0$ .

## **Тема 5. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, НЕ РОЗВ'ЯЗАНІ ВІДНОСНО ПОХІДНОЇ**

### **Аудиторне заняття**

Розв'язати наступні диференціальні рівняння:

- $(y')^3 - 2x(y')^2 + y' = 2x.$
- $(y')^2 + y(y-x)y' - xy^3 = 0.$
- $(y')^2 + (\sin x - 2xy)y' - 2xy \sin x = 0.$
- $y = (y')^2 + 4(y')^3.$
- $y = y' \sqrt{1 + (y')^2}.$
- $y' \sin y' + \cos y' - y = 0.$
- $y = x(y')^2 + (y')^2.$
- $x = y \left( \frac{1}{\sqrt{y'}} - \frac{1}{y'} \right).$
- $(y')^2 + 4xy' - y^2 - 2x^2y = x^4 - 4x^2.$
- $yy'(yy' - 2x) = x^2 - 2y^2.$

### **Домашнє завдання:**

Знайти загальний розв'язок рівнянь:

- $y'(x - \ln y') = 1.$
- $2(y')^2(y - xy') = 1.$
- $y'(2y - y') = y^2 \sin^2 x.$
- $y' = e^{xy'/y}.$
- $2xy' - y = \ln y'.$

## **Тема 6. РІЗНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ**

### **Аудиторне заняття**

Знайти загальний розв'язок рівнянь:

- $y - xy' = x \sqrt{1 + (y')^2}.$
- $y' = \frac{xy + y^2 e^{-x/y}}{x^2}.$
- $y' = \frac{e^x}{y(e^x + 1)}.$
- $y' = xy(y + 2).$
- $y' = -\frac{x(1 + y^2)}{y(1 + x^2)}.$
- $y' = -\frac{y}{x(y^3 + \ln x)}.$
- $y' = -\frac{2x}{3y^2 + 1}.$
- $(\sin x + y)dy + (y \cos x - x^2)dx = 0.$
- $y' \sqrt{x} = \sqrt{y - x} + \sqrt{x}.$
- $y = (xy' + 2y)^2.$

### Домашнє завдання:

Знайти загальний розв'язок рівнянь:

1.  $y' = 3x^2 - 2x^4 + 2xy$ .

4.  $y' = -\cos x + e^{-\sin x}$ .

2.  $y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg} \frac{y}{x}$ .

5.  $y' = \frac{(x^2 + y^2)x^2 + x}{y}$ .

3.  $y' = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$ .

### **Тема 7. ГЕОМЕТРИЧНІ ЗАДАЧІ, ЩО ПРИВОДЯТЬСЯ ДО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ**

#### **Аудиторне заняття**

Розв'язати наступні геометричні задачі:

1. Знайти лінію, що проходить через точку  $M$ , якщо відрізок будь-якої її дотичної, який є заключним між координатними осями, розділюється в точці дотику у відношенні  $a:b$  (рахуючи від осі  $O_y$ ).  $M(1;2)$   $a:b=1:1$ .

2. Знайти лінію, що проходить через точку  $M$ , якщо відрізок будь-якої її нормалі, який є заключним між осями координат, розділюється точкою лінії у відношенні  $a:b$  (рахуючи від осі  $O_y$ ).  $M(1;1)$   $a:b=1:2$ .

3. Знайти криву, що проходить через точку  $M$  і володіє тією властивістю, що в кожній її точці тангенс кута дотичне до цієї кривої дорівнює  $(y-x)^n$ :  $n=1$   $M(0;2)$ .

4. Знайти рівняння кривої, що проходить через точку  $M$ , якщо площа криволінійної трапеції, обмеженої дугою цієї кривої, у  $n$  раз більше довжини відповідної дуги.  $M(0;2)$   $n=2$ .

5. Знайти рівняння кривої, що проходить через точку  $M$ , якщо площа трикутника, утвореного віссю абсцис, дотичною і радіусом-вектором точки дотику, постійна і дорівнює  $b$ :  $M(0;1)$   $b=1$ .

### Домашнє завдання:

Розв'язати наступні геометричні задачі:

1. Знайти лінію, що проходить через точку  $M$ , якщо відрізок будь-якої її дотичної, який є заключним між координатними осями, розділюється в точці дотику у відношенні  $a:b$  (рахуючи від осі  $O_y$ ).  $M(2;1)$   $a:b=1:2$ .

2. Знайти лінію, що проходить через точку  $M$ , якщо відрізок будь-якої її нормалі, який є заключним між осями координат, розділюється точкою лінії у відношенні  $a:b$  (рахуючи від осі  $O_y$ ).  $M(0;1)$   $a:b=2:3$ .

3. Знайти криву, що проходить через точку  $M$  і володіє тією властивістю, що в кожній її точці тангенс кута дотичне до цієї кривої дорівнює  $(y-x)^n$ :  $n=0,5$   $M(1;5)$ .

