

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ,  
МОЛОДЕЖИ И СПОРТА УКРАИНЫ  
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ВЫСШЕЕ УЧЕБНОЕ ЗАВЕДЕНИЕ  
ЗАПОРОЖСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

*Методическое пособие*

по дисциплине:

**с/к «Вычислительные методы теории графов»**

**Группа Клейна и раскраска плоских графов**

Запорожье 2012 г.

Методическое пособие предназначена для проведения теоретических и практических занятий по дисциплине с/к «Вычислительные методы теории графов» студентам обучающимся по программе подготовке бакалавров по специальности 6.080202 «Прикладная математика». Позволяет изучить и закрепить учебный материал для одной части «Группа Клейна и раскраска плоских графов» специальной дисциплины «Вычислительные методы теории графов». Пособие составлено таким образом, что каждый параграф тесно связан с теорией, приведено достаточное количество примеров для усвоения темы, что позволяет применить их для проведения практических занятий при изучении данной дисциплины. Структура методического пособия позволяет также освоить данный предмет студентам заочного отделения

Печатается согласно протоколу заседания кафедры  
Математического моделирования Запорожского национального  
Университета № 15 от 24 апреля 2012 года

Разработал:  
доцент кафедры математического моделирования,  
кандидат физико-математических наук,  
Курапов Сергей Всеволодович  
Аспирант кафедры информационных технологий  
Давидовский Максим Владимирович

## Введение

В 1913 г. Биркгоф ввел понятие неприводимого графа и доказал ряд теорем о свойствах таких графов. Пользуясь этими результатами, американский математик Франклин доказал, что гипотеза четырех красок верна для всех плоских графов с числом вершин до 31. Французский ученый Майер довел это число до 96. Хееш в 1969 г. свел вопрос о справедливости гипотезы четырех красок к исследованию достаточно большого так называемого неустраняемого множества конфигураций. Хеешу удалось доказать, что после первого шага метода нейтрализации остается около 8900 положительных конфигураций, большинство из которых неприводимы [1]. В 1977 году доказательство гипотезы четырех красок было, наконец получено К. Аппелем и У. Хакеном (Appel, Haken) последователями Хееша, и опубликовано в двух статьях [19].

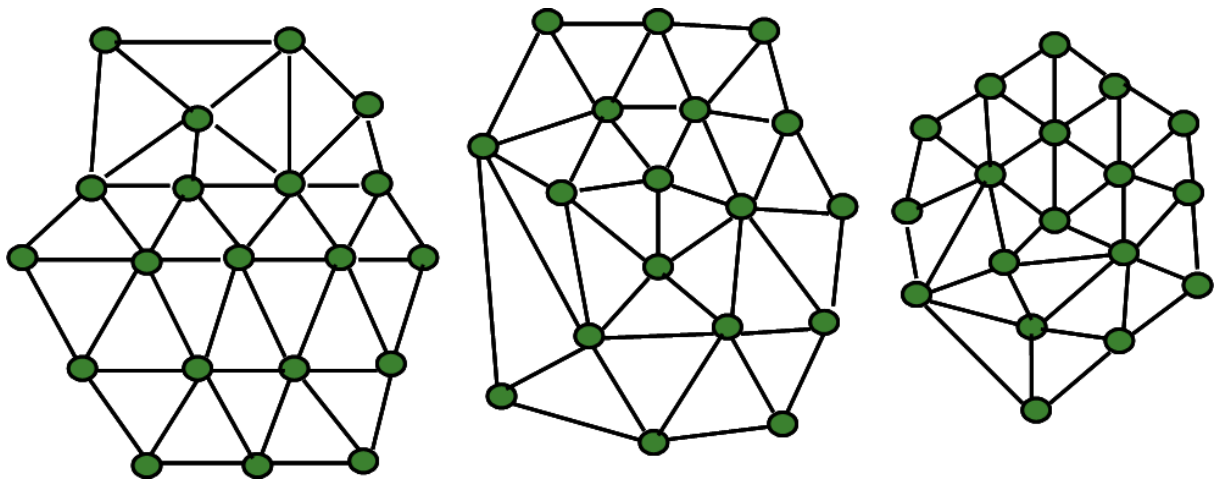


Рис.1. Неприводимые плоские конфигурации

Значительную часть рутинных проверок выполнил компьютер, и это революционное нововведение в сложившуюся практику дедуктивных рассуждений в чистой математике служит основанием для некоторого естественного скептицизма по отношению к данному доказательству и по сей день[11,12].

Читатель данного доказательства, должен разобраться в 50 страницах текста и диаграмм, 85 страницах с почти 2500 дополнительными диаграммами, 400 страницами микрофишей, содержащими еще диаграммы, а также тысячи отдельных проверок утверждений, сделанных в 24 леммах основного текста. Вдобавок читатель узнает, что проверка некоторых фактов потребовала 1200 часов компьютерного времени, а при проверке вручную потребовалось бы гораздо больше. Статьи устрашающи по стилю и длине, и немногие математики прочли их скольконибудь подробно [13].

Следует также заметить, что во всех этих подходах к решению проблемы, отсутствует понятие планарности[17], хотя гипотеза доказывается для плоских графов, отсутствует также и конструктивный алгоритм раскраски. На основе работы [19] можно построить полиномиаль-

ный алгоритм раскраски плоского графа четырьмя цветами со сложностью  $O(n^2)$ . Однако, как показано в [1], простота этого алгоритма обманчива. Константа, стоящая при  $n$ , имеет порядок  $(10^5-10^6)$ , а требуемая память порядка  $10^6$ . Таким образом, несмотря на свою полиномиальность, алгоритм четырех красок построенный на основе доказательства теоремы о четырех красках [18], может оказаться практически не очень эффективным [2], даже для сравнительно небольших  $n$ . В литературе [15] приведено мнение большинства специалистов о том, что нет более быстрого метода раскрашивания карты, чем перебор всех вариантов, там же приведена Фортран-программа на основе алгоритма полного перебора.

В данном методическом пособии представлен дедуктивный способ доказательства теоремы о четырех красках. Показано, что теорема о четырех красках является следствием теоремы о существовании цветного диска проходящего по сцепленным ребрам единичного базисного цикла. На основании введенной операции ротации цветных дисков для плоских кубических графов без мостов, представлен алгоритм раскраски с линейной вычислительной сложностью относительно ребер кубического графа.

# ЗАНЯТИЕ № 1. Максимально плоский граф.

## 1. Максимально плоский граф

Будем рассматривать произвольные связные плоские графы  $G$  без петель и кратных ребер, у которого степень каждой вершины больше двух, так называемые плоские сепарабельные графы (см. рис. 2). Рассмотрим в плоском графе  $G$  каждую нетреугольную грань, и путем добавления ребер разобьем её на несколько треугольных граней (см. рис. 3). В результате получим максимально плоский граф  $G'$ , все грани которого будут треугольными. И хотя данный процесс не однозначен, однако если граф  $G'$  раскрашен, то удаление вновь введенных ребер из графа  $G'$  не нарушит раскраску графа  $G$  [6,7].

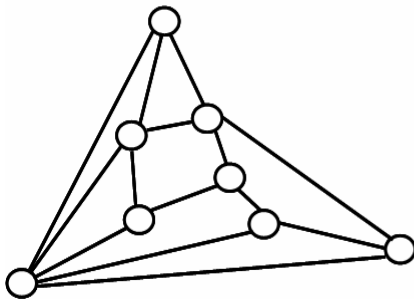


Рис. 2. Плоский граф  $G$

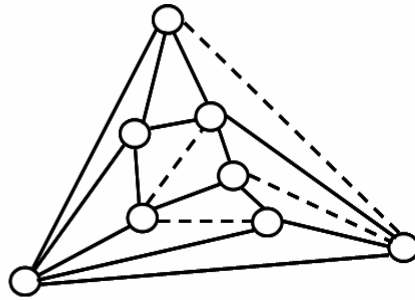


Рис. 3. Максимально плоский граф  $G'$

Поместим внутри каждой грани  $s$  максимально плоского графа  $G'$  вершину  $x^0$ ; каждому ребру  $u$  графа  $G'$  поставим в соответствие ребро  $u^0$ , соединяющее те вершины  $x^0_i$  и  $x^0_j$ , которые соответствуют граням  $s_i$  и  $s_j$  по обе стороны ребра  $u$ . Полученный таким образом топологический граф  $G^0$  является плоским, связным и называется двойственным к  $G'$  или однородным графом  $H$  степени три, или кубическим графом  $H$ .

## 2. Плоский кубический граф

Построение дуального плоского кубического графа  $H$  представлено на рис. 4, где вершины закрашены более темным цветом, а ребра пунктирными линиями.

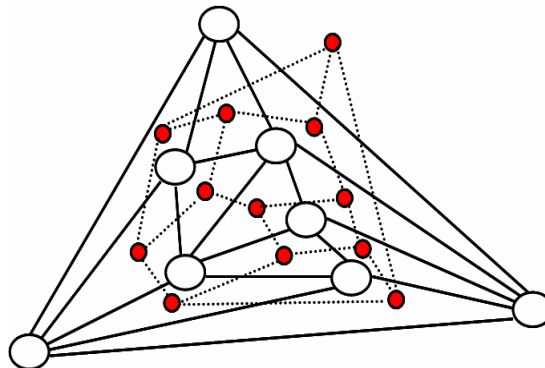


Рис. 4. Построение плоского кубического графа  $H$

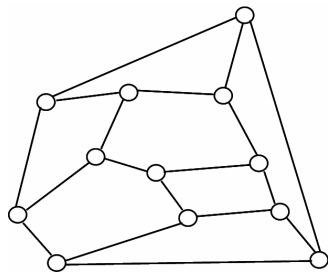


Рис. 5. Плоский кубический граф **H**

Вершины в плоском кубическом графе соответствуют граням максимально плоского графа, а грани плоского кубического графа соответствуют вершинам максимально плоского графа. Количество ребер в максимально плоском графе равно количеству ребер двойственного плоского кубического графа. Количество ребер в кубическом графе **H** с  $n$  вершинами определяется по формуле [10]

$$m = 3n/2. \tag{1}$$

И, следовательно, количество ребер в таком графе всегда кратно трем

$$m \equiv 0 \pmod{3}. \tag{2}$$

Так как в кубическом графе количество ребер  $m$  - целое число, следовательно, количество вершин  $n$  в однородном кубическом графе должно быть четным числом [9].

$$n \equiv 0 \pmod{2} \tag{3}$$

Переход от максимально плоского графа  $G'$  с треугольными гранями к двойственному кубическому графу **H** осуществляется путем замены матрицы базисных единичных циклов максимально плоского графа  $G'$  с треугольными гранями на матрицу инцидентий кубического графа **H**.

**Пример 1.** На рис. 6 представлен максимально планарный граф с треугольными гранями  $G'$ . На рис. 7 представлен двойственный к нему плоский кубический граф **H**.

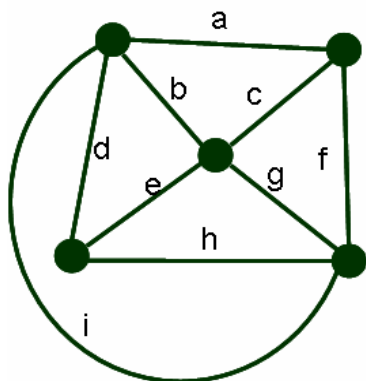


Рис. 6. Граф  $G'$

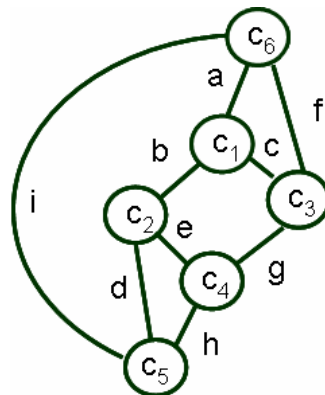


Рис. 7. Граф **H**

Переход от максимально плоского графа  $G'$  к кубическому графу  $H$  представлен следующей матрицей

Матрица базисных единичных циклов графа  $G'$

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
$c_1$	1	1	1						
$c_2$		1		1	1				
$c_3$			1			1	1		
$c_4$					1		1	1	
$c_5$				1				1	1
$c_6$	1					1			1
	a	b	c	d	e	f	g	h	i

Матрица инциденций графа  $H$

### Задание

Все задания данного занятия предполагают построение максимального плоского графа (см. рис. 9) для заданного графа (см. рис. 8) и после построения максимального плоского графа (см. рис. 10) построение дуального кубического графа (см. рис. 11).

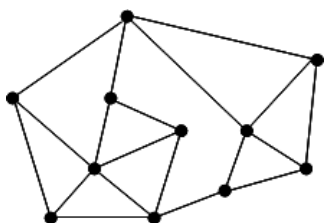


Рис. 8. Плоский граф

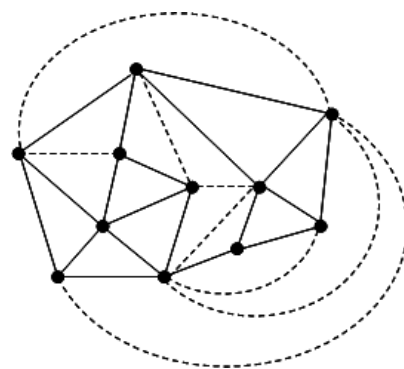


Рис. 9. Максимально плоский граф

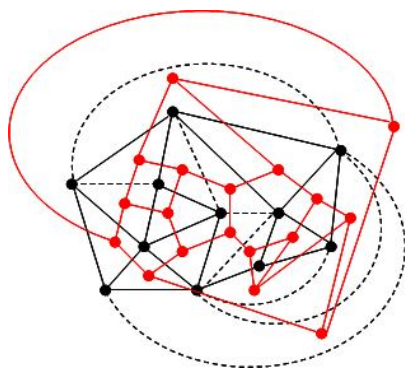


Рис. 10. Построение кубического графа

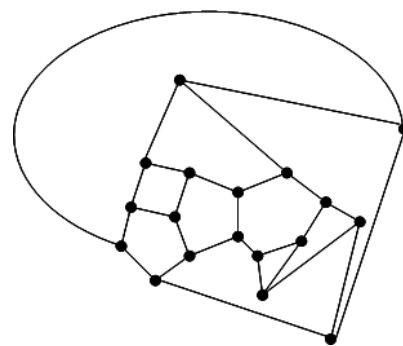


Рис. 11. Дуальный кубический графа

**Задание 1.1.** Построить максимально плоский граф и дуальный к нему плоский кубический граф (см. рис.12).

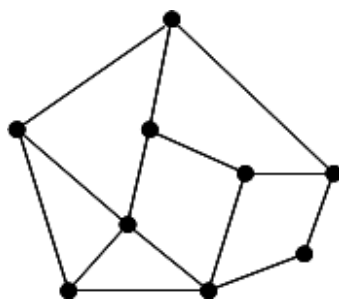


Рис. 12. Плоский граф

**Задание 1.2.** Построить максимально плоский граф и дуальный к нему плоский кубический граф (см. рис.13).



Рис. 13. Плоский граф

**Задание 1.3.** Построить максимально плоский граф и дуальный к нему плоский кубический граф (см. рис.14).

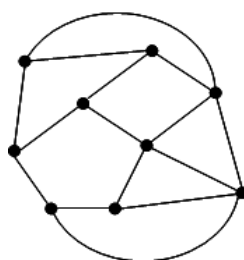


Рис. 14. Плоский граф

**Задание 1.4.** Построить максимально плоский граф и дуальный к нему плоский кубический граф (см. рис.15).

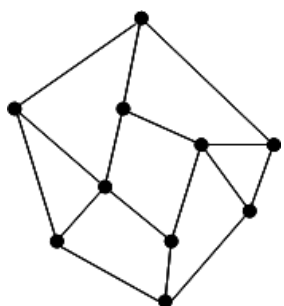


Рис. 15. Плоский граф



**Задание 1.5.** Построить максимально плоский граф и дуальный к нему плоский кубический граф (см. рис.16).

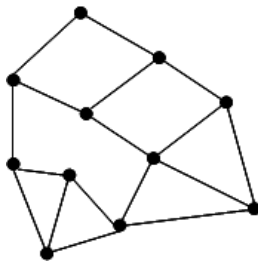


Рис. 16. Плоский граф

**Задание 1.6.** Построить максимально плоский граф и дуальный к нему плоский кубический граф (см. рис.17).

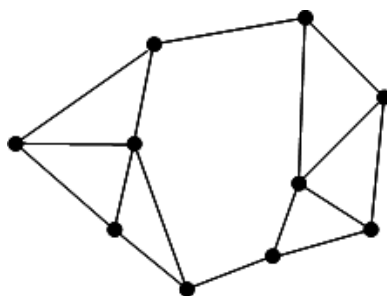


Рис. 17. Плоский граф

**Задание 1.7.** Построить максимально плоский граф и дуальный к нему плоский кубический граф (см. рис.18).

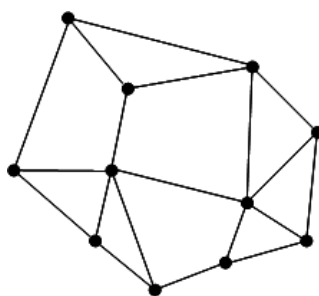


Рис. 18. Плоский граф

**Задание 1.8.** Построить максимально плоский граф и дуальный к нему плоский кубический граф (см. рис.19).

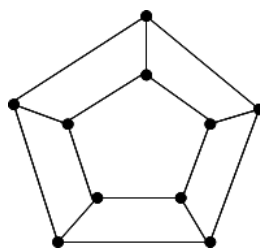


Рис. 19. Плоский граф

**Задание 1.9.** Построить максимально плоский граф и дуальный к нему плоский кубический граф (см. рис.20).

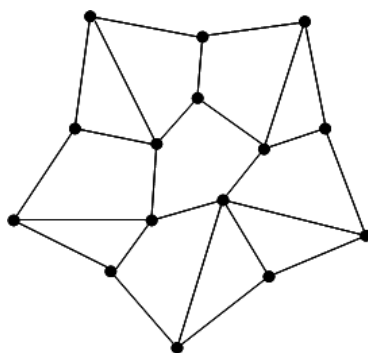


Рис. 20. Плоский граф

**Задание 1.10.** Построить максимально плоский граф и дуальный к нему плоский кубический граф (см. рис.21).

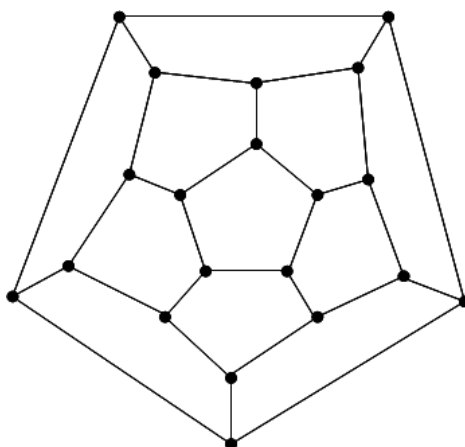


Рис. 21. Плоский граф

## ЗАНЯТИЕ № 2. Раскраска кубического графа

### 3. Раскраска кубического графа

С точки зрения раскраски между максимальным плоским графом  $G'$  и двойственным к нему плоским кубическим графом  $H$  существует связь, устанавливаемая следующей теоремой.

**Теорема 1.** (Тэйт) [1]. Пусть  $H$  — плоский однородный кубический граф без перешейков; необходимое и достаточное условие возможности такого раскрашивания граней графа четырьмя цветами, при котором никакие две смежные грани не окрашиваются в одинаковый цвет, состоит в том, чтобы хроматический класс графа  $H$  был равен трем.

Теорема 1 устанавливает связь между раскраской вершин для максимально плоского графа и раскраской ребер двойственному к нему кубическому графу  $H$ . Однако она не утверждает, что любой кубический граф без мостов имеет хроматический класс равный трем. Тэйт высказал предположение, что всякий плоский кубический граф без перешейков имеет гамильтонов цикл. Если бы ему это удалось доказать, то тем самым была бы решена проблема четырех красок, хотя сам Тэйт и не обнаружил этой зависимости. Однако Татт [1] показал, что это предположение неверно, и привел пример кубического графа с 46 вершинами, не являющегося гамильтоновым (рис. 54).

Если кубический граф  $H$  имеет хроматический класс, равный трем, то его ребра должны быть раскрашены в три цвета. Раскраска предполагает наличие трех разноцветных ребер для каждой вершины графа  $H$ . Кубический граф имеющий хроматический класс равный трем будем называть раскрашенным плоским кубическим графом  $H$ . Например, кубический граф, представленный на рис.22, является раскрашенным кубическим графом  $H$ .

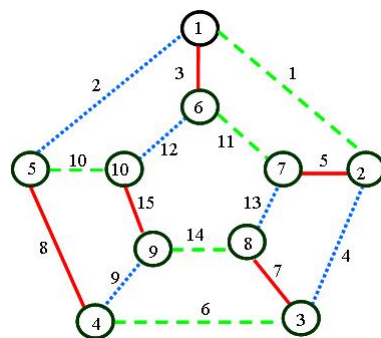


Рис. 22. Раскраска ребер в кубическом графе  $H$

Здесь, белый цвет будем обозначать его буквой  $W$  или цифрой 0.

Красный цвет будем обозначать его буквой  $R$  или цифрой 1, а на рисунках графа ребра данного цвета будем представлять сплошной линией).

Синий цвет, будем обозначать его буквой В или цифрой 2, а на рисунках графа ребра данного цвета будем представлять точечной линией.

Зеленый цвет будем обозначать его буквой G или цифрой 3, а на рисунках графа ребра данного цвета будем представлять пунктирной линией.



Раскраска ребер в свою очередь индуцирует раскраску граней плоского кубического графа **H**. На рис.23 представлены 4 способа раскраски граней плоского кубического графа.

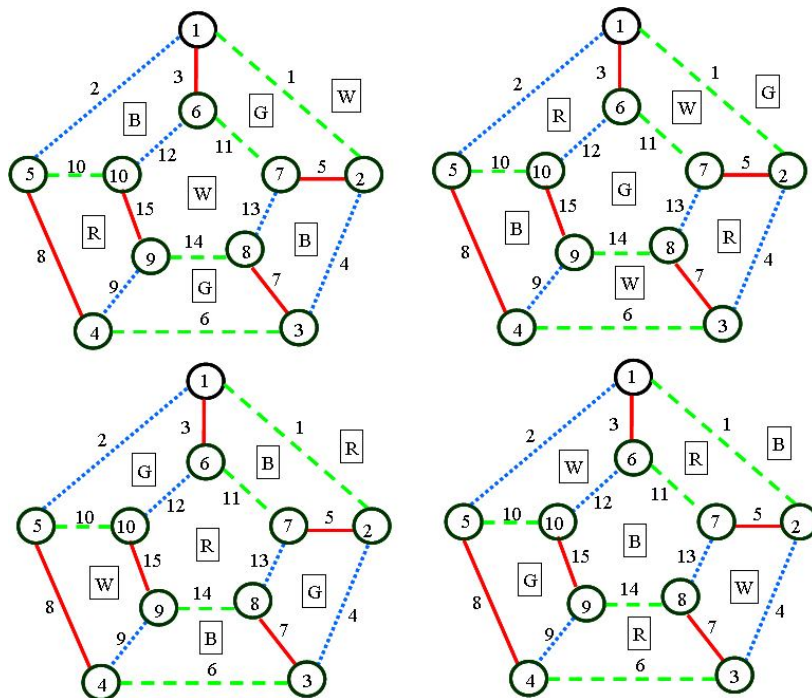


Рис. 23. Раскраска граней плоского кубического графа

Теорема Тэйта устанавливает связь между раскраской вершин максимального плоского графа с треугольными гранями четырьмя цветами и раскраской ребер двойственного плоского кубического графа **H** в три цвета. В свою очередь вершине максимального плоского графа может быть поставлено в соответствие грань двойственного плоского кубического графа. И таким образом, необходима математическая структура, описывающая одновременно раскраску ребер и раскраску граней плоского кубического графа без мостов. Такая математическая структура существует и называется группа Клейна четвертого порядка. Множество цветов при опе-

рации сложения образуют группу Клейна четвертого порядка. Таблица сложения цветов для этой группы имеет вид [14].

