ТЕОРІЯ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ/ КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ ДЛЯ СТУДЕНТІВ ЗАОЧНОГО ВІДДІЛЕННЯ МАГІСТРАТУРИ (ІІ КУРС, СПЕЦІАЛЬНІСТЬ «МАТЕМАТИКА»)

1. Задача оптимального керування

Нехай поведінка об'єкта під дією деякого керування описується системою диференціальних рівнянь:

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i\left(t, y_1, ..., y_n, u_1, ..., u_r\right),\ i = 1, 2, ..., n. \tag{1}$$

Систему (1) можна записати у векторній формі:

$$\frac{d\overline{y}}{dt} = \overline{f}\left(t, \overline{y}, \overline{u}\right). \tag{2}$$

Тут $\overline{y} = \left(y_1, y_2, ..., y_n\right)$, $\overline{f} = \left(f_1, f_2, ..., f_n\right)$ – n – вимірні вектор – функції, $\overline{u} = \left(u_1, u_2, ..., u_r\right)$ – r – вимірна вектор – функція, яку називають **керуванням**. Розв'язок $\overline{y}\left(t\right)$, що відповідає керуванню $\overline{u}\left(t\right)$, називають **траєкторією системи**. Числа $y_1, y_2, ..., y_n$ називають **фазовими координатами**, вектор $\overline{y} = \left(y_1, y_2, ..., y_n\right)$ – **фазовою точкою**.

Якість роботи системи – об'єкта управління оцінюється **функціоналом якості**

$$J = \int_{t_0}^{T} f_0\left(t, y_1\left(t\right), ..., y_n\left(t\right), u_1\left(t\right), ..., u_r\left(t\right)\right) dt. \tag{3}$$

Будемо вважати, що зі зменшенням значення функціонала J якість роботи системи зростає. Вигляд скалярної функції f_0 визначається постановкою задачі. Нехай, наприклад, задано бажану траєкторію фазової точки $\overline{z}\left(t\right)$. У початковий момент часу $\overline{y}\left(t_0\right) = \overline{z}\left(t_0\right)$. Потрібно, щоб фактична траєкторія $\overline{y}\left(t\right)$ на проміжку часу $\left[t_0, T\right]$ у середньому якомога менше відрізнялась би від бажаної траєкторії $\overline{z}\left(t\right)$. У цьому випадку функціонал якості (3) набуває вигляду:

$$J = \int_{t_0}^{T} \left(\sum_{i=1}^{n} c_i\left(t\right)\left(z_i\left(t\right) - y_i\left(t\right)\right)^2 \right) dt.$$

У цьому функціоналі вагові функції $c_i\left(t\right)$ введено для врахування можливих неоднакових вимог до точності у різні моменти часу для різних координат. Якщо на деякому інтервалі $\left(t_1, t_2\right) \subset \left[t_0, T\right]$ потрібна більша точність, то функції $c_i\left(t\right)$ набувають на цьому інтервалі більших значень, ніж у інші моменти часу. Якщо потрібно обмежити витрати енергії органом керування, то до складу функції $f_0(t)$ можна ввести доданок $c_0|\overline{u}|^2$. Вибір показника якості – функціонала J є самостійною та досить складною задачею. У деяких випадках використовують показники якості, що не виражаються у вигляді інтегрального функціонала, наприклад, $J = \max\limits_{t\in[t_0,T]} \sum\limits_{i=1}^{n} \left| z_i(t) - y_i(t) \right|$.

У реальних системах на керування $\overline{u}(t)$ накладаються деякі обмеження.

$$\overline{u}(t) \in U . \tag{4}$$

Таке керування називають **допустимим**.

Сформулюємо задачу оптимального керування.

З множини допустимих керувань потрібно вибрати таке, що переводить об'єкт керування з початкового положення

$$\overline{y}(t_0) = \overline{a} = (a_1, ..., a_n) \tag{5}$$

у кінцеве положення

$$\overline{y}(T) = \overline{b} = (b_1, ..., b_n) \tag{6}$$

та мінімізує функціонал якості (3).

Це керування та відповідну йому траєкторію системи називають **оптимальними**.

Приклад. Матеріальна точка, маса якої є сталою та дорівнює m, рухається прямолінійно під дією прикладеної до неї сили $\overline{u}(t)$, спрямованої вздовж траєкторії руху. Опір середовища пропорційний швидкості матеріальної точки з коефіцієнтом пропорційності b. Визначити, як повинна змінюватися сила $\overline{u}(t)$, щоб перемістити точку з початкового положення $x(0) = x_0$ у задане кінцеве положення $x(T) = x_T$ за найменший час T.

Сформулюємо відповідну задачу оптимального керування. Нехай $x(t)$ – координата точки, яка відраховується від її початкового положення на прямій, по якій здійснюється рух точки. Тоді, згідно з другим законом Ньютона, її рух описуватиметься диференціальним рівнянням:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -b\frac{dx}{dt} + u .$$

Введемо фазові координати $x_1(t) = x(t)$, $x_2(t) = \dfrac{dx}{dt}$. Тоді рівняння руху точки можна записати у вигляді системи:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -\dfrac{b}{m}x_2 + \dfrac{u}{m}. \end{cases}$$

Тут $x_1(t)$ та $x_2(t)$ є фазовими координатами об’єкта керування – матеріальної точки, $u(t)$ – керування. Функціонал якості – це час переміщення точки: $J = \int_0^T dt = T \to \min$.

2. Види основної задачі оптимального керування

На практиці задача оптимального керування зустрічається у різних формах. Наведемо найбільш розповсюджені з них.

1. Задача з обмеженими фазовими координатами. Окрім умов (4), (5) та (6), потрібно ще, щоб

$$\overline{y}(t) \in G,\ t \in [t_0, T]. \tag{7}$$

Тут G – деяка задана множина точок n – вимірного простору.

2. Задача з фіксованим часом. У цій задачі фіксується момент T переходу системи до заданого кінцевого стану.

3. Задача з рухомим кінцем. Замість умови (6) ставиться менш жорстка вимога потрапляння фазової точки $\overline{y}(T)$ у деяку задану область g:

$$\overline{y}(T) \in g. \tag{8}$$

4. Задача з вільним кінцем. Кінцевий момент часу T фіксовано, обмеження на положення $\overline{y}(T)$ відсутні.

5. Задача оптимальної швидкодії. Для цієї задачі у формулі (3) для функціонала якості підінтегральна функція $f_0 \equiv 1$. Тут $I = T - t_0$. Отже, тут потрібно перевести систему з початкового положення (5) у кінцеве положення (6) за мінімальний час.

6. Задача синтезу оптимального керування. У цій задачі початкове положення системи завчасно, до початку її роботи, є невідомим. Тому неможливо завчасно знайти вигляд оптимального керування як функції часу на всьому проміжку $[t_0, T]$. У таких випадках з’являється задача завчасного визначення оптимального керування $\overline{u}$ як функції поточних значень фазових координат та часу: $\overline{u} = \overline{\varphi}(t, y_1, ..., y_n)$, тобто задача синтезу оптимального управління. Для системи, у якій права частина в (2) не залежить від часу t, оптимальне керування шукають у вигляді функції, що залежить лише від поточних значень фазових координат: $\overline{u} = \overline{\varphi}(y_1, ..., y_n)$.

3. Основні особливості задачі оптимального керування

Задача оптимального керування є варіаційною задачею на умовний екстремум, проте у багатьох відношеннях вона відрізняється від варіаційної задачі Лагранжа на умовний екстремум. Наведемо основні особливості задачі оптимального керування.

1. Значення однієї з невідомих функцій, а саме керування $\overline{u}(t)$, належать замкненій множині U, наприклад, у багатьох задачах оптимального керування висувається умова $|\overline{u}(t)| \le 1$.

2. Підінтегральний вираз функціонала (3) та рівняння (2) не залежать від $\overline{u}'$, тому деякі з рівнянь Ейлера для цього функціонала не є диференціальними.

3. У варіаційній задачі Лагранжа необхідна умова екстремуму функціонала отримана у припущенні, що розв'язки цієї задачі належать простору $C^2_{[t_0;T]}$ двічі неперервно диференційовних функцій. У задачі оптимального керування розглядається більш широкий клас кусочно – неперервних допустимих функцій. Тут допускається, що екстремум функціонала якості може досягатися на кривій, що має точки розриву першого роду. У цьому випадку точки розриву матиме також похідна оптимальної траєкторії $\overline{y}'(t)$.

4. Принцип максимуму

Необхідні умови екстремуму функціонала якості (3) у задачі оптимального керування були сформульовані у працях Л.С. Понтрягіна та його учнів. Ці умови отримали назву **принципу максимуму**.

Введемо нову змінну:

$$y_0(t) = \int_{t_0}^{t} f_0\left(\tau, y_1(\tau), ..., y_n(\tau), u_1(\tau), ..., u_r(\tau)\right) d\tau . \tag{9}$$

Якщо $t = T$, то з рівності (3) отримуємо, що $y_0(T) = J$, тобто у момент часу $t = T$ значення нової координати дорівнює значенню функціонала якості J. З (9) випливає:

$$\overline{y}_0'(t) = f_0\left(t, \overline{y}(t), \overline{u}(t)\right), \ y_0(t_0) = 0 . \tag{10}$$

Позначимо $\overline{Y}$ та $\overline{F}$ вектори $\overline{Y} = (y_0, y_1, ..., y_n)$ та $\overline{F} = (f_0, f_1, ..., f_n)$, що містять $n+1$ координат. Систему рівнянь (2), що задовольняє початкові умови (5), разом з рівнянням 10), можна записати у вигляді:

$$\overline{Y}'(t) = \overline{F}\left(t, \overline{Y}, \overline{u}\right), \ \overline{Y}(t_0) = \overline{A} . \tag{11}$$

Тут $\overline{A}$ – $(n+1)$ – вимірний вектор, $\overline{A} = (0, a_1, ..., a_n)$.

