МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

АКТУАРНА МАТЕМАТИКА

Методичні рекомендації до лабораторних занять
для здобувачів ступеня вищої освіти магістра спеціальності “Економіка”
освітньо-професійної програми “Економічна кібернетика”

Затверджено
вченою радою ЗНУ
Протокол № 4 від 28.11.2017р.

Запоріжжя
2017

УДК: 51-7 : 311.213 (075.8)
А437

Актуарна математика: методичні рекомендації до лабораторних занять для здобувачів ступеня вищої освіти магістра спеціальності “Економіка” освітньо-професійної програми “Економічна кібернетика” / Укладачі: Д. В. Очеретін, Т.В. Чижевська. – Запоріжжя : ЗНУ, 2017. – 68 с.

У методичних рекомендаціях до лабораторних занять з дисципліни “Актуарна математика” розглядаються основні принципи економіко-математичних і статистичних методів дослідження, за допомогою і на основі яких страховик розраховує страховий тариф при різних видах страхування. Також містяться приклади виконання лабораторних робіт, питання для самоконтролю до кожної розглянутої теми, таблиці смертності та комутаційних функцій.

Навчально-методичне видання з дисципліни “Актуарна математика” сприятиме оволодінню студентами основними методами та моделями актуарної математики, з метою застосування даного інструментарію на практиці.

Методичні рекомендації призначені для здобувачів ступеня вищої освіти магістра спеціальності “Економіка” освітньо-професійної програми “Економічна кібернетика”.

Рецензент *А.В. Бакурова*, доктор економічних наук, професор
Відповідальний за випуск *Н.К. Максишко*, завідувач кафедри економічної кібернетики

ЗМІСТ

ВСТУП

Сучасний страховий ринок займає значну частину ринку небанківських фінансових послуг. Використання актуарної математики дозволяє вирішити проблеми у сфері страхування життя та пенсій, оцінки страхових ризиків у страхуванні майна, перестрахування тощо. Вивчення дисципліни “Актуарна математика” надає студентам можливість оволодіти основними принципами економіко-математичних і статистичних методів дослідження, за допомогою і на основі яких страховик розраховує страховий тариф при різних видах страхування. Фахівці, що застосовують на практиці актуарну математику, є необхідними як у страховому, так і в інвестиційному бізнесі.

Мета дисципліни – формування системи фундаментальних знань щодо сутності, побудови та аналізу математичних моделей і методів, що регламентують відносини між страховиками і страхувальниками.

Предметом є економіко-математичні моделі розрахунків страхових премій, запасів та резервів, динаміки фінансового стану страхових компаній.

Завдання вивчення навчальної дисципліни полягає у формуванні фундаментальних теоретичних знань щодо суті основних методів та моделей актуарної математики, з метою застосування даного інструментарію в страхуванні. На цьому підґрунті студенти мають оволодіти практичними навичками вирішення проблем у сфері страхування життя та пенсій, проблеми перестрахування тощо.

У результаті вивчення навчальної дисципліни студенти повинні *знати*:

– аналітичні можливості статистичних методів збирання і обробки первинних даних про масові явища і процеси;

– ключові поняття у сфері актуарної діяльності;

вміти:

– визначати нетто-ставку та брутто-ставку послуги, що надається страховиком;

– прогнозувати витрати за договорами страхування, проводити експертну оцінку їх величин;

– проводити дослідження норми позикового відсотка і тенденцій його зміни у конкретному часовому інтервалі;

– проводити виділення груп ризику в межах даної страхової сукупності;

– проводити дисперсійний та регресійний аналіз даних;

– самостійно вирішувати завдання використання економіко-математичних методів та сучасних інформаційних технологій для моделювання проблем управління у актуарній діяльності;

– інтерпретувати одержані результати та робити науково-обґрунтовані висновки;

досягнути таких компетентностей:

– здатність застосовувати різні підходи до розуміння економічних процесів, що відбуваються між страховиком та страхувальником;

– здатність застосовувати той чи інший статистичний метод в аналізі конкретних явищ і процесів;

– здатність знайти, отримати, систематизувати, узагальнити та інтерпретувати інформацію щодо страхування з різних джерел;

– здатність оцінити витрати за договорами страхування, знайти проблеми та запропонувати і економічно обґрунтувати шляхи їх вирішення.

Набуті студентами знання та навички з дисципліни “Актуарна математика” будуть необхідні їм при виконанні досліджень під час виробничих, переддипломних практик, при написанні випускних кваліфікаційних (магістерських) робіт, у подальшій професійній діяльності.

Виконання кожної лабораторної роботи передбачає попереднє самостійне ознайомлення студентів з відповідним теоретичним матеріалом. При виконанні завдань лабораторної роботи обов’язково необхідно обґрунтувати можливість застосування методу розв’язання.

У рамках лабораторного заняття студенти виконують лабораторну роботу відповідно до тематики, визначеної робочою програмою. Виконана лабораторна робота комплексно оцінюється викладачем, враховуючи такі критерії: правильність одержання відповідей, повнота відповіді, наявність висновків та ілюстративних прикладів тощо. Варіант лабораторної роботи студент обирає за номером комп’ютера, за яким він працює у комп’ютерному класі.

Лабораторна робота № 1
Основи теорії та організації актуарних розрахунків

Мета: навчитися застосовувати базові поняття теорії ймовірностей та фінансової математики для розв'язку задач з актуарних розрахунків.

Завдання: навчитися обчислювати числові характеристики неперервних та дискретних законів розподілу, знаходити поточну вартість основних фінансових рент.

Короткі теоретичні відомості з теми

Скалярну функцію $\xi(\omega)$, що задана на просторі елементарних результатів Ω, називають ***випадковою величиною***, якщо для будь-якого $x \in R$ множина елементарних результатів $\{\omega : \xi(\omega) < x\}$ є подією.

Для дослідження ймовірнісних властивостей випадкової величини необхідно знати правило, що дозволяє знаходити ймовірність того, що випадкова величина прийме значення з підмножини її значень. Будь-яке таке правило називають ***законом розподілу ймовірностей***.

Загальним законом розподілу, властивим для усіх випадкових величин, є ***функція розподілу***.

Функцією розподілу випадкової величини ξ називають функцію $F_\xi(x) = P(\xi < x)$. Функція розподілу має властивості:

1) функція розподілу будь-якої випадкової величини – неубутна функція;
2) функція розподілу неперервна зліва;
3) $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$;
4) $P(a \le \xi < b) = F_\xi(b) - F_\xi(a)$;
5) $P(\xi = x_0) = F_\xi(x_0 + 0) - F_\xi(x_0)$.

Є справедливою теорема про те, що функція розподілу однозначно визначає розподіл випадкової величини.

Випадкова величина ξ називається ***дискретною***, якщо вона приймає не більш ніж рахункове число значень $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$.

Розподіл дискретної випадкової величини зручно задавати відповідністю між її можливими значеннями $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ та ймовірностями $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$, з якими ці значення приймаються. Функція розподілу дискретної випадкової величини має вигляд $F_\xi(x) = \sum\limits_{i: x_i < x} p_i$.

Випадкова величина ξ називається ***безперервною***, якщо існує функція $f_\xi(x) \ge 0$, інтегрована на всій числовій вісі $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)dx = 1$, така що функція розподілу випадкової величини представляється у вигляді невласного інтегралу $F_{\xi}(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f_{\xi}(t)dt$, що сходиться. Функція $f_{\xi}(x)$ називається ***щільністю розподілу ймовірностей***.

Дискретна випадкова величина ξ розподілена ***за законом Бернуллі*** з параметром p $(0<p<1)$, якщо вона приймає значення 0 з імовірністю $1-p$ і значення 1 з ймовірністю p.

Дискретна випадкова величина ξ розподілена ***за біноміальним законом*** з параметрами n і p $(n\in N, 0<p<1)$, якщо вона приймає значення $0,1,2,\ldots,n$ з ймовірностями $P(\xi=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$.