+	0	1	2	3	(4)
0	0	1	2	3	
1	1	0	3	2	
2	2	3	0	1	
3	3	2	1	0	

Квазициклом будем называть цикл с четной валентностью вершин. Гамильтоновым квазициклом будем называть квазицикл с валентностью вершин равной двум и проходящий по всем вершинам графа [3].

С другой стороны каждый гамильтонов квазицикл есть 2-фактор графа, так как  $n$  – фактор – это регулярный суграф степени  $n$ . Тогда имеет место следующая теорема для кубических графов.

**Теорема 2.** (Петерсен) [16]. Любой кубический граф, не содержащий мостов, можно представить в виде суммы 1-фактора и 2-фактора.

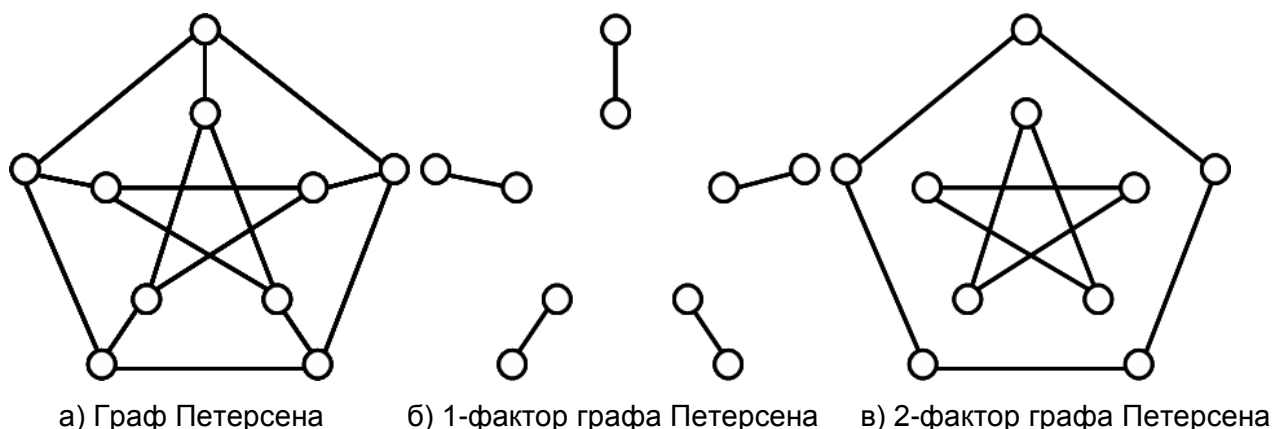
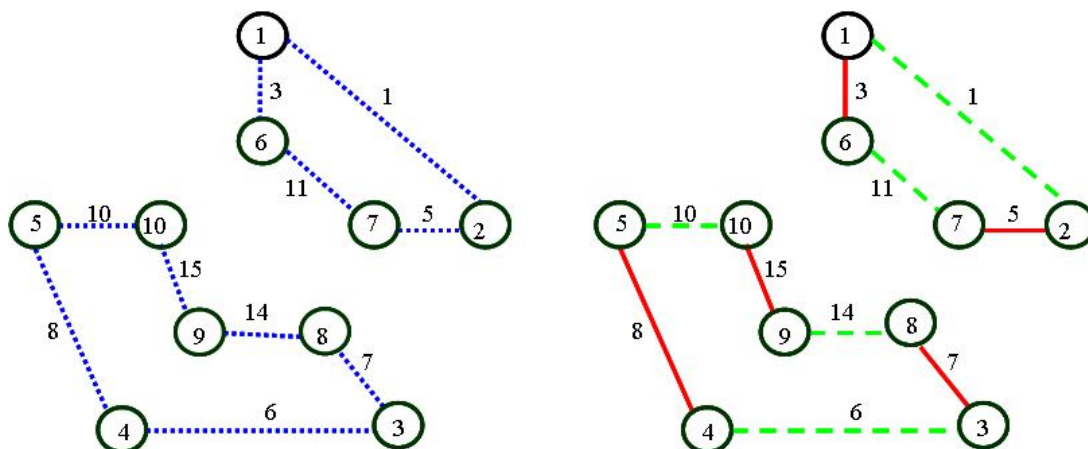


Рис. 24. Кубический граф Петерсена

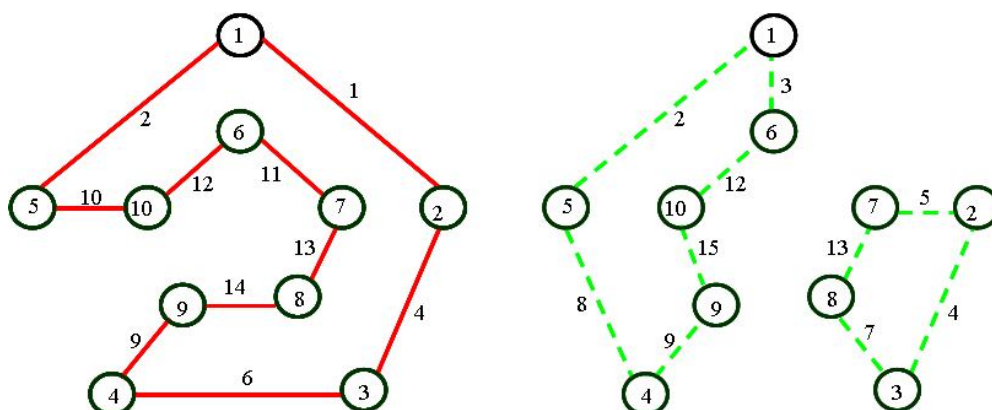
В свою очередь гамильтонов квазицикл может состоять из нескольких простых циклов. Каждый такой простой цикл четной длины будем называть – *цветным диском*. На рис. 22 представлены два диска одного цвета, один проходит по ребрам  $\{u_2, u_3, u_8, u_9, u_{12}, u_{15}\}$ , а другой по ребрам  $\{u_4, u_5, u_7, u_{13}\}$ . Гамильтонов квазицикл состоящий из цветных дисков будем называть *цветным гамильтоновым квазициклом* или *цветным 2-фактором*.



а) синий гамильтонов квазицикл (2-фактор)      б) тот же квазицикл состоящий из красных и зеленых ребер

Рис. 25. Цветные индуцированные гамильтоновы квазициклы (2-факторы)

Любой цветной гамильтонов квазицикл состоит из дисков. Если цветной диск один, то такой гамильтонов квазицикл - гамильтонов цикл.



а) красный гамильтонов квазицикл      б) зеленый гамильтонов квазицикл

Рис. 26. Цветные индуцированные гамильтоновы квазициклы (2-факторы)

В раскрашенном кубическом графе обязательно существует цветная конфигурация, состоящая из цветных 2-факторов, имеющих диски только четной длины и цветных 1-факторов.

#### 4. Свойства правильно раскрашенных плоских кубических графов

Цветные гамильтоновы квазициклы (2-факторы) обладают следующими свойствами:

**Свойство 1.** В любом цветном диске число вершин четно.

Действительно, для того чтобы диск был цветным, необходимо чтобы его ребра были раскрашены в два цвета. Это, в свою очередь, возможно только в случае, если количество вершин в цикле четно.

**Свойство 2.** Любой цветной гамильтонов квазицикл (2-фактор) порождает два других цветных гамильтоновых квазицикла (2-фактора) и производит раскраску графа  $H$ .

Если задан цветной гамильтонов квазицикл, то ребра графа этого 2-фактора можно раскрасить в два цвета отличных от цвета 2-фактора, а нераскрашенные ребра графа в цвет самого гамильтонова квазицикла (2-фактора). Таким образом, кубический граф будет раскрашен, а раскраска ребер, в свою очередь, порождает три цветных гамильтоновых квазицикла (2-фактора).

**Свойство 3.** Сумма по модулю 2 трех цветных гамильтоновых квазициклов (2-факторов), порожденных раскраской кубического графа  $H$ , есть пустое множество.

Так как по каждому ребру проходит два цветных гамильтоновых квазицикла и каждое ребро в сумме появляется дважды, а это, в свою очередь, при сложении по модулю 2 тождественно  $\emptyset$ . Поэтому сумма цветных гамильтоновых квазициклов, порожденных правильной раскраской кубического графа  $H$ , есть пустое множество.

Пусть  $G = (X, U; P)$  - граф с пронумерованным множеством ребер  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ ,  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$  и  $P$  - трехместный предикат ставящий в соответствие ребру две вершины. Тогда  $L_G$  - множество всех суграфов этого графа. Относительно операции сложения (будем называть ее кольцевой суммой)

$$(X, U_1; P) \oplus (X, U_2; P) = (X, (U_1 \cup U_2) \setminus (U_1 \cap U_2); P) \quad (5)$$

множество  $L_G$  образует абелеву группу [13].

Действительно,  $L_G$  заведомо является группоидом; относя каждому суграфу  $G = (X, U; P)$  строку чисел  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_m)$ , в которой  $i = (1, 2, \dots, m)$ , и определяя сложение строк как покомпонентное по модулю 2, мы получим изоморфный  $L_G$  группоид, элементами которого служат всевозможные строки длины  $m$  из нулей и единиц и который уже, без всякого сомнения, представляет собой абелеву группу.

$$\alpha_i = \begin{cases} 1, & \text{если } u_i \in U; \\ 0, & \text{если } u_i \notin U. \end{cases}$$

В дальнейшем группу  $L_G$  удобно рассматривать как линейное пространство над полем коэффициентов  $GF(2) = \{0, 1\}$ , называемое пространством суграфов данного графа  $G$ . Размерность этого пространства  $\dim L_G = m$ , ибо множество элементов  $(1, 0, \dots, 0)$ ,  $(0, 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)$ , представляющих однореберные суграфы, образует базис.

Что касается подпространства циклов, то в работе [4] введено понятие единичного цикла в графе и доказана теорема о существовании базиса на множестве единичных циклов.

**Определение 1.** Единичным циклом в графе называется простой цикл, если между двумя любыми несмежными вершинами этого цикла, в соответствующем графе не существует маршрутов меньшей длины, чем маршруты, принадлежащие данному циклу [4].

Следует отметить, что для плоских графов граница грани определяется единичным циклом.

На базисе подпространства циклов графа  $\mathbf{G}$  можно определить функционал Мак-Лейна принимающий нулевое значение, если граф планарен

$$F(C) = \sum_{i=1}^m (S_i - 1)(S_i - 2) = \sum_{i=1}^m S_i^2 - 3 \sum_{i=1}^m S_i + 2m. \quad (6)$$

Здесь  $S_i$  – количество единичных циклов проходящих по ребру  $i$ .

С учетом сказанного, цветные гамильтоновы квазициклы и цветные 1-факторы обладают следующими свойствами:

$$R_c \oplus G_c \oplus B_c = \emptyset; \quad (7)$$

$$R_f \oplus G_f \oplus B_f = H; \quad (8)$$

$$R_f \oplus R_c = H; \quad (9)$$

$$G_f \oplus G_c = H; \quad (10)$$

$$B_f \oplus B_c = H. \quad (11)$$

Здесь индекс  $c$  обозначает множество ребер, принадлежащих 2-фактору (гамильтонову квазициклу), индекс  $f$  обозначает множество ребер, принадлежащих 1-фактору, а  $H$  - множество ребер исходного плоского кубического графа.

Кроме того, в раскрашенном кубическом графе любой цветной 2-фактор образуется как конечная сумма единичных циклов

$R_c$  - сумма единичных циклов образующих красный 2-фактор;

$B_c$  - сумма единичных циклов образующих синий 2-фактор;

$G_c$  - сумма единичных циклов образующих зеленый 2-фактор;

$W_c$  - сумма единичных циклов не вошедших ни в красный, ни в синий и не в зеленый 2-факторы.

Проявление свойства двойственности построения цветных 2-факторов описывается следующими выражениями

$$R_c = \overline{R}_c, \quad B_c = \overline{B}_c, \quad G_c = \overline{G}_c, \quad (12)$$

где  $\overline{R}_c$ ,  $\overline{B}_c$ ,  $\overline{G}_c$  являются соответственными дополнениями единичных циклов  $R_c$ ,  $B_c$ ,  $G_c$  до полного базиса плоского графа и обода графа  $H$ . То есть

$$R_c \oplus \overline{R}_c = B_c \oplus \overline{B}_c = G_c \oplus \overline{G}_c = \emptyset \quad (13)$$



**Пример 2.** Сказанное поясним на примере плоского кубического графа **H**, представленного на рис. 22.

Для данного кубического графа **H** базисные единичные циклы (границы граней плоского графа) и обод:

$$c_1 = \{u_1, u_3, u_5, u_{11}\}, c_2 = \{u_4, u_5, u_7, u_{13}\}, c_3 = \{u_6, u_7, u_9, u_{14}\}, c_4 = \{u_8, u_9, u_{10}, u_{15}\}, c_5 = \{u_2, u_3, u_{10}, u_{12}\}, \\ c_6 = \{u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{14}, u_{15}\}, c_0 = \{u_1, u_2, u_4, u_6, u_8\}.$$

Для раскраски представленной на рис.22, имеем:

$$R_c = c_1 \oplus c_2 \oplus c_3 \oplus c_5 = \{u_1, u_3, u_5, u_{11}\} \oplus \{u_4, u_5, u_7, u_{13}\} \oplus \{u_6, u_7, u_9, u_{14}\} \oplus \{u_2, u_3, u_{10}, u_{12}\} = \\ = \{u_1, u_2, u_4, u_6, u_9, u_{10}, u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{14}\};$$

$$\overline{R}_c = c_4 \oplus c_6 \oplus c_0 = \{u_8, u_9, u_{10}, u_{15}\} \oplus \{u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{14}, u_{15}\} \oplus \{u_1, u_2, u_4, u_6, u_8\} = \\ = \{u_1, u_2, u_4, u_6, u_9, u_{10}, u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{14}\};$$

$$B_c = c_1 \oplus c_3 \oplus c_4 = \{u_1, u_3, u_5, u_{11}\} \oplus \{u_6, u_7, u_9, u_{14}\} \oplus \{u_8, u_9, u_{10}, u_{15}\} = \\ = \{u_1, u_3, u_5, u_6, u_7, u_8, u_{10}, u_{11}, u_{14}, u_{15}\};$$

$$\overline{B}_c = c_2 \oplus c_5 \oplus c_6 \oplus c_0 = \{u_4, u_5, u_7, u_{13}\} \oplus \{u_2, u_3, u_{10}, u_{12}\} \oplus \{u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{14}, u_{15}\} \oplus \\ \oplus \{u_1, u_2, u_4, u_6, u_8\} = \{u_1, u_3, u_5, u_6, u_7, u_8, u_{10}, u_{11}, u_{14}, u_{15}\};$$

$$G_c = c_2 \oplus c_4 \oplus c_5 = \{u_4, u_5, u_7, u_{13}\} \oplus \{u_8, u_9, u_{10}, u_{15}\} \oplus \{u_2, u_3, u_{10}, u_{12}\} = \\ = \{u_2, u_3, u_4, u_5, u_7, u_8, u_9, u_{12}, u_{13}, u_{15}\};$$

$$\overline{G}_c = c_1 \oplus c_3 \oplus c_6 \oplus c_0 = \{u_1, u_3, u_5, u_{11}\} \oplus \{u_6, u_7, u_9, u_{14}\} \oplus \{u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{14}, u_{15}\} \oplus \\ \oplus \{u_1, u_2, u_4, u_6, u_8\} = \{u_2, u_3, u_4, u_5, u_7, u_8, u_9, u_{12}, u_{13}, u_{15}\};$$

$$W_c = c_6 \oplus c_0 = \{u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{14}, u_{15}\} \oplus \{u_1, u_2, u_4, u_6, u_8\} = \{u_1, u_2, u_4, u_6, u_8, u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{14}, u_{15}\};$$

$$R_c \oplus G_c \oplus B_c = \{u_1, u_2, u_4, u_6, u_9, u_{10}, u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{14}\} \oplus \{u_1, u_3, u_5, u_6, u_7, u_8, u_{10}, u_{11}, u_{14}, u_{15}\} \oplus \\ \oplus \{u_2, u_3, u_4, u_5, u_7, u_8, u_9, u_{12}, u_{13}, u_{15}\} = \emptyset.$$

$$R_f = \{u_3, u_5, u_7, u_8, u_{15}\}; \quad B_f = \{u_2, u_4, u_9, u_{12}, u_{13}\}; \quad G_f = \{u_1, u_6, u_{10}, u_{11}, u_{14}\};$$

$$R_f \oplus G_f \oplus B_f = H;$$

$$R_f \oplus R_c = \{u_1, u_3, u_5, u_6, u_7, u_8, u_{10}, u_{11}, u_{13}, u_{14}\} \oplus \{u_3, u_5, u_7, u_8, u_{15}\} = H;$$

$$B_f \oplus B_c = \{u_1, u_3, u_5, u_6, u_7, u_8, u_{10}, u_{11}, u_{14}, u_{15}\} \oplus \{u_2, u_4, u_9, u_{12}, u_{13}\} = H;$$

$$G_f \oplus G_c = \{u_2, u_3, u_4, u_5, u_7, u_8, u_9, u_{12}, u_{13}, u_{15}\} \oplus \{u_1, u_6, u_{10}, u_{11}, u_{14}\} = H.$$

## 5. Раскраска граней плоского кубического графа **H**

Будем называть гранью 2 клетку ограниченную единичным циклом. Три цветных 2-фактора, в свою очередь, порождают (индуцируют) раскраску граней плоского кубического графа **H**. В свою очередь раскраска граней порождает раскраску единичных циклов в цвет грани (так как границей грани служит единичный цикл). Для раскрашенных плоских кубических

графов кольцевая сумма базисных единичных циклов и обода согласно теореме Мак-Лейна [8] равна

$$\sum_{i=1}^{m-n+1} c_i \oplus c_0 = \emptyset. \quad (14)$$

С другой стороны кольцевая сумма трех цветных гамильтоновых квазициклов

$$R_c \oplus B_c \oplus G_c = \emptyset, \quad (15)$$

согласно выражению (2).

Следующее равенство связывает условие планарности Мак-Лейна записанное в виде суммы единичных циклов и обода с кольцевой суммой трех цветных 2-фактора для плоского кубического графа **H**

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m-n+1} c_i \oplus c_0 &= R_c \oplus G_c \oplus B_c = \overline{R}_c \oplus \overline{B}_c \oplus \overline{G}_c = \overline{R}_c \oplus B_c \oplus G_c = R_c \oplus \overline{B}_c \oplus \overline{G}_c = \\ &= R_c \oplus \overline{B}_c \oplus G_c = \overline{R}_c \oplus B_c \oplus \overline{G}_c = R_c \oplus B_c \oplus \overline{G}_c = \overline{R}_c \oplus \overline{B}_c \oplus G_c = \emptyset. \end{aligned} \quad (16)$$

Если в раскрашенном плоском кубического графе **H** обозначить кольцевую сумму единичных циклов описывающих границы всех граней красного цвета, через  $\sum g_R$ , кольцевую сумму единичных циклов описывающих границы граней синего цвета, через  $\sum g_B$ , кольцевую сумму единичных циклов описывающих границы граней зеленого цвета через  $\sum g_G$ , кольцевую сумму всех единичных циклов описывающих границы граней белого цвета через  $\sum g_W$ , то тогда можно записать следующие выражения:

$$G_c = \sum g_R \oplus \sum g_B = \sum g_G \oplus \sum g_W; \quad (17)$$

$$B_c = \sum g_R \oplus \sum g_G = \sum g_B \oplus \sum g_W; \quad (18)$$

$$R_c = \sum g_G \oplus \sum g_B = \sum g_R \oplus \sum g_W. \quad (19)$$

В свою очередь три цветных 2-фактора индуцируют раскраску **П** граней где границы граней суть базисные единичные циклы и обод плоского графа **H**, и раскраска граней описывается соответствием  $\Gamma = \{\mathbf{П}, \mathbf{С}, \mathbf{К}\}$ . Здесь **П** - множество пар кортежей  $\langle c_i, a_{i,1} \times 1 + a_{i,2} \times 2 + a_{i,3} \times 3 + a_{i,4} \times 0 \rangle$ , **С** – множество базисных единичных циклов и обода плоского кубического графа **H**, а **К** – множество четырех цветов.