Нехай пряма Π – це пряма, що проходить у $(n+1)$ – вимірному просторі з координатами y_0, $y_1,\ldots,y_n$ через точку $B(0,b_1,...,b_n)$ паралельно осі y_0. Будемо вважати, що векторна функція $\overline{F}(t,\overline{Y},\overline{u})$ є неперервною за всіма своїми аргументами та має неперервні частинні похідні $\frac{\partial \overline{F}}{\partial y_i}$, $i=0,1,...,n$, у просторі з координатами t, y_0, $y_1,\ldots,y_n$ для всіх допустимих значень $\overline{u}\in U$. Вважаємо також, що для будь-якого допустимого керування $\overline{u}(t)$ існує єдиний розв'язок системи (11). Будь-яка траєкторія системи (11), що перетинає пряму Π, задовольняє крайові умови (6) задачі оптимального управління. Чим меншою є координата y_0 точки перетину, тим меншим є значення функціонала якості J. Задачу оптимального управління тепер можна сформулювати наступним чином: **серед всіх допустимих керувань потрібно знайти таке, для якого траєкторія системи (11) перетинає пряму Π у точці з найменшою координатою y_0.**

Нехай оптимальне управління та траєкторія вже визначені. Позначимо їх через $\overline{u}^*(t)$, $\overline{Y}^*(t)$. Підставивши у частинні похідні $\frac{\partial f_j(t,\overline{Y},\overline{u})}{\partial y_i}$ замість аргументів $\overline{Y}$, $\overline{u}$ функції $\overline{Y}^*(t)$, $\overline{u}^*(t)$, отримаємо неперервні функції часу $\frac{\partial f_j(t,\overline{Y}^*,\overline{u}^*)}{\partial y_i}$. Введемо векторну функцію $\overline{\Psi}(\psi_0(t),\psi_1(t),...,\psi_n(t))$, координати якої $\psi_i(t)$ задовольняють лінійну однорідну систему рівнянь з неперервними коефіцієнтами:

$$\psi_i' = -\sum_{j=0}^{n}\frac{\partial f_j(t,\overline{Y}^*,\overline{u}^*)}{\partial y_i}\psi_j,\ i=0,1,...,n. \tag{12}$$

При фіксованих початкових значеннях $\overline{\Psi}(t_0)$ існує єдиний розв'язок системи (12). Нехай $H(\overline{\Psi},\overline{Y},t,\overline{u})$ – це скалярний добуток векторів $\overline{F}$ та $\overline{\Psi}$: $H=\overline{F}\cdot\overline{\Psi}=\sum_{i=0}^{n} f_i\psi_i$. Якщо зафіксувати довільні значення ψ_j, y_j, t, то цей скалярний добуток залежатиме лише від аргументу $\overline{u}$. Позначимо $M(\overline{\Psi},\overline{Y},t)$ найбільше значення H за всіма допустимими значеннями $\overline{u}\in U$ при фіксованих $\overline{\Psi}$, $\overline{Y}$, t:

$$M(\overline{\Psi},\overline{Y},t)=\max_{\overline{u}\in U} H(\overline{\Psi},\overline{Y},t,\overline{u}). \tag{13}$$

Сформулюємо тепер необхідні умови оптимальності.

Теорема 1 (принцип максимуму). Нехай $\overline{u}^*(t)$ та $\overline{Y}^*(t)$ – оптимальні управління та траєкторія. Існує ненульовий розв'язок $\overline{\Psi}^*(t)$ системи (12), такий, що у будь-який момент часу $t \in [t_0;T]$ функція $H\left(\overline{\Psi}^*, \overline{Y}^*, t, \overline{u}\right)$, що залежить від керування $\overline{u}$, досягає максимуму по всім значенням $\overline{u} \in U$ при $\overline{u}(t) = \overline{u}^*(t)$, тобто

$$H\left(\overline{\Psi}^*(t), \overline{Y}^*(t), t, \overline{u}^*(t)\right) = M\left(\overline{\Psi}^*(t), \overline{Y}^*(t), t\right). \tag{14}$$

На проміжку $[t_0;T]$ зміни аргументу t виконуються співвідношення

$$\psi_0(t) = \mathrm{const} \le 0, \tag{15}$$

$$M\left(\overline{\Psi}^*(t), \overline{Y}^*(t), t\right) = -\int_{t_0}^{T} \sum_{j=0}^{n} \frac{\partial f_j\left(\tau, \overline{Y}^*(\tau), \overline{u}^*(\tau)\right)}{\partial \tau} \psi_j(\tau) d\tau. \tag{16}$$

Рівність (14) відображає основний зміст принципу максимуму: оптимальне керування $\overline{u}^*$ у будь-який момент часу t повинне надавати найбільше значення функції H. Тому з співвідношення (14) можна визначити $\overline{u}^*$ як функцію змінних $\overline{\Psi}^*$, $\overline{Y}^*$, t. Підставивши цю функцію у рівняння (11) та (12), отримаємо систему $2n+2$ рівнянь з $2n+2$ невідомими $y_0^*,...,y_n^*,\psi_0^*,...,\psi_n^*$. Для того, щоб знайти значення довільних сталих у розв'язку цієї системи, потрібно задати $2n+2$ додаткові умови. Маємо $n+1$ початкову умову (11) у точці t_0 та n умов (6) у кінцевій точці T. Величина T у загальній постановці задачі оптимального керування є невідомою, для її визначення потрібна ще одна умова. Проте з формули для функції H випливає, що векторну функцію $\overline{\Psi}^*(t)$ достатньо визначити з точністю до довільного сталого додатного множника, оскільки вигляд функції $\overline{u}^*(t)$ не залежить від цього множника. Тому загальна кількість додаткових умов, які потрібно задати, дорівнює $2n+2$. Недостатню умову можна отримати з рівності (15). Відзначимо, що у задачі з фіксованим часом рівність (16) не виконується, тому кількість невідомих та кількість додаткових умов у цьому випадку співпадають. Таким чином, застосування принципу максимуму приводить до крайової задачі для системи диференціальних рівнянь. Оптимальна траєкторія, якщо вона існує, є розв'язком цієї крайової задачі. Наведемо приклади, що ілюструють формулювання принципу максимуму.

Приклад 1. Функціонування об'єкта управління описується рівнянням $y_1'' + y_1' + y_1 = u$, $y_1(0) = y_1'(0) = 0$, $y_1(T) = z_1(T)$, $y_1'(T) = z_1'(T)$, $|u(t)| \le 1$. Функціонал якості має вигляд: $J = \int_0^T \left(z_1(t) - y_1(t)\right)^2 dt$, де $z_1(t)$ – бажана траєкторія системи.

Введемо додаткову змінну $y_0(t)$, запишемо задане диференціальне рівняння другого порядку у вигляді системи та запишемо, використовуючи формули (12), систему рівнянь відносно $\overline{\Psi}(t)$:

$$y_0' = (z_1 - y_1)^2, \quad y_1' = y_2, \quad y_2' = -y_1 - y_2 + u, \quad \psi_0' = 0, \quad \psi_1' = -2(y_1 - z_1)\psi_0 + \psi_2,$$
$$\psi_2' = -\psi_1 + \psi_2,\ y_1(0) = y_2(0) = y_0(0) = 0,\ y_1(T) = z_1(T),\ y_2(T) = z_1'(T).$$

Для цього прикладу $H = \psi_0(z_1 - y_1)^2 + \psi_1 y_2 + \psi_2(-y_1 - y_2 + u)$. Оскільки $|u(t)| \le 1$, то максимум функції H за змінною u досягається при $u^*(t) = 1$, якщо $\psi_2(t) > 0$, при $u^*(t) = -1$, якщо $\psi_2(t) < 0$. На будь-якому інтервалі $[t_1;t_2]$ функція $\psi_2(t)$ не дорівнює тотожно нулю, інакше $\overline{\Psi}(t)$ було б нульовим розв'язком системи (12), що суперечить принципу максимуму. Отже, якщо оптимальне керування існує, то воно повинне набувати граничних допустимих значень. З (16) випливає додаткова крайова умова:

$$\psi_0(T)\big(z_1(T) - y_1(T)\big)^2 + \psi_1(T)y_2(T) + \psi_2(T)\big(-y_1(T) - y_2(T)\big) + |\psi_2(T)| = 0.$$

Підставивши у рівняння керованої системи вираз для $u^*(t)$, отримаємо крайову задачу.

Приклад 2. Поведінка об'єкта управління описується рівнянням $y_1' = u$. Керуванням є скалярна функція $u(t)$, що задовольняє умову $|u| \le 1$. Потрібно перевести об'єкт з початкового положення $y_1(0) = a > 0$ у кінцеве положення $y_1(T) = 0$, мінімізуючи при цьому функціонал $J = \int_0^T u^2 dt$. У цьому випадку функція H набуває вигляду: $H = \psi_0 u^2 + \psi_1 u$. Система рівнянь для компонентів векторної функції $\overline{\Psi}(t)$ має вигляд: $\psi_0' = 0$, $\psi_1' = 0$. Звідси та з рівності (15) випливає, що $\psi_0 = \text{const} \le 0$, $\psi_1 = \text{const}$. З рівності (14) для оптимального керування отримуємо, що $u^*(t)$ є сталим на відрізку $[0;T]$. Тоді $y_1(t) - a = u^*(t)$, $T = -\dfrac{a}{u^*}$. Підставивши це значення T у вираз для функціонала якості, отримаємо: $J = -au^*$. Зі зменшенням $|u^*|$ зменшується значення функціонала якості. Отже, у даному прикладі кожному значенню $u^* < 0$ відповідає траєкторія, що переміщує об'єкт управління з початкового положення $y_1(0) = a$ у початок координат та задовольняє умову (14) принципу максимуму. Маємо нескінченну кількість таких траєкторій, однак на жодній з них не досягається мінімум заданого функціонала якості J.

Далі розглянемо доведення принципу максимуму.