Дискретна випадкова величина ξ розподілена ***за законом Пуассона*** з параметром λ $(\lambda>0)$, якщо вона приймає цілі невід'ємні значення з ймовірностями $P(\xi=k)=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$.

Дискретна випадкова величина ξ розподілена ***за геометричним законом*** з параметром p $(0<p<1)$, якщо вона приймає натуральні значення з ймовірностями $P(\xi=k)=(1-p)^{k-1}p$.

Безперервна випадкова величина ξ має ***рівномірний на*** (a,b) ***розподіл***, якщо її щільність розподілу ймовірностей має вигляд: $f_k=\begin{cases}0, x\le a,\\ \dfrac{1}{b-a}, a<x<b,\\ 0, x\ge b.\end{cases}$.

Безперервна випадкова величина ξ розподілена ***за нормальним законом*** з параметрами розподілу a і σ $(a\in R, \sigma>0)$, якщо її щільність розподілу ймовірностей має вигляд: $f_{\xi}(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp(-\dfrac{(x-a)^2}{2\sigma^2})$. Нормальний розподіл з параметрами $a=0$ і $\sigma=1$ називається стандартним нормальним розподілом.

Безперервна випадкова величина ξ розподілена ***за експонентним (показовим) законом***, якщо її щільність розподілу ймовірностей має вигляд: $f_{\xi}(x)=\begin{cases}0, x<0,\\ ae^{-\alpha x}, x\ge 0.\end{cases}$.

При розв’язанні багатьох задач немає необхідності знаходити закон розподілу випадкових величин, достатньо характеризувати їх деякими невипадковими числами. Такі числа називають числовими характеристиками.

Математичним сподіванням дискретної випадкової величини ξ називають невипадкове число $E_{\xi}=\sum\limits_i x_i p_i$. При цьому, якщо множина значень випадкової величини зліченна, передбачається, що ряд $\sum\limits_i x_i p_i$ є таким, що сходиться абсолютно. В іншому випадку говорять, що математичного сподівання не існує.

Математичним сподіванням неперервної випадкової величини ξ називають невипадкове число $E_{\xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_{\xi}(x)dx$. При цьому передбачається, що $\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_{\xi}(x)dx$ сходиться абсолютно. Математичне сподівання є ідеалізованим середнім значенням випадкової величини.

Властивості математичного сподівання:

1) $E_C = C$, де $C = \text{const}$;

2) $E_{a\xi} = aE_{\xi}$, $E_{a\xi+b} = aE_{\xi} + b$;

3) $E_{\xi_1+\xi_2} = E_{\xi_1} + E_{\xi_2}$, якщо E_{ξ_1} і E_{ξ_2} існує;

4) якщо випадкові величини ξ_1 і ξ_2 незалежні, то $E_{\xi_1 \cdot \xi_2} = E_{\xi_1} \cdot E_{\xi_2}$.

Для характеристики розкиду можливих значень випадкової величини відносно свого середнього значення служить дисперсія.

Дисперсією випадкової величини ξ називають математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини від її середнього значення $D_{\xi} = E(\xi - E_{\xi})^2$. Властивостями дисперсії є:

1) $D_C = 0$, де $C = \text{const}$;

2) $D_{a\xi} = a^2 D_{\xi}$, $D_{a\xi+b} = a^2 D_{\xi}$;

3) $D_{\xi} = E_{\xi^2} - E_{\xi}^2$.

Якщо випадкові величини ξ_1 і ξ_2 незалежні, то $D_{\xi_1+\xi_2} = D_{\xi_1} + D_{\xi_2}$.

Середнім квадратичним відхиленням випадкової величини ξ називається число σ_{ξ}, яке визначається рівністю $\sigma_{\xi} = \sqrt{D_{\xi}}$. Величина σ_{ξ} невід'ємна та має таку саму розмірність, як і випадкова величина ξ.

Нехай $\{\xi_n\}$ – послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин з кінцевим математичним сподіванням і дисперсією $(E_{\xi_n} = a, D_{\xi_n} = \sigma^2$. Позначимо через $F_n(x)$ функцію розподілу нормованої суми $\dfrac{\sum_{k=1}^{n} \xi_k - an}{\sigma\sqrt{n}}$, тобто:

$$F_n(x) = P\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} \xi_k - an}{\sigma\sqrt{n}} < x \right). \quad (1.1)$$

Позначимо через $\Phi(x)$ функцію розподілу стандартного нормального закону, тобто:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du,. \quad (1.2)$$

Центральна гранична теорема: нехай $\{\xi_n\}$ – послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин з кінцевим математичним очікуванням і дисперсією $(E\xi_n = a, D\xi_n = \sigma^2)$, тоді:

$$P\left(\frac{\sum_{k=1}^{n}\xi_k - an}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) \underset{x\to\infty}{\to} \Phi(x). \tag{1.3}$$

Нормальний закон має важливе значення на практиці, оскільки, як правило, завжди зустрічається в ситуаціях, коли випадкова величина визначається великою кількістю незалежних випадкових факторів, жоден з яких при цьому не робить вирішального впливу. Функція $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}}du$ називається ***функцією Лапласа***. Табличні значення функції Лапласа представлені у додатку А.

Властивості функції Лапласа:

1) $\Phi_0(-x) = -\Phi_0(x)$;

2) $\Phi_0(+\infty) = \frac{1}{2}$;

3) $\Phi(x) = \Phi_0(x) + \frac{1}{2}$;

4) для $\forall x_1, x_2 : \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi_0(x_2) - \Phi_0(x_1)$.

Наслідком з центральної граничної теореми є інтегральна і локальна теореми Муавра-Лапласа.

Розглянемо схему Бернуллі, що складається з n незалежних випробувань з ймовірністю "успіху" p. Позначимо через $S_n = \sum_{k=1}^{n}\xi_k$ – число успіхів у схемі Бернуллі, при цьому випадкові величини ξ_k незалежні і однаково розподілені за законом Бернуллі з параметром p, їх числові характеристики $E_{\xi_k} = p, D_{\xi_k} = p\cdot q$. Тоді згідно з центральною граничною теоремою нормована сума $\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}}$ сходиться за розподілом до стандартного нормального розподілу при $n\to\infty$.

Інтегральна теорема Муавра-Лапласа: при досить великому n ймовірність того, що число успіхів у схемі Бернуллі буде не менше k_1 і не більше k_2, наближено дорівнює:

$$P(k_1 \le S_n \le k_2) \approx \Phi_0(x_2) - \Phi_0(x_1), \tag{1.4}$$

де $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Локальна теорема Муавра-Лапласа: при досить великому n ймовірність того, що число успіхів у схемі Бернуллі буде k, наближено дорівнює:

$$P(S_n = k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\phi(x), \tag{1.5}$$

де $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$, $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ – щільність розподілу стандартного нормального закону (функція Гауса). Табличні значення функції Гауса представлені у додатку Б.

Нехай ймовірність успіху p є функцією від n, тобто $p_n = p(n)$. ***Теорема Пуассона***: нехай $p_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$, так що $np_n \underset{n\to\infty}{\to} \lambda > 0$, тоді при достатньо великому n ймовірність того, що число успіхів у схемі Бернуллі буде k, наближено дорівнює:

$$P(S_n = k) \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.. \tag{1.6}$$

Припустимо, що в момент часу t ми даємо в борг суму C (наприклад, кладемо на свій рахунок у банку, вносимо плату за страховку, перераховуємо пенсійний внесок у пенсійний фонд тощо). Через час Δt ми можемо розраховувати на певний дохід $C' = C \cdot i$ від інвестування капіталу C, що нам належить. Сума C' є нагородою за те, що наші кошти використовувалися іншою людиною. Зазвичай її вимірюють у відносних одиницях; величина $i = \frac{C'}{C}$ називається ***ефективною процентною ставкою*** за відрізок часу $(t, t + \Delta t)$, що розглядається.˙

Припустимо тепер, що сума C може інвестуватися на двох послідовних відрізках часу. Нехай i_1 – ефективна процентна ставка на першому відрізку, i_2 – відповідно на другому. Існують дві схеми обчислення доходу C' на об'єднаному інтервалі: простих відсотків та складних відсотків.