4. Знайти рівняння кривої, що проходить через точку  $M$ , якщо площа криволінійної трапеції, обмеженої дугою цієї кривої, у  $n$  раз більше довжини відповідної дуги.  $M(1;3)$   $n=3$ .

5. Знайти рівняння кривої, що проходить через точку  $M$ , якщо площа трикутника, утвореного віссю абсцис, дотичною і радіусом-вектором точки дотику, постійна і дорівнює  $b$ :  $M(1;1)$   $b=2$ .



## **Розділ 2. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ.**

### **СИСТЕМИ РІВНЯНЬ**

#### **Тема 1. РІВНЯННЯ, ЩО ПРИПУСКАЮТЬ ЗНИЖЕННЯ ПОРЯДКУ**

##### **Аудиторне заняття**

Знайти загальний розв'язок рівняння:

1.  $x^2 y'' = y'^2$ .

2.  $y^3 y'' = 1$ .

3.  $y'' = 2yy'$ .

4.  $y''(e^x + 1) + y' = 0$ .

5.  $yy'' = y'^2 - y'^3$ .

6.  $2yy'' = y^2 + y'^2$ .

7.  $y''^2 + y' = xy''$ .

8.  $y^4 - y^3 y'' = 1$ .

9.  $y''(2y' + x) = 1$ .

10.  $(1 - x^2)y'' + xy' = 2$ .

##### **Домашнє завдання:**

Знайти загальний розв'язок рівнянь:

1.  $(y' + 2y)y'' = y'^2$ .

2.  $y'''y'^2 = y''^3$ .

3.  $xy'' = y' + x(y'^2 + x^2)$ .

4.  $xyy'' - xy'^2 = yy'$ .

5.  $xy''' = y'' - xy''$ .

#### **Тема 2. ЗАДАЧА КОШІ**

##### **Аудиторне заняття**

Знайти розв'язок задачі Коші:

1.  $y'y''' - 3y''^2 = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ ,  $y''(0) = 0$ .

2.  $2y'^2 = (y - 1)y''$ ,  $y(1) = 2$ ,  $y'(1) = 0$ .

3.  $(y'' - 2x)y - 2(y' - x^2)y' = 0$ ,  $y(1) = \frac{1}{3}$ ,  $y'(1) = 1$ .

4.  $2yy'' - 3y'^2 = 4y^2$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(1) = 1$ .

5.  $3y'y'' = e^y$ ,  $y(-3) = 0$ ,  $y'(-3) = 1$ .

6.  $4y' + y''^2 = 4xy''$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = -1$ .

7.  $2xy'' + y''' = 0$ ,  $y(0) = a_1$ ,  $y'(0) = a_2$ ,  $y''(0) = a_3$ .

8.  $yy'' + y'^2 = y^2$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ .

9.  $y'' = \frac{y'}{x} + \frac{x^2}{y'}$ ,  $y(2) = 0$ ,  $y'(2) = 4$ .

10.  $y'' = e^{2y}$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ .

**Домашнє завдання:**

Знайти розв'язок задачі Коші:

1.  $y' = xy'' - \frac{1}{2}(y'')^2$ ,  $y(1) = 0$ ,  $y'(1) = \frac{1}{2}$ .

4.  $3y'y'' = e^y$ ,  $y(-3) = 0$ ,  $y'(-3) = 1$ .

2.  $y'' = 2\sqrt{y'}$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 1$ .

5.  $yy'' = (y')^2 = (y')^3$ ,  $y(1) = 1$ ,  $y'(1) = -1$ .

3.  $yy'' - y'^2 = y^2 \ln y$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 1$ .

**Тема 3. ЛІНІЙНІ ОДНОРІДНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ПОСТІЙНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ**

**Аудиторне заняття**

Знайти загальний розв'язок рівнянь:

1.  $y'' - y = 0$ .

2.  $y'' + 4y = 0$ .

3.  $y'' + y = 0$ .

4.  $y'' - 3y' = 0$ .

5.  $y'' - 2y' + y = 0$ .

6.  $y^{IV} + 2y'' + y = 0$ .

7.  $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$ .

8.  $y'' - 2y' + y = 0$ .

9.  $y^V - 2y^{IV} + y''' = 0$ .

10.  $y'' - 2y' + 8y = 0$ .

11.  $y'' + 9y' = 0$ .

12.  $y''' - 4y' = 0$ .

13.  $y''' + 5y'' + 4y' = 0$ .

14.  $y^{IV} - 5y''' - 6y'' = 0$ .

15.  $y^{IV} - 4y''' + 5y'' = 0$ .

16.  $y''' + 6y'' + 10y' = 0$ .

**Домашнє завдання:**

Знайти загальний розв'язок рівнянь:

1.  $y'' - 4y' + 3y = 0$ .