5. Доведення принципу максимуму

Доведемо принцип максимуму для керованих систем, векторне рівняння яких має вигляд:

$$\bar{Y}' = \bar{F}\left(t, \bar{Y}\right) + \bar{c}\left(t\right)u\left(t\right), \tag{17}$$

де $\bar{F}\left(f_0,...,f_n\right)$, $\bar{c}\left(c_0,c_1,...,c_n\right)$ – вектори, $u\left(t\right)$ – скалярна кусочно – неперервна функція, значення якої задовольняють умову

$$\left|u\left(t\right)\right| \le m_0. \tag{18}$$

Доведемо основне співвідношення (14). Для даного випадку функція H набуває вигляду:

$$H\left(\bar{\Psi}, \bar{Y}, t, u\right) = \left(\bar{\Psi}, \bar{F}\left(t, \bar{Y}\right)\right) + \left(\bar{\Psi}, \bar{c}\left(t\right)\right)u\left(t\right). \tag{19}$$

З врахуванням (18), максимум функції H за допустимими значеннями аргументу u, дорівнює $\left(\bar{\Psi}, \bar{F}\left(t, \bar{Y}\right)\right) + m_0\left|\left(\bar{\Psi}, \bar{c}\left(t\right)\right)\right|$. Тому співвідношення (14) можна записати наступним чином:

$$H\left(\bar{\Psi}^*\left(t\right), \bar{Y}^*\left(t\right), t, u^*\left(t\right)\right) = \left(\bar{\Psi}^*, \bar{F}\left(t, \bar{Y}^*\left(t\right)\right)\right) + m_0\left|\left(\bar{\Psi}^*\left(t\right), \bar{c}\left(t\right)\right)\right|. \tag{20}$$

Якщо оптимальне керування $u^*\left(t\right)$ існує, то саме на ньому повинна виконуватися рівність (20). Отже, у тих точках, де $\left(\bar{\Psi}^*\left(t\right), \bar{c}\left(t\right)\right) \ne 0$, функція $u^*\left(t\right)$ задовольняє рівність

$$u^*\left(t\right) = m_0 \cdot \operatorname{sign}\left(\bar{\Psi}^*\left(t\right), \bar{c}\left(t\right)\right). \tag{21}$$

Тут $\operatorname{sign}\alpha = 1$ при $\alpha > 0$, $\operatorname{sign}\alpha = -1$ при $\alpha < 0$, $\operatorname{sign}\alpha = 0$ при $\alpha = 0$. У точках, де $\left(\bar{\Psi}^*\left(t\right), \bar{c}\left(t\right)\right) = 0$, функція H не залежить від $u^*\left(t\right)$, а умова (20) не визначає $u^*\left(t\right)$ у цих точках.

Доведемо рівність (21), а, отже, і рівність (20). Надамо оптимальному управлінню $u^*\left(t\right)$ приріст $\delta u\left(t\right)$, що задовольняє нерівність $\left|u^*\left(t\right) + \delta u\left(t\right)\right| \le m_0$. Функцію $\delta u\left(t\right)$ називають **допустимою варіацією оптимального управління.** Нехай векторна функція $\bar{Y}^*\left(t\right) + \delta\bar{Y}\left(t\right)$ є розв'язком системи (17) з початковими умовами $\bar{Y}^*\left(t_0\right) + \delta\bar{Y}\left(t_0\right) = \bar{A}$, який відповідає допустимому управлінню $u^*\left(t\right) + \delta u\left(t\right)$. Оскільки оптимальна траєкторія $\bar{Y}^*\left(t\right)$ задовольняє ті ж початкові умови, то $\delta\bar{Y}\left(t_0\right) = 0$. Функція $\bar{Y}^*\left(t\right) + \delta\bar{Y}\left(t\right)$ задовольняє рівняння

$$\frac{d\left(\bar{Y}^* + \delta Y\right)}{dt} = \bar{F}\left(t, \bar{Y}^*\left(t\right) + \delta Y\left(t\right)\right) + cu^*\left(t\right) + c\delta u\left(t\right). \tag{22}$$

Якщо $\delta u(t)$ є малим, то управління $u^*(t)+\delta u(t)$ мало відрізняється від оптимального управління $u^*(t)$. На скінченному проміжку часу розв'язок $\overline{Y}^*(t)+\delta\overline{Y}(t)$ мало відрізняється від $\overline{Y}^*(t)$, отже, варіація оптимальної траєкторії на скінченному інтервалі $[t_0,T]$ теж є малою. У рівнянні (22) векторну функцію $\overline{F}$ розкладемо у ряд Тейлора за степенями δy_i і відкинемо всі члени, що містять степені δy_i, що є вищими за перший (малі величини вищих порядків). Векторна функція $\overline{F}$ має своїми координатами функції $f_i\left(\overline{Y}^*(t),t\right)$. Перейшовши до скалярної форми запису, отримаємо:

$$\frac{d\left(y_i^*+\delta y_i\right)}{dt}\approx f_i\left(\overline{Y}^*(t),t\right)+\sum_{j=0}^{n}\frac{\partial f_i\left(\overline{Y}^*(t),t\right)}{\partial y_j}\delta y_j(t)+c_i u*(t)+c_i\delta u(t),\ i=0,1,...,n.$$

Оскільки $\frac{dy_i^*}{dt}=f_i\left(\overline{Y}^*(t),t\right)+c_i u^*(t)$, $i=0,1,...,n$, то маємо:

$$\frac{d\left(\delta y_i\right)}{dt}\approx\sum_{j=0}^{n}\frac{\partial f_i\left(\overline{Y}^*(t),t\right)}{\partial y_j}\delta y_j(t)+c_i\delta u(t),\ i=0,1,...,n. \tag{23}$$

Нехай $\overline{z}\left(z_0,z_1,...,z_n\right)$ є розв'язком системи

$$\frac{d\left(z_i\right)}{dt}=\sum_{j=0}^{n}\frac{\partial f_i\left(\overline{Y}^*(t),t\right)}{\partial y_j}z_j(t)+c_i\delta u(t),\ z_i\left(t_0\right)=0,\ i=0,1,...,n. \tag{24}$$

При малих δu розв'язок $\overline{z}(t)$ на інтервалі $[t_0,T]$ відрізняється від $\delta\overline{Y}(t)$ на нескінченно малу вищого порядку, ніж δu. Систему (24) називають **системою у варіаціях**. З'ясуємо деякі властивості розв'язків системи у варіаціях.

Нехай t_1 – довільний фіксований момент часу з проміжку $[t_0,T]$. Розглянемо множину допустимих варіацій оптимального управління $\delta u(t)$. Кожній допустимій варіації відповідає вектор $\overline{z}(t_1)$ – значення розв'язку системи у варіаціях (24) у момент t_1.Початок цього вектора розташуємо у точці $\overline{Y}^*(t_1)$ оптимальної траєкторії. Позначимо $G(t_1)$ множину точок, що відповідає кінцям векторів $\overline{z}(t_1)$. Варіації $\delta u=0$ відповідає точка $\overline{Y}^*(t_1)$ цієї множини.

Доведемо, що множина $G(t_1)$ володіє наступною властивістю: якщо $\overline{z}_1(t_1)$ та $\overline{z}_2(t_1)$ – довільні точки множини $G(t_1)$, то й будь-яка точка відрізка, що з'єднує $\overline{z}_1(t_1)$ та $\overline{z}_2(t_1)$, також належить $G(t_1)$, тобто $G(t_1)$ є опуклою множиною. Нехай довільно вибрані точки $\overline{z}_1(t_1)$ та $z_2(t_1)$ визначаються відповідно варіаціями $\delta u_1(t)$ та $\delta u_2(t)$. Точка $\overline{z}_\lambda(t_1)=\lambda\overline{z}_1(t_1)+(1-\lambda)\overline{z}_2(t_1)$, $0\le\lambda\le 1$, лежить на відрізку, що з'єднує точки $\overline{z}_1(t_1)$ та $\overline{z}_2(t_1)$ і при зміні λ від 0 до 1 пробігає всі точки цього відрізка. Функція $\overline{z}_\lambda(t) = \lambda \overline{z}_1(t) + (1-\lambda)\overline{z}_2(t)$ – це лінійна комбінація розв'язків системи у варіаціях. Оскільки ця система є лінійною, то $\overline{z}_\lambda(t)$ також є розв'язком що відповідає варіації оптимального управління $\lambda \delta u_1(t) + (1-\lambda)\delta u_2(t)$. Оскільки $\overline{z}_1(t_0) = 0$, $\overline{z}_2(t_0) = 0$, то й $\overline{z}_\lambda(t_0) = 0$. Отже, функція $\overline{z}_\lambda(t)$ задовольняє початкові умови для системи у варіаціях. Перевіримо, що варіація управління $\lambda \delta u_1(t) + (1-\lambda)\delta u_2(t)$ є допустимою. Це випливає з нерівності:

$$\begin{aligned}&\left|u^* + \lambda \delta u_1 + (1-\lambda)\delta u_2\right| = \left|\lambda\left(u^* + \delta u_1\right) + (1-\lambda)\left(u^* + \delta u_2\right)\right| \le \\ &\le \lambda\left|u^* + \delta u_1\right| + (1-\lambda)\left|u^* + \delta u_2\right| \le m_0.\end{aligned}$$

Таким чином, точка $\overline{z}_\lambda(t_1)$ належить опуклій множині $G(t_1)$.Множина $G(t_1)$ є обмеженою, оскільки обмеженими є варіації $\delta u(t)$, тобто й розв'язки $\overline{z}(t_1)$ системи (24).

Розглянемо кінцевий момент часу T. У цей момент оптимальна траєкторія перетне пряму П (див. п.4). Доведемо наступне твердження відносно множини $G(T)$: скінченна точка $\overline{Y}^*(T)$ оптимальної траєкторії знаходиться на межі множини $G(T)$.

Нехай вірним є протилежне твердження: $\overline{Y}^*(T)$ – внутрішня точка множини $G(T)$. Оскільки пряма П проходить через $\overline{Y}^*(T)$ паралельно осі y_0, то існує відрізок L цієї прямої з кінцевою точкою $\overline{Y}^*(T)$, всі точки якого належать $G(T)$ і мають координату y_0 меншу, ніж координата y_0^* точки $\overline{Y}^*(T)$. При малих значеннях $\delta u(t)$ точки $\delta \overline{Y}(t)$ відрізняються від відповідних точок $\overline{z}(t)$ на нескінченно малу вищого порядку, ніж $\delta u(t)$. Поверхні S сфери з центром у точці $\overline{Y}^*(T)$ та малим радіусом ε, яка складається з точок $\overline{z}(t)$ множини $G(T)$, відповідає замкнена поверхня S_1, яка складається з точок $\delta \overline{Y}(t)$, відстань яких від відповідних точок $\overline{z}(t)$ з S є нескінченно малою вищого порядку, ніж ε. Тому поверхню S_1, як і S, перетинає відрізок L. Проте, якщо траєкторія $\overline{Y}^*(t) + \delta \overline{Y}(t)$, що відповідає допустимій варіації $u^* + \delta u$, перетинає пряму П у точці $\overline{Y}^*(T) + \delta \overline{Y}(T)$ з координатою y_0, меншою, ніж координата $y_0^*(T)$ точки $\overline{Y}^*(T)$, то це суперечить оптимальності траєкторії $\overline{Y}^*(t)$. Отже, точка $\overline{Y}^*(T)$ розташована на межі опуклої множини $G(T)$.

Для подальшого доведення використаємо наступну теорему з теорії опуклих множин: через довільну точку межі опуклої множини можна провести хоча б одну гіперплощину, таку, що всі точки множини лежать по один бік від неї. Цю гіперплощину називають опорною.