Множество **П** характеризует раскраску граней плоского кубического графа **H**, представляет собой произведение элементов множества **С** и элементов множества **К**, а его элементы – это кортежи записанные в виде:



$$\begin{aligned} &\langle c_3, 1 \times 1 + 1 \times 2 + 0 \times 3 + 0 \times 0 \rangle, \\ &\langle c_4, 0 \times 1 + 1 \times 2 + 1 \times 3 + 0 \times 0 \rangle, \\ &\langle c_5, 1 \times 1 + 0 \times 2 + 1 \times 3 + 0 \times 0 \rangle, \\ &\langle c_6, 0 \times 1 + 0 \times 2 + 0 \times 3 + 0 \times 0 \rangle, \\ &\langle c_0, 0 \times 1 + 0 \times 2 + 0 \times 3 + 0 \times 0 \rangle \}. \end{aligned}$$

После проведения операций сложения и умножения получим

$$\Pi_1 = \{ \langle c_1, 3 \rangle, \langle c_2, 2 \rangle, \langle c_3, 3 \rangle, \langle c_4, 1 \rangle, \langle c_5, 2 \rangle, \langle c_6, 0 \rangle, \langle c_0, 0 \rangle \}, \text{ или в виде}$$

$$\Pi_1 = \{ \langle c_1, G \rangle, \langle c_2, B \rangle, \langle c_3, G \rangle, \langle c_4, R \rangle, \langle c_5, B \rangle, \langle c_6, W \rangle, \langle c_0, W \rangle \}.$$

Пусть раскраска граней индуцируется следующими другими тремя цветными 2-факторами

$$\bar{R}_c \oplus \bar{B}_c \oplus \bar{G}_c = (c_4 \oplus c_6 \oplus c_0) \oplus (c_2 \oplus c_5 \oplus c_6 \oplus c_0) \oplus (c_1 \oplus c_3 \oplus c_6 \oplus c_0) = \emptyset.$$

Тогда коэффициенты  $a_{ij}$  можно записать в виде следующей матрицы:

	1(R)	2(B)	3(G)	0(W)
$c_1$	0	0	1	0
$c_2$	0	1	0	0
$c_3$	0	0	1	0
$c_4$	1	0	0	0
$c_5$	0	1	0	0
$c_6$	1	1	1	0
$c_0$	1	1	1	0

Раскраска граней  $\Pi_1$  индуцированное  $\bar{R}_c \oplus \bar{B}_c \oplus \bar{G}_c$  может быть записано в виде:

$$\begin{aligned} \Pi_1 = \{ &\langle c_1, 0 \times 1 + 0 \times 2 + 1 \times 3 + 0 \times 0 \rangle, \\ &\langle c_2, 0 \times 1 + 1 \times 2 + 0 \times 3 + 0 \times 0 \rangle, \\ &\langle c_3, 0 \times 1 + 0 \times 2 + 1 \times 3 + 0 \times 0 \rangle, \\ &\langle c_4, 1 \times 1 + 0 \times 2 + 0 \times 3 + 0 \times 0 \rangle, \\ &\langle c_5, 0 \times 1 + 1 \times 2 + 0 \times 3 + 0 \times 0 \rangle, \\ &\langle c_6, 1 \times 1 + 1 \times 2 + 1 \times 3 + 0 \times 0 \rangle, \\ &\langle c_0, 1 \times 1 + 1 \times 2 + 1 \times 3 + 0 \times 0 \rangle \}. \end{aligned}$$

И хотя коэффициенты  $a_{ij}$  отличны от предыдущего случая, после проведения операций сложения и умножения получим то же множество цветов для граней плоского кубического графа

$$\Pi_1 = \{ \langle c_1, 3 \rangle, \langle c_2, 2 \rangle, \langle c_3, 3 \rangle, \langle c_4, 1 \rangle, \langle c_5, 2 \rangle, \langle c_6, 0 \rangle, \langle c_0, 0 \rangle \}, \text{ или в виде}$$

$$\Pi_1 = \{ \langle c_1, G \rangle, \langle c_2, B \rangle, \langle c_3, G \rangle, \langle c_4, R \rangle, \langle c_5, B \rangle, \langle c_6, W \rangle, \langle c_0, W \rangle \}.$$

Если раскраска граней индуцируется следующими тремя цветными 2-факторами  $\bar{R}_c \oplus \bar{B}_c \oplus$

$$\bar{G}_c = (c_4 \oplus c_6 \oplus c_0) \oplus (c_1 \oplus c_3 \oplus c_4) \oplus (c_2 \oplus c_4 \oplus c_5) = \emptyset.$$

Тогда коэффициенты  $a_{ij}$  можно записать в виде следующей матрицы:

	1(R)	2(B)	3(G)	0(W)
c <sub>1</sub>	0	1	0	0
c <sub>2</sub>	0	0	1	0
c <sub>3</sub>	0	1	0	0
c <sub>4</sub>	1	1	1	0
c <sub>5</sub>	0	0	1	0
c <sub>6</sub>	1	0	0	0
c <sub>0</sub>	1	0	0	0

Множество раскраски единичных циклов  $\Pi_2$  индуцированное  $\overline{R}_c \oplus B_c \oplus G_c$  может быть записано в виде:

$$\begin{aligned} \Pi_2 = \{ & \langle c_1, 0 \times 1 + 1 \times 2 + 0 \times 3 + 0 \times 0 \rangle, \\ & \langle c_2, 0 \times 1 + 0 \times 2 + 1 \times 3 + 0 \times 0 \rangle, \\ & \langle c_3, 0 \times 1 + 1 \times 2 + 0 \times 3 + 0 \times 0 \rangle, \\ & \langle c_4, 1 \times 1 + 1 \times 2 + 1 \times 3 + 0 \times 0 \rangle, \\ & \langle c_5, 0 \times 1 + 0 \times 2 + 1 \times 3 + 0 \times 0 \rangle, \\ & \langle c_6, 1 \times 1 + 0 \times 2 + 0 \times 3 + 0 \times 0 \rangle, \\ & \langle c_0, 1 \times 1 + 0 \times 2 + 0 \times 3 + 0 \times 0 \rangle \}. \end{aligned}$$

После проведения операций сложения и умножения получим то же множество

$$\Pi_2 = \{ \langle c_1, 2 \rangle, \langle c_2, 3 \rangle, \langle c_3, 2 \rangle, \langle c_4, 0 \rangle, \langle c_5, 3 \rangle, \langle c_6, 1 \rangle, \langle c_0, 1 \rangle \}, \text{ или в виде}$$

$$\Pi_2 = \{ \langle c_1, B \rangle, \langle c_2, G \rangle, \langle c_3, B \rangle, \langle c_4, W \rangle, \langle c_5, G \rangle, \langle c_6, R \rangle, \langle c_0, R \rangle \}.$$

Раскраска граней индуцированное тремя цветными 2-факторами  $R_c \oplus \overline{B}_c \oplus \overline{G}_c$  равна множеству  $\Pi_2$ .

Проделав аналогичные вычисления, получим следующее множество раскрасок граней  $\Pi_3$  индуцированного тремя цветными 2-факторами  $R_c \oplus \overline{B}_c \oplus G_c$  или  $\overline{R}_c \oplus B_c \oplus \overline{G}_c$ .

$$\Pi_3 = \{ \langle c_1, R \rangle, \langle c_2, W \rangle, \langle c_3, R \rangle, \langle c_4, G \rangle, \langle c_5, W \rangle, \langle c_6, B \rangle, \langle c_0, B \rangle \}.$$

Для множества  $\Pi_4$  индуцированного тремя цветными 2-факторами  $R_c \oplus B_c \oplus \overline{G}_c$  или  $\overline{R}_c \oplus \overline{B}_c \oplus G_c$

$$\Pi_4 = \{ \langle c_1, W \rangle, \langle c_2, R \rangle, \langle c_3, W \rangle, \langle c_4, B \rangle, \langle c_5, R \rangle, \langle c_6, G \rangle, \langle c_0, G \rangle \}.$$

Переход от раскраски граней индуцированной тремя цветными 2-факторами  $(R_c \oplus B_c \oplus G_c) \vee (\overline{R}_c \oplus \overline{B}_c \oplus \overline{G}_c)$  к другой раскраске граней индуцированной тремя цветными 2-факторами  $(\overline{R}_c \oplus B_c \oplus G_c) \vee (R_c \oplus \overline{B}_c \oplus \overline{G}_c)$  осуществляется путем прибавления цвета R ко всем цветам граней плоского кубического графа по законам сложения группы Клейна. Например, для наше-

го примера, добавления цвета R к цветам граней  $\Pi_1$  приведет к следующей перекраски цветов граней плоского кубического графа  $\Pi_2$ .

$$\Pi_2 = \Pi_1 + R = \{ \langle c_1, G + R \rangle, \langle c_2, B + R \rangle, \langle c_3, G + R \rangle, \langle c_4, R + R \rangle, \langle c_5, B + R \rangle, \langle c_6, W + R \rangle, \langle c_0, W + R \rangle \} = \{ \langle c_1, B \rangle, \langle c_2, G \rangle, \langle c_3, B \rangle, \langle c_4, W \rangle, \langle c_5, G \rangle, \langle c_6, R \rangle, \langle c_0, R \rangle \}.$$

На следующей диаграмме представлен процесс замены трех цветных 2-факторов индуцирующих раскраску граней плоского кубического графа. Нижние три цветные 2-факторы индуцируют раскраску граней плоского кубического графа путем добавления цвета R к исходной раскраске граней плоского кубического графа индуцируемой тремя цветными 2-факторами расположенными сверху

$$\begin{array}{c} (R_c \oplus B_c \oplus G_c) \vee (\bar{R}_c \oplus \bar{B}_c \oplus \bar{G}_c) \\ \swarrow \quad \searrow \\ (\bar{R}_c \oplus B_c \oplus G_c) \vee (R_c \oplus \bar{B}_c \oplus \bar{G}_c) \end{array}$$

Здесь  $R_c$  и  $\bar{R}_c$  меняются местами.

Аналогично строится диаграмма и при добавление цвета B к исходной раскраски граней плоского кубического графа.

$$\begin{array}{c} (R_c \oplus B_c \oplus G_c) \vee (\bar{R}_c \oplus \bar{B}_c \oplus \bar{G}_c) \\ \swarrow \quad \searrow \\ (R_c \oplus B_c \oplus G_c) \vee (\bar{R}_c \oplus \bar{B}_c \oplus \bar{G}_c) \end{array}$$

И при добавлении цвета G к исходной раскраски граней плоского кубического графа.

$$\begin{array}{c} (R_c \oplus B_c \oplus G_c) \vee (\bar{R}_c \oplus \bar{B}_c \oplus \bar{G}_c) \\ \swarrow \quad \searrow \\ (R_c \oplus B_c \oplus \bar{G}_c) \vee (\bar{R}_c \oplus \bar{B}_c \oplus G_c) \end{array}$$

Сказанное можно представить в виде следующей таблицы:

Таблица раскраски единичных циклов.

	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$	$c_5$	$c_6$	$c_0$	Индукцирующие цветные 2-факторы
Исходная раскраска	G	B	G	R	B	W	W	$(R_c \oplus B_c \oplus G_c) \vee (\bar{R}_c \oplus \bar{B}_c \oplus \bar{G}_c)$
+ R	B	G	B	W	G	R	R	$(\bar{R}_c \oplus B_c \oplus G_c) \vee (R_c \oplus \bar{B}_c \oplus \bar{G}_c)$
+ B	R	W	R	G	W	B	B	$(R_c \oplus \bar{B}_c \oplus G_c) \vee (\bar{R}_c \oplus B_c \oplus \bar{G}_c)$
+ G	W	R	W	B	R	G	G	$(R_c \oplus B_c \oplus \bar{G}_c) \vee (\bar{R}_c \oplus \bar{B}_c \oplus G_c)$

С другой стороны можно сказать, что раскраска граней плоского кубического графа в четыре цвета порождает (индуцирует) раскраску ребер в три цвета для плоского кубического графа  $\Pi$  согласно операции сложения группы Клейна. Кроме того будем отождествлять раскраску граней плоского графа и раскраску единичных базовых циклов.

## 6. Ротация цветных дисков

Под *ротацией* цветного гамильтонова диска будем подразумевать изменение последовательности раскраски ребер данного диска. Ротация диска приводит к изменению других цветных гамильтоновых квазициклов. На рис. 25,б представлен синий диск до ротации, а на рис. 27 после ротации.

Операция ротации дисков может быть описана как перестановка двух ребер в других цветных 2-факторах. Например, для графа, представленного на рис. 22, цветные 2-факторы до ротации синего диска имеют вид:

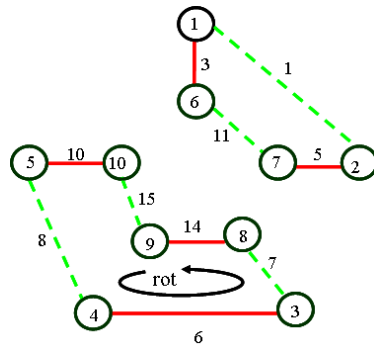


Рис. 27. Синий диск после ротации

синий 2-фактор -  $\{u_1, u_3, u_5, u_6, u_7, u_8, u_{10}, u_{11}, u_{13}, u_{14}\}$ ,

красный 2-фактор -  $\{u_1, u_2, u_4, u_6, u_9, u_{10}, u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{15}\}$ ,

зеленый 2-фактор -  $\{u_2, u_3, u_4, u_5, u_7, u_8, u_9, u_{12}, u_{14}, u_{15}\}$ .

После ротации синего диска

синий 2-фактор -  $\{u_1, u_3, u_5, u_6, u_7, u_8, u_{10}, u_{11}, u_{13}, u_{14}\}$ ,

красный 2-фактор -  $\{u_1, u_2, u_4, u_7, u_8, u_9, u_{11}, u_{12}, u_{14}, u_{15}\}$ ,

зеленый 2-фактор -  $\{u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_9, u_{10}, u_{12}, u_{13}, u_{15}\}$ .

В красном и зеленом 2-факторах произошла перестановка следующих пар ребер ( $u_6 \leftrightarrow u_7$ ), ( $u_8 \leftrightarrow u_{10}$ ), ( $u_{14} \leftrightarrow u_{15}$ ), или следующих пар ( $u_7 \leftrightarrow u_{14}$ ), ( $u_{10} \leftrightarrow u_{15}$ ), ( $u_8 \leftrightarrow u_6$ ).

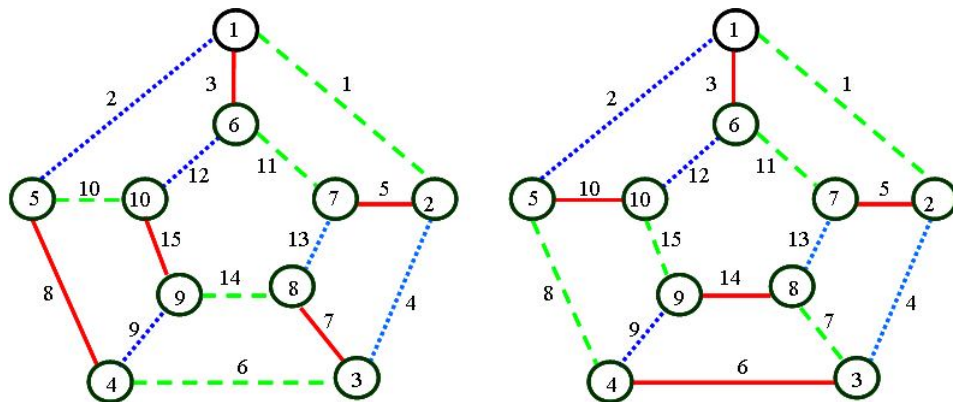


Рис. 28. Граф **H** до ротации синего диска а), и после ротации б)

## Задание

Все задания данного занятия предполагают:

- пронумеровать множество ребер заданного кубического графа (см. рис. 29);
- построение и запись цветных 2-факторов раскрашенного кубического графа (см. рис. 30-32);
- построение и запись цветных единичных циклов раскрашенного кубического графа (см. рис. 33);
- произвести запись 1-факторов кубического раскрашенного графа;
- проверить правильность формул (7-11).

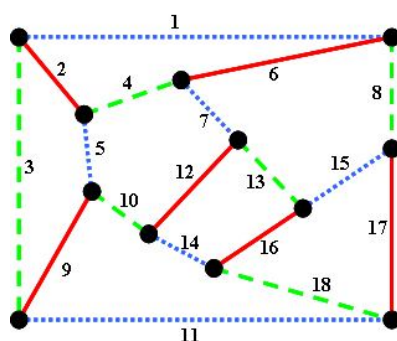


Рис. 29. Нумерация ребер кубического графа **H**

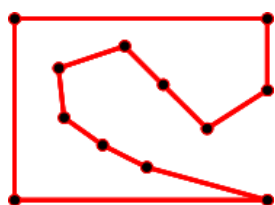


Рис. 30. Красный 2-фактор

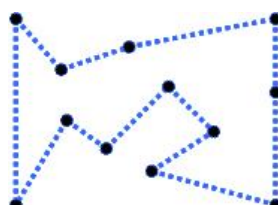


Рис. 31. Синий 2-фактор

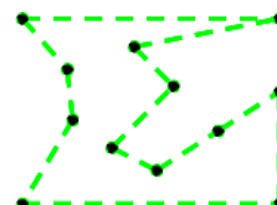


Рис. 32. Зеленый 2-фактор

Для данного кубического графа **H** базисные единичные циклы (границы граней плоского графа) и обод:

$$c_1 = \{u_1, u_2, u_4, u_6\}, c_2 = \{u_2, u_3, u_5, u_9\}, c_3 = \{u_4, u_5, u_7, u_{10}, u_{12}\}, c_4 = \{u_6, u_7, u_8, u_{13}, u_{15}\},$$

$$c_5 = \{u_{12}, u_{13}, u_{14}, u_{16}\}, c_6 = \{u_{15}, u_{16}, u_{17}, u_{18}\}, c_7 = \{u_9, u_{10}, u_{11}, u_{14}, u_{18}\},$$

$$c_0 = \{u_1, u_3, u_8, u_{11}, u_{17}\}.$$

$$\begin{aligned} R_c &= c_1 \oplus c_2 \oplus c_4 \oplus c_7 = \{u_1, u_2, u_4, u_6\} \oplus \{u_2, u_3, u_5, u_9\} \oplus \{u_6, u_7, u_8, u_{13}, u_{15}\} \oplus \{u_9, u_{10}, u_{11}, u_{14}, u_{18}\} = \\ &= \{u_1, u_3, u_4, u_5, u_7, u_8, u_{10}, u_{11}, u_{13}, u_{14}, u_{15}, u_{18}\}; \end{aligned}$$

$$\bar{R}_c = c_3 \oplus c_5 \oplus c_6 \oplus c_0 = \{u_4, u_5, u_7, u_{10}, u_{12}\} \oplus \{u_{12}, u_{13}, u_{14}, u_{16}\} \oplus \{u_{15}, u_{16}, u_{17}, u_{18}\}$$

$$\oplus \{u_1, u_3, u_8, u_{11}, u_{17}\} = \{u_1, u_3, u_4, u_5, u_7, u_8, u_{10}, u_{11}, u_{13}, u_{14}, u_{15}, u_{18}\};$$

$$B_c = c_2 \oplus c_3 \oplus c_4 \oplus c_6 = \{u_2, u_3, u_5, u_9\} \oplus \{u_4, u_5, u_7, u_{10}, u_{12}\} \oplus \{u_6, u_7, u_8, u_{13}, u_{15}\} \oplus$$



$$\begin{aligned}
& \oplus \{u_{15}, u_{16}, u_{17}, u_{18}\} = \{u_2, u_3, u_4, u_6, u_8, u_9, u_{10}, u_{12}, u_{13}, u_{16}, u_{17}, u_{18}\}; \\
\overline{B}_c &= c_1 \oplus c_5 \oplus c_7 \oplus c_0 = \{u_1, u_2, u_4, u_6\} \oplus \{u_{12}, u_{13}, u_{14}, u_{16}\} \oplus \{u_9, u_{10}, u_{11}, u_{14}, u_{18}\} \oplus \\
& \oplus \{u_1, u_3, u_8, u_{11}, u_{17}\} = \{u_2, u_3, u_4, u_6, u_8, u_9, u_{10}, u_{12}, u_{13}, u_{16}, u_{17}, u_{18}\}; \\
G_c &= c_1 \oplus c_3 \oplus c_6 \oplus c_7 = \{u_1, u_2, u_4, u_6\} \oplus \{u_4, u_5, u_7, u_{10}, u_{12}\} \oplus \{u_{15}, u_{16}, u_{17}, u_{18}\} \oplus \\
& \oplus \{u_9, u_{10}, u_{11}, u_{14}, u_{18}\} = \{u_1, u_2, u_5, u_6, u_7, u_9, u_{11}, u_{12}, u_{14}, u_{15}, u_{16}, u_{17}\}; \\
\overline{G}_c &= c_2 \oplus c_4 \oplus c_5 \oplus c_0 = \{u_2, u_3, u_5, u_9\} \oplus \{u_6, u_7, u_8, u_{13}, u_{15}\} \oplus \{u_{12}, u_{13}, u_{14}, u_{16}\} \oplus \\
& \oplus \{u_1, u_3, u_8, u_{11}, u_{17}\} = \{u_1, u_2, u_5, u_6, u_7, u_9, u_{11}, u_{12}, u_{14}, u_{15}, u_{16}, u_{17}\}; \\
W_c &= c_5 \oplus c_0 = \{u_{12}, u_{13}, u_{14}, u_{16}\} \oplus \{u_1, u_3, u_8, u_{11}, u_{17}\} = \{u_1, u_3, u_8, u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{14}, u_{16}, u_{17}\}; \\
R_c \oplus G_c \oplus B_c &= \{u_1, u_3, u_4, u_5, u_7, u_8, u_{10}, u_{11}, u_{13}, u_{14}, u_{15}, u_{18}\} \oplus \\
& \oplus \{u_2, u_3, u_4, u_6, u_8, u_9, u_{10}, u_{12}, u_{13}, u_{16}, u_{17}, u_{18}\} \oplus \{u_1, u_2, u_5, u_6, u_7, u_9, u_{11}, u_{12}, u_{14}, u_{15}, u_{16}, u_{17}\} = \emptyset. \\
R_f &= \{u_2, u_6, u_9, u_{12}, u_{16}, u_{17}\}; \quad B_f = \{u_1, u_5, u_7, u_{11}, u_{14}, u_{15}\}; \quad G_f = \{u_3, u_4, u_8, u_{10}, u_{13}, u_{18}\}; \\
R_f \oplus G_f \oplus B_f &= \{u_2, u_6, u_9, u_{12}, u_{16}, u_{17}\} \oplus \{u_1, u_5, u_7, u_{11}, u_{14}, u_{15}\} \oplus \{u_3, u_4, u_8, u_{10}, u_{13}, u_{18}\} = H; \\
R_f \oplus R_c &= \{u_1, u_3, u_4, u_5, u_7, u_8, u_{10}, u_{11}, u_{13}, u_{14}, u_{15}, u_{18}\} \oplus \{u_2, u_6, u_9, u_{12}, u_{16}, u_{17}\} = H; \\
B_f \oplus B_c &= \{u_2, u_3, u_4, u_6, u_8, u_9, u_{10}, u_{12}, u_{13}, u_{16}, u_{17}, u_{18}\} \oplus \{u_1, u_5, u_7, u_{11}, u_{14}, u_{15}\} = H; \\
G_f \oplus G_c &= \{u_1, u_2, u_5, u_6, u_7, u_9, u_{11}, u_{12}, u_{14}, u_{15}, u_{16}, u_{17}\} \oplus \{u_3, u_4, u_8, u_{10}, u_{13}, u_{18}\} = H.
\end{aligned}$$

Пусть раскраска граней, где границы граней суть единичные циклы индуцируется следующим набором трех цветных 2-факторов  $R_c \oplus B_c \oplus G_c = (c_1 \oplus c_2 \oplus c_4 \oplus c_7) \oplus (c_2 \oplus c_3 \oplus c_4 \oplus c_6) \oplus (c_1 \oplus c_3 \oplus c_6 \oplus c_7) = \emptyset$ .