2.  $y'' - 5y' = 0$ .

3.  $y^{IV} - 8y' = 0$ .

4.  $y'' - 2y' + 2y = 0$ .

5.  $y''' - 2y'' + y' = 0$ .

6.  $y^{IV} + y'' = 0$ .

### **Тема 3. ЛІНІЙНІ НЕОДНОРІДНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ПОСТІЙНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ**

#### **Аудиторне заняття**

Знайти загальний розв'язок рівняння методом невизначених коефіцієнтів (з відшукуванням чисельних значень коефіцієнтів):

1.  $y'' - y = 2\sin x - 4\cos x$ .
2.  $y'' + 4y = 2\sin x$ .
3.  $y'' + y = \cos x + \cos 2x$ .
4.  $y'' - 3y' = e^{3x} - 18x$ .
5.  $y'' - 2y' + y = 4e^x$ .
6.  $y^{IV} + 2y'' + y = \cos x$ .
7.  $y''' - 3y'' + 3y' - y = 2e^x$ .
8.  $y'' - 2y' + y = 2xe^x$ .
9.  $y^V - 2y^{IV} + y''' = 3x + 5e^{3x}$ .
10.  $y'' + 2y' + y = xe^{-x} + \cos x$ .

Знайти загальний розв'язок рівняння методом невизначених коефіцієнтів (без відшукування чисельних значень коефіцієнтів):

1.  $y'' + 9y' = 4x + e^{-3x} + x\cos 3x$ .
2.  $y''' + 5y'' + 4y' = x^2 + xe^{-4x} + x^2e^{-x} + \sin 2x$ .
3.  $y^{IV} - 5y''' - 6y'' = 2\sin 2x + x^2e^{3x} + e^{-2x}\cos 3x$ .
4.  $y^{IV} - 4y''' + 5y'' = x^2\cos 2x + xe^x\sin 2x + 3e^x\sin x$ .
5.  $y''' + 6y'' + 10y' = xe^{-3x}\cos x + x$ .
6.  $y''' - 4y' = 3 + e^{2x} + e^{2x}\sin 2x$ .
7.  $y^{IV} - y = (x+1)\cos x + chx$ .
8.  $y^{IV} - y^V = e^x + x^2$ .
9.  $y'' + k^2y = \cos ax$ .
10.  $y''' - y = e^{-x/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + \sin x$ .

Знайти загальний розв'язок рівнянь методом варіації довільних сталих:

1.  $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x + 1}$ .
2.  $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{\sqrt{4-x^2}}$ .
3.  $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}\ln x$ .
4.  $y'' + 4y = \frac{1}{\sin^2 x}$ .
5.  $y''' + y' = \operatorname{tg} x$ .
6.  $y''' + y' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$ .

### Домашнє завдання:

Знайти загальний розв'язок рівняння методом невизначених коефіцієнтів (з відшукуванням чисельних значень коефіцієнтів):

1.  $y'' - 4y' + 3y = xe^x - 3e^{3x}$ .
2.  $y'' - 5y' = 4x - e^{5x}$ .
3.  $y^{IV} - 8y' = xe^{2x} + x$ .
4.  $y'' - 2y' + 2y = e^x + x \cos x$ .
5.  $y'' + y = 4xe^x$ .

Знайти загальний розв'язок рівняння методом невизначених коефіцієнтів (без відшукування чисельних значень коефіцієнтів):

1.  $y'' + 4y = x^2 \sin 2x + \cos 2x$ .
2.  $y''' - 3y'' + 3y' - y = 2xe^x + 1$ .
3.  $y''' - 2y'' + y' = 5 + e^x + \cos 4x$ .
4.  $y'' + 3y' + 2y = e^x + 1$ .
5.  $y^{IV} + y'' = 7x - 3 \cos x$ .

Знайти загальний розв'язок рівнянь методом варіації довільних сталих:

1.  $y''' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}$ .
2.  $y'' + 2y' = x + e^x \sin x$ .
3.  $y'' + 4y' = 4y = \frac{1}{2} e^{-2x} \ln x$ .
4.  $y''' + 4y' = \sin xe^{2x}$ .

## **Тема 4. ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ. РІВНЯННЯ ЕЙЛЕРА**

### Аудиторне заняття

Знайти загальний розв'язок рівняння, знаючи його частинний розв'язок:

1.  $(x^2 + 1)y'' - 2xy' + 2y = 0$ ,  $y_1 = x$ .
2.  $x^2(\ln x - 1)y'' - xy' + y = 0$ ,  $y_1 = x$ .
3.  $y'' - y' \operatorname{tg} x + 2y = 0$ ,  $y_1 = \sin x$ .
4.  $(e^x + 1)y'' - 2y' - e^x y = 0$ ,  $y_1 = e^x - 1$

Знайти частинний розв'язок рівняння, який є алгебраїчним багаточленом:

1.  $x^2 y'' + 4xy' + 2y = 0$ .
2.  $(1 - x^2)y'' - 2y' + 4y = 0$ .
3.  $(x^3 - 3x^2 + 1)y'' - (x^3 - 6x + 1)y' + (3x^2 - 6x)y = 0$
4.  $(x^2 - 3x)y'' - (6 - x^2)y' + (3x - 6)y = 0$ .