Через точку $\overline{Y}^*(T)$ межі проведемо гіперплощину N, опорну до опуклої множини $G(T)$. Нехай $\overline{R}$ – вектор, що проходить через $\overline{Y}^*(T)$, ортогональний до N та спрямований у сторону, протилежну тій, де розташована множина $G(T)$. При цьому скалярний добуток вектора $\overline{z}(T)$ з початком у точці $\overline{Y}^*(T)$ та кінцем у довільній точці з $G(T)$ та вектора $\overline{R}$

$$\overline{z}(T)\cdot\overline{R}\le 0. \tag{25}$$

Ця нерівність відображає необхідну умову оптимальності траєкторії.

Розв'язок лінійної неоднорідної системи (24) має вигляд:

$$\overline{z}(t)=\int_{t_0}^{T}\sum_{j=0}^{n}\xi_j(T)\cdot\left(\overline{c}\cdot\overline{\eta}_j\right)\delta u(t)\,dt. \tag{26}$$

Тут $\xi_j(t)$, $j=0,1,...,n$, – фундаментальна система розв'язків однорідної системи рівнянь

$$\frac{dz_i}{dt}=\sum_{j=0}^{n}\frac{\partial f_i\left(t,\overline{Y}^*(t)\right)}{\partial y_j}z_j,\ i=0,1,...,n. \tag{27}$$

Функції $\overline{\eta}_j(t)$ утворюють фундаментальну систему розв'язків для системи (12), спряженої з системою (27). Враховуючи рівність (26), скалярний добуток $\overline{z}(T)\cdot\overline{R}$ можна записати у наступному вигляді:

$$\begin{gathered}\overline{z}(T)\cdot\overline{R}=\int_{t_0}^{T}\left(\sum_{j=0}^{n}\overline{\xi}_j(t)\left(\overline{c}(t)\cdot\overline{\eta}_j(t)\right)\cdot\overline{R}\right)\delta u(t)\,dt=\\ =\int_{t_0}^{T}\sum_{j=0}^{n}\left(\overline{\xi}_j(T)\cdot\overline{R}\right)\left(\overline{\eta}_j(t)\cdot\overline{c}(t)\right)\delta u(t)\,dt=\\ =\int_{t_0}^{T}\left(\sum_{j=0}^{n}\left(\overline{\xi}_j(t)\cdot\overline{R}\right)\overline{\eta}_j(t)\cdot\overline{c}(t)\right)\delta u(t)\,dt=\int_{t_0}^{T}\left(\overline{\Psi}^*(t)\cdot\overline{c}(t)\right)\delta u(t)\,dt.\end{gathered} \tag{28}$$

У рівностях (28)

$$\overline{\Psi}^*(t)=\sum_{j=0}^{n}\left(\overline{\xi}_j(T)\cdot\overline{R}\right)\overline{\eta}_j(t). \tag{29}$$

Вектор $\overline{\Psi}^*(t)$ є лінійною комбінацією векторів $\overline{\eta}_j(t)$, тобто є розв'язком системи (12). Цей розв'язок не є тривіальним, оскільки у силу лінійної незалежності векторів $\overline{\eta}_j(t)$ тотожність $\overline{\Psi}^*(t) \equiv \overline{0}$ матиме місце лише у випадку, коли всі коефіцієнти $\left(\overline{\xi}_j(T) \cdot \overline{R}\right)$ дорівнюють нулю. Проте це неможливо, оскільки $\overline{R} \neq \overline{0}$ і вектори $\overline{\xi}_j(t)$ є лінійно незалежними.

Доведемо, що оптимальне управління $u^*(t)$ задовольняє співвідношення (21). Нехай на якомусь проміжку $[t_1, t_2] \subset [t_0, T]$ ця рівність не виконується, наприклад, $\overline{\Psi}^*(t) \cdot \overline{c}(t) > 0$, а $u^*(t) < m_0$ при $t \in [t_1, t_2]$. У цьому випадку на $[t_1, t_2]$ допустима варіація оптимального управління може набувати додатних значень. Нехай

$$\delta u(t) = \alpha > 0 \text{ при } t \in [t_1, t_2],\ \delta u(t) = 0 \text{ при } t \notin [t_1, t_2]. \tag{30}$$

Тут α – достатньо мале число, $u^*(t) < m_0$. Така варіація є допустимою. З (28) та (30) випливає, що $\overline{R} \cdot \overline{z}(T) = \int\limits_{t_1}^{t_2} \left(\overline{c}(t) \cdot \overline{\Psi}^*(t)\right) \alpha dt > 0$. Остання нерівність суперечить (25). Таким чином, доведено формулу (21).

Отже, доведення принципу максимуму складається з наступних етапів.

1. Встановлюється зв'язок між допустимою варіацією оптимального управління та відповідною варіацією оптимальної траєкторії у довільний момент часу t.
2. Доводять, що множина $G(T)$ варіацій $\overline{z}(T)$ оптимальної траєкторії у точці $\overline{Y}^*(T)$ кінця оптимальної траєкторії є опуклою, а точка $\overline{Y}^*(T)$ лежить на межі цієї множини.
3. У точці $\overline{Y}^*(T)$ проводять гіперплощину N так, що множина $G(T)$ розташована по одну сторону від неї. Вектор $\overline{R}$, проведений у точці $\overline{Y}^*(T)$ перпендикулярно до N і спрямований у іншу сторону, утворює з варіацією $\overline{z}(T)$ тупий кут, тобто $\overline{z}(T) \cdot \overline{R} \leq 0$.
4. Використовуючи цю нерівність та інтегральну форму розв'язку системи рівнянь у варіаціях, доводять формулу (21).

6. Задачі з вільним та рухомим кінцями. Умови трансверсальності

У сформульованій раніше задачі з вільним кінцем, відсутні обмеження на положення кінцевої точки оптимальної траєкторії, тобто рівняння (11) та (12) мають лише $n+1$ крайову умову, задану у початковий момент часу t_0. Отримаємо відсутні ще $n+1$ крайову умову.

Для задачі з вільною межею у якості опорної до множини $G(T)$ гіперплощини N можна вибрати гіперплощину, що проходить через точку $\overline{Y}^*(T)$ та є ортогональною до координатної осі y_0, а у якості вектора $\overline{R}$ – вектор, спрямований вздовж осі y_0 у від'ємну сторону, тобто це вектор з координатами $(-1, 0, ..., 0)$, Дійсно, якщо у малому околі точки $\overline{Y}^*(T)$ знайдеться точка $\overline{z}(T)$, розташована з тієї ж сторони від N, що й кінець вектора $\bar{R}$, то існує траєкторія $\bar{Y}^*(T)+\delta\bar{Y}^*(t)$, що відповідає допустимому керуванню $u^*(t)+\delta u(t)$, для якої у момент часу T координата y_0 є меншою, ніж координата $y_0^*(T)$ точки $\bar{Y}^*(T)$. Оскільки ніяких обмежень на інші координати $\bar{Y}^*(T)+\delta\bar{Y}^*(t)$ не накладено, то ця траєкторія є допустимою, що суперечить оптимальності $\bar{Y}^*(T)$.

Помножимо обидві частини рівності (29), що визначає вектор $\bar{\Psi}^*(T)$, скалярно на $\xi_k(T)$. Скалярний добуток $\bar{\xi}_k(T)\cdot\bar{\eta}_j(T)=\delta_{kj}$, де δ_{kj} – символ Кронекера. Тому виконується рівність $\bar{\Psi}^*(T)\cdot\bar{\xi}_k(T)=\bar{R}\cdot\bar{\xi}_k(T)$. Її можна записати у вигляді:

$$\left(\bar{\Psi}^*(T)-\bar{R}\right)\cdot\bar{\xi}_k(T)=0,\ k=0,1,...,n. \tag{31}$$

Розв’язки $\bar{\xi}_k(T)$ системи (27) утворюють фундаментальну систему розв’язків. Визначник Вронського цієї системи у точці $t=T$ не дорівнює нулю, отже, лінійна однорідна система алгебраїчних рівнянь (31) може мати лише тривіальний розв’язок, тобто $\bar{\Psi}^*(T)-\bar{R}=\bar{0}$, Отже, відсутні крайові умови у задачі з вільним кінцем визначаються рівностями

$$\psi_0^*(T)=-1,\psi_1^*(T)=0,...,\psi_n^*(T)=0. \tag{32}$$

Для задачі з рухомим кінцем відсутня частина крайових умов у кінцевій точці. Їх заміняють **умови трансверсальності**. Нехай $\varphi(y_1,y_2,...,y_n)$ – поверхня, на якій повинна бути розташована кінцева точка оптимальної траєкторії. Вектор $\bar{\Psi}^*(T)$ з координатами $\left(\psi_1^*(T),\psi_2^*(T),...,\psi_n^*(T)\right)$ повинний бути ортогональним до дотичної площини до поверхні φ, проведеної у точці $\bar{y}^*(T)=\left(y_1^*(T),y_2^*(T),...,y_n^*(T)\right)$.

Як відомо, вектор $\operatorname{grad}\varphi=\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_1},\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_2},...,\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_n}\right)$ є ортогональним до дотичної гіперплощини. Тому умову трансверсальності можна сформулювати наступним чином. Вектор $\bar{\Psi}^*(T)$ та вектор $\operatorname{grad}\varphi$, обчислений у точці $\bar{y}^*(T)=\left(y_1^*(T),y_2^*(T),...,y_n^*(T)\right)$, повинні бути колінеарними, тобто $\bar{\Psi}^*(T)=\lambda\operatorname{grad}\varphi$.

Приклад. Нехай S – сфера одиничного радіусу з центром у початку координат. Її рівняння має вигляд: $\varphi=y_1^2+y_2^2+...+y_n^2-1=0$. У цьому випадку $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_i}=2y_i$, $i=1,2,...,n$. Отже, крайові умови трансверсальності повинні мати вигляд: $\psi_i^*(T)=\lambda y_i(T)$, $i=1,2,...,n$, де λ – довільне додатне число.