Принцип простих відсотків припускає, що відсотки нараховуються тільки на основний капітал. Тому $C' = C \cdot i_1 + C \cdot i_2$. Відповідно, підсумкова процентна ставка – $i = \frac{C'}{C} = i_1 + i_2$.

Принцип складних відсотків передбачає, що відсотки нараховуються не тільки на основний капітал, але і на вже зароблені відсотки. Тому в кінці другого інтервалу часу основний капітал C зросте на величину $C' = C(1 + i_1)(1 + i_2)$. Відповідно, підсумкова процентна ставка i визначається як $i = (1 + i_1)(1 + i_2)$.

Принцип складних відсотків фактично означає, що інвестор може вільно розпоряджатися своїми коштами. Тому в актуарній математиці прийнято використовувати принцип складних відсотків при визначенні доходу від вкладених коштів.

Процентні ставки, що використовуються в більшості розрахунків у актуарній математиці, визначаються, виходячи з консервативних оцінок доходності реальних майбутніх інвестицій страховика. Вони набагато нижче реальних процентних ставок, що пропонуються ринком для різних видів інвестиційних проектів. Їх значення полягає в тому, щоб як-небудь врахувати зростання грошей, внесені як плата за страхове покриття. Тому їх називають технічними процентними ставками. Насправді страхова компанія заробляє набагато більші відсотки, більше того, це одне із самих головних (якщо не найбільш головне) джерел доходу страховика.

Величину $v=(1+i)^{-1}$ називають ***коефіцієнтом дисконтування***. За його допомогою обчислюється сучасна вартість суми C', тобто $C=C'\cdot v$.

Якщо сучасна вартість відсотків на капітал дорівнює 1, то відповідна їй вартість ефективної відсоткової ставки називається ***ефективною ставкою дисконтування*** або просто ставкою дисконтування. Позначаючи ставку дисконтування через d, маємо наступні співвідношення:

$$d=i\cdot v=\frac{i}{1+i}. \tag{1.7}$$

Відзначимо також, що $v=1-d$, $i=\dfrac{d}{1-d}$.

Страхові операції дуже часто пов'язані не з разовими платежами, а з деякою послідовністю їх в часі . Прикладами можуть слугувати оплата премій, виплата пенсій, надходження доходів від інвестицій тощо. такі послідовності платежів називають ***потоками платежів***. Окремий платіж називається членом потоку.

Потік платежів, усі члени якого позитивні, а часовий інтервал між членами однаковий, називається ***фінансовою рентою*** (рентою) або ануїтетом, незалежно від призначення платежів. Прикладами ренти можуть бути сплата премій у розстрочку та виплата пенсій.

Будемо розглядати лише вірні ренти – сплата платежів здійснюється безумовно, а число членів такої ренти заздалегідь відомо. Проаналізуємо різні варіанти таких рент і їхньої вартості в початковий і кінцевий моменти терміну ренти.

Термінові ренти розглядаються на n послідовних одиничних (один рік) відрізках часу $(0,1),(1,2),\ldots,(n-1,n)$.

Рента постнумерандо – серія з n виплат, розміри яких дорівнюють 1, здійснюваних наприкінці кожного відрізку часу. Сучасна вартість ренти постнумерандо ($a_{\bar{n}}$):

$$a_{\bar{n}}=v+v^2+\ldots+v^n=\frac{v-v^{n+1}}{1-v}=\frac{1-v^n}{i}. \tag{1.8}$$

Рента пренумерандо – серія з n виплат, розміри яких дорівнюють 1, здійснюваних на початку кожного відрізку часу. Сучасна вартість ренти пренумерандо ($\ddot{a}_{\bar{n}}$):

$$\ddot{a}_{\bar{n}}=1+v+v^2+\ldots+v^{n-1}=\frac{a_{\bar{n}}}{v}=\frac{1-v^n}{d}. \tag{1.9}$$

Визначимо, що $a_{\bar{n}}=\ddot{a}_{\bar{n}}$. Ці величини дозволяють підрахувати величину суми, яку потрібно інвестувати в даний момент для того, щоб отримувати фіксований регулярний дохід у майбутньому. За їх допомогою також можна визначити величину регулярних виплат у разі, коли борг повертається не одним платежем, а серією однакових платежів.

Відстрочені ренти розглядаються на відрізку часу $(0,1),(1,2),\ldots,(m-1,m),(m,m+1),\ldots,(m+n-1,m+n)$.

Відстрочена рента постнумерандо – серія з n одиничних виплат, зроблених у момент часу $t=m+1,\ldots,t=m+n$. Сучасна вартість відстроченої ренти постнумерандо (${}_{m|}a_{\overline{n}}$):

$$ {}_{m|}a_{\overline{n}} = a_{\overline{n}} \cdot v^m = a_{\overline{n+m}} - a_{\overline{m}} . \tag{1.10}$$

Відстрочена рента пренумерандо – серія з n одиничних виплат, зроблених на початку відрізку часу $t=m, t=m+1,\ldots,t=m+n-1$. Сучасна вартість відстроченої ренти постнумерандо (${}_{m|}\ddot{a}_{\overline{n}}$):

$$ {}_{m|}\ddot{a}_{\overline{n}} = \ddot{a}_{\overline{n}} \cdot v^m = \ddot{a}_{\overline{n+m}} - \ddot{a}_{\overline{n}} . \tag{1.11}$$

Часто корисно знати вартість ренти не у початковий момент часу, а наприкінці останнього платіжного періоду. Цю вартість можна інтерпретувати як загальну суму, накопичену на банківському рахунку після серії регулярних внесків. Її позначають так само, як і відповідну наведену вартість в початковий момент, але з заміною букви a на букву s.

Таким чином, $s_{\overline{n}}$ – це теперішня вартість ренти постнумерандо в момент останнього платежу, а $\ddot{s}_{\overline{n}}$ – це теперішня вартість ренти пренумерандо через одиницю часу після останнього платежу. Формули для накопичень $s_{\overline{n}}$ і $\ddot{s}_{\overline{n}}$ можна отримати безпосередньо, привівши кожен з n платежів до останнього періоду часу і потім складаючи отримані значення:

$$s_{\overline{n}} = (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \ldots + 1 = \frac{(1+i)^n - 1}{i}, \tag{1.12}$$

$$\ddot{s}_{\overline{n}} = 1+i)^n + (1+i)^{n-1} + \ldots + (1+i) = \frac{(1+i)^n - 1}{d}. \tag{1.13}$$

Змінною (зростаючою) рентою називається рента, розміри якої змінюються за деяким законом.

Зростаюча рента постнумерандо – потік платежів, розміри яких становлять k одиниць у моменти $t=k, k=1,2,\ldots,n$. Сучасна вартість зростаючої ренти постнумерандо ($(Ia)_{\overline{n}}$):

$$(Ia)_{\overline{n}} = v + 2\cdot v^2 + \ldots + n\cdot v^n = \frac{a_{\overline{n}}}{d} - \frac{n\cdot v^n}{i}. \tag{1.14}$$

Зростаюча рента пренумерандо – потік платежів, розміри яких становлять k одиниць у моменти $t=k-1, k=1,2,\ldots,n$. Сучасна вартість зростаючої ренти постнумерандо ($(I\ddot{a})_{\overline{n}}$):

$$(I\ddot{a})_{\overline{n}} = 1 + 2\cdot v + \ldots + n\cdot v^{n-1} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n}} - n\cdot v^n}{d}. \tag{1.15}$$

На практиці величини платежів зростаючої ренти можуть утворювати довільну арифметичну прогресію. Цей випадок цілком описується вже розглянутими.

