

# ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОХИБОК

Наукове пізнання людиною оточуючого світу стало можливим лише завдяки впровадженню вимірювань у практику наукових досліджень.

## 1. Суть процесу вимірювання

Процес вимірювання фізичної величини полягає у знаходженні її числового значення.

**Виміряти фізичну величину означає порівняти її з іншою однорідною фізичною величиною, прийнятою за одиницю (еталон) вимірювання.**

Наприклад, вимірювання лінійного розміру тіла зводиться до його порівняння з еталоном довжини – метром, визначення маси тіла на терезах – до порівняння її з еталоном маси – кілограмом і т.д.

## 2. Прямі і непрямі вимірювання

Вимірювання можна умовно поділити на *прямі і непрямі*.

**Прямими називаються вимірювання, в процесі яких числове значення фізичної величини одержують безпосередньо шляхом порівняння з еталоном цієї величини або за відліковим пристроєм вимірювального приладу.**

Прикладами прямих вимірювань можуть бути вимірювання довжини тіла лінійкою, температури – термометром, часу – секундоміром, маси – терезами та інше.

**Непрямими називаються вимірювання, в процесі яких числове значення фізичної величини знаходять шляхом обчислень за формулами фізичних залежностей (розрахунковими формулами), попередньо підставивши у них результати прямих вимірювань.**

Прикладом непрямого вимірювання є вимірювання об'єму  $V$  тіла, що має форму прямокутного паралелепіпеда з ребрами довжиною  $a$ ,  $b$ ,  $c$  :

$$\frac{V}{\downarrow} = \frac{a \cdot b \cdot c}{\downarrow} \quad (1)$$

непряме      прями  
вимірювання      вимірювання

Непряме вимірювання завжди містить в собі як складовий елемент прямі вимірювання, що відображено у виразі (1).

### 3. Істинне і виміряне значення фізичної величини

У подальшому будемо користуватись поняттями:

- *істинного значення фізичної величини* ( $x_{\text{іст}}$ ), яке чисельно повинно відображати вимірювану величину і знаходження якого є метою вимірювання ,
- *виміряного значення фізичної величини* ( $x_{\text{вим}}$ ), яке безпосередньо одержують в результаті конкретного вимірювання.

Жодна фізична величина не може бути виміряна абсолютно точно. Тому  $x_{\text{вим}}$  не співпадає з  $x_{\text{іст}}$  . Мірою відхилення  $x_{\text{вим}}$  від  $x_{\text{іст}}$  є *абсолютна похибка вимірювання*, а мірою точності вимірювання – *відносна похибка*.

### 4. Абсолютна і відносна похибки вимірювання. Запис результату вимірювання

**Абсолютною похибкою вимірювання ( $\Delta x$ ) називається модуль різниці між істинним значенням вимірюваної величини і результатом окремого вимірювання.**

$$\Delta x = |x_{\text{вим}} - x_{\text{іст}}| . \quad (2)$$

**Відносною похибкою вимірювання ( $\delta x$ ) називається відношення абсолютної похибки  $\Delta x$  до істинного значення фізичної величини  $x_{\text{іст}}$ :**

$$\delta x = \frac{\Delta x}{x_{\text{іст}}} \cdot 100 \% . \quad (3)$$

Остаточню результат проведеного вимірювання записують у вигляді:

$$x = x_{\text{вим}} \pm \Delta x . \quad (4)$$

Такий запис означає, що істинне значення вимірюваної величини лежить (див.рис.1.) в інтервалі:

$$x_{\text{вим}} - \Delta x \leq x_{\text{іст}} \leq x_{\text{вим}} + \Delta x . \quad (5)$$

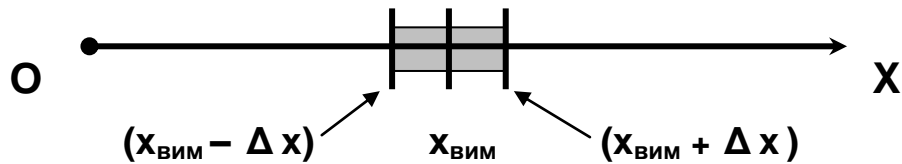


Рис.1

## 5. Фізична природа і види похибок

В залежності від природи причин відхилення  $x_{\text{вим}}$  від  $x_{\text{іст}}$  всі похибки можна умовно поділити на **систематичні, випадкові і промахи**.

- **Систематичні похибки.** Особливістю систематичних похибок є те, що їх числове значення і знак відхилення (в більшу, чи в меншу сторону) від істинного значення фізичної величини регулярно повторюється від одного вимірювання до іншого або ж змінюється за певним законом. Ці похибки зумовлені недостатньою точністю приладу, його невідрегульованістю або несправністю, а також недосконалістю методів вимірювання.