7. Задача про оптимальну швидкодію у лінійних системах

Задачу оптимальної швидкодії сформульовано у п.2. Розглянемо випадок, коли об'єкт керування описується системою лінійних диференціальних рівнянь

$$\frac{d\overline{y}}{dt} = A(t)\overline{y} + \overline{c}(t)u. \tag{33}$$

Тут $A(t) = \{a_{ij}\}$ – квадратна матриця розмірності $n \times n$, $\overline{y}(t)$, $\overline{c}(t)$ – n – вимірні вектори, $u(t)$ – скалярна функція. Управління $u(t)$ обмежене умовою

$$\left|u(t) \le 1\right|. \tag{34}$$

Початкове та кінцеве положення системи задаються рівностями

$$\overline{y}(0) = \overline{a},\ \overline{y}(T) = \overline{0}. \tag{35}$$

Потрібно знайти оптимальне управління $u^*(t)$, яке переводить систему (33) з початкового положення у кінцеве за найменший час. Функціоналом якості у даному випадку є час T. Тому у формулі (3) $f_0 \equiv 1$, $J = T$. Оптимальну траєкторію, що відповідає управлінню $u^*(t)$, позначимо $\overline{y}^*(t)$. Сформулюємо для даного випадку принцип максимуму. Вектор – функція $\overline{\Psi}(\psi_0, \psi_1, ..., \psi_n)$ задовольняє систему (12). Ця система для даної задачі має вигляд:

$$\psi_0' = 0,\ \psi_i' = -\sum_{j=1}^{n} a_{ji}(t)\psi_j,\ i = 1,2,...,n. \tag{36}$$

Вектор з координатами $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n$ позначимо $\overline{\psi}$. Останні n рівнянь у (36) можна записати у векторній формі:

$$\overline{\psi}' = -A^T(t)\psi. \tag{37}$$

Тут A^T – матриця, транспонована з A. Функція $H(\overline{\Psi}, \overline{Y}, u, t)$ має вигляд:

$$H(\overline{\Psi}, \overline{Y}, u, t) = \sum_{i=0}^{n} \psi_i f_i = \psi_0 + \overline{\psi} \cdot \left(A^T \overline{Y}\right) + \overline{\psi} \cdot \left(u(t)\overline{c}(t)\right).$$

З (34) та співвідношення (14) принципу максимуму випливає:

$$M\left(\overline{\Psi}^*, \overline{Y}^*, t\right) = \max_u H = \psi_0^* + \overline{\psi}^* \cdot \left(A^T \overline{Y}^*\right) + \overline{\psi}^* \cdot \overline{c}(t).$$

Таким чином, оптимальне керування $u^*(t)$ задовольняє рівності:

$$u^*(t) = \operatorname{sign}\left(\overline{\psi}^*(t) \cdot \overline{c}(t)\right). \tag{38}$$

Формула (38) не визначає $u^*(t)$ для тих значень t, де $\overline{\psi}(t) \cdot \overline{c}(t) = 0$, проте виконується наступна теорема.

<u>Теорема 2.</u> Нехай $\overline{\psi}(t)$ – довільний нетривіальний розв'язок системи (37). Функція $\overline{\psi}(t) \cdot \overline{c}(t)$ на будь-якому інтервалі $[0;T]$ дорівнює нулю лише у скінченній кількості точок, якщо виконується умова «спільності положення»: для будь-якого моменту часу t вектори

$$\overline{c}^0(t) = \overline{c}(t),\ \overline{c}^i(t) = -A(t)\overline{c}^{i-1}(t) + \frac{d\overline{c}^{i-1}}{dt},\ i = 1, 2, ..., n. \tag{39}$$

є лінійно незалежними.

Таким чином, функція $u^*(t)$ не визначена лише у скінченній кількості точок, при цьому значення $u^*(t)$ у цих точках не впливають на вигляд оптимальної траєкторії.

Доведення. Допустимо, що на відрізку $[0;T]$ існує нескінченна послідовність точок t_0, t_1, …, у яких функція $v(t) = \overline{\psi}(t) \cdot \overline{c}(t)$ дорівнює нулю. Тоді існує точка $t^* \in [0;T]$, у довільному як завгодно малому околі якої є точки з цієї послідовності. Оскільки $v(t)$ – неперервна функція, то $v(t^*) = 0$. Між будь-якими двома нулями функції $v(t)$ розташований нуль її похідної $v'(t)$. Отже, у будь-якому як завгодно малому околі точки t^* знайдуться нулі функції $v'(t)$. З її неперервності випливає, що $v'(t^*) = 0$. Аналогічно отримуємо, що у точці t^* повинні виконуватися рівності $v(t^*) = v'(t^*) = v''(t^*) = ... = v^{(n-1)}(t^*) = 0$. Знайдемо похідні функції $v(t)$. Враховуючи, що $\overline{\psi}(t)$ є розв'язком системи (37), маємо:

$$v'(t) = \overline{\psi}' \cdot \overline{c} + \overline{\psi} \cdot \overline{c}' = \left(-A^*\overline{\psi}\right) \cdot \overline{c}^0 + \overline{\psi} \cdot \left(\overline{c}^0\right)' = \overline{\psi} \cdot \left(\left(-A\overline{c}^0 + \left(\overline{c}^0\right)'\right)\right) = \overline{\psi} \cdot \overline{c}^0.$$

Аналогічно отримуємо $v^{(k)}(t) = \overline{\psi} \cdot \overline{c}^k$, $k = 2, 3, ..., n$.

Умова «спільності положення» виконується у будь-якій точці з $[0;T]$. Тому з рівностей $\overline{\psi}(t^*) \cdot \overline{c}^k(t^*) = 0$ та лінійної незалежності векторів $\overline{c}^k(t^*)$

$(k=0,1,2,...,n-1)$ випливає, що $\overline{\psi}(t^*)=0$. Проте розв'язок $\overline{\psi}(t)$ однорідної системи рівнянь (37), що задовольняє у точці $\overline{\psi}(t^*)$ умову $\overline{\psi}(t^*)=0$, тотожно дорівнює нулю, що суперечить умові теореми.

З формули (38) та теореми 2 випливає, що оптимальне управління $u^*(t)$ приймає лише граничні значення та має на проміжку $[0;T]$ лише скінченну кількість точок розриву першого роду.

Будь-яке допустиме керування $u(t)$, що задовольняє співвідношення $u(t)=\operatorname{sign}(\psi(t)\cdot\overline{c}(t))$, де $\overline{\psi}(t)$ – довільний розв'язок системи (37), називають **екстремальним**. З принципу максимуму випливає, що оптимальне керування є екстремальним.

Теорема 3. Нехай екстремальне керування $u^*(t)$ переводить систему з початкової точки $\overline{a}$ у початок координат за час T. Тоді: а) $u^*(t)$ є оптимальним керуванням; б) будь-яке допустиме керування $u(t)$, що переводить систему з початкової точки $\overline{a}$ у початок координат за час T, співпадає з $u^*(t)$.

Таким чином, для задачі оптимальної швидкодії у лінійних системах співвідношення (38) принципу максимуму є не лише необхідною, але й достатньою умовою оптимальності керування.

Доведення. Нехай керування $u^{\circ}(t)$, що відрізняється від $u^*(t)$, переводить систему (33) з точки $\overline{a}$ у початок координат за час $T_1<T$. Для керувань $u^{\circ}(t)$ та $u^*(t)$ у моменти часу T та T_1 виконуються співвідношення:

$$\sum_{j=1}^{n}\overline{\xi}_j(T)\left(a_j+\int_0^T(\overline{\eta}_j(t)\cdot\overline{c}(t))u^*(t)dt\right)=0,$$
$$\sum_{j=1}^{n}\overline{\xi}_j(T_1)\left(a_j+\int_0^{T_1}(\overline{\eta}_j(t)\cdot\overline{c}(t))u^{\circ}(t)dt\right)=0.$$

Тут $\overline{\xi}_j(t)$, $\eta_j(t)$, $j=1,2,...,n$, – нормальні фундаментальні системи розв'язків однорідних систем:

$$\overline{\xi}'=A\overline{\xi}\,,\ \overline{\eta}'=-A^*\overline{\eta}\,. \tag{40}$$

Друге з векторних рівнянь (40) збігається з системою (37).

З лінійної незалежності кожної з систем векторів $\overline{\xi}_j(T)$, $\overline{\xi}_j(T_1)$, $j=1,2,...,n$, випливає, що виконуються рівності:

$$\int_0^T(\overline{\eta}_j(t)\cdot\overline{c}(t))u^*(t)dt=\int_0^{T_1}(\overline{\eta}_j(t)\cdot\overline{c}(t))u^{\circ}(t)dt=-a_j\,,\ j=1,...,n. \tag{41}$$

Вектор $\overline{\psi}^*(t)$ у формулі (38) можна представити у вигляді лінійної комбінації векторів фундаментальної системи розв'язків векторного рівняння $\overline{\eta}' = -A^*\overline{\eta}$, тобто:

$$\overline{\psi}^*(t) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \overline{\eta}_j(t). \tag{42}$$

Помноживши кожну з рівностей (41) на α_j і додаючи їх, отримуємо, згідно з (42), рівність

$$\int_0^T \left(\overline{\psi}(t)\cdot\overline{c}(t)\right)u^*(t)dt = \int_0^{T_1}\left(\overline{\psi}(t)\cdot\overline{c}(t)\right)u^{\circ}(t)dt. \tag{43}$$

Для будь-якого моменту часу t маємо:

$$\left(\overline{\psi}(t)\cdot\overline{c}(t)\right)u^*(t) = \left|\overline{\psi}(t)\cdot\overline{c}(t)\right| \geq \left(\overline{\psi}(t)\cdot\overline{c}(t)\right)u^{\circ}(t).$$

Рівність (43) запишемо у наступному вигляді:

$$\int_0^{T_1}\left(\overline{\psi}(t)\cdot\overline{c}(t)\right)\left(u^*(t)-u^{\circ}(t)\right)dt + \int_{T_1}^{T}\left|\overline{\psi}(t)\cdot\overline{c}(t)\right|dt = 0. \tag{44}$$

З (38) випливає, що підінтегральний вираз у кожному з цих інтегралів є невід'ємним. Оскільки виконується умова «спільності положення», то, за теоремою 2, рівність $\overline{\psi}(t)\cdot\overline{c}(t)=0$ може виконуватися лише у скінченній кількості точок. Якщо $T_1 \neq T$ і на відрізку $[0;T_1]$ керування $u^{\circ}(t)$ не співпадає з $u^*(t)$, то у (44) ліва частина є додатною. Отримана суперечність доводить теорему.

Отже, якщо існує екстремальне керування, що переводить фазову точку з положення $\overline{a}$ у початок координат, то це керування обов'язково є оптимальним.