Приклад виконання лабораторної роботи

Завдання 1.1. Контрольна робота з теорії ймовірностей складається з трьох завдань. Перше завдання оцінюється – 6 балів, друге – 10 балів і останнє – 4 бали. Ймовірність того, що студент вирішить правильно перше завдання, дорівнює $p_1 = 0,6$, друге – $p_2 = 0,5$, третє – $p_3 = 0,9$. Яка ймовірність того, що середній бал за контрольну роботу в потоці з 60 осіб буде менше 13?

Розв'язок. Випадкова величина $\xi_k \ (k = \overline{1,60})$ – кількість балів, отриманих за контрольну роботу студентом. $\{\xi_k\}$ – послідовність незалежних, однаково розподілених випадкових величин. Розрахуємо ймовірності випадкових величин:

$P(\xi_k = 0) = (1-p_1)\cdot(1-p_2)\cdot(1-p_3) = 0,02$;

$P(\xi_k = 4) = (1-p_1)\cdot(1-p_2)\cdot p_3 = 0,18$;

$P(\xi_k = 6) = p_1\cdot(1-p_2)\cdot(1-p_3) = 0,03$;

$P(\xi_k = 10) = (1-p_1)\cdot p_2\cdot(1-p_3) = 0,29$;

$P(\xi_k = 14) = (1-p_1)\cdot p_2\cdot p_3 = 0,18$;

$P(\xi_k = 16) = p_1\cdot p_2\cdot(1-p_3) = 0,03$;

$P(\xi_k = 20) = p_1\cdot p_2\cdot p_3 = 0,27$.

Знайдемо числові характеристики випадкової величини – математичне сподівання $(E_{\xi_k} = a)$ і середнє квадратичне відхилення $(\sigma_{\xi_k} = \sigma)$:

$$E_{\xi_k} = a = \sum_i x_i\cdot p_i = 12,2\,;\ \sigma_{\xi_k} = \sigma = \sqrt{D_{\xi_k}} = \sqrt{E_{\xi_k^2} - E_{\xi_k}^2} = \sqrt{35,08} \approx 5,932\,.$$

Використовуючи центральну граничну теорему, знайдемо ймовірність того, що середній бал за контрольну роботу в потоці буде менше 13:

$$P\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k < 13\right) = P\left(\frac{\sum_{k=1}^{n}\xi_k - a\cdot n}{\sigma\sqrt{n}} < \frac{13\cdot n - a\cdot n}{\sigma\sqrt{n}}\right) = \Phi\left(\frac{13\cdot n - a\cdot n}{\sigma\sqrt{n}}\right) = \Phi(1,046) \approx 0,85.$$

Табличне значення функції $\Phi(x)$ у MS Excel можна отримати за допомогою функції НОРМСТРАСП(). Таким чином, ймовірність того, що середній бал за контрольну роботу в потоці з 60 осіб буде менше 13, дорівнює 85%.

Завдання 1.2. Ймовірність влучення в ціль при одному пострілі дорівнює 0,002. Ціль знищується за умови двох і більше влучень. Знайти ймовірність знищення цілі, якщо зроблено 1000 незалежних пострілів.

Розв'язок. Оскільки число випробувань (кількість незалежних пострілів) $n = 1000$ досить велика, ймовірність успіху (попадання в ціль) $p = 0,002$ досить мала ($npq < 10$), то для обчислення ймовірності хоча б двох влучень у ціль скористаємося наближеною формулою Пуассона: $P(S_n = k) \approx \dfrac{\lambda^k\cdot e^{-\lambda}}{k!}$. Тоді маємо:

$$P(S_{1000} \ge 2) = 1 - (P(S_{1000} = 0) + P(S_{1000} = 1)) \approx 1 - \left(\frac{2^0\cdot e^{-2}}{0!} + \frac{2^1\cdot e^{-2}}{1!}\right) \approx 0,592.$$

Завдання 1.3. Клієнти банку, не пов'язані один з одним, не повертають кредити в строк з імовірністю 0,1. Скласти закон розподілу випадкової величини ξ –кількість повернутих у строк кредитів з 3 виданих. Знайти ймовірність $P\{\xi > 1\}$.

Розв'язок. В даному випадку ми маємо справу з біноміальним законом з параметрами $p = 0{,}9$ та $q = 0{,}1$. Випадкова величина ξ – кількість повернутих в строк кредитів з трьох виданих – приймає значення: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ та $x_4 = 3$. Відповідні їм ймовірності p_1, p_2, p_3 та p_4 знайдемо, скориставшись формулою Бернуллі: $p_k = C_n^k p^k q^{n-k}$:

$$P_3(0) = P\{\xi = 0\} = C_3^0 p^0 q^3 = 1 \cdot 1 \cdot 0{,}1^3 = 0{,}001;$$

$$P_3(1) = P\{\xi = 1\} = C_3^1 p^1 q^2 = 3 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1^2 = 0{,}027;$$

$$P_3(2) = P\{\xi = 2\} = C_3^2 p^2 q^1 = 3 \cdot 0{,}9^2 \cdot 0{,}1^1 = 0{,}243;$$

$$P_3(3) = P\{\xi = 3\} = C_3^3 p^3 q^0 = 1 \cdot 0{,}9^3 \cdot 0{,}1^0 = 0{,}729.$$

Тоді, $P\{\xi > 1\} = P\{\xi = 2\} + P\{\xi = 3\} = 0{,}243 + 0{,}729 = 0{,}972$.

Завдання 1.4. Недержавний пенсійний фонд нараховує за пенсійними рахунками $i = 7\%$ річних. 1 січня 2010 року вкладник перерахував $C = 8500$ грн. Які відсотки будуть нараховані на цю суму до 31 грудня 2016 року?

Розв'язок. З 1 січня 2010 року до 31 грудня 2016 пройде $t = 7$ років. За основною формулою складних відсотків до 31 грудня 2016 року на пенсійному рахунку буде накопичена сума:

$$A = C \cdot (1+i)^7 = 8500 \cdot (1{,}07)^7 \approx 13649{,}14.$$

Тому відсотки становлять:

$A - C \simeq 13649{,}14 - 8500 = 5149{,}14$ грн.

Завдання 1.5. Вкладник вніс на рахунок $C = 10000$ грн. Банк гарантує, що протягом трьох найближчих років ефективна річна процентна ставка буде дорівнювати $i_1 = 7\%$. Через три роки банк встановить процентну ставку i_2 на наступні три роки. Відомо, що нова ставка не вийде за межі проміжку $[6\%, 8\%]$. Що можна сказати про суму, яку буде накопичено за шість років?

Розв'язок. За основною формулою складних відсотків шукане накопичення є:

$$A = C \cdot (1+i_1)^3 \cdot (1+i_2)^3 = 10000 \cdot (1{,}07)^3 \cdot (1+i_2)^3.$$

Величина $(1+i_2)^3$ не вийде за межі відрізка $\left[1{,}06^3; 1{,}08^3\right]$. Тому можна гарантувати, що $A \in [14590{,}46; 15432{,}01]$.

Завдання 1.6. Пенсійний фонд повинен виплатити застрахованій особі наступні суми:

5000 грн. – 1 липня 2019 року;

3000 грн. – 1 березня 2022 року;

2000 грн. – 1 жовтня 2023 року;

8000 грн. – 1 квітня 2025 року.

Знайдіть величину зобов'язань фонду по відношенню до цієї застрахованої особи на 1 січня 2018 року. Технічна процентна ставка, що використовується фондом для оцінки своїх зобов'язань, дорівнює $i = 5\%$, час вимірюється у роках.