Тогда коэффициенты  $a_{ij}$  можно записать в виде следующей матрицы:

	1(R)	2(B)	3(G)	0(W)
$c_1$	1	0	1	0
$c_2$	1	1	0	0
$c_3$	0	1	1	0
$c_4$	1	1	0	0
$c_5$	0	0	0	0
$c_6$	0	1	1	0
$c_7$	1	0	1	0
$c_0$	0	0	0	0

Раскраска граней  $\Pi$  индуцированное  $R_c \oplus B_c \oplus G_c$  может быть записано в виде:

$$\begin{aligned}
\Pi &= \langle c_1, 1 \times 1 + 0 \times 2 + 1 \times 3 + 0 \times 0 \rangle, \\
& \langle c_2, 1 \times 1 + 1 \times 2 + 0 \times 3 + 0 \times 0 \rangle, \\
& \langle c_3, 0 \times 1 + 1 \times 2 + 1 \times 3 + 0 \times 0 \rangle, \\
& \langle c_4, 1 \times 1 + 1 \times 2 + 0 \times 3 + 0 \times 0 \rangle, \\
& \langle c_5, 0 \times 1 + 0 \times 2 + 0 \times 3 + 0 \times 0 \rangle,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\langle c_6, 0 \times 1 + 1 \times 2 + 1 \times 3 + 0 \times 0 \rangle, \\ &\langle c_7, 1 \times 1 + 0 \times 2 + 1 \times 3 + 0 \times 0 \rangle, \\ &\langle c_0, 0 \times 1 + 0 \times 2 + 0 \times 3 + 0 \times 0 \rangle \}. \end{aligned}$$

После проведения операций сложения и умножения получим

$$\Pi = \{ \langle c_1, 2 \rangle, \langle c_2, 3 \rangle, \langle c_3, 1 \rangle, \langle c_4, 3 \rangle, \langle c_5, 0 \rangle, \langle c_6, 1 \rangle, \langle c_7, 2 \rangle, \langle c_0, 0 \rangle \}, \text{ или в виде}$$

$$\Pi = \{ \langle c_1, B \rangle, \langle c_2, G \rangle, \langle c_3, R \rangle, \langle c_4, G \rangle, \langle c_5, W \rangle, \langle c_6, R \rangle, \langle c_7, B \rangle, \langle c_0, W \rangle \} \text{ (см. рис. 33)}.$$

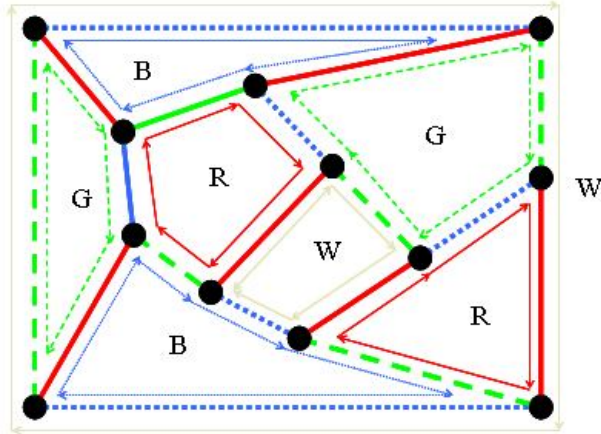


Рис. 33. Цветные единичные циклы в раскрашенном кубическом графе

**Задание 2.1.** Выполнить задание для раскрашенного кубического графа (см. рис.34).

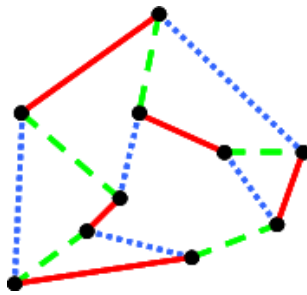


Рис. 34. Раскрашенный кубический граф

**Задание 2.2.** Выполнить задание для раскрашенного кубического графа (см. рис.35).

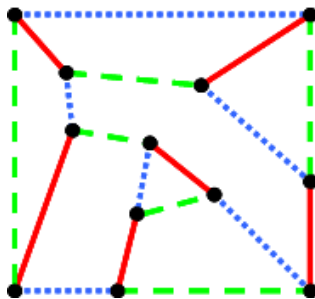


Рис. 35. Раскрашенный кубический граф

**Задание 2.3.** Выполнить задание для раскрашенного кубического графа (см. рис.36).

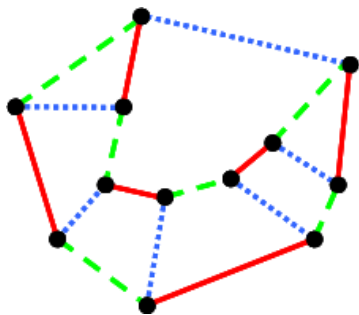


Рис. 36. Раскрашенный кубический граф

**Задание 2.4.** Выполнить задание для раскрашенного кубического графа (см. рис.37).

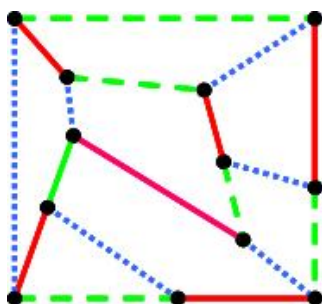


Рис. 37. Раскрашенный кубический граф

**Задание 2.5.** Выполнить задание для раскрашенного кубического графа (см. рис.38).

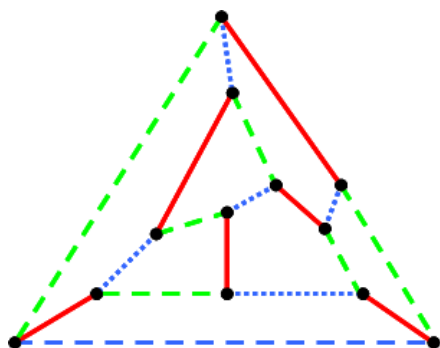


Рис. 38. Раскрашенный кубический граф

**Задание 2.6.** Выполнить задание для раскрашенного кубического графа (см. рис.39).

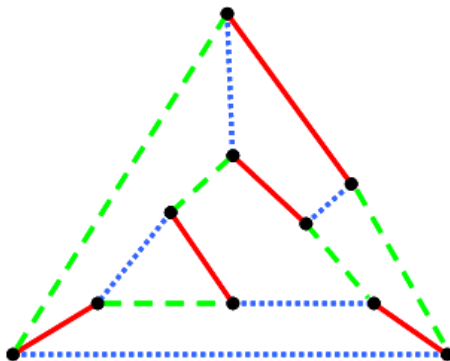


Рис. 39. Раскрашенный кубический граф

**Задание 2.7.** Выполнить задание для раскрашенного кубического графа (см. рис.40).

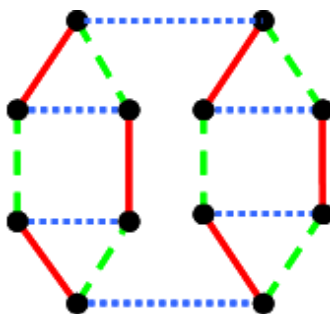


Рис. 40. Раскрашенный кубический граф

**Задание 2.8.** Выполнить задание для раскрашенного кубического графа (см. рис.41).

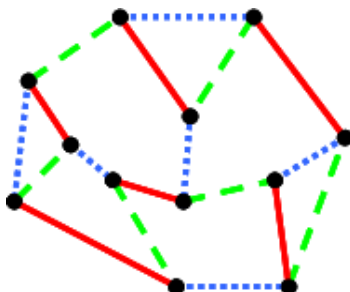


Рис. 41. Раскрашенный кубический граф

**Задание 2.9.** Выполнить задание для раскрашенного кубического графа (см. рис.42).

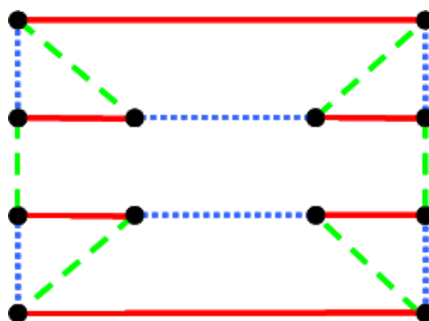


Рис. 42. Раскрашенный кубический граф

**Задание 2.10.** Выполнить задание для раскрашенного кубического графа (см. рис.43).

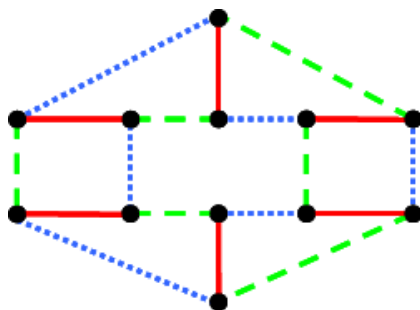


Рис. 43. Раскрашенный кубический граф

## ЗАНЯТИЕ № 3. Принципы построения плоских кубических графов и их раскраска

### 7. Принципы построения кубических графов

Что касается построения кубического графа без мостов на плоскости, то любой кубический граф может быть построен путем введения новых ребер следующим образом:

**Способ 1.** Расположением двух новых вершин на двух ребрах исходного кубического графа без мостов и проведения нового ребра соединяющего эти вершины (см. рис. 44).

**Способ 2.** Расположением двух новых вершин на одном ребре исходного кубического графа без мостов и проведения нового ребра, соединяющего эти вершины (см. рис. 45).

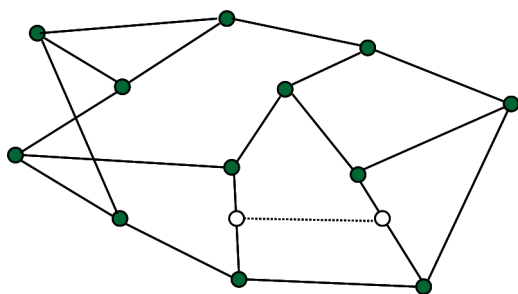


Рис. 44. Первый способ построения кубического графа **H**

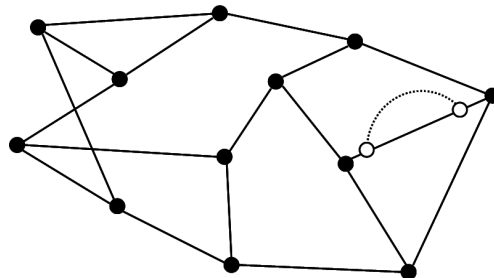


Рис. 45. Второй способ построения кубического графа **H**

Минимальным графом для первоначального построения является кубический граф с двумя вершинами и тремя ребрами (см. рис. 46).

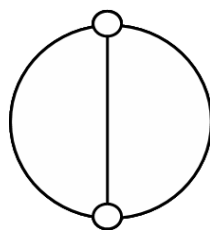


Рис. 46. Минимальный кубический граф

Любой кубический граф может быть построен из предыдущего кубического графа без мостов путем введения нового ребра одним из двух способов. Нетрудно заметить, что цвет вновь вводимого ребра соответствует цвету гамильтонового диска (диска 2-фактора), на котором находятся концы вновь вводимого ребра. И действительно вновь введенное ребро увеличивает количество вершин диска ровно на 2, что естественно не влияет на раскраску диска. Это относится также и к удаленным ребрам, так как удаление ребра уменьшает количество вершин в диске ровно на 2. Если ребро введено или удалено с учетом последнего факта, то в результате, возможно, получить раскраску кубического графа.

Плоский кубический граф без мостов до введения нового ребра будем называть *предыдущим*. Плоский кубический граф без мостов полученный после введения нового ребра будем называть *последующим*. Ребра, на которых находятся вершины вновь вводимого ребра для предыдущего графа, впредь будем называть *сцепленными ребрами*. Для получения последующего плоского кубического графа сцепленные ребра обязательно должны принадлежать единичному циклу.

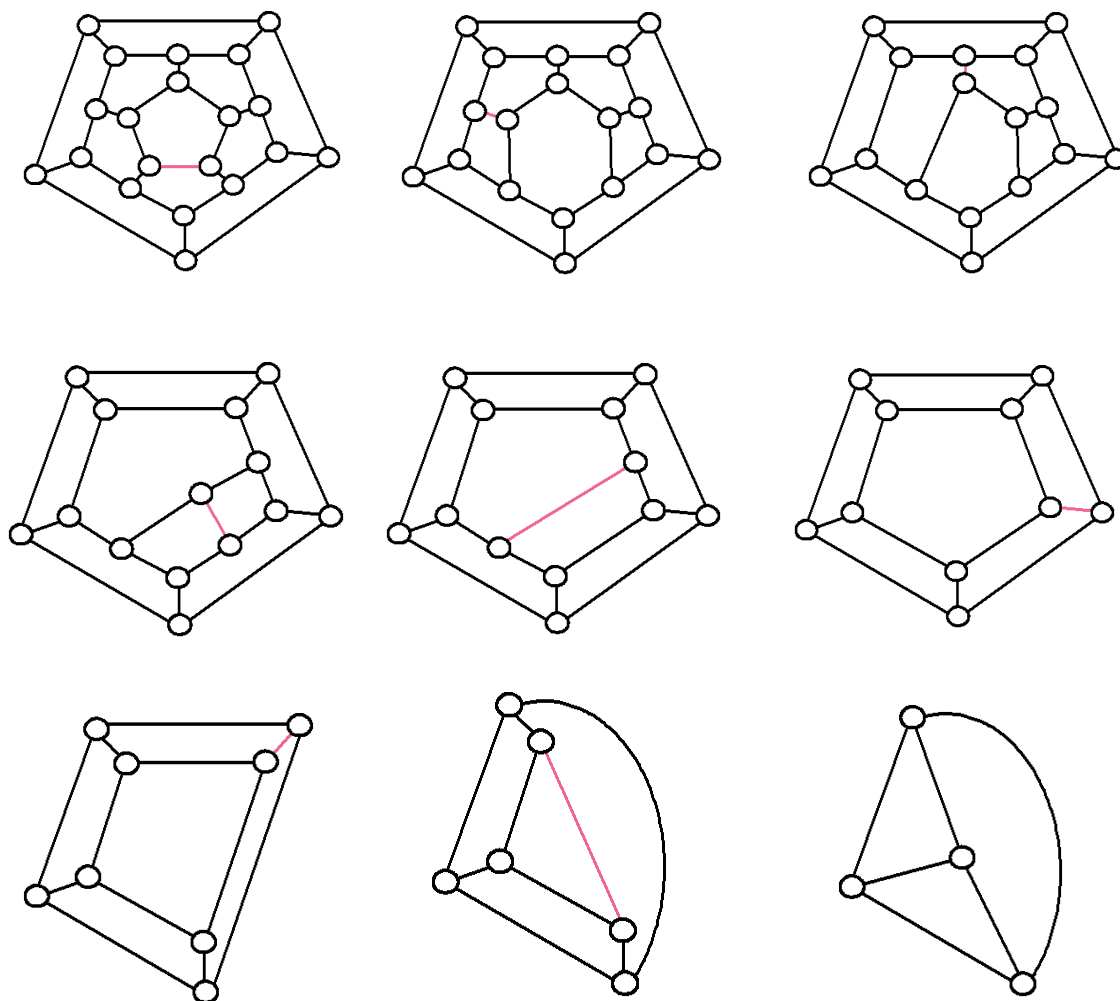


Рис. 47. Последовательный процесс удаления ребер из исходного кубического графа

На рис. 47 представлен последовательный процесс удаления ребер из исходного кубического графа без мостов до получения известного раскрашенного плоского кубического графа (здесь удаляемые ребра представлены красным цветом).

На рис. 48 представлен последовательный процесс раскраски ребер для последующего кубического графа из известного предыдущего раскрашенного плоского кубического графа без мостов до получения раскраски исходного кубического графа.

С учетом описанного, раскраску любого плоского кубического графа можно свести к последовательному процессу:

- удаление ребер из исходного плоского кубического графа без мостов, с целью получения плоского кубического графа, раскраска которого известна;
- раскраска полученного плоского кубического графа без мостов;
- определение сцепленных ребер для введения нового ребра;
- поиск цветного диска проходящего по сцепленным ребрам;
- раскраски вновь введенного ребра в цвет диска, принадлежащего сцепленным ребрам;
- перекраски ребер диска, принадлежащего сцепленным ребрам после введения нового ребра.

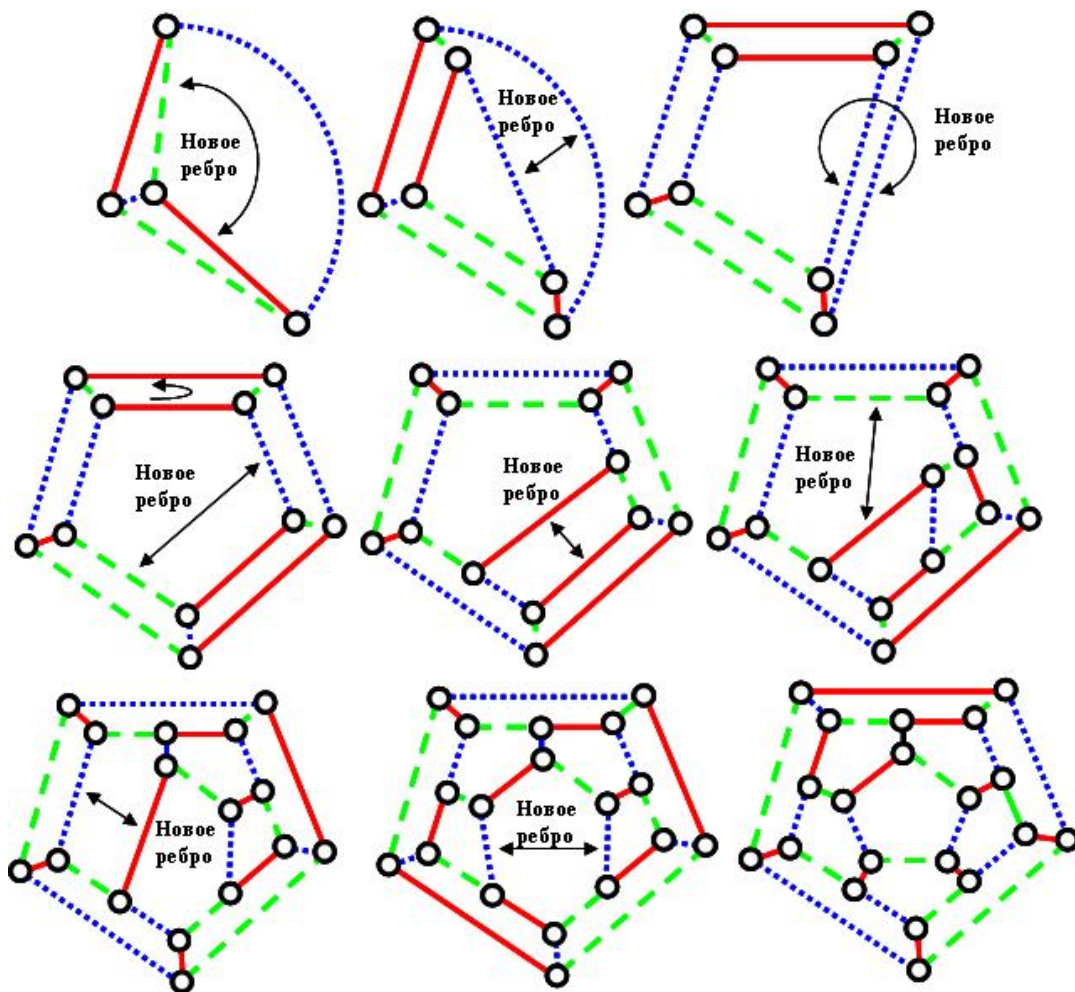


Рис. 48. Последовательный процесс введения нового ребра и его раскраска



Так как по каждому из сцепленных ребер проходит два разных цветных диска, то обязательно имеется цветной 2-фактор принадлежащий сцепленным ребрам. И тогда возможны следующие комбинации:

1. сцепленные ребра принадлежат одному цветному диску соответствующего 2-фактора;
2. сцепленные ребра принадлежат двум разным дискам соответствующего 2-фактора.

Если сцепленные ребра одного цвета, то выбор цветного 2-фактора тривиален из двух других цветных 2-факторов. Если ребра различного цвета, то общий цветной 2-фактор будет третьего цвета.

В случае 1 (тривиальный случай) вновь введенное ребро может быть легко раскрашено. Покажем, что оно может быть раскрашено и во втором случае.

### **8. Теорема о существовании цветного диска, проходящего по сцепленным ребрам**

Докажем теорему о существовании цветного диска, проходящего по сцепленным ребрам принадлежащим единичному циклу в плоском кубическом раскрашенном графе. Как увидим позже, следствием данной теоремы является теорема о четырех красках для максимально плоского графа [5]. Гипотеза о четырех красках была подтверждена работами Аппеля и Хакена [18] проведенными ими с помощью вычислительных машин, мы же приведем дедуктивный способ доказательства теоремы о четырех красках.

**Доказательство.** Доказательство проведем от противного. Рассмотрим процесс введения нового ребра. Пусть на каком-то шаге последовательного процесса для введения нового ребра, имеется раскрашенный кубический граф. Введем новое ребро и определим сцепленные ребра. Предположим, что не существует цветного диска, проходящего по сцепленным ребрам. Тогда, после введения нового ребра, половина каждого из сцепленных ребер должна быть окрашена в белый цвет для удовлетворения правил раскраски (инцидентные ребра любой вершины должны быть окрашены в различные цвета), в этом случае каждый диск, проходящий по сцепленным ребрам увеличился в длину на одну единицу и станет диском нечетной длины (см. рис. 49). Но тогда по ребрам, окрашенным в белый цвет должны проходить три разноцветных единичных базисных диска, для удовлетворения группового сложения по Клейну

$$W = R + B + G.$$

Но последнее высказывание нарушает условие планарности (по теореме Мак-Лейна, граф планарен тогда и только тогда, когда существует базис циклов такой, что по каждому ребру проходит не более двух циклов [8]). Если предположить, что белое ребро индуцировано двумя одинаково раскрашенными базисными единичными циклами, то это аналогично  $W = R + (B + C) = R + R = B + (R + C) = B + B = G + (R + B) = G + G$ . То есть участвуют в построении все рав-

но три цикла. Мы пришли к противоречию. Следовательно, наше предположение ложно, и в плоском кубическом графе обязательно существует цветной диск, проходящий по сцепленным ребрам, принадлежащим одному базисному циклу.

Мы пришли к противоречию. Следовательно, наше предположение ложно, и в плоском кубическом графе обязательно существует цветной диск, проходящий по сцепленным ребрам, принадлежащим одному базисному циклу.

Таким образом, доказана следующая теорема.

**Теорема 3.** В плоском кубическом графе без мостов обязательно существует цветной диск, проходящий по любым сцепленным ребрам, принадлежащим единичному циклу графа.

**Следствие 3.1.** Вновь введенное ребро для последующего трехсвязного плоского кубического графа без мостов обязательно раскрашивается.

Это следует из того, что вновь введенное ребро всегда можно раскрасить в цвет диска проходящего по сцепленным ребрам.

**Следствие 3.2.** Хроматический класс плоского кубического графа без мостов равен трем.

Это следует из последовательности процесса построения раскраски, так как последующий граф раскрашивается путем введения и раскраски нового ребра с последующей перекраской ребер диска проходящего по сцепленным ребрам.

**Следствие 3.3.** В плоском кубическом графе без мостов обязательно существует гамильтонов квазицикл (2-фактор) с дисками четной длины.