Розв'язати рівняння Ейлера:

1.  $x^3 y''' - x^2 y'' + 2xy' - 2y = x^3$ .

2.  $x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0$ .

3.  $(x+1)^2 y'' - 2(x+1)y' + 2y = 0$ .

4.  $x^2 y'' - xy' + y = 0$ .

5.  $(4x-1)^2 y'' - 2(4x-1)y' + 8y = 0$ .

6.  $x^2 y'' - xy' + y = \cos(\ln x)$ .

7.  $x^2 y'' - 3xy' + 3y = 3\ln^2 x$ .

8.  $x^2 y'' + xy' + y = \sin(2 \ln x)$ .

### Домашнє завдання:

Знайти загальний розв'язок рівняння, знаючи його частинний розв'язок:

1.  $x^2(x+1)y'' - 2y = 0$ ,  $y_1 = 1 + \frac{1}{x}$ .

2.  $xy'' + 2y' - xy = 0$ ,  $y_1 = \frac{e^x}{x}$ .

Знайти частинний розв'язок рівняння, який є алгебраїчним багаточленом:

$$(x-1)y'' - (x+1)y' + 2y = 0.$$

Розв'язати рівняння Ейлера:

1.  $(2x+1)^2 y'' - 4(2x+1)y' + 8y = -8x - 4$ .

2.  $x^2 y'' + 3xy' + y = \frac{1}{x}$ .

### Розділ 3. СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

#### Тема 1. ЗВЕДЕННЯ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДО ОДНОГО РІВНЯННЯ БІЛЬШ ВИСОКОГО ПОРЯДКУ

##### Аудиторне заняття

Розв'язати наступні системи диференціальних рівнянь.

$$1. \begin{cases} \dot{x} = 5x + 2y \\ \dot{y} = 4x - y \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \dot{x} = 3x + y \\ \dot{y} = -x + y \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y \\ \dot{y} = -x - y \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = 3x + 4 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + 4x_2 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z \\ \dot{y} = 3x - 2y - 3z \\ \dot{z} = 2z - x + y \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} \dot{x} = y - 2z - x \\ \dot{y} = 4x + y \\ \dot{z} = 2x + y + z \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = 2y + 4z \\ \dot{z} = x - z \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} \dot{x} = 2x - 2y \\ \dot{y} = x - z \\ \dot{z} = -y + 2z \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} \dot{x} = 4y - 2z - 3x \\ \dot{y} = x + z \\ \dot{z} = 6x - 6y + 5z \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} \dot{x} = y - 2x - 2z \\ \dot{y} = x - 2y + 2z \\ \dot{z} = 3x - 3y + 5z \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} \dot{x} = 3x - y + z \\ \dot{y} = x + y + z \\ \dot{z} = 4x - y + 4z \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 - x_2 + 2x_3 \\ \dot{x}_2 = x_1 + 2x_3 \\ \dot{x}_3 = -2x_1 + x_2 - x_3 \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 - 2x_2 - x_3 \\ \dot{x}_2 = 3x_1 - 4x_2 - 3x_3 \\ \dot{x}_3 = 2x_1 - 4x_2 \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z \\ \dot{y} = 3x - 2y - 3z \\ \dot{z} = 2z - x + y \end{cases}$$

### Домашнє завдання:

Розв'язати наступні системи диференціальних рівнянь.

$$1. \begin{cases} \dot{x} + x - 8y = 0 \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + 3x_2 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \dot{x} = -3x + y \\ \dot{y} = 4x + 2y \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \dot{x}_2 = 3x_2 - 2x_1 \\ \dot{x}_1 = x_2 + x_1 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} \dot{x} = y + z \\ \dot{y} = x + z \\ \dot{z} = x + y \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} \dot{x} = 2x - 2y \\ \dot{y} = x - z \\ \dot{z} = -y + 2z \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} \dot{x} = x - y - z \\ \dot{y} = x + y \\ \dot{z} = 3x + z \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y - z \\ \dot{y} = 3x - 4y - 3z \\ \dot{z} = 2x - 4y \end{cases}$$

## **Тема 2. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ ОДНОРІДНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ПОСТІЙНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ**