Розв'язок. Нехай час вимірюється в роках, починаючи з 1 січня 2018 року, а один місяць дорівнює $\frac{1}{12}$ року. Тоді:

1. 1 липня 2019 року – це момент $t_1 = 1\frac{6}{12} = 1,5$;

2. 1 березня 2022 року – це момент $t_2 = 4\frac{2}{12} = \frac{50}{12}$;

3. 1 жовтня 2023 – це момент $t_3 = 5\frac{9}{12} = 5,75$;

4. 1 квітня 2025 року – це момент $t_4 = 7\frac{3}{12} = 7,25$.

Коефіцієнт дисконтування v задається $v = \frac{1}{1+i} = \frac{1}{1,05} \approx 0,95238$, тому величина зобов'язань фонду на 1 січня 2018 року дорівнює:

$$5000 \cdot v^{1,5} + 3000 \cdot v^{\frac{50}{12}} + 2000 \cdot v^{5,75} + 8000 \cdot v^{7,25} \approx 14222,53 \text{ грн.}$$

Завдання 1.7. Експерти недержавного пенсійного фонду припускають, що протягом найближчих п'яти років ефективна річна процентна ставка буде дорівнювати $i_1 = 10\%$. Протягом наступного п'ятиріччя очікується річна процентна ставка $i_2 = 6\%$. Людина купує десятирічну ренту з виплатою в кінці кожного року 1000 грн. Підрахуйте її вартість.

Розв'язок. Приведена цінність в даний момент $t_0 = 0$ п'яти річних платежів в моменти 1, 2, 3, 4, 5 дорівнює:

$$1000 \cdot a_{\overline{5}@ i_1},$$

де символ $@ i_1$ вказує ефективну річну процентну ставку на відрізку, який розглядається в якості одиничного.
Тобто:

$$1000 \cdot \frac{1 - v_1^5}{i_1} \approx 3791 \text{ грн.}$$

Приведена цінність в момент $t_5 = 5$ п'яти річних платежів в моменти 6, 7, 8, 9, 10 дорівнює:

$$1000 \cdot a_{\overline{5}@ i_2} = 1000 \cdot \frac{1 - v_2^5}{i_2} \approx 4212 \text{ грн.}$$

Щоб привести цю суму до моменту $t_0 = 0$, помножимо її на v_1^5, що дасть приблизно 2616 грн. Отже, вартість ренти є 3791 грн. +2616 грн. = 6407 грн.

Завдання до лабораторної роботи

1. Садівничий кооператив застрахував на рік свої дачні будинки від пожежі. Кожен з 600 домовласників вніс до кооперативу по 1500 грн. Ймовірність пожежі (в одному будинку) протягом року дорівнює 0,005, а страхова сума, що виплачується потерпілому, становить 120000 грн. Яка ймовірність того, що страхова компанія понесе збиток?

2. Випадкова величина ξ – кількість випадань трійки при чотирьох підкиданнях гральної кістки. Для цієї випадкової величини скласти закон розподілу, знайти і побудувати функцію розподілу, багатокутник розподілу, знайти ймовірність того, що трійка випаде менше двох разів.

3. Для особи, що дожила до 29-річного віку, ймовірність смерті на 30-му році життя дорівнює 0,008. Страхова компанія пропонує застрахувати життя на рік зі страховим внеском $10 \cdot N$ доларів, де N – номер варіанта студента. У разі смерті застрахованого страхова компанія виплачує спадкоємцям $100 \cdot N$ доларів. Який прибуток очікує отримати компанія з кожного застрахованого?

4. Клієнти банку, не пов'язані один з одним, не повертають кредити в строк з імовірністю 0,1. Скласти закон розподілу випадкової величини ξ – кількість повернутих у строк кредитів з 3 виданих. Знайти ймовірність $P\{\xi > 1\}$.

5. Безперервна випадкова величина задана щільністю розподілу:

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, x \le 0, \\ a \cdot (3 \cdot x - x^2), 0 < x \le 3, \\ 0, x > 3. \end{cases}$$

Знайти коефіцієнт a, функцію розподілу $F_{\xi}(x)$, ймовірність $P(0 \le \xi \le 1)$.

6. Відділення банку обслуговує 1000 клієнтів, які тримають свій внесок у цьому банку. У даному інтервалі часу будь-який клієнт незалежно від інших може провести операцію по внеску з імовірністю 0,001. Яка ймовірність того, що в даному інтервалі буде рівно 3 операції по внесках?

7. Для особи, що дожила до 25-річного віку, ймовірність смерті на 26-му році життя дорівнює 0,005. Застрахована група в $1000 \cdot N$ чоловік 25-річного віку (N – номер варіанта студента), причому кожен застрахований вніс 1200 грн. страхових внесків за рік. У разі смерті застрахованого страхова компанія виплачує спадкоємцям 100000 грн. Яка ймовірність того, що до кінця року страхова компанія:

а) виявиться в збитку;

б) її дохід перевищить 6000000 грн;

в) її дохід перевищить 4000000 грн?

8. Недержавний пенсійний фонд нараховує за пенсійними рахунками $i = 9\%$ річних. 1 січня 2008 року вкладник перерахував $C = 7500$ грн. Які відсотки будуть нараховані на цю суму до 31 грудня 2012 року?

9. Вкладник вніс на рахунок $C = 5000$ грн. Банк гарантує, що протягом двох найближчих років ефективна річна процентна ставка буде дорівнювати $i_1 = 7\%$. Через два роки банк встановить процентну ставку i_2 на наступні два роки. Відомо, що нова ставка не вийде за межі проміжку $[6\%, 9\%]$. Що можна сказати про суму, яку буде накопичено за чотири роки?

10. Експерти недержавного пенсійного фонду припускають, що протягом найближчих п'яти років ефективна річна процентна ставка буде дорівнювати $i_1 = 15\%$. Протягом наступного п'ятиріччя очікується річна процентна ставка

$i_2 = 10\%$. Людина купує десятирічну ренту з виплатою в кінці кожного року 2000 грн. Підрахуйте її вартість.

Питання для самоконтролю

1. Що таке випадкова подія? Які можливі дії над випадковими подіями?
2. Що таке ймовірнісний простір? Сформулюйте аксіоматичне визначення ймовірності.
3. Що таке випадкова величина та її закон розподілу?
4. Охарактеризуйте найважливіші розподіли випадкових величин (Бернуллі, біноміальний, Пуассона, геометричний, рівномірний, нормальний, експоненційний).
5. Які основні числові характеристики випадкових величин? Назвіть їх властивості.
6. Який зміст центральної граничної теореми та її наслідків?
7. Як нараховуються прості та складні відсотки?
8. Назвіть основні види фінансових рент.
9. Як розраховується сучасна вартість рент?
10. Як розраховується теперішня вартість рент?

Лабораторна робота № 2
Основи тарифних розрахунків страхування життя

Мета: отримати уявлення про базові поняття актуарної математики (час життя, функція виживання, інтенсивність смертності тощо) та про способи апроксимації функції виживання для дробових років (рівномірний розподіл, припущення Балдуччі).

Завдання: навчитися оцінювати ймовірності дожиття (не дожиття) до певного віку, використовувати таблиці тривалості життя для розрахунку основних характеристик тривалості життя.

Короткі теоретичні відомості з теми

В основі страхування життя, як і будь-якого іншого виду страхування, лежить принцип розподілу збитків однієї особи, з якою стався страховий випадок, на велике число учасників страхування, з якими в момент часу, що розглядається, такий випадок не стався. Невизначеність моменту смерті є основним фактором ризику при страхуванні життя. Щодо моменту смерті окремої людини не можна сказати нічого певного. Однак якщо учасники страхування утворюють велику однорідну групу людей, і ми не цікавимося долею окремих людей з цієї групи, то в цьому випадку застосуємо апарат теорії ймовірностей як науки про масові випадкові явища, що мають властивість стійкості. Тоді тривалість життя можна розглядати як випадкову величину T.

У теорії ймовірностей розподіл випадкової величини описується функцією розподілу $F(x)=P(T<x)$. В актуарній математиці прийнято працювати не з функцією розподілу, а з додатковою функцією розподілу $\bar{F}(x)=1-F(x)$. Що стосується тривалості життя, то $1-F(x)$ – це ймовірність того, що людина доживе до віку x років.