Это следует из принципа процесса раскраски

**Следствие 3.4.** Хроматическое число трехсвязного максимально плоского графа равно четырем.

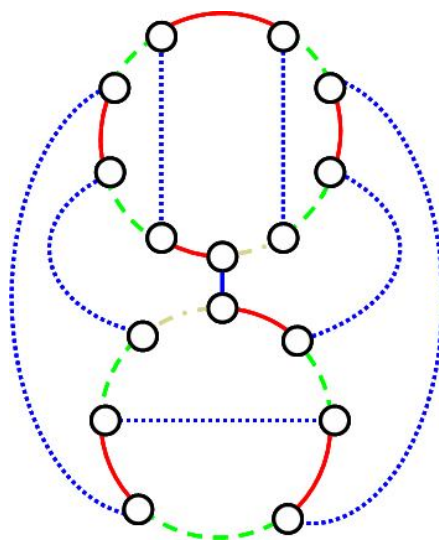


Рис. 49. Введение белых ребер в последующий плоский граф

Это следует из свойства 2 и теоремы 1 (Тэйта) и того факта, что единичные циклы и обод плоского кубического графа  $\mathbf{H}$  дуальны вершинам максимально плоского графа  $\mathbf{G}'$

Результаты наших рассуждений проведем для раскрашенного непланарного графа представленного на рис. 50.

Введем новое ребро для сцепленных ребер  $(u_2, u_{15})$  с целью получения последующего кубического графа. В данном непланарном графе не существует цветного диска, проходящего по данным сцепленным ребрам. Поэтому раскрасим ребра  $(u_2, u_{15})$  нового графа в нечетких дисках белым цветом (см. рис.50).

Множество единичных циклов для данного графа состоит из двенадцати циклов длиной пять:

$$c_1 = \{u_1, u_2, u_4, u_6, u_8\}, c_2 = \{u_1, u_2, u_5, u_{10}, u_{14}\}, c_3 = \{u_1, u_3, u_4, u_7, u_{11}\}, c_4 = \{u_1, u_3, u_5, u_{12}, u_{13}\},$$

$$c_5 = \{u_2, u_3, u_{10}, u_{11}, u_{15}\}, c_6 = \{u_2, u_3, u_8, u_9, u_{12}\}, c_7 = \{u_4, u_5, u_6, u_9, u_{13}\}, c_8 = \{u_4, u_5, u_7, u_{14}, u_{15}\},$$

$$c_9 = \{u_6, u_7, u_9, u_{11}, u_{12}\}, c_{10} = \{u_6, u_7, u_8, u_{10}, u_{15}\}, c_{11} = \{u_8, u_9, u_{10}, u_{13}, u_{14}\}, c_{12} = \{u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{14}, u_{15}\}.$$

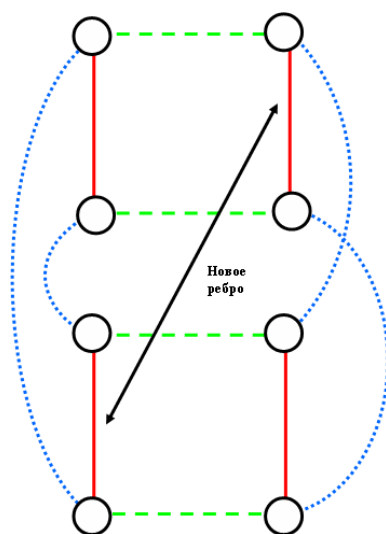


Рис. 50. Раскрашенный непланарный граф

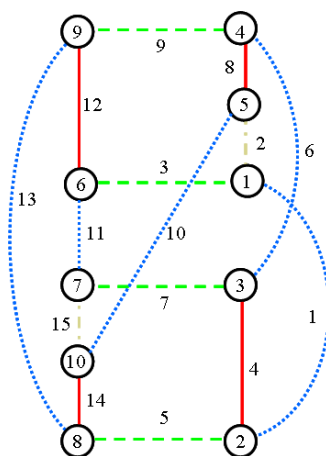


Рис. 51. Раскраска ребер в белый цвет

Если выбрать в качестве базиса следующие циклы:

$$c_1 = \{u_1, u_2, u_4, u_6, u_8\}, c_3 = \{u_1, u_3, u_4, u_7, u_{11}\}, c_5 = \{u_2, u_3, u_{10}, u_{11}, u_{15}\}, c_6 = \{u_2, u_3, u_8, u_9, u_{12}\},$$

$$c_8 = \{u_4, u_5, u_7, u_{14}, u_{15}\}, c_{12} = \{u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{14}, u_{15}\},$$

то мы действительно получим, что по сцепленным ребрам проходит три единичных цикла (см. рис. 52).

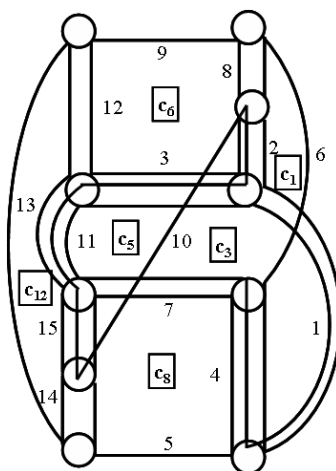


Рис. 52. Базисные единичные циклы непланарного графа

Если перерисовать рисунок данного графа, то мы получим более известный рисунок этого графа Петерсена (см. рис. 53), хроматический класс которого не равен 3

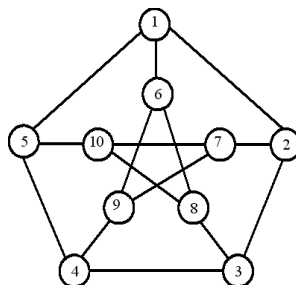


Рис. 53. Граф Петерсена

### 9. Процесс раскраски ребер в плоском кубическом графе

После доказательства теоремы о существовании цветного диска проходящего по сцепленным ребрам, процесс раскраски ребер в плоском кубическом графе без мостов, можно разбить на два этапа. На первом этапе последовательно удаляем ребра из графа до получения известного раскрашенного кубического графа без мостов. На втором этапе, в обратной последовательности вводим новые ребра и производим их раскраску с перекраской ребер диска охватывающего сцепленные ребра. В случае необходимости, применяем операцию ротации для поиска диска, проходящего по сцепленным ребрам. На базе данного процесса строится алгоритм с ли-

нейной вычислительной сложностью для раскраски ребер несепарабельного плоского кубического графа без мостов и как следствие раскраска вершин в максимально плоском графе.

### 10. К доказательству теоремы

Рассмотрим более подробно процесс раскраски ребер в случае, когда сцепленное ребро соединяет два одноцветных диска (см. рис. 54). Предположим, что не существует цветного диска проходящего по двум сцепленным ребрам. Тогда, процесс раскраски ребер можно представить в следующем виде (см. рис. 56 или рис. 57 или как-то по другому):

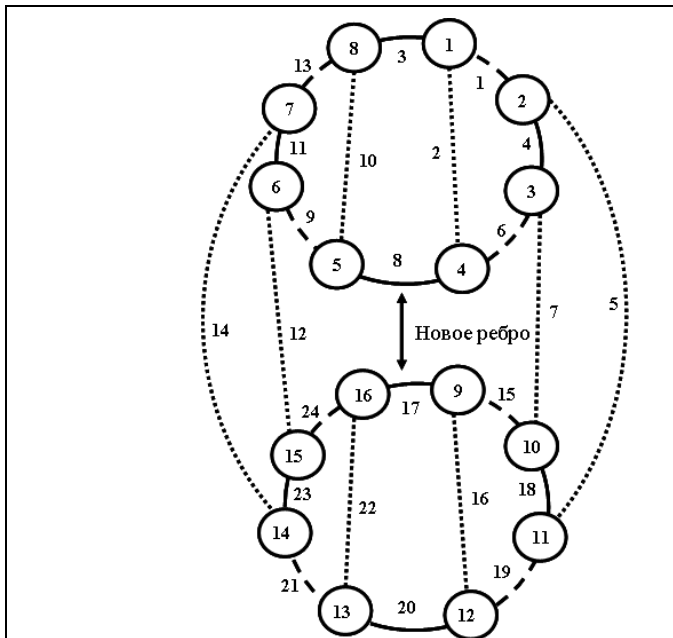


Рис.54. Два диска в двух одноцветных 2-факторах кубического графа и введение нового ребра.

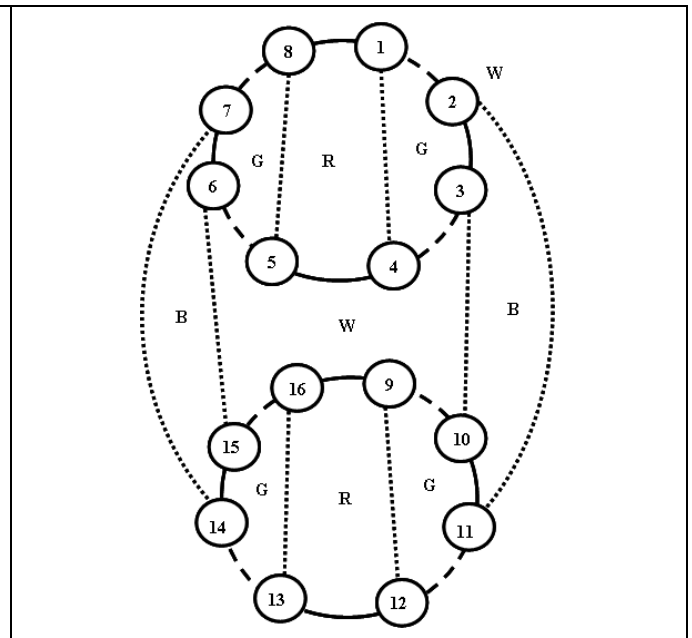


Рис. 55. Раскраска единичных циклов.

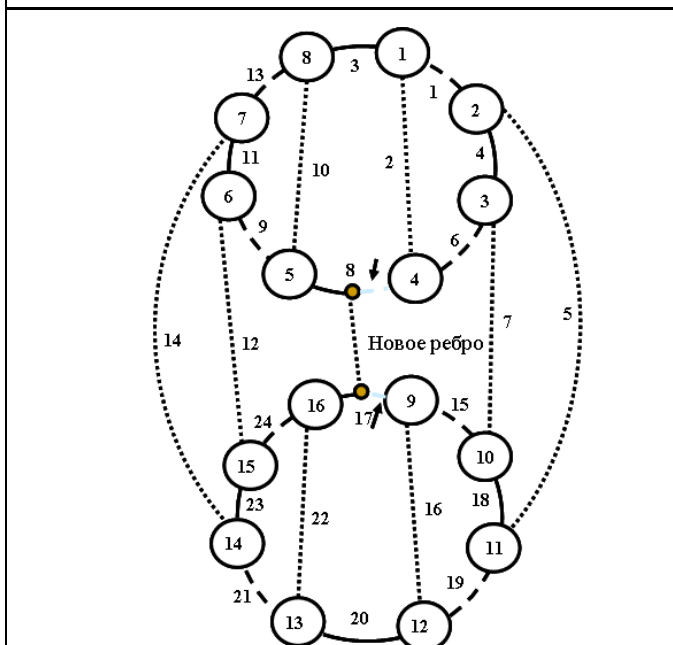


Рис. 56. Появление белых ребер (указано стрелками)

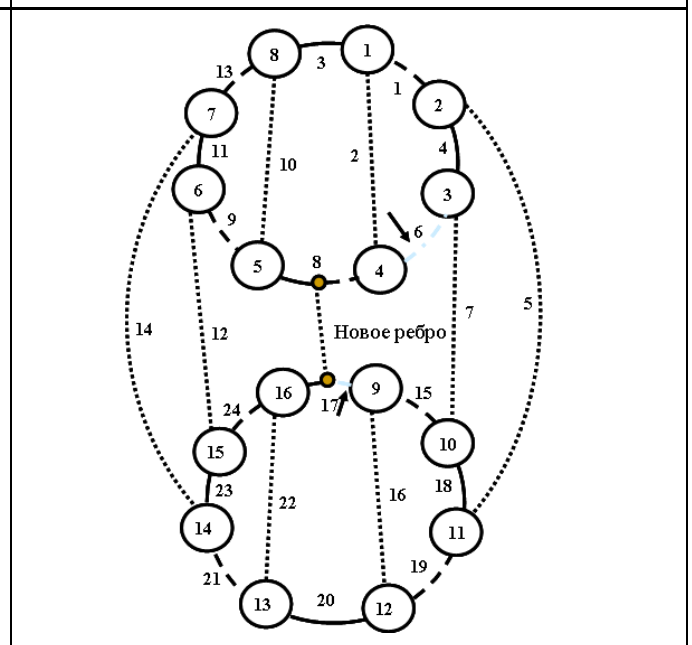


Рис. 57. Появление белых ребер (указано стрелками)



## Задание

Все задания данного параграфа предполагают построения прямого и обратного процесса раскраски ребер кубического графа и после выполнения процесса раскраски ребер в кубическом графе произвести раскраску вершин и ребер в дуальном максимально плоском графе:

Рассмотрим процесс раскраски ребер для плоского кубического графа **Н** представленного на рис. 59.

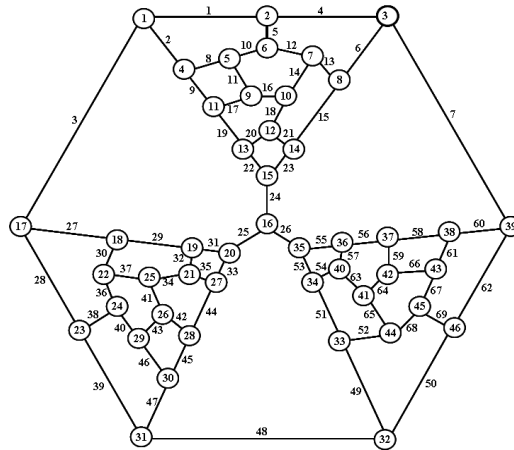


Рис. 59. Граф Татта

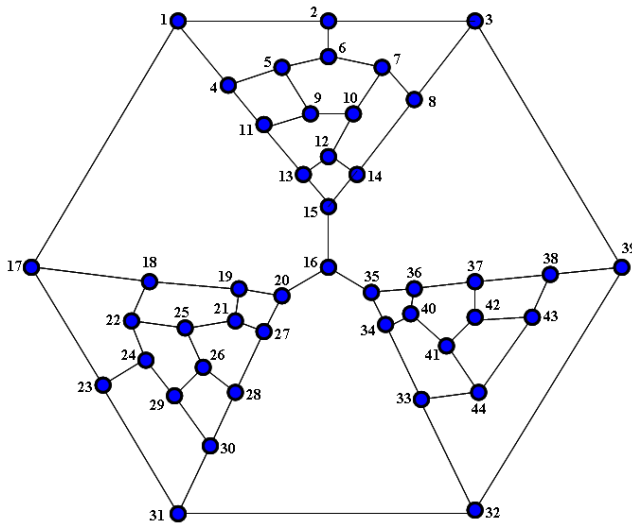


Рис. 60. Удаление из графа ребра  $(x_{45}, x_{46})$ .

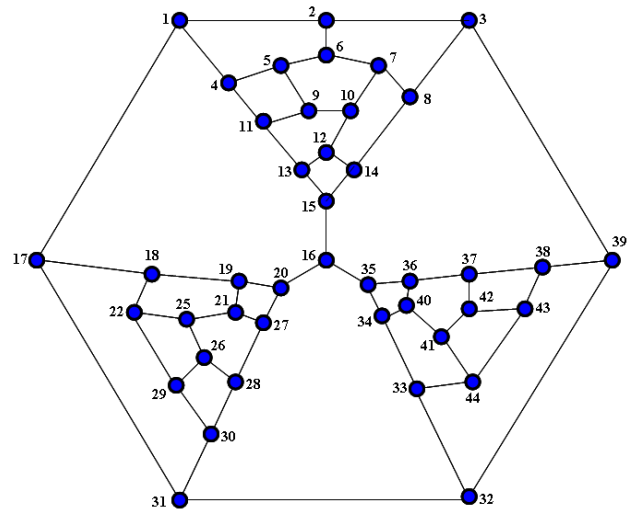


Рис. 61. Удаление из графа ребра  $(x_{23}, x_{24})$ .

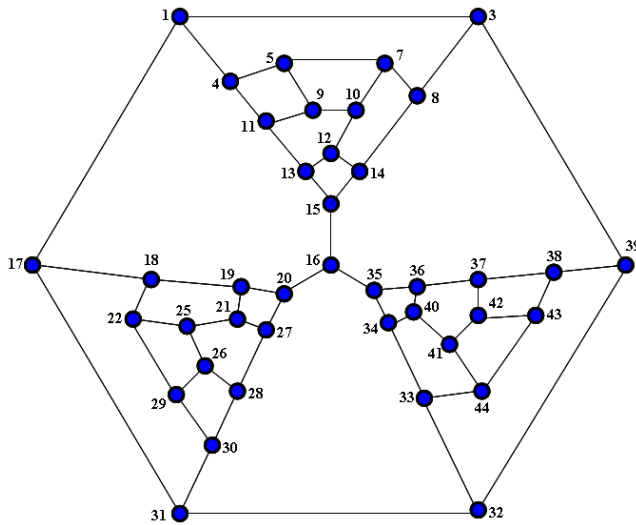


Рис. 62. Удаление из графа ребра  $(x_2, x_6)$ .

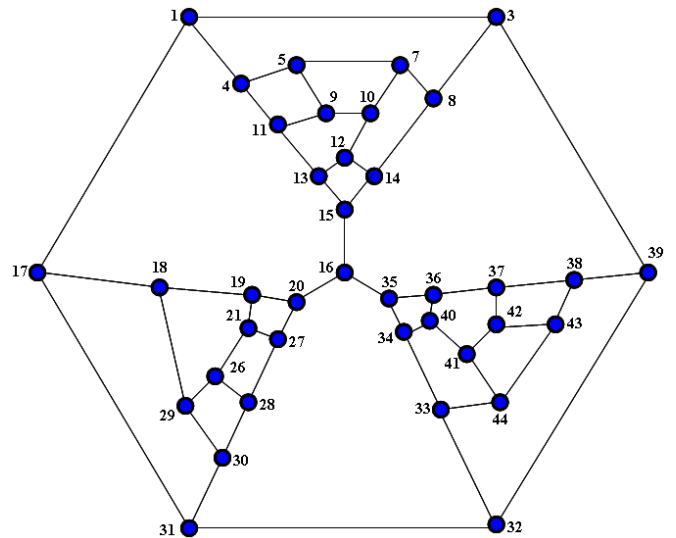


Рис. 63. Удаление из графа ребра  $(x_{22}, x_{25})$ .

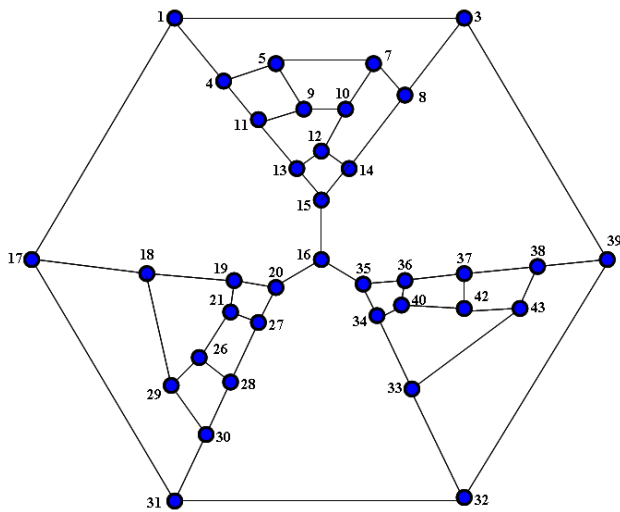


Рис. 64. Удаление из графа ребра  $(x_{41}, x_{44})$ .

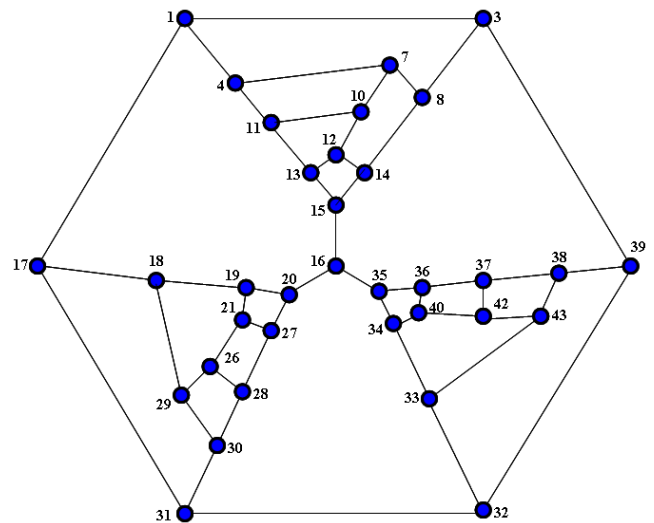


Рис. 65. Удаление из графа ребра  $(x_5, x_9)$ .

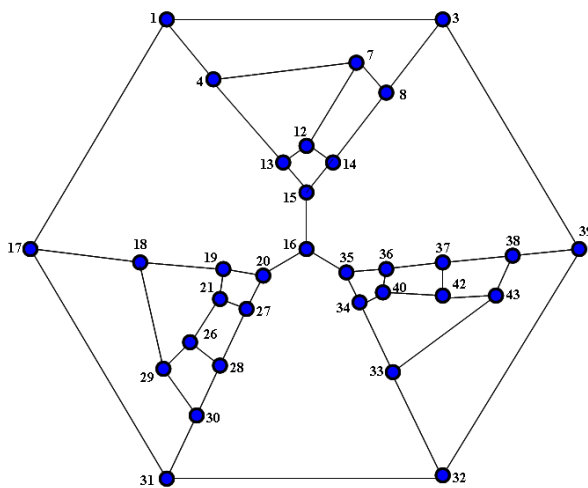


Рис. 66. Удаление из графа ребра  $(x_{10}, x_{11})$ .

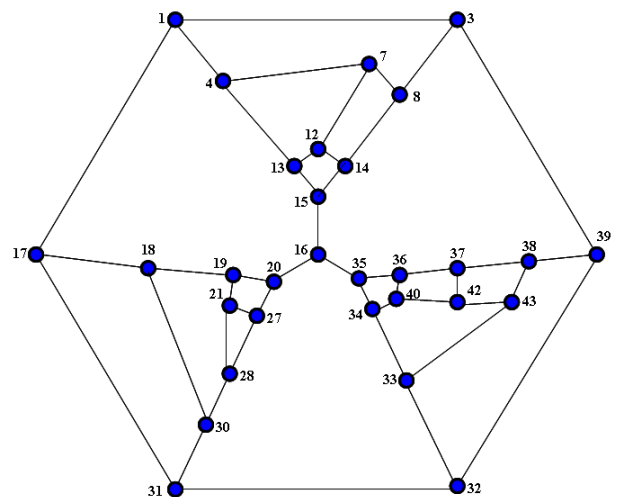


Рис. 67. Удаление из графа ребра  $(x_{26}, x_{29})$ .