8. Динамічне програмування

Для розв'язання задач оптимального керування американський математик Р. Беллман розробив метод, названий ним **динамічним програмуванням**. Розглянемо задачу оптимального керування з обмеженими фазовими координатами, рухомим кінцем та фіксованим часом (див. п.2). У цій задачі значення кусочно-неперервного керування $\overline{u}(\tau)$ належать замкненій обмеженій множині U. Траєкторія $\overline{y}(\tau)$, що відповідає керуванню $\overline{u}(\tau)$ згідно з рівнянням $\overline{y}' = f\left(\tau,\overline{y}(\tau),\overline{u}(\tau)\right)$, не повинна виходити з області G, що містить початкову точку $\overline{a}$ та область g, у яку повинна попасти траєкторія у кінцевий фіксований момент часу T. Потрібно знайти оптимальне керування $\overline{u}^*(\tau)$ та траєкторію $\overline{y}^*(\tau)$, що мінімізують функціонал

$$\int_0^T f_0\left(\tau,\overline{y}(\tau),\overline{u}(\tau)\right)d\tau. \tag{45}$$

Умови, які повинні задовольняти $\overline{u}(\tau)$ та $\overline{y}(\tau)$, запишемо у вигляді:

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{y}}{d\tau} = \overline{f}\left(\tau,\overline{y}(\tau),\overline{u}(\tau)\right), \\ \overline{y}(0) = \overline{a} \in G, \overline{y}(T) \in g \subset G, \overline{y}(\tau) \in G, \\ \overline{u}(\tau) \in U, 0 \le \tau \le T. \end{cases} \tag{46}$$

Тут $\overline{y}$ та $\overline{f}$ – n – вимірні вектори, $\overline{u}$ – r – вимірний вектор, f_0 – скалярна функція.

Замість сформульованої вихідної задачі розглянемо більш загальну задачу. Нехай t – довільна точка з відрізка $[0;T]$, $\overline{y}$ – довільна точка з G. Потрібно знайти оптимальне керування $\overline{u}(\tau,t,\overline{y})$ та траєкторію, що відповідає цьому керуванню, які мінімізують функціонал

$$\int_t^T f_0\left(\tau,\overline{y}(\tau),\overline{u}(\tau)\right)d\tau \tag{47}$$

за умов

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{y}}{d\tau} = \overline{f}\left(\tau,\overline{y}(\tau),\overline{u}(\tau)\right), \\ \overline{y}(t) = \overline{y} \in G, \overline{y}(T) \in g \subset G, \overline{y}(\tau) \in G, \\ \overline{u}(\tau) \in U, t \le \tau \le T. \end{cases} \tag{48}$$

Мінімум функціонала (47) за умов (48) залежить від початкового моменту часу t та початкової точки $\overline{y}$. Позначимо цей мінімум $S(t,\overline{y})$ Взагалі функція $S(t,\overline{y})$ визначена не для всіх t з $[0;T]$ та $\overline{y}$ з G. Для деяких пар $t,\overline{y}$ може не існувати допустимого керування, що задовольняє (48).

Нехай $S(t,\overline{y})$ та $\overline{u}(\tau,t,\overline{y})$ знайдені. Якщо функція $S(t,\overline{y})$ визначена при $t=0$, $\overline{y}=\overline{a}$, то $S(0,\overline{a})$ є мінімумом функціонала (45) за умови (46), тобто це мінімум функціонала у вихідній задачі. Керування $\overline{u}(\tau,0,\overline{a})$ є шуканим оптимальним керуванням $\overline{u}^*(\tau)$. Сформульована тут більш загальна у порівнянні з вихідною задача пошуку оптимального керування є важливою для практики також і тому, що у реальних умовах початкове положення траєкторії та початковий момент часу часто точно не відомі.

9. Принцип оптимальності у динамічному програмуванні

Нехай $\bar{y}(t_0)=\bar{b}_0 \in G$ – задані початкові умови у момент часу t_0, $\bar{u}(\tau,t_0,\bar{b}_0)$ – оптимальне управління, на якому досягається мінімум $S(t_0,\bar{b}_0)$ функціонала (47), $\bar{y}(\tau,t_0,\bar{b}_0)$ – оптимальна траєкторія, що відповідає оптимальному управлінню $\bar{u}(\tau,t_0,\bar{b}_0)$. Виберемо довільний момент часу t_1, $t_0<t_1<T$, і позначимо $\bar{b}_1$ точку $\bar{b}_1=\bar{y}(t_1,t_0,\bar{b}_0)$ на оптимальній траєкторії $\bar{y}(\tau,t_0,\bar{b}_0)$. Виконується наступне твердження. *Якщо прийняти значення t_1, $\bar{b}_1$ як початкові, то на інтервалі $[t_1;T]$ оптимальне управління $\bar{u}(\tau,t_1,\bar{b}_1)$ співпадає з оптимальним управлінням $\bar{u}(\tau,t_0,\bar{b}_0)$, тобто частина оптимальної траєкторії $\bar{y}(\tau,t_0,\bar{b}_0)$ для задачі з початковою точкою $t_0,\bar{b}_0$ на інтервалі $[t_1;T]$ співпадає з оптимальною траєкторією для задачі з початковою точкою $t_1,\bar{b}_1$.* Це твердження називають **принципом оптимальності** у динамічному програмуванні.

Доведемо принцип оптимальності. Якщо $S(t_1,\bar{b}_1)$ не досягається на керуванні $\bar{u}(\tau,t_0,\bar{b}_0)$, а реалізується на якій-небудь іншій функції $\bar{v}^{\circ}(\tau)$, якій відповідає траєкторія $\bar{y}^{\circ}(\tau)$, то, вважаючи $\bar{v}(\tau)=\bar{u}(\tau,t_0,\bar{b}_0)$ при $t\in[t_{0,}\,t_1)$, $\bar{v}(\tau)=\bar{v}^{\circ}(\tau)$ при $t\in[t_1;T]$, отримуємо:

$$\int_{t_0}^{t_1} f_0\left(\tau,\bar{y}(\tau),\bar{u}(\tau,t_0,\bar{b}_0)\right)d\tau+\int_{t_1}^{T} f_0\left(\tau,\bar{y}^{\circ}(\tau),\bar{v}^{\circ}(\tau)\right)d\tau<\int_{t_0}^{t_1} f_0\left(\tau,\bar{y}(\tau),\bar{u}(\tau,t_0,\bar{b}_0)\right)d\tau+$$
$$+\int_{t_1}^{T} f_0\left(\tau,\bar{y}(\tau),\bar{u}(\tau,t_0,\bar{b}_0)\right)d\tau=S(t_0,\bar{b}_0),$$

що суперечить припущенню про оптимальність $\bar{u}(\tau,t_0,\bar{b}_0)$.

З формулювання принципу оптимальності випливає, що для визначення функції $S(t,\bar{y})$ не обов'язково знаходити керування $\bar{u}(\tau,t,\bar{y})$ на всьому інтервалі $[t;T]$, достатньо для довільної точки t, $\bar{y}$ обчислити значення $\bar{u}(t,t,\bar{y})\equiv\bar{u}(t,\bar{y})$. Підставивши $\bar{u}(t,\bar{y})$ у (48) та розв'язавши отримане рівняння, можна знайти оптимальну траєкторію.

Розглянемо наближений спосіб визначення функції $S(t,\bar{y})$, оскільки для загальної задачі оптимального управління вираз для цієї функції у явній аналітичній формі не знайдено. Нехай t – фіксований момент часу, Δt – мале додатне число, $0 < t + \Delta t < T$. Вираз для $S(t,\overline{y})$ можна записати у наступному вигляді:

$$S(t,\overline{y}) = \min_{\overline{u}(\tau)} \left\{ \int_{t}^{t+\Delta t} f_0\left(\tau,\overline{y}(\tau),\overline{u}(\tau)\right) d\tau + \int_{t+\Delta t}^{T} f_0\left(\tau,\overline{y}(\tau),\overline{u}(\tau)\right) d\tau \right\}, \qquad (49)$$

де функції $\overline{u}(\tau)$ та $\overline{y}(\tau)$ пов'язані умовами (48).

Поведінка керування $\overline{u}(\tau)$ на проміжку $(t+\Delta t;T]$ не впливає на величину першого інтеграла у (49). Тому $\overline{u}(\tau)$ на $(t+\Delta t;T]$ вибирається так, щоб мінімізувати другий інтеграл у (49) при

$$\overline{u}(\tau) \in U, \overline{y}(\tau) \in G, t + \Delta t \le \tau \le T, \overline{y}(T) \in g. \qquad (50)$$

Співвідношення (49) можна записати наступним чином:

$$S(t,\overline{y}) = \min_{\overline{u}(\tau)} \left\{ \int_{t}^{t+\Delta t} f_0\left(\tau,\overline{y}(\tau),\overline{u}(\tau)\right) d\tau + S\left(t+\Delta t,\overline{y}(t+\Delta t)\right) \right\}. \qquad (51)$$

У (51) управління $\overline{u}(\tau)$ на відрізку $[t;t+\Delta t]$ потрібно вибрати так, щоб мінімізувати вираз у фігурних дужках. Від поведінки $\overline{u}(\tau)$ на $[t;t+\Delta t]$ залежить не лише інтеграл у (51), але й величина $S\left(t+\Delta t,\overline{y}(t+\Delta t)\right)$, оскільки $\overline{y}(t+\Delta t)$ – це значення у момент часу $t+\Delta t$ розв'язку рівняння $\overline{y}' = \overline{f}\left(\tau,\overline{y}(\tau),\overline{u}(\tau)\right)$ з початковою умовою $\overline{y}(t) = \overline{y}$. Замінимо на малому відрізку $[t;t+\Delta t]$ вектор – функцію $\overline{f}\left(\tau,\overline{y}(\tau),\overline{u}(\tau)\right)$ та функцію $f_0\left(\tau,\overline{y}(\tau),\overline{u}(\tau)\right)$ їх значеннями у точці t, а похідну $\overline{y}'(\tau)$ – скінченною різницею $\dfrac{\overline{y}(t+\Delta t) - \overline{y}(t)}{\Delta t}$. Тоді вираз (51) та значення $\overline{y}(t+\Delta t)$ можна наближено записати у вигляді:

$$S(t,\overline{y}) \approx \min_{\overline{u}(\tau)} \left\{ f_0\left(t,\overline{y},\overline{u}(t)\right)\Delta t + S\left(t+\Delta t,\overline{y}+\Delta\overline{y}\right) \right\}, \qquad (52)$$

$$\overline{y} + \Delta\overline{y} = \overline{y}(t+\Delta t) \approx \overline{y}(t) + \Delta t \cdot \overline{f}\left(t,\overline{y}(t),\overline{u}(t)\right) = \overline{y} + \Delta t \cdot \overline{f}\left(t,\overline{y},\overline{u}(t)\right). \qquad (53)$$

Використовуючи ці формули, знайдемо наближене значення $S(t,\overline{y})$. Для кінцевого моменту часу T та довільних $\overline{y} \in g$ з (47) та (48) випливає, що

$$S(t,\overline{y}) = 0, \quad \overline{y} \in g. \qquad (54)$$

Тому знаходження $S(t,\overline{y})$ почнемо з кінцевого моменту часу T та області g.