Функція $s(x)=1-F(x)$ називається ***функцією виживання***: $s(x)=P(T\geq x)$. Функція виживання має наступні властивості:

1) $s(x)$ убутна функція (при $x\geq 0$);
2) $s(0)=1$;
3) $s(+\infty)=0$;
4) $s(x)$ – неперервна функція.

Одним з джерел даних, необхідних для проведення актуарних розрахунків зі страхування життя, є таблиці тривалості життя. Ці таблиці складаються за даними про смертність населення і про його віковий склад. У таблицях тривалості життя зазвичай вважають, що існує деякий ***граничний вік*** ω (як правило ω дорівнює 100-120 років) і відповідно $s(x)=0$ при $x>\omega$. При описі смертності аналітичними законами зазвичай вважають, що час життя необмежений, однак підбирають вид і параметри законів так, щоб ймовірність життя понад деякий вік була мізерно мала.

Функція виживання має простий статистичний зміст. Припустимо, здійснюється спостереження за групою з l_0 новонароджених (як правило

$l_0 = 100000$) і є можливість фіксувати моменти їх смерті. Позначимо число живих представників цієї групи у віці x через $L(x)$. Тоді, число тих, що доживають до кожного наступного віку (l_x), яке показує скільки з 100000 одночасно народжених доживає до 1 року, 5 років, ..., 20, ..., 50 років тощо, дорівнює:

$$l_x = EL(x) = l_0 \cdot s(x) \quad (2.1)$$

Таким чином, функція виживання $s(x)$ дорівнює середній частці тих, що дожили до віку x з деякої фіксованої групи новонароджених.

В актуарній математиці часто працюють не з функцією виживання $s(x)$, а з величиною l_x (зафіксувавши початковий розмір групи l_0).

У теорії ймовірностей безперервну випадкову величину зручніше описувати щільністю розподілу $f(x)$. В актуарній математиці графік щільності тривалості життя $f(x) = -s'(x)$ (або графік функції $l_0 \cdot f(x)$) називають ***кривою смертей***.

Величина $l_0 \cdot f(x)$ має простий статистичний зміст. Розглянемо середнє число представників вихідної групи в l_0 новонароджених, померлих у віці x років. Ця величина позначається d_x і дорівнює:

$$d_x = l_x - l_{x+1}. \quad (2.2)$$

Таким чином $d_x \approx l_0 \cdot f(x)$ – число вмираючих при переході від віку x до віку $(x+1)$ років.

Функція виживання $s(x)$ може бути відновлена за щільністю:

$$\int_x^{+\infty} f(u)du = s(x). \quad (2.3)$$

Це свідчить про те, що крива смертей може бути використана в якості первинної характеристики тривалості життя.

Інтенсивністю смертності (μ_x) називається величина:

$$\mu_x = \frac{f(x)}{s(x)}. \quad (2.4)$$

Для людини, що дожила до x років, при малих t величина $\mu_x \cdot t$ наближено виражає ймовірність смерті в інтервалі $(x, x+t)$.

Інтенсивність смертності також може бути використана в якості первинної характеристики тривалості життя, оскільки функція виживання $s(x)$ може бути відновлена за інтенсивності смертності:

$$s(x) = \exp(-\int_x^{+\infty} \mu_u du). \quad (2.5)$$

З практичної точки зору важливі наступні макрохарактеристики смертності:

1) середній час:

$$\overset{\circ}{e}_0 = ET = \int_0^{+\infty} x \cdot f(x)dx = \int_0^{+\infty} s(x)dx; \quad (2.6)$$

2) дисперсія часу життя:

$$DT = ET^2 - (ET)^2 \; DT = ET^2 - (ET)^2, \quad (2.7)$$

де $ET^2 = \int_0^{+\infty} x^2 \cdot f(x)dx = 2 \cdot \int_0^{+\infty} x \cdot s(x)dx$;

3) медіана часу життя $m(0)$, яка визначається як корінь рівняння:

$$s(m) = 0,5 \quad (2.8)$$

Медіана часу життя – це вік, до якого доживає рівно половина представників вихідної групи новонароджених.

Розрахунки щільності ймовірностей $f(x)$ і обумовлених нею функцій $s(x)$, μ_x та інших будуть простішими, якщо відомий аналітичний вигляд функції $f(x)$ з точністю до ряду параметрів, які можна оцінити за статистичними даними про тривалість життя людей.

Найпростіше наближення було введено в 1729 році Абрахамом де Муавром, який запропонував вважати, що час життя рівномірно розподілено на інтервалі $[0,\omega]$, де ω– граничний вік людини:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\omega}, x \in [0,\omega], \\ 0, x \notin [0,\omega]. \end{cases} \quad (2.9)$$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x}{\omega}, x \in [0,\omega], \\ 1, x \notin [0,\omega]. \end{cases} \quad (2.10)$$

$$s(x) = 1 - F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{\omega}, x \in [0,\omega], \\ 0, x > \omega. \end{cases} \quad (2.11)$$

$$\mu_x = \frac{f(x)}{s(x)} = \frac{1}{\omega - x}, x \in [0,\omega]. \quad (2.12)$$

Порівняння графіків цих функцій з реальними графіками функції виживання $s(x)$, функції смертей $f(x)$, інтенсивності смертності μ_x показує, що закон де Муавра є не дуже хорошим наближенням. Наприклад, формула (2.9) означає, що крива смертей $f(x)$ є горизонтальною лінією, в той час як емпіричні дані вказують на пік в районі 80 років.

У моделі, яку запропонував у 1825 році Бенджамін Гомпертц, інтенсивність смертності μ_x апроксимується експонентою $\mu_x = B \cdot e^{\alpha \cdot x}$, де $\alpha > 0$, $B > 0$ – деякі параметри. Відповідно крива смертності, функція виживання та крива смертей мають вигляд:

$$F(x) = 1 - \exp(-\frac{B}{\alpha}(e^{\alpha \cdot x} - 1)), \quad (2.13)$$

$$s(x) = \exp(-\frac{B}{\alpha}(e^{\alpha \cdot x} - 1)), \quad (2.14)$$

$$f(x) = B \cdot \exp(\alpha \cdot x - \frac{B}{\alpha}(e^{\alpha \cdot x} - 1)). \quad (2.15)$$

У 1860 році Мейкхам узагальнив модель Гомпертца, поклавши $\mu_x = A + B \cdot e^{\alpha \cdot x}$, де A – інтенсивність смертності, що не залежить від віку x (наприклад, коли смерть викликана нещасними випадками). У цій моделі:

$$F(x) = 1 - \exp(-A \cdot x - \frac{B}{\alpha}(e^{\alpha \cdot x} - 1)), \qquad (2.16)$$

$$s(x) = \exp(-A \cdot x - \frac{B}{\alpha}(e^{\alpha \cdot x} - 1)), \qquad (2.17)$$

$$f(x) = (A + B \cdot e^{\alpha \cdot x}) \cdot \exp(-A \cdot x - \frac{B}{\alpha}(e^{\alpha \cdot x} - 1)). \qquad (2.18)$$

У 1939 році Валодді Вейбулл запропонував наближати інтенсивність смертності μ_x показниковою функцією виду $\mu_x = k \cdot x^b$ ($k > 0$, $b > 0$). Відповідно до цієї моделі:

$$F(x) = 1 - \exp(-\frac{k}{b+1} \cdot x^{b+1}), \qquad (2.19)$$

$$s(x) = \exp(-\frac{k}{b+1} \cdot x^{b+1}), \qquad (2.20)$$

$$f(x) = k \cdot x^b \cdot \exp(-\frac{k}{b+1} \cdot x^{b+1}). \qquad (2.21)$$

Статистичні дані про тривалість життя підсумовуються в таблицях тривалості життя, іноді їх називають ***таблицями смертності***. Найпростішим видом таблиць є таблиці, що містять інформацію про статистичні властивості часу життя випадково обраної людини, щодо якої відомий тільки її вік. Такі таблиці називають загальними або спрощеними (Додаток В). Вони дозволяють отримати загальну наближену картину смертності. Прикладом таких таблиць можуть служити популяційні таблиці, що містять дані про смертність населення. В принципі для вирішення будь-якої задачі достатньо знання функції виживання $s(x)$, однак для наочності в таблиці зазвичай включають введені раніше величини:

1) l_x – середня кількість живих представників певної групи з 100000 одночасно народжених, що доживають до віку x, визначається за формулою (2.1);

2) d_x – кількість представників групи, померлих у віці від x до $(x+1)$ років, визначається за формулою (2.2);

3) $q_x = \frac{d_x}{l_x}$ – ймовірність смерті протягом року для людини у віці x років.