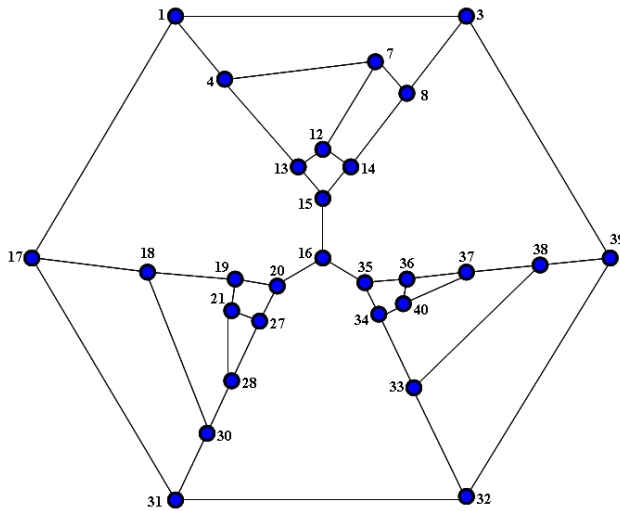


Рис. 68. Удаление из графа ребра  $(x_{42}, x_{43})$

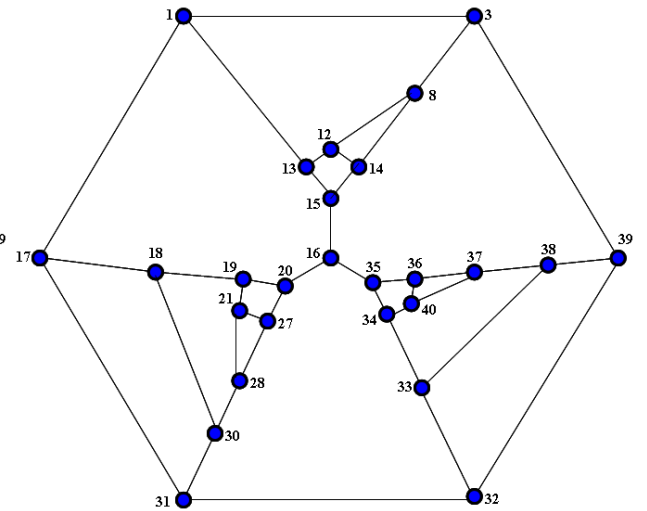


Рис. 69. Удаление из графа ребра  $(x_4, x_7)$

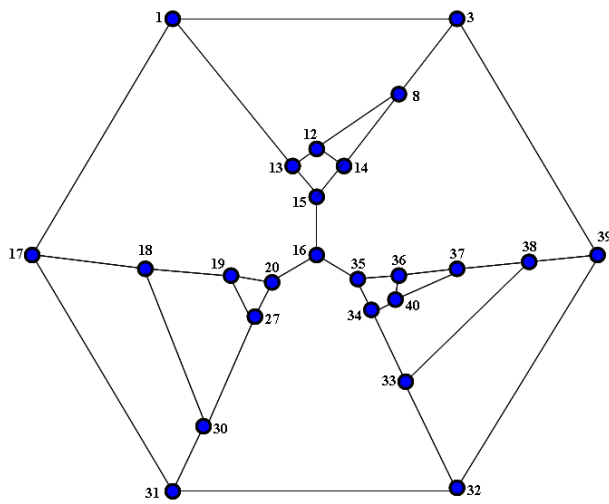


Рис. 70. Удаление из графа ребра  $(x_{21}, x_{28})$

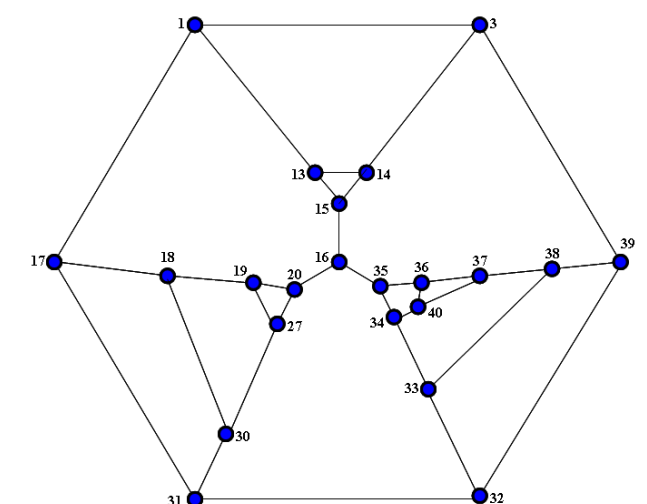


Рис. 71. Удаление из графа ребра  $(x_8, x_{12})$

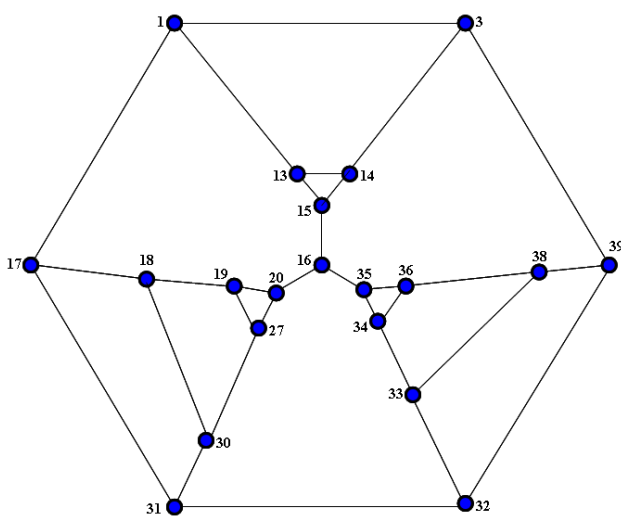


Рис. 72. Удаление из графа ребра  $(x_{37}, x_{40})$

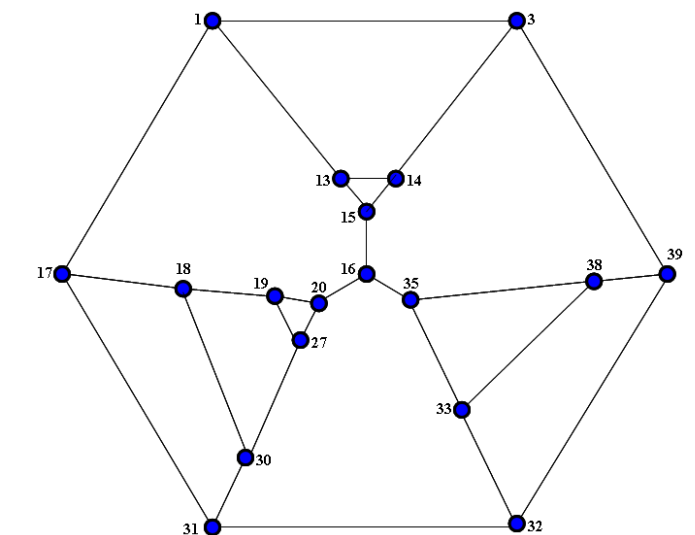


Рис. 73. Удаление из графа ребра  $(x_{34}, x_{36})$

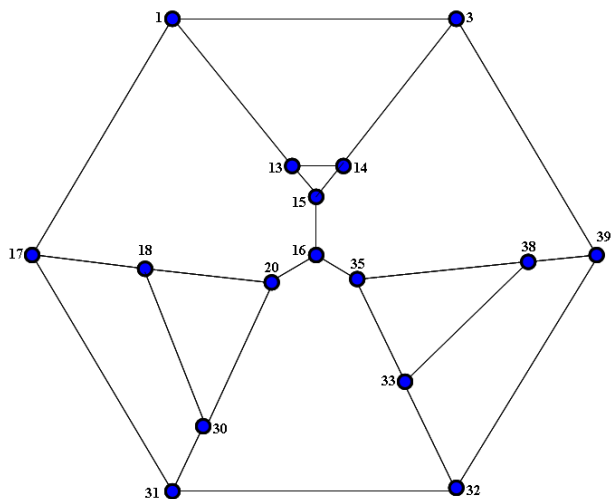


Рис.74.Удаление из графа ребра  $(x_{19},x_{27})$

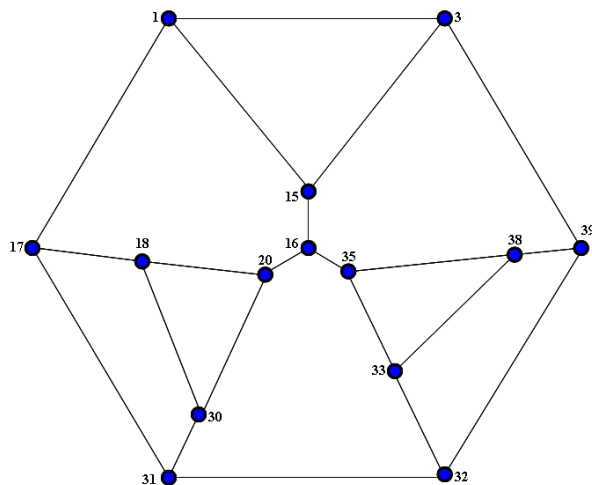


Рис. 75.Удаление из графа ребра  $(x_{13},x_{14})$

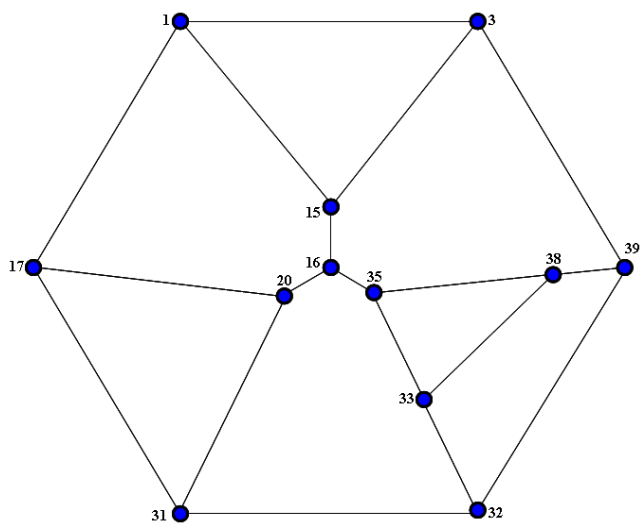


Рис. 76.Удаление из графа ребра  $(x_{18},x_{30})$

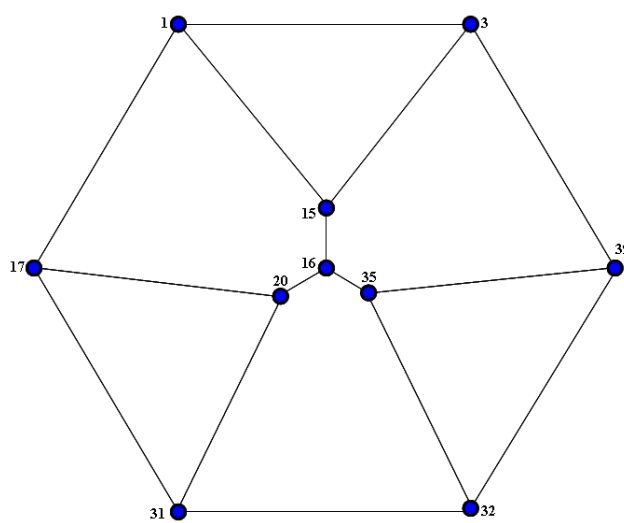


Рис. 77.Удаление из графа ребра  $(x_{33},x_{38})$

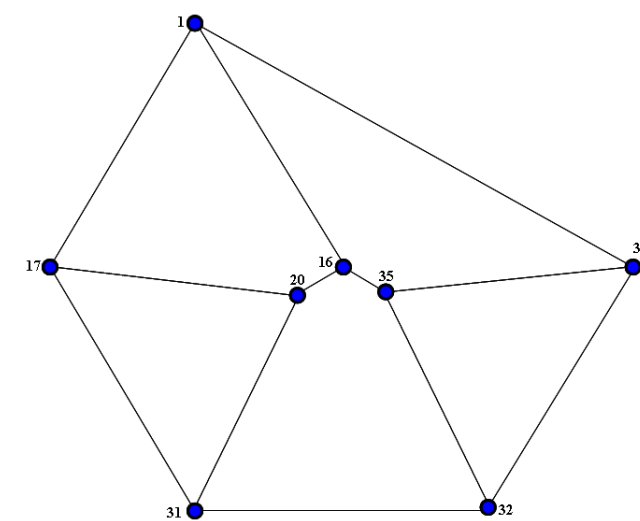


Рис. 78.Удаление из графа ребра  $(x_3,x_{15})$

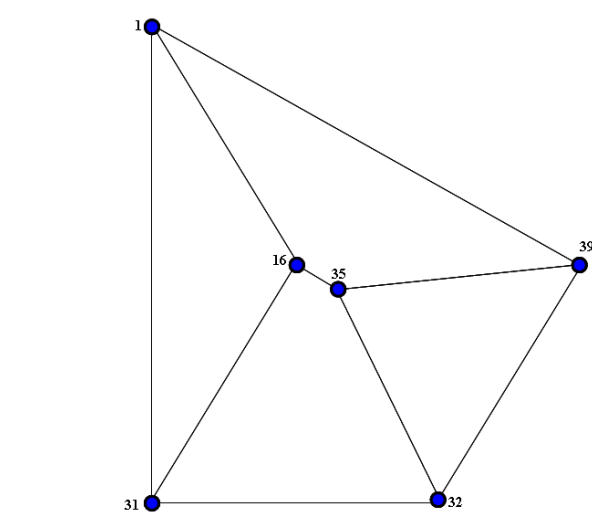


Рис. 79.Удаление из графа ребра  $(x_{17},x_{20})$

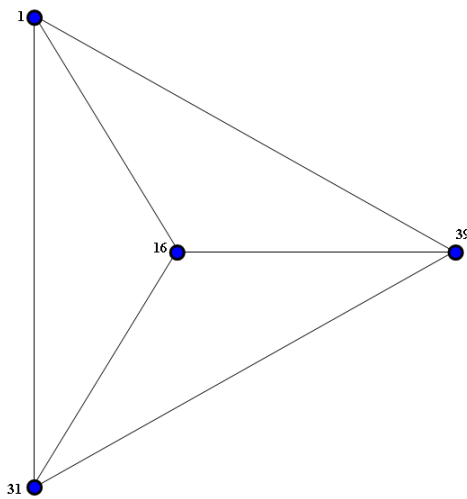


Рис. 80. Удаление из графа ребра  $(x_{32}, x_{35})$

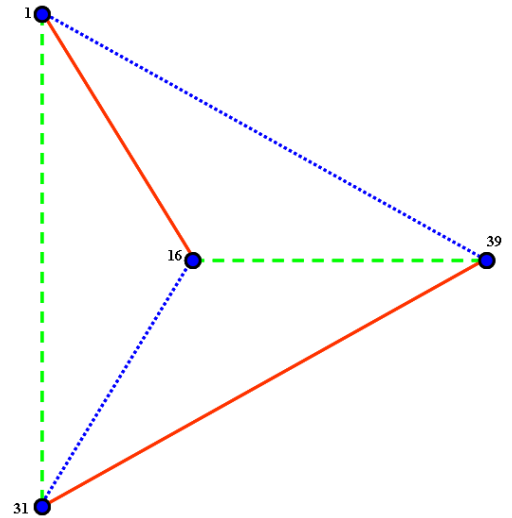


Рис. 81. Раскраска ребер

Процесс последовательного удаления ребер из графа представлен на рис. 59-80. На рис. 81 представлена раскраска ребер для известного плоского кубического графа без мостов.