Перший крок. Розглянемо момент часу $t = T - \Delta t$. Для моменту $t + \Delta t = T$ величина $\overline{y} + \Delta\overline{y}$ за крайовою умовою належить області g. Підставивши у (52) та (53) значення $t = T - \Delta t$, та враховуючи (54), отримуємо:

$$S\left(T - \Delta t, \overline{y}\right) = \min f_0\left(T - \Delta t, \overline{y}, \overline{u}\left(T - \Delta t\right)\right) \cdot \Delta t, \tag{55}$$

$$\overline{y} + \Delta\overline{y} = \overline{y} + \Delta t \cdot \overline{f}\left(T - \Delta t, \overline{y}, \overline{u}\left(T - \Delta t\right)\right). \tag{56}$$

Зафіксуємо довільне $\overline{y} \in G$. Мінімум у правій частині (55) обчислюємо для тих значень $\overline{u}\left(T - \Delta t\right) \in U$, для яких точка $\overline{y} + \Delta\overline{y}$, що визначається рівністю (56), належить множині g. Якщо для якої-небудь точки $\overline{y}^{\circ} \in G$ таких значень $\overline{u}\left(T - \Delta t\right)$ не існує, то функція $S\left(T - \Delta t, \overline{y}\right)$ не визначена у точці $\overline{y}^{\circ}$. Таким чином, за значенням функції $S\left(T, \overline{y}\right)$ наближено визначені значення функції $S\left(T - \Delta t, \overline{y}\right)$ на деякій підмножині $G_1 \subseteq G$. Оскільки значення керування $\overline{u}\left(\tau\right)$ на інтервалі $\left[T - \Delta t; T\right]$ вважається сталим, $\overline{u}\left(\tau\right) = \overline{u}\left(t\right)$, то одночасно з функцією $S\left(T - \Delta t, \overline{y}\right)$ наближено знайдено керування $\overline{u}\left(\tau, T - \Delta t, \overline{y}\right)$, на якому ця функція реалізується.

Другий крок. Розглянемо тепер момент часу $t = T - 2\Delta t$. З рівностей (52), (53) отримуємо:

$$S\left(T - \Delta t, \overline{y}\right) = \min\left\{f_0\left(T - 2\Delta t, \overline{y}, \overline{u}\left(T - 2t\right)\right) + S\left(T - \Delta t, \overline{y} + \Delta\overline{y}\right)\right\}, \tag{57}$$

$$\overline{y} + \Delta\overline{y} = \overline{y} + \Delta t \cdot \overline{f}\left(T - 2\Delta t, \overline{y}, \overline{u}\left(T - 2\Delta t\right)\right). \tag{58}$$

Зафіксуємо довільну точку $\overline{y} \in G$. Мінімум у правій частині (57) обчислюється для тих значень $\overline{u}\left(T - 2\Delta t\right) \in U$, для яких точка $\overline{y} + \Delta\overline{y}$, що визначається рівністю (58), належить множині G_1. Керування $\overline{u}$ на проміжку $\left(T - 2\Delta t; T - \Delta t\right]$ вважається сталим, причому воно дорівнює $\overline{u}\left(T - 2\Delta t\right)$, на якому досягається значення $S\left(T - 2\Delta t, \overline{y}\right)$. На проміжку $\left(T - \Delta t; T\right)$ керування як функція від $\overline{y}\left(T - \Delta t\right)$ визначено після першого кроку. Проте, оскільки значення $\overline{y}\left(T - \Delta t\right)$ та $\overline{y}\left(T - 2\Delta t\right)$ пов'язані між собою формулою (58), то після двох кроків визначено керування $\overline{u}\left(\tau, T - 2\Delta t, \overline{y}\right)$ на проміжку $\left(T - 2\Delta t; T\right]$. Це кусочно – стала функція з інтервалами сталості $\left(T - 2\Delta t; T - \Delta t\right]$, $\left(T - \Delta t; T\right]$. Наступні кроки здійснюються аналогічно.

Нехай $m = \dfrac{T}{\Delta t}$ є цілим числом. Тоді після m–го кроку визначаються функція $S\left(0, \overline{y}\right)$ на множині $G_m \subseteq G$, а на відрізку $\left[0; T\right]$ керування $\overline{u}\left(\tau, 0, \overline{y}\right)$ є кусочно–сталою функцією з інтервалами сталості $\left(j\Delta t; \left(j+1\right)\Delta t\right]$. Якщо початкова точка $\overline{a}$ належить множині G_m, на якій визначено функцію $S\left(0, \overline{y}\right)$, то, прийнявши $\overline{y} = \overline{a}$, отримуємо $S\left(0, \overline{a}\right)$ – мінімум функціонала (45) вихідної задачі, та $\overline{u}\left(\tau, 0, \overline{a}\right) = \overline{u}^*\left(\tau\right)$ – оптимальне керування. Підставивши $\overline{u}^*\left(\tau\right)$ у рівняння $\overline{y}' = \overline{f}\left(\tau, \overline{y}, \overline{u}\right)$ та розв'язавши задачу Коші з початковими умовами $\overline{y}(0)=\overline{a}$, знаходимо оптимальну траєкторію $\overline{y}^*(\tau)$. Якщо точка $\overline{a}$ не належить множині G_m, то поставлена задача не має розв'язку. На кожному кроці можна знаходити не функцію $\overline{u}(\tau,t,\overline{y})$ для $\tau\in[t;T]$ та довільного $\overline{y}\in G_t$, а функцію $\overline{u}(t,t,\overline{y})\equiv\overline{u}(t,\overline{y})$.

Приклад. Знайти оптимальне керування та траєкторію , що мінімізують функціонал $J=\int\limits_0^{10}\left(1-y_1(\tau)\right)^2 d\tau$ за умов

$$\begin{cases} y_1'=y_2, y_2'=-y_1-y_2+u(\tau), \\ y_1(0)=y_2(0)=0, \\ y_1(10)=1, y_2(10)=0, \\ \left|u(\tau)\le 1\right|. \end{cases} \tag{59}$$

Розв'язання. Застосуємо наведену вище схему. Поділимо відрізок $[0;10]$ на 10 рівних частин довжиною $\Delta t=1$. Замінивши у системі (59) похідні скінченними різницями з кроком $\Delta t=1$, отримуємо:

$$y_1(k+1)=y_1(k)+y_2(k),\ y_2(k+1)=-y_1(k)+u(k). \tag{60}$$

Перший крок. З (54) та крайової умови випливає, що $S(10,\overline{y}(10))=0$. Тому, враховуючи (55), отримуємо $S(9,\overline{y})=\min\left(1-y_1(9)\right)^2$. На проміжку $(9;10]$ керування $u(\tau,9,\overline{y})=u(9)$ визначається з умови потрапляння фазової точки $\overline{y}(y_1,y_2)$ у кінцеве положення $B(1,0)$. Підставимо у (60) значення $k=9$. Тоді $y_1(10)=y_1(9)+y_2(9)$, $y_2(0)=-y_1(9)+u(9)$. Оскільки $y_1(10)=1$, $y_2(10)=0$, то $y_1(9)+y_2(9)=1$, $u(9)=y_1(9)$.

Отже, $u(\tau,9,\overline{y})=u(9)=y_1(9)$, $\tau\in[9;10]$. Вираз під знаком мінімуму у формулі для $S(9,\overline{y})$ не залежить від $u(9)$, тому $S(9,\overline{y})=\left(1-y_1(9)\right)^2$. З нерівності $|u|\le 1$ випливає, що область визначення G_1 функції $S(9,\overline{y})$ задана умовами $y_1(9)+y_2(9)=1$, $-1\le y_1(9)\le 1$.

Другий крок. Знаходимо $S(8,\overline{y})=\min\limits_{u(8)}\left(\left(1-y_1(8)\right)^2+\left(1-y_1(9)\right)^2\right)$. Керування $u(\tau,8,\overline{y})=u(8)$ повинно перевести фазову точку до моменту $\tau=9$ у область G_1. Оскільки $y_1(9)=y_1(8)+y_2(8)$, $y_2(9)=-y_1(8)+u(8)$, то, додавши ці рівності і враховуючи, що $y_1(9)+y_2(9)=1$, отримуємо:

$$u(\tau,8,\overline{y})=u(8)=1-y_2(8),\ \tau\in(8;9],$$

$$u(\tau,8,\overline{y})=u(8)=y_1(8)+y_2(8),\ \tau\in(9;10].$$

Підставивши вираз для $u_1(9)$ у формулу, що визначає $S(8,\overline{y})$, маємо:

$$S(8,\overline{y})=(1-y_1(8))^2+(1-y_1(8)-y_2(8))^2.$$

Область G_2 визначення $S(8,\overline{y})$ визначається співвідношеннями $y_1(8)+y_2(8)=y_1(9)$, $-1\le y_1(9)\le 1$, $0\le y_2(8)\le 2$. Остання нерівність випливає з формули $u(8)=1-y_2(8)$ та обмеження $|u(8)\le 1|$. Відзначимо, що на перших двох кроках мінімізація по u фактично не проводилась, оскільки u однозначно визначалося умовою потрапляння траєкторії у кінцеву точку $B(1,0)$.

Третій крок.

$$S(7,\overline{y})=\min_{u(7)}\left((1-y_1(7))^2+(1-y_1(8))^2+(1-y_1(8)-y_2(8))^2\right). \quad (61)$$

$$y_1(8)=y_1(7)+y_2(7),\ y_2(8)=-y_1(7)+u(7). \quad (62)$$

Знайдемо область G_3 визначення функції $S(7,\overline{y})$. З (62) випливає, що

$$y_1(7)=u(7)-y_2(8),\ y_2(7)=y_1(8)-y_1(7)=y_1(8)+y_2(8)-u(7). \quad (63)$$

Додавши рівності (63), отримаємо: $y_1(7)+y_2(7)=y_1(8)$. Величина $y_1(8)$ задовольняє нерівність $-2\le y_1(8)\le 1$. З (63) та нерівностей $-1\le u(7)\le 1$, $-2\le y_1(8)\le 1$, $0\le y_2(8)\le 2$ знаходимо: $-2\le y_2(7)\le 2$, $-3\le y_1(7)\le 1$.