### Аудиторне заняття

Розв'язати наступні системи диференціальних рівнянь методом Ейлера

$$1. \begin{cases} \dot{x} = 5x + 2y \\ \dot{y} = 4x - y \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \dot{x} = 3x + y \\ \dot{y} = -x + y \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y \\ \dot{y} = -x - y \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = 3x + 4 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + 4x_2 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z \\ \dot{y} = 3x - 2y - 3z \\ \dot{z} = 2z - x + y \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} \dot{x} = y - 2z - x \\ \dot{y} = 4x + y \\ \dot{z} = 2x + y + z \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = 2y + 4z \\ \dot{z} = x - z \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} \dot{x} = 2x - 2y \\ \dot{y} = x - z \\ \dot{z} = -y + 2z \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} \dot{x} = 4y - 2z - 3x \\ \dot{y} = x + z \\ \dot{z} = 6x - 6y + 5z \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} \dot{x} = y - 2x - 2z \\ \dot{y} = x - 2y + 2z \\ \dot{z} = 3x - 3y + 5z \end{cases}$$

### Домашнє завдання:

Розв'язати наступні системи диференціальних рівнянь методом Ейлера:

$$1. \begin{cases} \dot{x} + x - 8y = 0 \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + 3x_2 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \dot{x} = -3x + y \\ \dot{y} = 4x + 2y \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \dot{x}_2 = 3x_2 - 2x_1 \\ \dot{x}_1 = x_2 + x_1 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 + 2x_2 \\ \dot{x}_2 = x_2 - 2x_1 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} \dot{x} + x = 8y \\ \dot{y} - y = x \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} \dot{x} = y + z \\ \dot{y} = x + z \\ \dot{z} = x + y \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} \dot{x} = 2x - 2y \\ \dot{y} = x - z \\ \dot{z} = -y + 2z \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} \dot{x} = x - y - z \\ \dot{y} = x + y \\ \dot{z} = 3x + z \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y - z \\ \dot{y} = 3x - 4y - 3z \\ \dot{z} = 2x - 4y \end{cases}$$

## **Тема 3. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ НЕОДНОРІДНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ПОСТІЙНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ**

### Аудиторне заняття

Розв'язати наступні системи диференціальних рівнянь шляхом зведення їх до одного рівняння більш високого порядку:

$$1. \begin{cases} \dot{x} = 5x + 2y + 2 \\ \dot{y} = 4x - y - \cos 4t \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \dot{x} = 3x + y + 1 \\ \dot{y} = -x + y + 3 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y + 5e^t \\ \dot{y} = -x - y \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 + te^{2t} \\ \dot{x}_2 = x_1 + 2x_2 - e^{2t} \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} \dot{x} = 2x + y - e^{2t} \\ \dot{y} = 3x + 4 + \sin t \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 + t^2 \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + 4x_2 + 3 \end{cases}$$



$$7. \begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z + t \\ \dot{y} = 3x - 2y - 3z + 2 \\ \dot{z} = 2z - x + y \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} \dot{x} = y - 2z - x + e^{2t} \\ \dot{y} = 4x + y + 5e^{2t} \\ \dot{z} = 2x + y + z \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} \dot{x} = 2x + y + 2 \cos t \\ \dot{y} = 2y + 4z \\ \dot{z} = x - z + 5 \sin t \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} \dot{x} = 2x - 2y \\ \dot{y} = x - z + 4 \operatorname{tg} t \\ \dot{z} = -y + 2z \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} \dot{x} = 4y - 2z - 3x \\ \dot{y} = x + z - 4 \sin t \\ \dot{z} = 6x - 6y + 5z \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} \dot{x} = y - 2x - 2z + t^2 \\ \dot{y} = x - 2y + 2z + 1 \\ \dot{z} = 3x - 3y + 5z + t \end{cases}$$

Розв'язати наступні системи диференціальних рівнянь методом невизначених коефіцієнтів:

$$1. \begin{cases} \dot{x} = 5x + 2y + 2 \\ \dot{y} = 4x - y - \cos 4t \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \dot{x} = 3x + y + 1 \\ \dot{y} = -x + y + 3 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y + 5e^t \\ \dot{y} = -x - y \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 + te^{2t} \\ \dot{x}_2 = x_1 + 2x_2 - e^{2t} \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} \dot{x} = 2x + y + 2 \cos t \\ \dot{y} = 2y + 4z \\ \dot{z} = x - z + 5 \sin t \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} \dot{x} = 2x - 2y + 1 \\ \dot{y} = x - z + 4 \\ \dot{z} = -y + 2z + 3 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} \dot{x} = 4y - 2z - 3x \\ \dot{y} = x + z - 4 \sin t \\ \dot{z} = 6x - 6y + 5z \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} \dot{x} = y - 2x - 2z + t^2 \\ \dot{y} = x - 2y + 2z + 1 \\ \dot{z} = 3x - 3y + 5z + t \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z + t \\ \dot{y} = 3x - 2y - 3z + 2 \\ \dot{z} = 2z - x + y \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} \dot{x} = y - 2z - x + e^{2t} \\ \dot{y} = 4x + y + 5e^{2t} \\ \dot{z} = 2x + y + z - 2e^{2t} \end{cases}$$