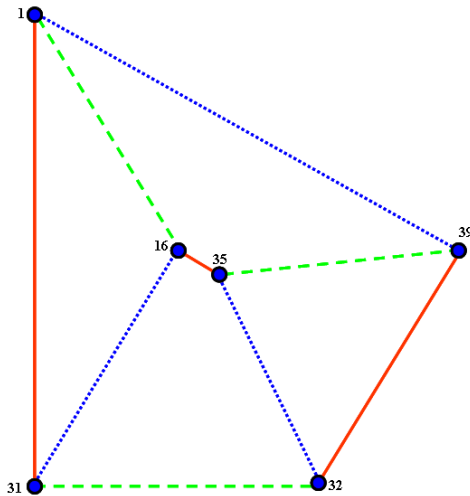


Рис.82. Раскраска ребра  $(x_{32}, x_{35})$

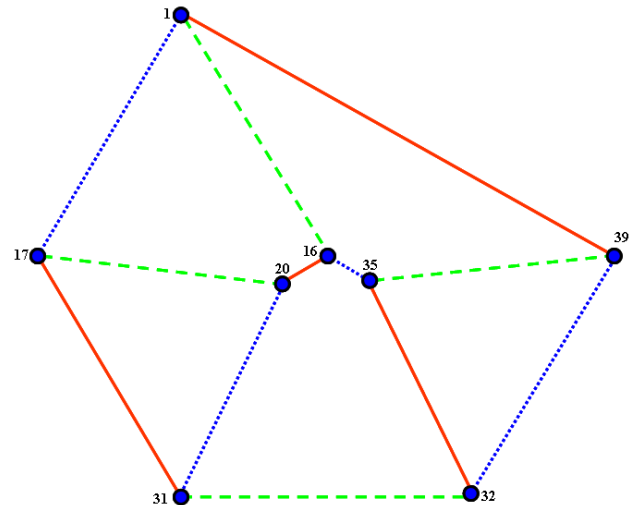


Рис. 83. Раскраска ребра  $(x_{17}, x_{20})$

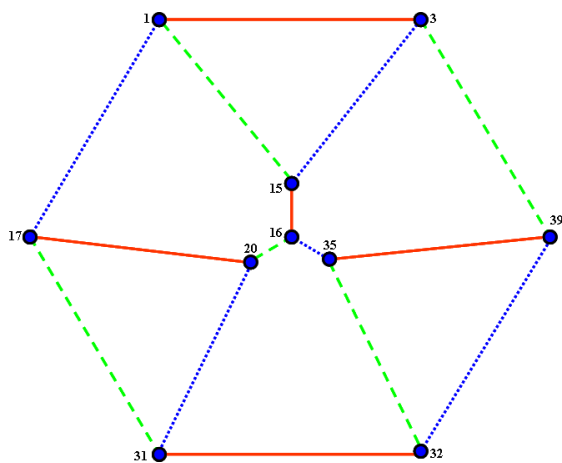


Рис. 84. Раскраска ребра  $(x_3, x_{15})$

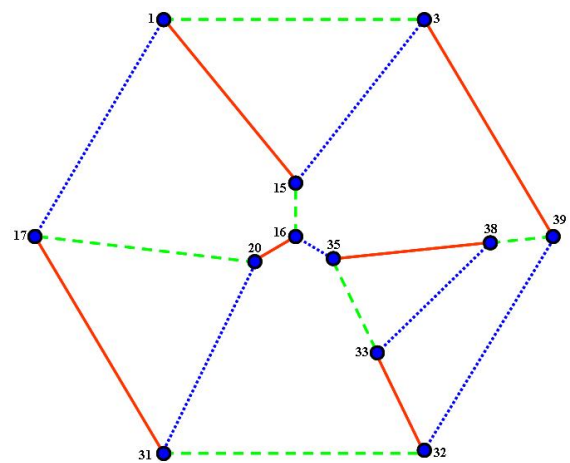


Рис. 85. Раскраска ребра  $(x_{33}, x_{38})$

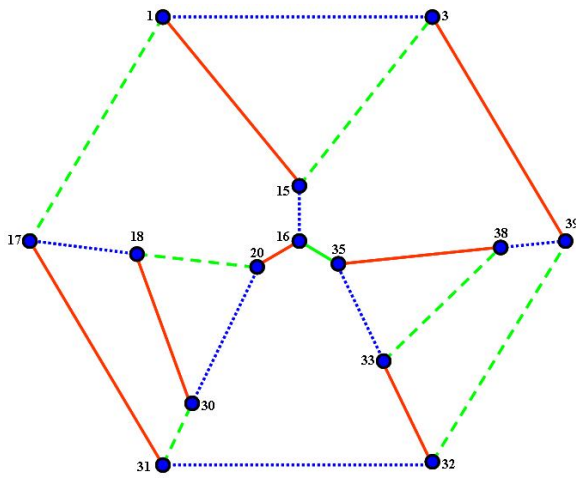


Рис. 86. Раскраска ребра  $(x_{18}, x_{30})$

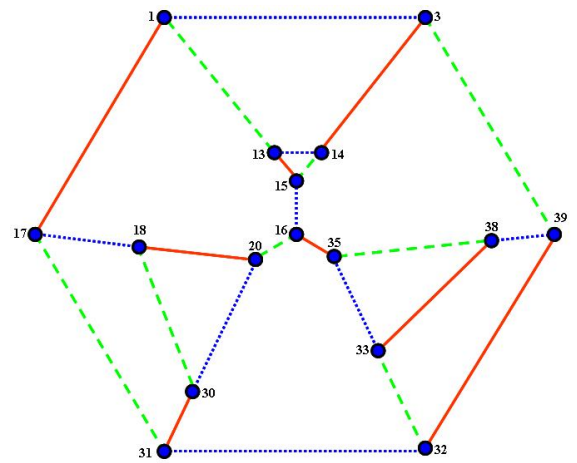


Рис. 87. Раскраска ребра  $(x_{13}, x_{14})$

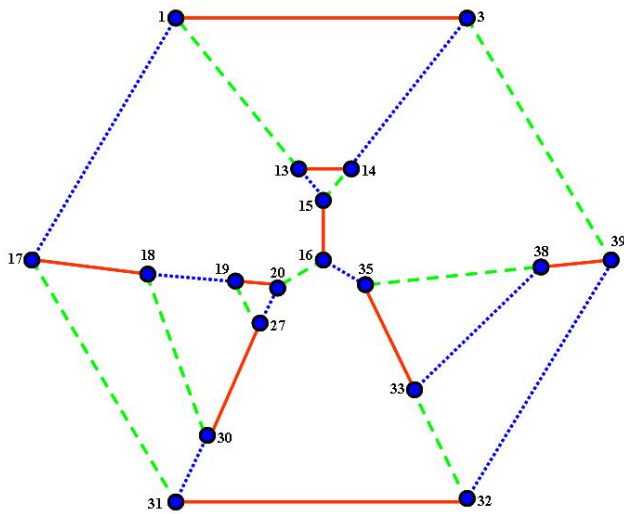


Рис. 88. Раскраска ребра  $(x_{19}, x_{27})$

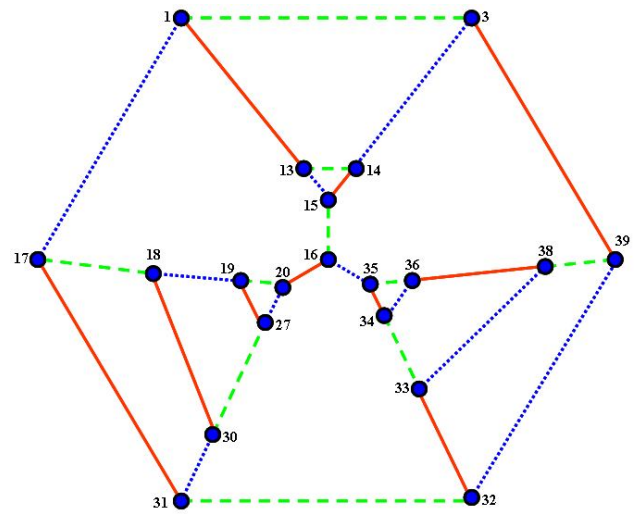


Рис. 89. Раскраска ребра  $(x_{34}, x_{36})$

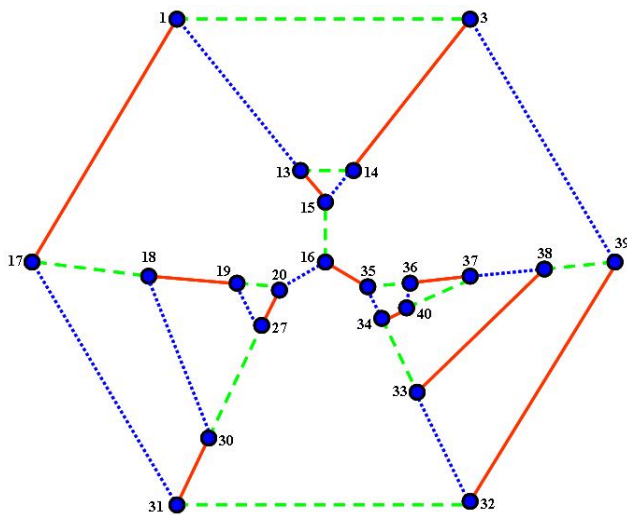


Рис. 90. Раскраска ребра  $(x_{37}, x_{40})$

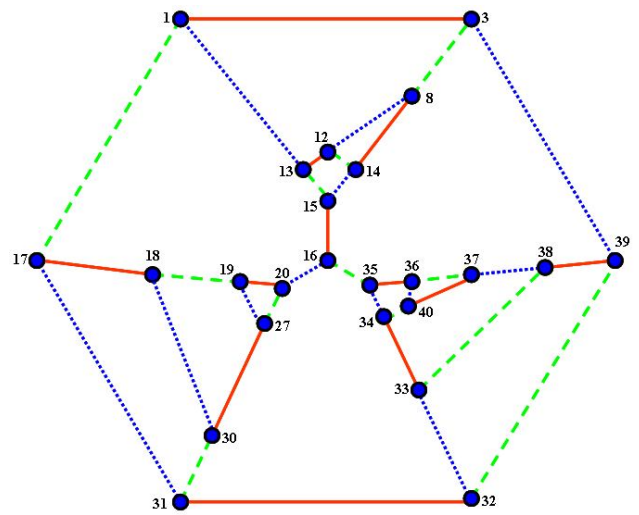


Рис. 91. Раскраска ребра  $(x_8, x_{12})$

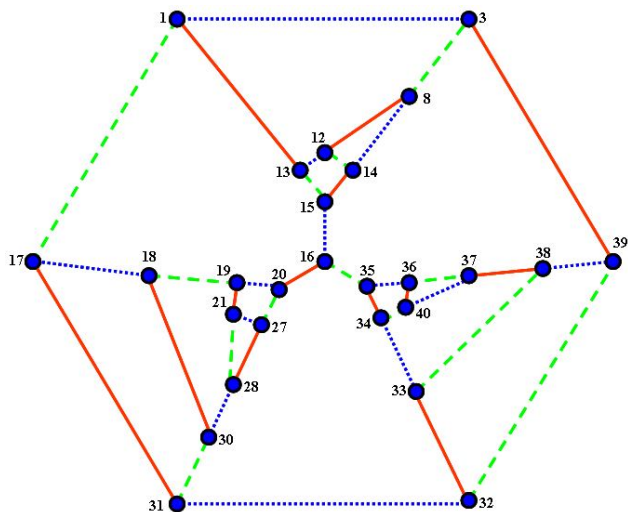


Рис. 92. Раскраска ребра  $(x_{21}, x_{28})$

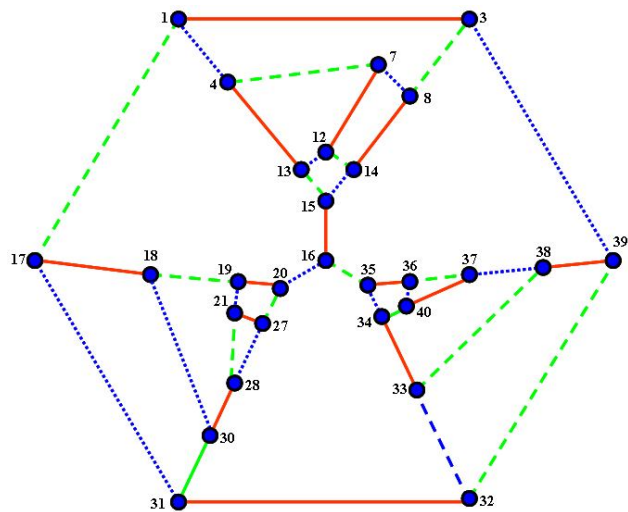


Рис. 93. Раскраска ребра  $(x_4, x_7)$

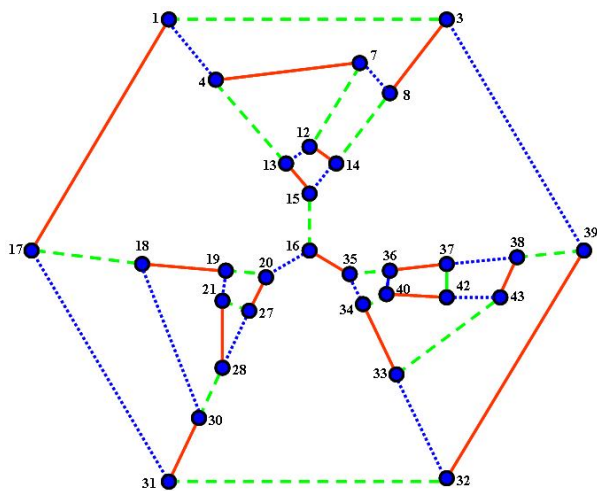


Рис. 94. Раскраска ребра  $(x_{42}, x_{43})$

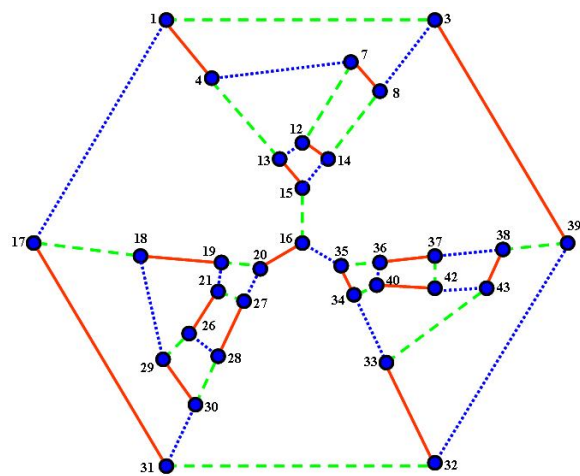


Рис. 95. Раскраска ребра  $(x_{26}, x_{29})$

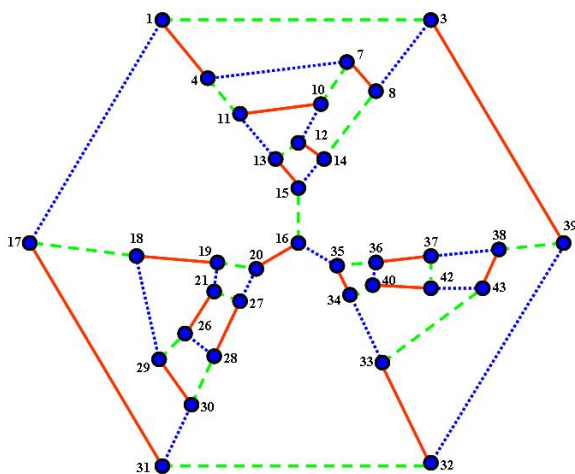


Рис. 96. Раскраска ребра  $(x_{10}, x_{11})$

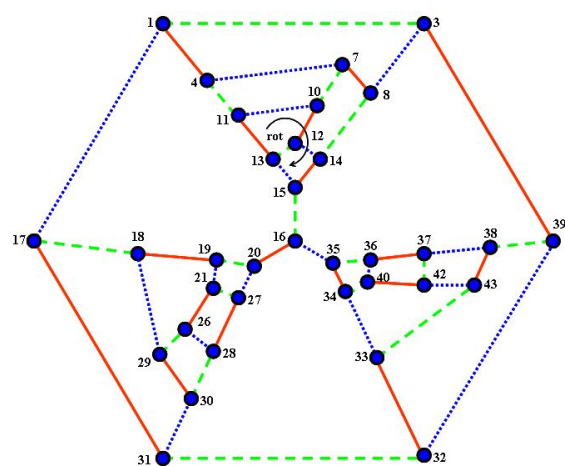


Рис. 97. Ротация диска  $(x_{11}, x_{10}, x_{12}, x_{14}, x_{15}, x_{13})$

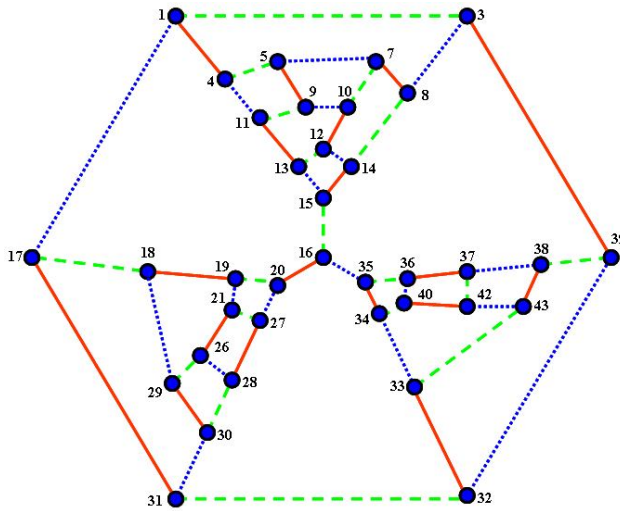


Рис. 98. Раскраска ребра  $(x_5, x_9)$

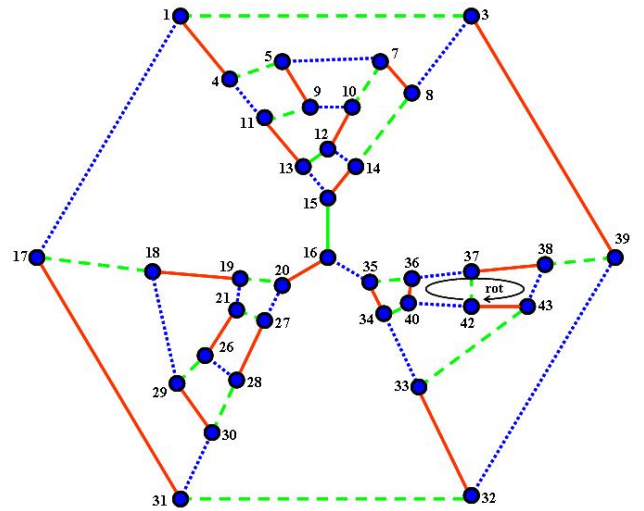


Рис. 99. Ротация диска  $(x_{36}, x_{37}, x_{38}, x_{43}, x_{42}, x_{40})$

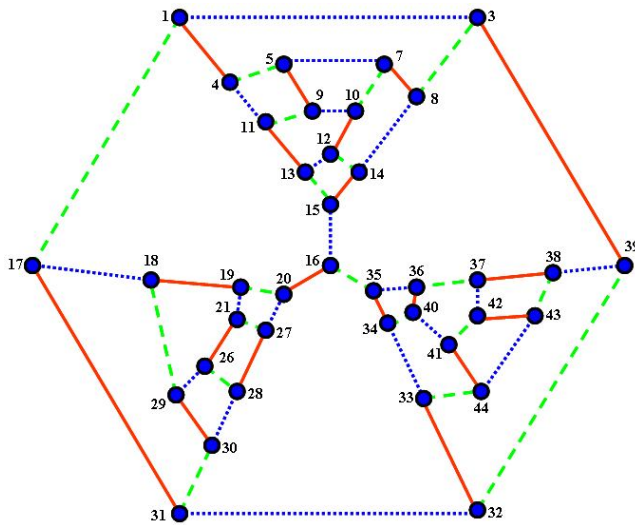


Рис. 100. Раскраска ребра  $(x_{41}, x_{44})$

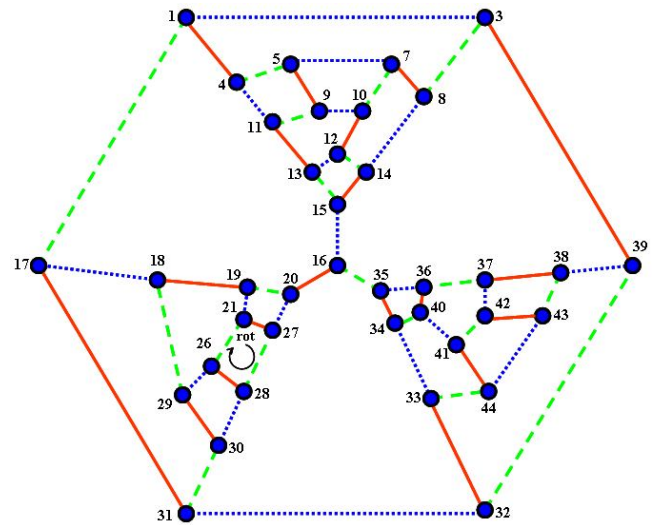


Рис. 101. Ротация диска  $(x_{21}, x_{27}, x_{28}, x_{26})$

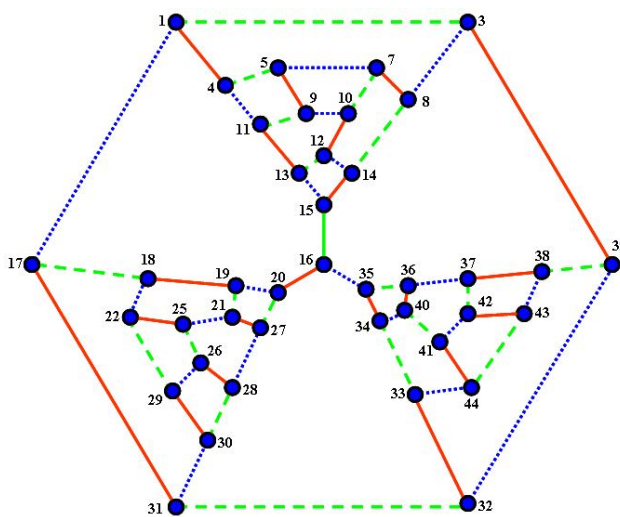


Рис. 102. Раскраска ребра  $(x_{22}, x_{25})$

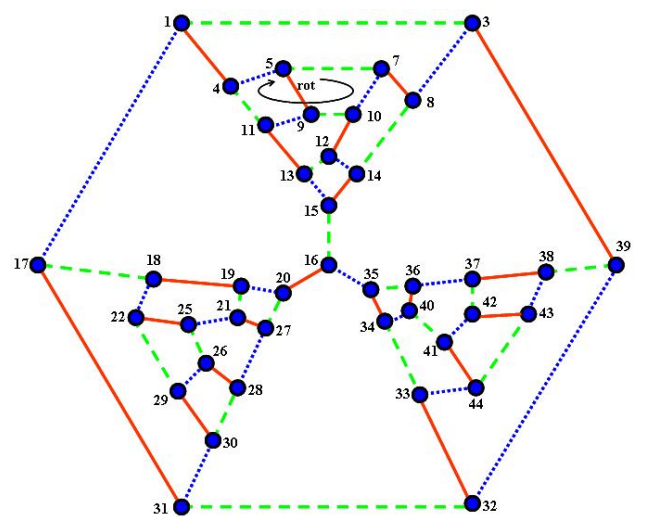


Рис. 103. Ротация диска  $(x_4, x_5, x_7, x_{10}, x_9, x_{11})$

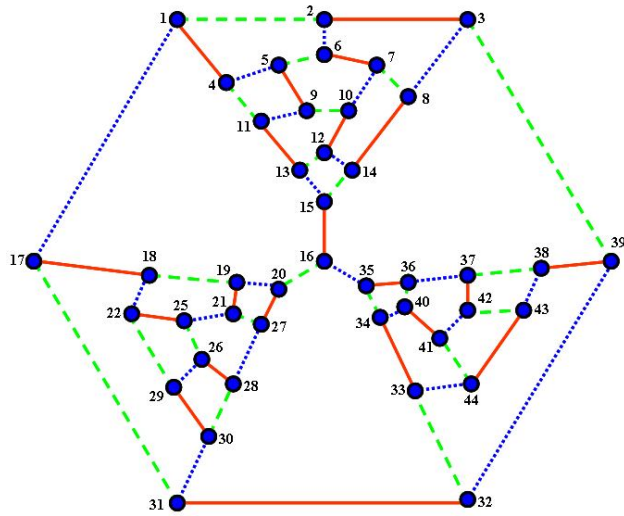


Рис. 104. Раскраска ребра ( $x_2, x_6$ )

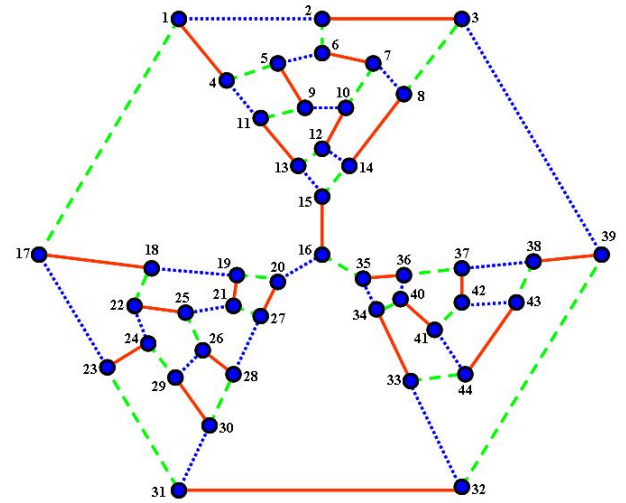


Рис. 105. Раскраска ребра ( $x_{23}, x_{24}$ )

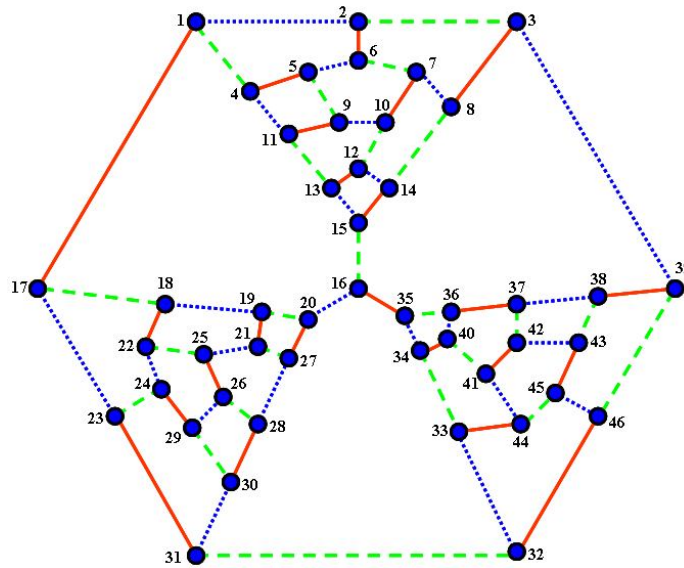


Рис. 106. Раскраска ребра ( $x_{45}, x_{46}$ ) и окончательная раскраска ребер графа  
 Последовательный процесс раскраски вновь вводимых ребер представлен на рис.81-106.

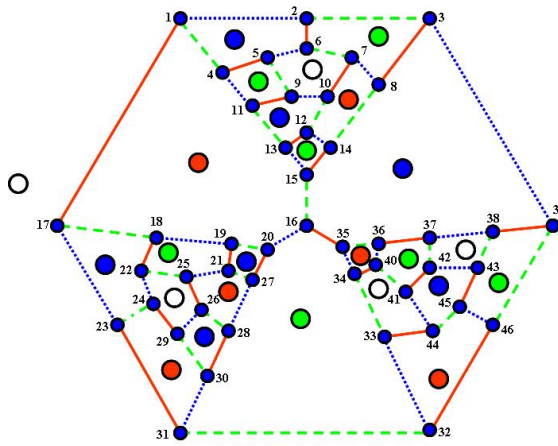


Рис. 107. Раскраска граней

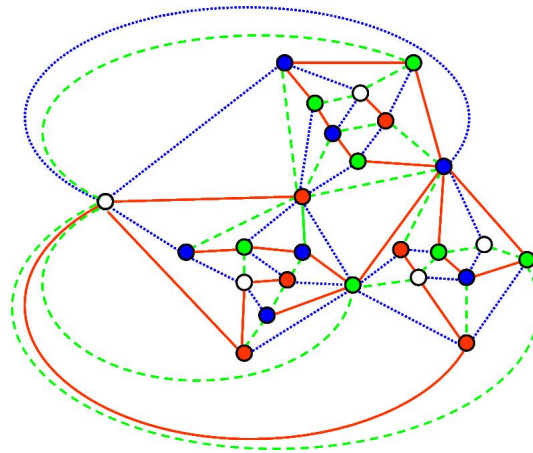


Рис. 108. Раскраска вершин и ребер в максимально плоском графе

**Задание 3.1.** Выполнить последовательный процесс раскраски ребер в плоском кубическом графе и раскрасить ребра и вершины в двойственном максимально плоском графе (см. рис. 109).

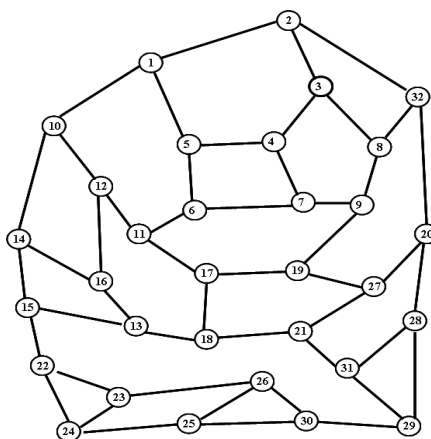


Рис. 109. Плоский кубический граф



**Задание 3.2.** Выполнить последовательный процесс раскраски ребер в плоском кубическом графе и раскрасить ребра и вершины в двойственном максимально плоском графе (см. рис. 110).

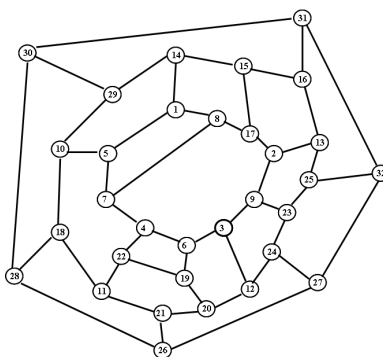


Рис. 110. Плоский кубический граф

**Задание 3.3.** Выполнить последовательный процесс раскраски ребер в плоском кубическом графе и раскрасить ребра и вершины в двойственном максимально плоском графе (см. рис. 111).