Перейдемо до визначення керування $u(\tau,7,\overline{y})$ на проміжку $\tau\in(7;8]$. Нехай точка з координатами $y_1(7)$, $y_2(7)$ належить G_3. З (62) випливає: $y_1(8)+y_2(8)=y_2(7)+u(7)$, $y_2(8)=-y_1(7)+u(7)$. Враховуючи співвідношення, що визначають G_2, маємо: $u(7)<1-y_2(7)$, $u(7)<2+y_1(7)$, тобто

$$u(7)\le\min\{1-y_2(7),2+y_1(7)\}. \quad (64)$$

У виразі (61) для $S(7,\overline{y})$ від $u(7)$ залежить лише $y_2(8)$, тому $u(7)$ потрібно вибрати так, щоб мінімізувати вираз $|1-y_1(8)-y_2(8)|=|1-y_2(7)-u(7)|$. Звідси, а також з (64) випливає, що на проміжку $(7;8]$ $\forall\,\overline{y}\in G_3$ маємо:

$$\begin{cases}u(\tau,7,\overline{y})=u(7)=1-y_2(7),1-y_2(7)\le 2+y_1(7),\\ u(\tau,7,\overline{y})=u(7)=2+y_1(7),1-y_2(7)>2+y_1(7).\end{cases} \quad (65)$$

Підставивши (65) у (62) і (62) у (61), отримаємо:

$$\begin{cases} S(7,\bar{y}) = (1-y_1(7))^2 + (1-y_1(7)-y_2(7))^2, 1-y_2(7) \le 2+y_1(7), \\ S(7,\bar{y}) = (1-y_1(7))^2 + (1-y_1(7)-y_2(7))^2 + (-1-y_2(7)-y_1(7))^2, \\ 1-y_2(7) > 2+y_1(7). \end{cases}$$

Вираз для $u(\tau,7,\bar{y})$ на інтервалах $(8;9]$ та $(9;10]$ можна отримати, використавши формулу для $u(\tau,8,\bar{y})$ та рівності (62). Наступні кроки здійснюються аналогічно.

При практичному застосуванні динамічного програмування кількість кроків повинна бути достатньо великою, щоб забезпечити потрібну точність обчислення мінімуму функціонала. Тому для реалізації методу динамічного програмування доцільно використовувати комп'ютерну техніку.

10. Рівняння Беллмана

Нехай розглянута вище функція $S(t,\bar{y})$ має неперервні частинні похідні за всіма своїми аргументами t, $y_1,\ldots,y_n$. Тоді у рівнянні (52) функцію $S(t+\Delta t,\bar{y}+\Delta\bar{y})$ можна записати наступним чином:

$$S(t+\Delta t,\bar{y}+\Delta\bar{y}) = S(t,\bar{y}) + \left[\frac{\partial S}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial S}{\partial y_i}\cdot\frac{dy_i}{dt}\right]\Delta t + o(\Delta t)\Delta t. \qquad (66)$$

У цій рівності $o(\Delta t)$ – нескінченно мала вищого порядку, ніж Δt, при $\Delta t \to 0$. Оскільки $\bar{y}(t)$ задовольняє систему

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(t,y_1,\ldots,y_n),\ i=1,2,\ldots,n, \qquad (67)$$

то $\frac{dy_i}{dt}$ у (66) можна замінити на f_i:

$$S(t+\Delta t,\bar{y}+\Delta\bar{y}) = S(t,\bar{y}) + \left[\frac{\partial S}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial S}{\partial y_i}\cdot f_i\right]\Delta t + o(\Delta t)\Delta t. \qquad (68)$$

Підставимо (68) у рівняння (52). Функція $S(t,\bar{y})$ не залежить від величини керування $\bar{u}(t)$ у момент часу t, тому її можна винести за знак мінімуму. Отриману рівність поділимо на Δt та перейдемо до границі при $\Delta t \to 0$. Отримаємо нелінійне диференціальне рівняння у частинних похідних відносно невідомої функції $S(t,\bar{y})$:

$$\min_{u(t)\in U}\left[\frac{\partial S}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial S}{\partial y_i}\cdot f_i\left(t,\overline{y}(t),\overline{u}(t)\right)+f_0\left(t,\overline{y}(t),\overline{u}(t)\right)\right]=0. \qquad (69)$$

за умов

$$\overline{y}'=f\left(t,\overline{y},\overline{u}\right),\ \overline{y}(0)=\overline{a},\ \overline{y}(T)\in g,\ \overline{y}(t)\in G,\ 0\le t\le T. \qquad (70)$$

Рівняння (69) називають **рівнянням Беллмана**. Крайовою умовою для цього рівняння є рівність $S\left(T,\overline{y}\right)=0$. Сума перших двох членів у квадратних дужках рівняння (69) – це повна похідна по змінній часу t функції $S\left(t,\overline{y}\right)$ з врахуванням системи (67), тому

$$\min_{u(t)\in U}\left[\frac{\partial S}{\partial t}++f_0\left(t,\overline{y}(t),\overline{u}(t)\right)\right]=0. \qquad (71)$$

Нехай $S\left(t,\overline{y}\right)$ – це розв'язок рівняння (71), і мінімум у лівій частині (71) за умов (70) досягається на функції $\overline{u}\left(t,\overline{y}\right)$. Підставимо $\overline{u}\left(t,\overline{y}\right)$ замість $\overline{u}$ у рівняння (67) і знайдемо розв'язок $\overline{y}^*(t)$, що задовольняє початкову умову $\overline{y}(0)=\overline{a}$. Через $\overline{u}^*(t)$ позначимо функцію часу $\overline{u}\left(t,\overline{y}^*(t)\right)$. Покажемо, що $\overline{y}^*(t)$ – оптимальна траєкторія, а $\overline{u}^*(t)$ – оптимальне керування. Якщо $\overline{u}^\circ(t)$ та $\overline{y}^\circ(t)$ – допустиме керування та відповідна йому траєкторія, що задовольняють умови (70), то з (71) випливає, що

$$\frac{dS\left(t,\overline{y}^\circ(t)\right)}{dt}+f_0\left(t,\overline{y}^\circ(t),\overline{u}^\circ(t)\right)\ge\frac{dS\left(t,\overline{y}^*(t)\right)}{dt}+f_0\left(t,\overline{y}^*(t),\overline{u}^*(t)\right)=0.$$

Інтегруючи цю рівність на відрізку $\left[0;T\right]$, отримуємо:

$$S\left(T,\overline{y}^\circ(T)\right)-S\left(0,\overline{y}^\circ(0)\right)+\int_0^T f_0\left(t,\overline{y}^\circ(t),\overline{u}^\circ(t)\right)dt\ge$$
$$\ge S\left(T,\overline{y}^*(T)\right)-S\left(0,\overline{y}^*(0)\right)+\int_0^T f_0\left(t,\overline{y}^*(t),\overline{u}^*(t)\right)dt.$$

Оскільки $\overline{y}^\circ(0)=\overline{y}^*(0)=\overline{a}$, $\overline{y}^\circ(T)\in g$, $\overline{y}^*(T)\in g$, $S\left(t,\overline{y}\right)=0$ при $\overline{y}\in g$, то

$$\int_0^T f_0\left(t,\overline{y}^\circ(t),\overline{u}^\circ(t)\right)dt\ge\int_0^T f_0\left(t,\overline{y}^*(t),\overline{u}^*(t)\right)dt,$$

що й потрібно було довести.

Таким чином, існування неперервно диференційовної функції $S(t,\bar{y})$ – розв'язку рівняння (69), є достатньою умовою оптимальності. Якщо існує розв'язок $S(t,\bar{y})$, то керування $\bar{u}(t,\bar{y})$, що відповідає цій функції, надає мінімум функціоналу (45).

Література

1. Алексеев В.М. Оптимальное управление / В.М. Алексеев, В.М. Тихомиров, С.В. Фомин – М.: Наука, 1979. – 432 с.
2. Алексеев В.М. Сборник задач по оптимизации / В.М. Алексеев, Э.М. Галеев, В.М. Тихомиров – М.: Наука, 1984. – 274с.
3. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления / В.Г. Болтянский – М.: Наука, 1969. – 408 с.
4. Ванько В.И. Вариационное исчисление и оптимальное управление / В.И. Ванько, О.В. Ермошина, Г.Н. Кувыркин – М.: МГТУ им. Баумана, 2001. – 488с.
5. Зеликин М.И. Оптимальное управление и вариационное исчисление / М.И. Зеликин – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 319 с.
6. Кротов В.Ф. Методы и задачи оптимального управления / В.Ф. Кротов, В.И. Гурман – М.: Наука, 1973. – 296 с.
7. Пантелеев А.В. Теория управления в примерах и задачах / А.В. Пантелеев, А.С. Бортаковский – М.: Высшая школа, 2003. – 326 с.
8. Гирсанов И.В. Лекции по теории экстремальных задач / И.В. Гирсанов – М.: Издательство МГУ, 1989. – 362с.
9. Афанасьев В.Н. Математическая теория конструирования систем управления / В.Н. Афанасьев, В.Б. Колмановский, В.Р. Носов – М.: Высшая школа, 2003. – 467с.
10. Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и оптимальному управлению / Л. Янг – М.: Мир, 1974. – 488с.
11. Цлаф Л.Я. Вариационное исчисление и интегральные уравнения: Справочное руководство / Л.Я. Цлаф – СПб.: Лань, 2005. – 192с.
12. Демьянов В.Ф. Условия экстремума и вариационное исчисление / В.Ф. Демьянов – М.: Высшая школа, 2005. – 335 с.
13. Понтрягин Л.С. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко – М.: Наука, 1976. – 392 с.
14. Варга Д. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями / Д. Варга – М.: Наука, 1977. – 623 с.
15. Матвеев А.С. Оптимальные системы управления: дифференциальные уравнения. Специальные задачи / А.С. Матвеев, В.А. Якубович – С.-Пб.: Издательство С.-Петербургского университета, 2003. – 538 с.
16. Петров Ю.П. Вариационные задачи оптимального управления / Ю.П. Петров – Л.: Энергия, 1977. – 280 с.
17. Флеминг У. Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами / У. Флеминг, Р. Ришел – М.: Мир, 1978. – 436 с.

18. Гноенский Л.С. Математические основы теории управляемых систем / Л.С. Гноенский, Г.А. Каменский, Л.Э. Эльсгольц – М.: Наука, 1969. – 512 с.
19. Брайсон А. Прикладная теория оптимального управления / А. Брайсон, Хо Ю-Ши – М.: Мир, 1972. – 544 с.