Як приклади прояву таких похибок можна привести зважування на невідрегульованих терезах, або використання при зважуванні неточних різноважок, чи вимірювання часу секундоміром, що спішить (відстає) і т. ін.

- **Випадкові похибки** це відхилення вимірювальної величини, які не можна передбачити. Вони проявляються у розкиді відліків при повторних вимірюваннях, здійснених в аналогічних умовах. Випадкові похибки описує теорія випадкових явищ (теорія імовірностей).
- **Промахи** – це надзвичайно великі похибки, найчастіше зумовлені неправильними діями дослідника. За величиною вони суттєво перевищують всі інші. Аналізуючи числові значення вимірювань, їх слід виявляти і відкидати.

З точки зору точності методи вимірювання поділяють на **технічні і лабораторні**. При використанні приладів недостатньо високої точності (технічних) вимірювання проводиться лише один раз. Повторні вимірювання не дають нових числових значень і їх проведення не має змісту. Наприклад, при вимірюванні температури повітря в лабораторії термометром розширення мусимо задовільнятись лише одним значенням вимірюваної величини. При цьому результат вимірювання записують у формі :

$$x = x_{\text{вим}} \pm \Delta x . \quad (6)$$

а величину абсолютної похибки  $\Delta x$  приймають рівною *половині ціни найменшої поділки вимірного приладу* (масштабної лінійки, термометра, рідинного барометра, манометра і т.п.).

При використанні у розрахунковій формулі табличних значень фізичних величин, наприклад,  $\rho = 2,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ , величину похибки приймають рівною **5** одиницям розряду, який слідує за останньою значущою цифрою числа. У наведеному прикладі

$$\Delta \rho = 0,05 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

При вимірюванні приладами більш високої точності виникає проблема незбігання числових значень кожного нового виміру із попереднім. У цьому випадку проводять повторні вимірювання 3-5 і більше разів, а результат багаторазових вимірювань фізичної величини  $x$  записується набором значень:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \quad (7)$$

де індекс  $n$  вказує на максимальне число проведених вимірювань.

Доведено, що добрим наближенням до істинного значення вимірюваної величини є *середнє арифметичне* результатів вимірювань  $x_i$ :

$$x_{\text{іст}} \approx \langle x \rangle = \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i . \quad (8)$$

Тому на практиці обробка результатів багаторазових прямих вимірювань зводиться до обчислення за формулою (8) середнього арифметичного значення вимірюваної величини, а потім – абсолютних похибок  $\Delta x_i$  окремих вимірів (за формулою (9)).

Абсолютну похибку окремого вимірювання знаходять як модуль різниці між результатом кожного окремого вимірювання  $x_i$  і середнім арифметичним  $\langle x \rangle$ :

$$\Delta x_1 = |x_1 - \langle x \rangle|; \quad \Delta x_2 = |x_2 - \langle x \rangle| \quad \Delta x_n = |x_n - \langle x \rangle| . \quad (9)$$

Після цього обчислюють середнє арифметичне значення абсолютних похибок окремих вимірювань

$$\langle \Delta x \rangle = \frac{1}{n} (\Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 + \dots + \Delta x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta x_i \quad (9a)$$

і подають результат вимірювання у формі :

$$x = \langle x \rangle \pm \langle \Delta x \rangle . \quad (9б)$$

Відносна похибка вимірювання визначається, як

$$\delta x = \frac{\langle \Delta x \rangle}{\langle x \rangle} 100\% . \quad (9в)$$

## 6. Визначення похибок непрямих вимірювань

Розрахункова формула, що служить для знаходження чисельного значення непрямого виміру, з точки зору математики є функцією, а похибки прямих вимірювань еквівалентні приростам аргументів цієї функції.

Погляд математика:	<u>Функція</u>		<u>Аргументи</u>	
	↓		↓	
Розрахункова формула	<b>V</b>	=	<b>a · b · c</b>	(10)
	↓		↓	
Погляд фізика:	Непряме вимірювання		Прямі вимірювання	

Тому фізична задача знаходження похибки непрямого вимірювання формально зводиться до математичної задачі знаходження приросту функції.

### 6.1. Загальний метод визначення абсолютної похибки непрямого вимірювання

Як приклад розглянемо вимірювання прискорення вільного падіння **g** з допомогою математичного маятника. Відомо, що період коливань маятника визначається формулою:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} , \quad (11)$$

де **L** – довжина нитки, **g** – прискорення вільного падіння.