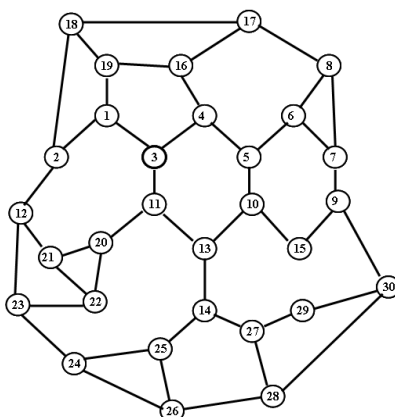


Рис. 111. Плоский кубический граф

**Задание 3.4.** Выполнить последовательный процесс раскраски ребер в плоском кубическом графе и раскрасить ребра и вершины в двойственном максимально плоском графе (см. рис. 112).

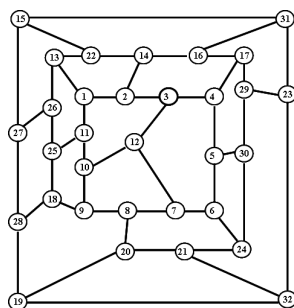


Рис. 112. Плоский кубический граф

**Задание 3.5.** Выполнить последовательный процесс раскраски ребер в плоском кубическом графе и раскрасить ребра и вершины в двойственном максимально плоском графе (см. рис. 113).

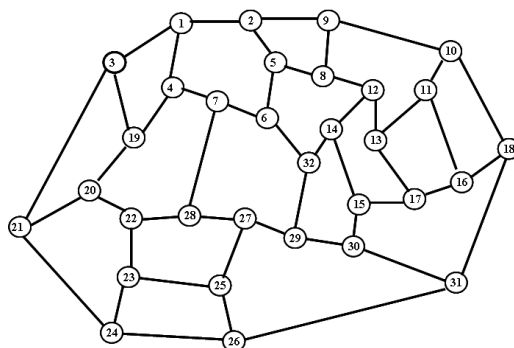


Рис. 113. Плоский кубический граф

**Задание 3.6.** Выполнить последовательный процесс раскраски ребер в плоском кубическом графе и раскрасить ребра и вершины в двойственном максимально плоском графе (см. рис. 114).

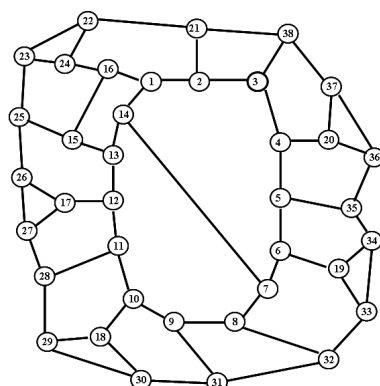


Рис. 114. Плоский кубический граф

**Задание 3.7.** Выполнить последовательный процесс раскраски ребер в плоском кубическом графе и раскрасить ребра и вершины в двойственном максимально плоском графе (см. рис. 115).

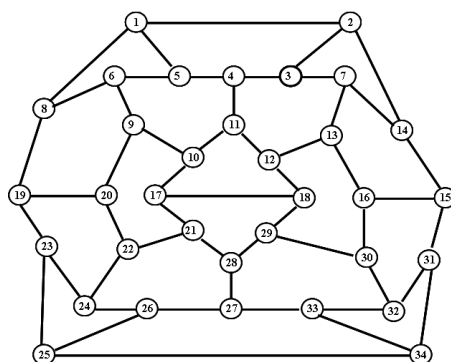


Рис. 115. Плоский кубический граф

**Задание 3.8.** Выполнить последовательный процесс раскраски ребер в плоском кубическом графе и раскрасить ребра и вершины в двойственном максимально плоском графе (см. рис. 116).

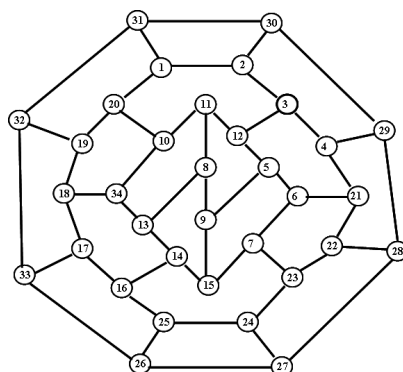


Рис. 116. Плоский кубический граф

**Задание 3.9.** Выполнить последовательный процесс раскраски ребер в плоском кубическом графе и раскрасить ребра и вершины в двойственном максимально плоском графе (см. рис. 117).

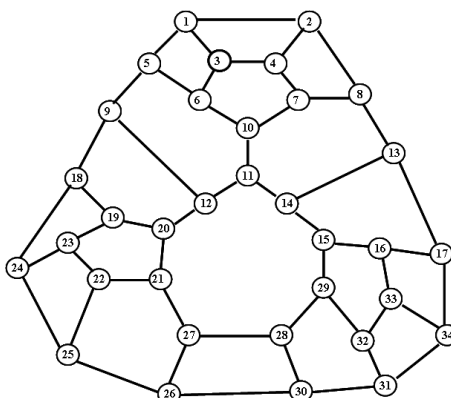


Рис. 117. Плоский кубический граф

**Задание 3.10.** Выполнить последовательный процесс раскраски ребер в плоском кубическом графе и раскрасить ребра и вершины в двойственном максимально плоском графе (см. рис. 118).

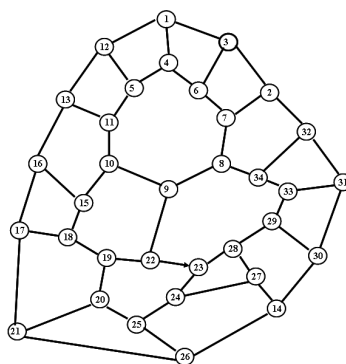


Рис. 118. Плоский кубический граф

## ЗАНЯТИЕ № 4. Бихроматический плоский кубический граф

### 4.1. Бихроматический плоский кубический граф

Рассмотрим другой способ раскраски ребер в плоском кубическом графе без мостов. Данный способ основан на свойствах наличия четных единичных циклов в двудольных кубических графах. Если задан плоский кубический граф без мостов, то путем введения определенного числа новых ребер или удалением ребер, кубический граф сводится к ближайшему двудольному плоскому кубическому графу. Ребра, полученного таким путем двудольного кубического графа, раскрашиваются применяя только два цвета в единичных циклах четной длины. Дальнейший процесс сводится к раскраске вновь введенных ребер или к процессу перекраски ребер в цветных дисках с применением операции ротации цветных дисков. Процесс раскраски продолжается до получения раскраски ребер исходного плоского кубического графа.

В качестве иллюстрации рассмотрим следующий пример. Пусть задан произвольный плоский кубический граф без мостов (см. рис. 119).

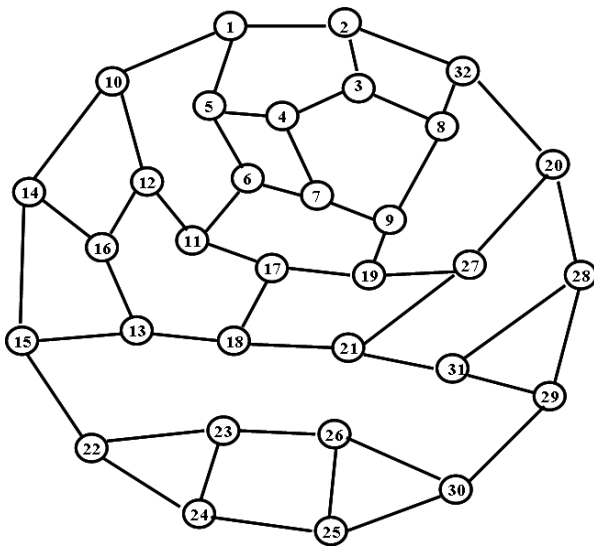


Рис. 119. Плоский кубический граф.

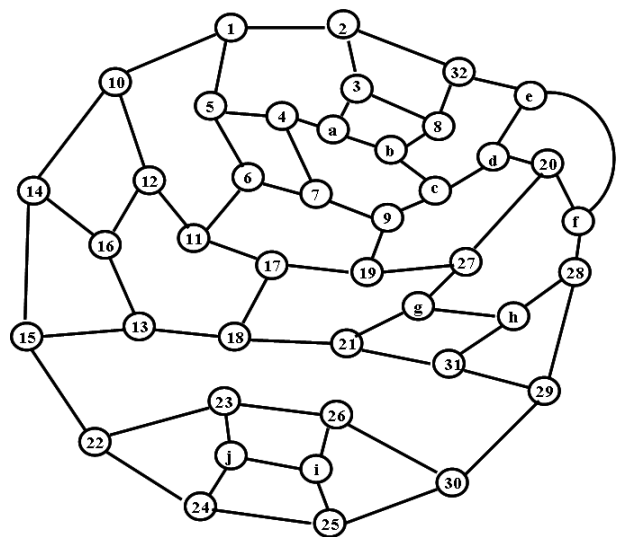


Рис. 120. Достроенный кубический граф с циклами четной длины.

Путем введения дополнительных ребер, сведем данный граф к двудольному графу с четными единичными циклами. Это легко можно выполнить, находя циклы четной длины, окруженные двумя циклами нечетной длины и соединяя их ребром или другим способом (см. рис. 120). На основании свойства рекурсивности построения кубических графов всегда можно достроить плоский кубический граф до двудольного плоского кубического графа путем введения или удаления ребер.

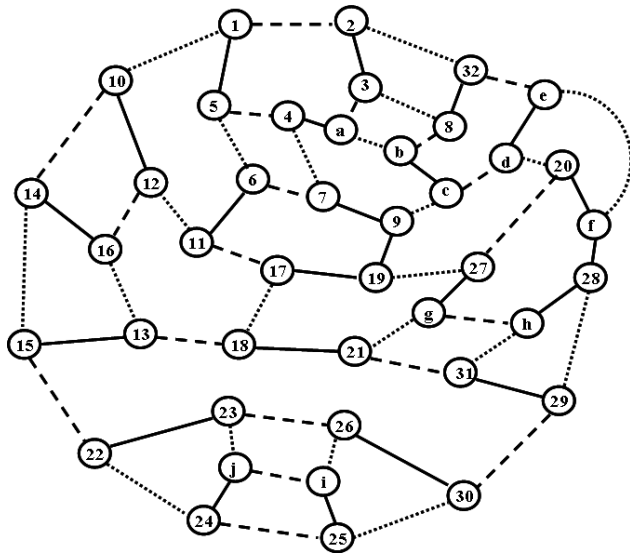


Рис. 121. Раскраска ребер в четных циклах.

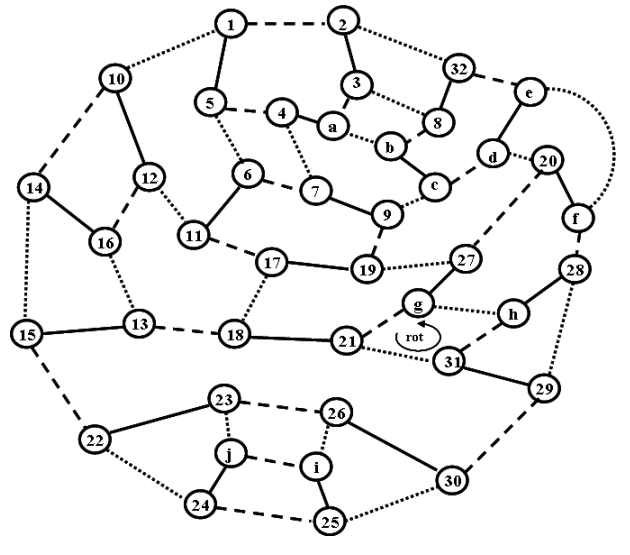


Рис. 122. Ротация цветного диска  $\langle x_g, x_h, x_{31}, x_{21} \rangle$ .

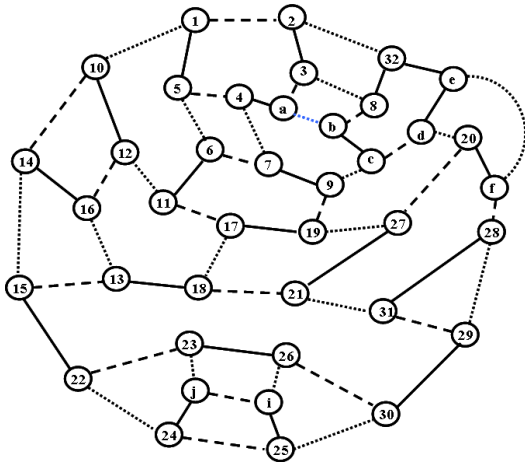


Рис. 123. Удаление ребра  $(x_g, x_h)$ .

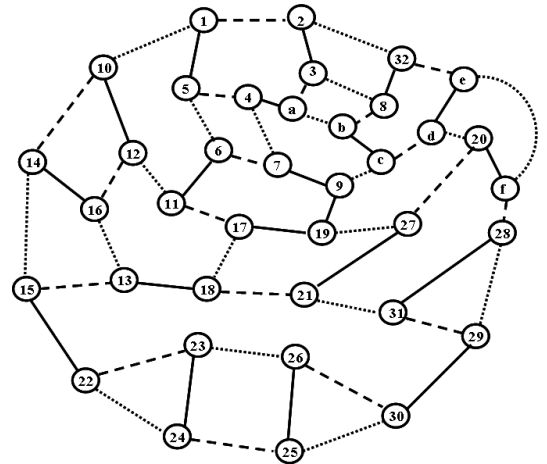


Рис. 124. Удаление ребра  $(x_i, x_j)$ .

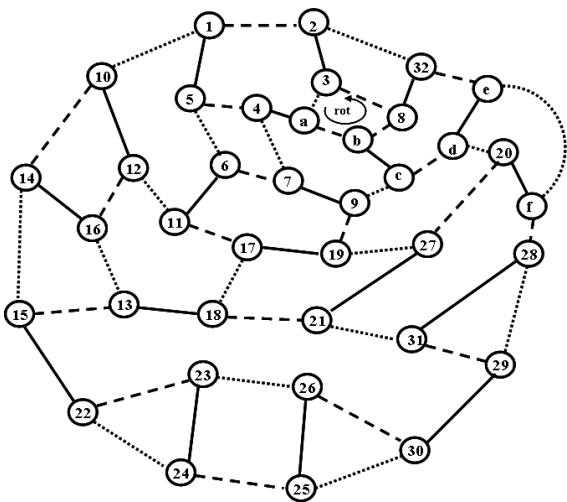


Рис. 125. Ротация диска  $\langle x_a, x_b, x_8, x_3 \rangle$ .

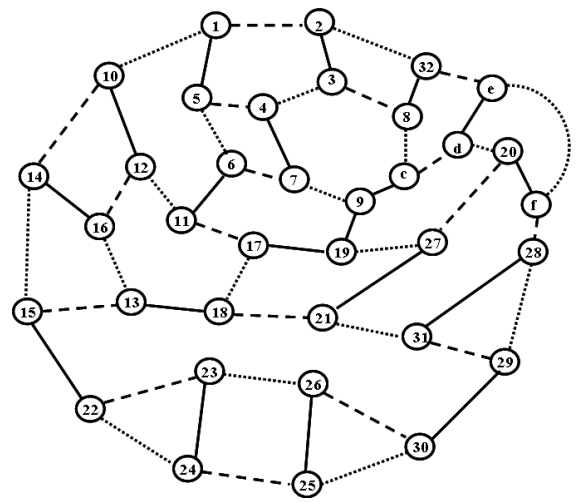


Рис. 126. Удаление ребра  $(x_a, x_b)$ .

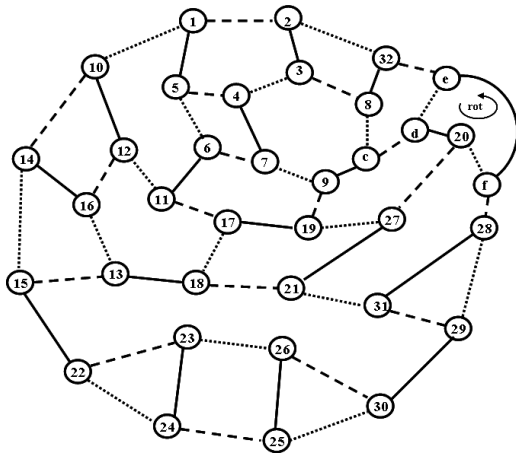


Рис. 127. Ротация диска  $\langle x_e, x_f, x_d, x_{20} \rangle$ .

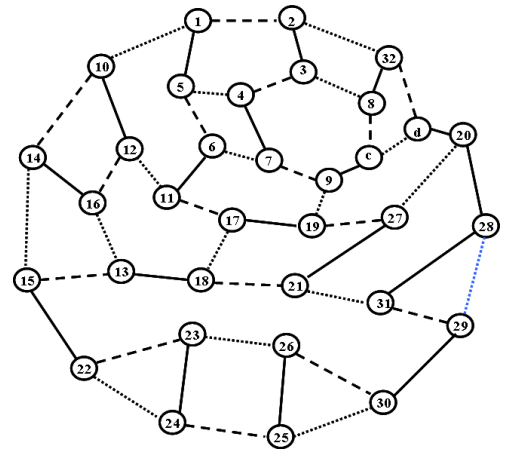


Рис. 128. Удаление ребра  $(x_e, x_f)$ .

Так как циклы четной длины, то ребра каждого цикла можно раскрасить двумя цветами (см. рис. 121). Применяя операцию ротации цветных дисков последовательно будем удалять цветные ребра.

Произведем ротацию цветного красного диска  $\langle x_g, x_h, x_{31}, x_{21} \rangle$ , см. рис. 122. На рис. 123 представлен граф с удаленным ребром  $(x_g, x_h)$ . Дальнейшее построение показано на рис. 124 - 129.

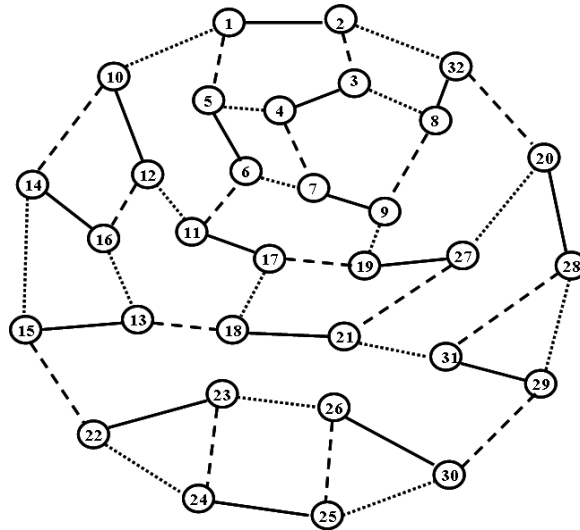


Рис. 129. Удаление ребра  $(x_c, x_d)$  и окончательная раскраска ребер.

## Выводы

В данной работе рассмотрены вопросы раскраски ребер кубических плоских графов. Показан переход от максимально плоского графа к плоскому двойственному кубическому графу. Рассмотрены свойства раскрашенного плоского кубического графа. В частности показано, что в раскрашенном кубическом графе обязательно присутствуют три цветных 2-фактора и сложение цветов осуществляется по законам группы Клейна. Продемонстрировано, что любой цветной 2-фактор в раскрашенном кубическом графе может состоять из дисков четной длины.

Для раскрашенных кубических графов введена новая операция – ротация цветных дисков и установлена связь между раскраской ребер и раскраской независимой системы единичных циклов графа. Рассмотрены вопросы построения произвольного кубического графа без мостов и рассмотрен рекурсивный процесс последовательного введения (удаления) ребра в предыдущем графе для получения нового последующего раскрашенного кубического графа. Для применения рекурсивного механизма раскраски плоских кубических графов доказана теорема о существовании цветного диска, проходящего по двум сцепленным ребрам принадлежащих одному единичному циклу плоского кубического графа. Рассмотренные методы тесно связаны с понятием топологического рисунка графа и могут быть легко переведены в машинное представление рисунка графа.

Приведены примеры применения операции ротации цветного диска. На приведенных примерах рассмотрен механизм раскраски ребер в плоских кубических графах. Установлено, что процесс раскраски ребер носит динамический рекурсивный характер, раскрашивается вначале предыдущий граф, а затем устанавливается раскраска последующего графа с вновь введенным ребром.

## Библиографические ссылки

1. Алгебраический подход к проблеме раскраски плоских графов/Донец Г.А., Шор Н.З. - Київ: Наук.думка.- 1982. - 144с.
2. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи: Пер. с англ. - М.: Мир, 1982. - 416с.
3. Зыков А.А. Основы теории графов. - М.: Наука, ГРФМЛ, 1987.- 384с.
4. Курапов С.В., Савин В.В. Векторная алгебра и рисунок графа. Запорожье, 2003.- 200с.
5. Курапов С.В. Группа Клейна и теорема о четырех красках. //Вісник Запорізького державного університету: Збірник наук. статей. Фіз.-мат. науки. - № 2. - Запоріжжя: ЗДУ. - 2010.- С.83-96
6. Лекции по теории графов / Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. - М.: Наука. ГРФМЛ, 1990. - 384с. - ISBN 5-02-013992-0.
7. Липский В. Комбинаторика для программистов: Пер. с польск. М.: Мир, 1988.-213 с.
8. Мак-Лейн С. Комбинаторное условие для плоских графов// В кн.: Кибернетический сборник. Новая серия, 1970.-вып. 7.- С.68-77.
9. Рейнгольд Э., Нивергельт Ю., Дер Н. Комбинаторные алгоритмы, теория и практика. - М.: Мир.- 1980. - 480с.
10. Рингель Г. Теорема о раскраске карт. - М.: Мир, 1977. - 126с.
11. Родионов В.В. Методы четырехцветной раскраски вершин плоских графов. М.: КомКнига, 2005. – 48с.
12. Саймон Сингх. Великая теорема Ферма. М.: МЦНМО, 2000. – 201с.
13. Самохин А.В. Проблема четырех красок: Неоконченная история доказательства// Соровский образовательный журнал, том 6, № 7, 2000. – С.91-96.
14. Свами М., Тхуласираман К. Графы, сети и алгоритмы: Пер. с англ. - М.: Мир, 1984. - 455с.
15. Уэзерелл Ч. Этюды для программистов: Пер. с англ. - М: Мир.-1982. - 288с.
16. Харари Ф. Теория графов. - пер. с англ. Козырева В.П. / под ред. Гаврилова В.Г. - М.: Мир.- 1973, 300с.
17. Хопкрофт Дж.Е., Тарьян Р.Е. Изоморфизм планарных графов//В кн.: Кибернетический сборник. Новая серия.- 1975.-вып. 12.- С.39-61.
18. Appel K., Haken W. The solution of the four-color-map problem // Scientific American, October 1977. P. 108–121.
19. Appel K., Haken W. Every Planar Map Is Four Colorable. Contemporary Mathematics. Providence (R.I.): Amer. Math Soc., 1989. Vol. 98. 308 p.



## Оглавление

Введение.....	3
Занятие 1. Максимально плоский граф.....	5
Занятие 2. Раскраска кубического графа.....	11
Занятие 3. Принципы построения плоских кубических графов и их рас- краска .....	30
Занятие 4. Бихроматический плоский кубический граф	
Библиографические ссылки.....	50