В якості кроку таблиці зазвичай розглядають один рік.

Ймовірність $P(T_x < t)$– ймовірність смерті людини у віці x протягом найближчих t років – позначається ${}_tq_x$:

$${}_tq_x = \frac{s(x) - s(x+t)}{s(x)} = \frac{l_x - l_{x+t}}{l_x}. \qquad (2.22)$$

Додаткова ймовірність $P(T_x > t)$ – ймовірність того, що людина у віці x проживе ще щонайменше t років – позначається ${}_tp_x$:

$${}_tp_x = \frac{s(x+t)}{s(x)} = \frac{l_{x+t}}{l_x}. \qquad (2.23)$$

Розглянемо більш загальну подію: людина у віці x проживе ще t років, але помре протягом u років, тобто $t < T_x < t+u$. Її ймовірність позначається ${}_{t|u}q_x$:

$$ {}_{t|u}q_x = {}_{t+u}q_x - {}_t q_x = \frac{s(x+t) - s(x+t+u)}{s(x)}. \qquad (2.24) $$

Однак для розрахунку премій, резервів і інших величин, необхідних для ведення страхової справи задача визначення функції виживання для всіх дійсних значень аргументу x, а не тільки для цілочисельних може розглядатися як завдання інтерполяції. При цьому достатньо розглянути задачу інтерполяції тільки для функції виживання $s(x)$, оскільки більш складні величини можуть бути виражені через неї.

В актуарній математиці зазвичай вирішують цю задачу, постулюючи той чи інший вид функції $s(x)$ між вузлами інтерполяції, тобто отримують вихідну функцію $s(x)$, склеюючи в цілочисельних точках більш прості функції.

Найпростішою є ***інтерполяція лінійними функціями***:

$$ s(x) = a_n + b_n \cdot x \text{ при } n \le x \le n+1. \qquad (2.25) $$

Оскільки значення $s(n)$ і $s(n+1)$ – відомі, з рівнянь:

$$ a_n + b_n \cdot n = s(n), $$
$$ a_n + b_n \cdot (n+1) = s(n+1) $$

можна визначити a_n і b_n:

$$ a_n = (n+1) \cdot s(n) - n \cdot s(n+1), $$
$$ b_n = s(n+1) - s(n). $$

Таким чином, на відрізку $n \le x \le n+1$ функція $s(x)$ наближається лінійною функцією:

$$ s(x) = (n+1-x) \cdot s(n) + (x-n) \cdot s(n+1), \; n \le x \le n+1. \qquad (2.26) $$

Для щільності $f(x)$ це наближення дає:

$$ f(x) = -s'(x) = s(n) - s(n+1), \; n < x < n+1. \qquad (2.27) $$

Відповідно для інтенсивності смертності μ_x маємо наступне наближення:

$$ \mu_x = \frac{s(n) - s(n+1)}{(n+1) \cdot s(n) - n \cdot s(n+1) - x \cdot (s(n) - s(n+1))}, \; n < x < n+1. \qquad (2.28) $$

За допомогою величини $q_n = \dfrac{s(n) - s(n+1)}{s(n)}$ (ймовірність того, що людина у віці n помре протягом найближчого року) цю формулу можна переписати у вигляді:

$$ \mu_x = \frac{q_n}{1 - (x-n) \cdot q_n}, \; n < x < n+1, \qquad (2.29) $$

або:

$$ \mu_{n+t} = \frac{q_n}{1 - t \cdot q_n}, \; 0 < t < 1. \qquad (2.30) $$

відзначимо, що у цілочислених точках щільність $f(x)$ та інтенсивність смертності μ_x не визначені.

Отже, в припущенні про лінійну інтерполяцію функції виживання ймовірність смерті протягом (початкової) частини року пропорційна довжині цієї частини (тобто ${}_t q_n = t \cdot q_n$).

Вірно і зворотне твердження, якщо ймовірність смерті протягом (початкової) частини року пропорційна довжині цієї частини (тобто ${}_t q_n = t \cdot q_n$), то для дробових віків (між двома сусідніми цілими) функція виживання є лінійною.

Припущення Балдуччі зовні схоже на припущення про рівномірний розподіл смертей, проте, на відміну від останнього, лінійними функціями інтерполюється $\frac{1}{s(x)}$. Це призводить до наступних формул при $0 < t < 1$:

$$s(n+t) = \frac{s(n+1)}{p_n + t \cdot q_n}, \tag{2.31}$$

$$f(n+t) = \frac{s(n+1) \cdot q_n}{(p_n + t \cdot q_n)^2}, \tag{2.32}$$

$$\mu_{n+t} = \frac{q_n}{p_n + t \cdot q_n}. \tag{2.33}$$

Одне з найбільш важливих наслідків припущення Балдуччі полягає в наступному: розглянемо величину ${}_{1-t} q_{n+t}$ (ймовірність такого роду з’являється при оцінці резервів для дробових моментів часу), для неї маємо:

$${}_{1-t} q_{n+t} = (1-t) \cdot q_n. \tag{2.34}$$

Отже, в припущенні Балдуччі ймовірність смерті до чергового дня народження пропорційна часу до цього дня народження. Вірно і зворотне твердження: якщо ймовірність смерті до чергового дня народження пропорційна часу до цього дня народження (тобто ${}_{1-t} q_{n+t} = (1-t) \cdot q_n$), то для виду функції виживання для дробових моментів часу (між двома сусідніми цілими) вірно припущення Балдуччі.

Приклад виконання лабораторної роботи

Завдання 2.1. Використовуючи таблицю смертності, обчислити ймовірність для тридцятирічного чоловіка не дожити до 60 років.

Розв’язок. Ймовірність для людини віку x років померти протягом найближчих t років дорівнює:

$${}_t q_x = \frac{l_x - l_{x+t}}{l_x}.$$

Тоді шукана ймовірність:

$${}_{30} q_{30} = \frac{l_{30} - l_{60}}{l_{30}} = \frac{91419 - 50246}{91419} \approx 0,45038.$$

Для розрахунків слід використовувати таблиці смертності (Додаток В).

Завдання 2.2. Розглянемо сімейну пару, в якій дружині 30 років, а чоловікові 37 років. Яка ймовірність того, що вони проживуть ще принаймні 30 років?

Розв’язок. Шукана ймовірність являє собою добуток ймовірностей подій “дружина проживе принаймні 30 років” і “чоловік проживе принаймні 30 років”. Тоді:

$${}_{30} p_{30}^{\acute{c}} \cdot {}_{30} p_{37}^{\div} = \frac{l_{60}^{\acute{c}}}{l_{30}^{\acute{c}}} \cdot \frac{l_{67}^{\div}}{l_{37}^{\div}} = \frac{80460}{96253} \cdot \frac{34501}{86197} = 0,335.$$

Завдання 2.3. Функція виживання задана формулою $s(x)=\sqrt{1-\frac{x}{100}}$, $0\le x\le 100$. Знайти:

1). інтенсивність смертності у віці 30 років;

2) ймовірність того, що 40-річна людина помре у віці від 60 до 65 років.