Оскільки  $T = \frac{t}{N}$ , де **N** – кількість коливань маятника за час **t**, то розрахункова формула для вимірювання **g** набуде вигляду:

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2} = \frac{4\pi^2 N^2 L}{t^2} . \quad (12)$$

1) Врахуємо, що  $g = g(L, N, t, \pi)$ , де у дужках наведено перелік змінних величин, що входять у формулу. Вони одержані шляхом прямих вимірювань. Величина  $N$  є точною і її похибка рівна нулю, а числове значення величини  $\pi$  можна взяти з точністю (наприклад,  $\pi = 3,1415$ ), яка суттєво перевищує точність прямих вимірювань, а тому в подальшому її похибкою також можна знехтувати і вважати що  $g = g(L, t)$ .

2) Запишемо вираз для диференціалу  $dg$ :

$$dg = \frac{\partial g}{\partial L} dL + \frac{\partial g}{\partial t} dt .$$

Тут  $\frac{\partial g}{\partial L} dL$  та  $\frac{\partial g}{\partial t} dt$  – частинні диференціали, що характеризують приріст функції при зміні кожного із аргументів  $L$  та  $t$ , зокрема, а  $\frac{\partial g}{\partial L}$  та  $\frac{\partial g}{\partial t}$  – частинні похідні.

3) Знаходимо по черзі кожну із частинних похідних. При цьому користуємось правилом: *всі фізичні величини, крім тих, по яких в даний момент беруться похідні, вважаються сталими і виносяться за знак похідної*. Отже,

$$\frac{\partial g}{\partial L} = \frac{\partial}{\partial L} \left( \frac{4\pi^2 N^2 L}{t^2} \right) = \frac{4\pi^2 N^2}{t^2} \frac{\partial}{\partial L} (L) = \frac{4\pi^2 N^2}{t^2} . \quad (13)$$

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{4\pi^2 N^2 L}{t^2} \right) = 4\pi^2 N^2 L \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{t^2} \right) = -8\pi^2 N^2 L \frac{1}{t^3} . \quad (14)$$

4) Підставляємо одержані значення похідних у формулу для повного диференціалу і одержуємо:

$$dg = \frac{4\pi^2 N^2}{t^2} dL - \frac{8\pi^2 N^2 L}{t^3} dt . \quad (15)$$

5) Повертаємось до фізичної сторони задачі. Для цього замінюємо символи диференціалів  $d$  на символи абсолютних похибок  $\Delta$ , беручи коефіцієнти при останніх (з міркувань врахування найбільш несприятливих умов реалізації знаків похибок) по абсолютній величині:

$$\Delta g = \frac{4\pi^2 N^2}{t^2} \Delta L + \frac{8\pi^2 N^2 L}{t^3} \Delta t . \quad (16)$$

Таким чином, ми одержали формулу для обчислення абсолютної похибки непрямого вимірювання (прискорення вільного падіння).

6) Підставимо в одержану формулу середні значення вимірних величин  $L$ ,  $t$ , а також  $N$  і  $\pi$  та їх похибок і проведемо обчислення.

7) Результат вимірювання  $g$  запишемо у формі:

$$g = \langle g \rangle \pm \langle \Delta g \rangle. \quad (17)$$

8) Обчислимо відносну похибку  $\delta g$  вимірювання прискорення, попередньо обчисливши  $\langle g \rangle$ :

$$\delta g = \frac{\langle \Delta g \rangle}{\langle g \rangle} 100\%. \quad (18)$$

## 6.2. Метод логарифмування

Якщо розрахункова формула містить переважно дії вищого порядку (множення, ділення, піднесення до степеня), то зручніше спочатку знайти вираз для обчислення відносної похибки непрямого вимірювання, скориставшись методом логарифмування розрахункової формули. Для цього:

1) записуємо розрахункову формулу ( 12 );

2) логарифмуємо її:

$$\ln g = \ln 4 + 2 \ln \pi + 2 \ln N + \ln L - 2 \ln t; \quad (19)$$

3) диференціюємо одержаний вираз:

$$d(\ln g) = d(\ln 4) + 2d(\ln \pi) + 2d(\ln N) + d(\ln L) - 2d(\ln t). \quad (20)$$

Звідки одержуємо:

$$\frac{dg}{g} = \frac{dL}{L} - 2 \frac{dt}{t}; \quad (21)$$

3) замінюємо в останньому виразі символи диференціалів символами абсолютних похибок, беручи коефіцієнти при них (з міркувань врахування найбільш несприятливої комбінації знаків похибок) по абсолютній величині :

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta L}{L} + 2 \frac{\Delta t}{t}; \quad (22)$$

4) обчислюємо відносну похибку  $\delta g$ , а через неї – абсолютну похибку  $\Delta g$ ;

5) подаємо результати вимірювань відповідно до (17), (18).