Розв'язати наступні системи диференціальних рівнянь методом варіації довільних сталих:

$$1. \begin{cases} \dot{x} = 5x + 2y + 2 \\ \dot{y} = 4x - y - \cos 4t \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \dot{x} = 3x + y + 1 \\ \dot{y} = -x + y + 3 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y + 5e^t \\ \dot{y} = -x - y \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 + te^{2t} \\ \dot{x}_2 = x_1 + 2x_2 - e^{2t} \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} \dot{x} = 2x + y - e^{2t} \\ \dot{y} = 3x + 4 + \sin t \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 + t^2 \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + 4x_2 + 3 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} \dot{x} = 4y - 2z - 3x \\ \dot{y} = x + z - 4 \frac{\sin t}{t} \\ \dot{z} = 6x - 6y + 5z + t \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} \dot{x} = y - 2x - 2z + t^2 \cos t \\ \dot{y} = x - 2y + 2z - 5 \sin t \\ \dot{z} = 3x - 3y + 5z + te^t \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} \dot{x} = 2x + y + 2 \cos t \\ \dot{y} = 2y + 4z \\ \dot{z} = x - z + 5 \sin t \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} \dot{x} = 2x - 2y \\ \dot{y} = x - z + 4 \operatorname{tg} t \\ \dot{z} = -y + 2z \end{cases}$$

### Домашнє завдання:

Розв'язати наступні системи диференціальних рівнянь шляхом зведення їх до одного рівняння більш високого порядку:

$$1. \begin{cases} \dot{x} + x - 8y = 5 \\ \dot{y} = x + y + 1 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 + \cos t \\ \dot{x}_2 = x_1 + 3x_2 + 4 \sin t \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \dot{x} = -3x + y \\ \dot{y} = 4x + 2y - t \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \dot{x}_2 = 3x_2 - 2x_1 \\ \dot{x}_1 = x_2 + x_1 + t^2 e^{2t} \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 + 2x_2 \\ \dot{x}_2 = x_2 - 2x_1 + t^2 - 1 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} \dot{x} + x = 8y \\ \dot{y} - y = x - 5e^{2t} \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} \dot{x} = y + z + 4 \\ \dot{y} = x + z + 2t \\ \dot{z} = x + y + t^2 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} \dot{x} = 2x - 2y \\ \dot{y} = x - z + t^2 \sin t \\ \dot{z} = -y + 2z + t \cos t \end{cases}$$

Розв'язати наступні системи диференціальних рівнянь методом невизначених коефіцієнтів:

$$1. \begin{cases} \dot{x} + x - 8y = 5 \\ \dot{y} = x + y + 1 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 + \cos t \\ \dot{x}_2 = x_1 + 3x_2 + 4 \sin t \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \dot{x} = -3x + y \\ \dot{y} = 4x + 2y - t \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \dot{x}_2 = 3x_2 - 2x_1 \\ \dot{x}_1 = x_2 + x_1 + t^2 e^{2t} \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 + 2x_2 - 2t \\ \dot{x}_2 = x_2 - 2x_1 + t + 1 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} \dot{x} + x = 8y + e^{2t} \\ \dot{y} - y = x - 5e^{2t} \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} \dot{x} = y + z \\ \dot{y} = x + z + 2t^2 \\ \dot{z} = x + y + t^2 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} \dot{x} = 2x - 2y \\ \dot{y} = x - z + t^2 \sin t \\ \dot{z} = -y + 2z + t \cos t \end{cases}$$

Розв'язати наступні системи диференціальних рівнянь методом варіації довільних сталих:

$$1. \begin{cases} \dot{x} + x - 8y = 5 \\ \dot{y} = x + y + 1 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 + \cos t \\ \dot{x}_2 = x_1 + 3x_2 + 4 \sin t \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \dot{x} = -3x + y \\ \dot{y} = 4x + 2y - t \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \dot{x}_2 = 3x_2 - 2x_1 \\ \dot{x}_1 = x_2 + x_1 + t^2 e^{2t} \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 + 2x_2 \\ \dot{x}_2 = x_2 - 2x_1 + t^2 - 1 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} \dot{x} + x = 8y \\ \dot{y} - y = x - 5e^{2t} \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} \dot{x} = y + z + 4 \\ \dot{y} = x + z + 2t \\ \dot{z} = x + y + t^2 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} \dot{x} = 2x - 2y \\ \dot{y} = x - z + t^2 \sin t \\ \dot{z} = -y + 2z + t \cos t \end{cases}$$

## Розділ 4. ТЕОРІЯ СТІЙКОСТІ

### Тема 1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ВИЗНАЧЕННЯ

#### Аудиторне заняття

Дослідити стійкість розв'язків наступних диференціальних рівнянь та систем диференціальних рівнянь:

1.  $x' = -x(1 - x)$ .

2.  $x'' + 5x = 0$

3.  $\frac{dy}{dx} = \frac{1-x}{3+y}$ .

4.  $\frac{dy}{dx} = xy^2 + 2xy$ .

5.  $xydy + (x+1)dy = 0$ .

6.  $\frac{dy}{dx} = e^{x-y}$ .

7.  $\frac{dy}{dx} = \sqrt[3]{y^2}$ .

8.  $y' = \cos(y - x)$ .

9.  $\frac{dy}{dx} = \cos(x - y - 1)$ .

10.  $\frac{dy}{dx} = 2\frac{y}{x}$ .

11.  $\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 + 2x_2 \\ \dot{x}_2 = x_2 - 2x_1 \end{cases}$

12.  $\begin{cases} \dot{x} + x = 8y \\ \dot{y} - y = x \end{cases}$

13.  $\begin{cases} \dot{x} - 3y = 5x \\ \dot{y} = -3x - y \end{cases}$

14.  $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - 5x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 \end{cases}$

15.  $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y \\ \dot{y} = 3y + 4x \end{cases}$

16.  $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + 4x_2 \end{cases}$

#### Домашнє завдання:

Дослідити стійкість розв'язків наступних диференціальних рівнянь та систем диференціальних рівнянь:

1.  $y' - y = 2x - 3$ .

2.  $y' = 2\frac{y}{x^2}$ .

3.  $y' = x + 1$ .

4.  $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x^2$ .

5.  $y' + 2y = y^2$ .

6.  $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y \\ \dot{y} = -x - y \end{cases}$

7.  $\begin{cases} \dot{x} = 5x + 2y \\ \dot{y} = 4x - y \end{cases}$

8.  $\begin{cases} \dot{x} = 3x + y \\ \dot{y} = -x + y \end{cases}$

## Тема 2. НАЙПРОСТІШІ ТИПИ ТОЧОК СПОКОЮ

### Аудиторне заняття

Дослідити стійкість розв'язків наступних систем диференціальних рівнянь:

$$1. \begin{cases} \dot{x} = 5x + 2y \\ \dot{y} = 4x - y \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \dot{x} = 3x + y \\ \dot{y} = -x + y \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y \\ \dot{y} = -x - y \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = 3x + 4 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + 4x_2 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} \dot{x} + x - 8y = 0 \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + 3x_2 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = 2y + 4z \\ \dot{z} = x - z \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} \dot{x} = 2x - 2y \\ \dot{y} = x - z \\ \dot{z} = -y + 2z \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} \dot{x} = 4y - 2z - 3x \\ \dot{y} = x + z \\ \dot{z} = 6x - 6y + 5z \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} \dot{x} = y - 2x - 2z \\ \dot{y} = x - 2y + 2z \\ \dot{z} = 3x - 3y + 5z \end{cases}$$

### Домашнє завдання:

Дослідити стійкість розв'язків наступних систем диференціальних рівнянь:

$$1. \begin{cases} \dot{x} + x - 8y = 0 \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + 3x_2 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \dot{x} = -3x + y \\ \dot{y} = 4x + 2y \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \dot{x}_2 = 3x_2 - 2x_1 \\ \dot{x}_1 = x_2 + x_1 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 + 2x_2 \\ \dot{x}_2 = x_2 - 2x_1 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} \dot{x} + x = 8y \\ \dot{y} - y = x \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} \dot{x} = -3x + y \\ \dot{y} = x \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} \dot{x}_2 = 3x_2 - 2x_1 \\ \dot{x}_1 = x_2 + x_1 \end{cases}$$

### Тема 3. СТІЙКІСТЬ ЗА ПЕРШИМ НАБЛИЖЕННЯМ

#### Аудиторне заняття

Исследовать на устойчивость по первому приближению нулевое решение системы:

$$1. \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\sin x \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \dot{x} = -2x + y + x^3 \\ \dot{y} = -x - 2y + 3x^5 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \dot{x} = 2x - \ln(1+y) + \sin x \\ \dot{y} = e^x + \sin(x+y) - \cos^2 y \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \dot{x} = -\sin(x-z) \\ \dot{y} = -x - 2y + 3x^5 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} \dot{x} = -x + y - 1 \\ \dot{y} = \ln(x+1) \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} \dot{x} = 4 \sin x + \ln(1+y) \\ \dot{y} = x + y + x^2 y \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} \dot{x} = -x + 1 - \cos y \\ \dot{y} = \sin^2 x + 1 - e^y \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} \dot{x} = 2e^{-x} - \sqrt{4+4y} \\ \dot{y} = \ln(1+9x+4y) \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} \dot{x} = -x - y + \frac{xy}{1+t} \\ \dot{y} = 2x - 3y + \frac{y^2}{1+t^2} \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} \dot{x} = -\sin(x-z) \\ \dot{y} = \sin^2 x - y - \sin + z \\ \dot{z} = \operatorname{tg}(y-z) \end{cases}$$

#### Домашнє завдання:

Исследовать на устойчивость по первому приближению нулевое решение системы:

$$1. \begin{cases} \dot{x} = 2y + \sqrt{1-3y-\sin x} \\ \dot{y} = -\sin x \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \sin 2x \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \dot{x} = -x + y - 1 \\ \dot{y} = \ln(x^2 - y) \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \dot{x} = \cos^2 x + y \\ \dot{y} = \ln(1+2x) + e^{2y} \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} \dot{x} = -x^2 + \ln(y-1) \\ \dot{y} = \sin(x+1) \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} \dot{x} = \sin(x+y) + e^{x+y} \\ \dot{y} = \cos^2 x + \sin y \end{cases}$$

При каких значениях параметра  $a$  асимптотически устойчиво нулевоерешение системі уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = 2e^{-x} - \sqrt{4+ay} \\ \dot{y} = \ln(1+9x+ay) \end{cases} ?$$

## Тема 4. ДРУГИЙ МЕТОД ЛЯПУНОВА

### Аудиторне заняття

Исследовать на устойчивость нулевое решение системы:

$$1. \begin{cases} \dot{x} = -2y + 6xy^2 \\ \dot{y} = 5x - 15x^2y \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \dot{x} = 2y - 6xy^2 \\ \dot{y} = -5x + 15x^2y \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \dot{x} = y + x^3 \\ \dot{y} = x + y^3 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \dot{x} = -y - x^3 \\ \dot{y} = x - y^3 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} \dot{x} = -xy^4 \\ \dot{y} = yx^4 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} \dot{x} = x^2 + y^4 \\ \dot{y} = y^2 + x^4 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} \dot{x} = -2x - y + 2xy^3 - 3x^3 \\ \dot{y} = \frac{1}{3}x - y - x^2y - 7y^3 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} \dot{x} = y + x^2y^2 - \frac{1}{4}x^5 \\ \dot{y} = -2x - 2x^3y - \frac{1}{2}y^3 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} \dot{x} = x^5 + y^3 \\ \dot{y} = y^5 + x^3 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} \dot{x} = x^2 - y^3 \\ \dot{y} = y^2 - x^3 \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} \dot{x} = 4y - x^3 \\ \dot{y} = -3x - y^3 \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} \dot{x} = -y - x^2 \\ \dot{y} = x - y^2 \end{cases}$$

### Домашнє завдання:

Исследовать на устойчивость по первому приближению нулевое решение системы:

$$1. \begin{cases} \dot{x} = -y + x^2 \\ \dot{y} = -x + y^2 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \dot{x} = -3y - 2x^3 \\ \dot{y} = 2x - 3y^3 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \dot{x} = x - 2xy^4 \\ \dot{y} = y - x^2y^3 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \dot{x} = x + 2xy^2 \\ \dot{y} = -2y + 4x^2y \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} \dot{x} = x^3 + 2xy^2 \\ \dot{y} = x^2y \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} \dot{x} = x^2 + y \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$$

## Тема 5. ОСНОВНІ КРИТЕРІЇ СТІЙКОСТІ

### Аудиторне заняття

Исследовать устойчивость нулевого решения уравнения

1.  $y'' - y = 0$ .

2.  $y'' + 4y = 0$ .

3.  $y'' + y = 0$ .

4.  $y'' - 3y' = 0$ .

5.  $y'' - 2y' + y = 0$ .

6.  $y^{IV} + 2y'' + y = 0$ .

7.  $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$ .

8.  $y'' - 2y' + y = 0$ .

9.  $y^V - 2y^{IV} + y''' = 0$ .

10.  $y'' - 2y' + 8y = 0$ .

11.  $y'' + 9y' = 0$ .

12.  $y''' - 4y' = 0$ .

13.  $y''' + 5y'' + 4y' = 0$ .

14.  $y^{IV} - 5y''' - 6y'' = 0$ .

15.  $y^{IV} - 4y''' + 5y'' = 0$ .

16.  $y''' + 6y'' + 10y' = 0$ .

### Домашнє завдання:

Исследовать устойчивость нулевого решения уравнения

1.  $y'' - 4y' + 3y = 0$ .

2.  $y'' - 5y' = 0$ .

3.  $y^{IV} - 8y' = 0$ .

4.  $y'' - 2y' + 2y = 0$ .

5.  $y''' - 2y'' + y' = 0$ .

6.  $y^{IV} + y'' = 0$ .