Розв'язок. 1. Інтенсивність смертності дорівнює:

$$\mu_x=-\frac{s'(x)}{s(x)}.$$

Тоді:

$$\mu_x=-\frac{s'(x)}{s(x)}=-\frac{1}{2\sqrt{1-\frac{x}{100}}}\cdot(-\frac{1}{100})\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{100}}}=\frac{1}{2\cdot(100-x)};$$

$$\mu_{30}=\frac{1}{2\cdot(100-30)}\approx 0,00714.$$

2. Ймовірність того, що людина у віці x років проживе ще t років, але помре протягом u наступних років, дорівнює:

$$_{t|u}q_x=\frac{s(x+t)-s(x+t+u)}{s(x)}.$$

Тоді шукана ймовірність дорівнює:

$$_{20|5}q_{40}=\frac{s(60)-s(65)}{s(40)}=\frac{\sqrt{1-\frac{60}{100}}\cdot\sqrt{1-\frac{65}{100}}}{\sqrt{1-\frac{40}{100}}}\approx 0,053.$$

Задача 2.4. Інтенсивність смертності має вид $\mu_x=1-\cos\frac{\pi}{100}x$. Знайти функцію виживання $s(x)$.

Розв'язок. Функція виживання через інтенсивність смертності визначається за формулою:

$$s(x)=\exp(-\int_0^x\mu_u du).$$

Тоді:

$$s(x)=\exp(-\int_0^x(1-\cos\frac{\pi}{100}u)du)=\exp(-u+\frac{100}{\pi}\sin\frac{\pi}{100}u\Big|_0^x=\exp(-x+\frac{100}{\pi}\text{in}\frac{\pi}{100}x).$$

Задача 2.5. Крива смертей має вигляд $f(x)=A\cdot e^{-\frac{x}{2}}$. Знайти:

1) функцію виживання $s(x)$;

2) дисперсію часу життя DT.

Розв'язок.1. Знайдемо невідомий коефіцієнт A з умови $\int_0^\infty f(x)dx=1$:

$$\int_0^\infty f(x)dx=A\int_0^\infty e^{-\frac{x}{2}}dx=-2\cdot A\cdot e^{-\frac{x}{2}}\Big|_0^\infty=2\cdot A\Rightarrow A=\frac{1}{2}.$$

Функція виживання:

$$s(x)=\int_x^\infty f(u)du=\int_x^\infty\frac{1}{2}e^{-\frac{u}{2}}du=-e^{-\frac{u}{2}}\Big|_x^\infty=e^{-\frac{x}{2}}.$$

2. Дисперсія часу життя обчислюється за формулою:

$$DT = ET^2 - (ET)^2 .$$

$$ET = \int_0^\infty xf(x)dx = \int_0^\infty s(x)dx = \int_0^\infty e^{-\frac{x}{2}}dx = -2 \cdot e^{-\frac{x}{2}}\Big|_0^\infty = 2 .$$

$$ET^2 = \int_0^\infty x^2 f(x)dx = 2\int_0^\infty xs(x)dx = 2\int_0^\infty x \cdot e^{-\frac{x}{2}}dx = \text{(інтегруємо по частинах)=}$$

$$= -4 \cdot x \cdot e^{-\frac{x}{2}}\Big|_0^\infty + 4\int_0^\infty e^{-\frac{x}{2}}dx = -8 \cdot e^{-\frac{x}{2}}\Big|_0^\infty = 8$$

$$DT = ET^2 - (ET)^2 = 8 - 2^2 = 4 .$$

Задача 2.6. Знайти ймовірність того, що 50-річний чоловік проживе ще півроку після свого дня народження при припущенні:

1. рівномірного розподілу смертей;

2 припущенні Балдуччі.

Розв'язок. 1. У припущенні рівномірного розподілу смертей шукана ймовірність дорівнює:

$$_{1/2}p_{50} = \frac{s(50,5)}{s(50)} = \frac{0,5 \cdot s(50) + 0,5 \cdot s(51)}{s(50)} = \frac{l_{50} + l_{51}}{2 \cdot l_{50}} .$$

Використовуючи дані таблиці смертності, отримаємо:

$$_{1/2}p_{50} = \frac{70354 + 68353}{2 \cdot 70354} \approx 0,98578 .$$

2. У припущенні Балдуччі шукана ймовірність дорівнює:

$$_{1/2}p_{50} = \frac{s(50,5)}{s(50)} = \frac{s(51)}{(p_{50} + 0,5 \cdot q_{50}) \cdot s(50)} = \frac{p_{50}}{(p_{50} + 0,5 \cdot q_{50})} = \frac{1 - q_{50}}{1 - 0,5 \cdot q_{50}} .$$

Використовуючи дані таблиці смертності, отримаємо:

$$_{1/2}p_{50} = \frac{s(50,5)}{s(50)} = \frac{1 - 0,028442}{1 - 0,5 \cdot 0,028442} \approx 0,98557.$$

Завдання до лабораторної роботи

1. Використовуючи таблицю смертності, обчислити:

а) ймовірність того, що 20-річна жінка доживе до 70 років;

б) ймовірність того, що 25-річний чоловік помре у віці від 40 до 45 років;

в) ймовірність того, що 25-річний чоловік не помре у віці від 40 до 45 років;

г) ймовірність того, що 35-річний чоловік помре у віці до 50 років.

2. Для двох чоловіків у віці 30 і 40 років та 35-річної жінки знайти ймовірність того, що 30-річний чоловік і жінка, проживши 20 років, помруть протягом наступних 10 років, а 40-річний чоловік не помре протягом тих же 10 років.

3. 30% людей з числа умираючих у віці від 25 до 75 років вмирають, не досягнувши 50 років. Ймовірність того, що 25-річна людина помре, не досягнувши 50 років, дорівнює 15%. Знайти $_{25}p_{50}$.

4. Використовуючи дані таблиці смертності, і припускаючи рівномірний розподіл смертей протягом року знайти:

а) ймовірність того, що 30-річний чоловік проживе 10 років, але помре протягом наступних трьох місяців;

б). ймовірність того, що жінка після виходу на пенсію (55 років) помре протягом двох місяців.

5. Крива смертей має вигляд $f(x) = A \cdot e^{-\frac{x}{3}}$. Знайти:

а) функцію виживання $s(x)$;

б) дисперсію часу життя DT.

6. Крива смертей має вигляд $f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{(1+x)^3}, 0 \le x < \infty, \\ 0, x < 0. \end{cases}$ Знайти функцію виживання $s(x)$.

7. Страхова компанія заключила 100000 договорів страхування життя. Інтенсивність смертності задана формулою $\mu_x = 0,001x$. Знайти середню кількість застрахованих осіб, що дожили до 50 років.

8. Функція виживання задана формулою $s(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$. Знайти ймовірність смерті людини у віці $35 + N$ років (N – номер варіанта студента) протягом найближчих 10 років.

9. Час життя деякої конкретної людини у віці $20 + N$ років (N – номер варіанта студента) описується законом де Муавра з граничним віком $\omega = 100$ років. Знайти ймовірність того, що ця людина проживе ще принаймні 25 років.

10. Функція виживання задана формулою $s(x) = e^{-x^2}$. Знайти ймовірність того, що людина у віці $30 + N$ років (N – номер варіанта студента) проживе ще принаймні 20 років.

Питання для самоконтролю

1. Назвіть основні властивості функції виживання.
2. Наведіть визначення кривої смертей.
3. Наведіть визначення інтенсивності смертності.
4. Назвіть основні макрохарактеристики тривалості життя.
5. Сформулюйте закон смертності де Муавра.
6. Сформулюйте закон смертності Гомпертца.
7. Сформулюйте закон смертності Мейкхама.
8. Сформулюйте закон смертності Вейбулла.
9. Назвіть основні характеристики таблиць тривалості життя.
10. Поясніть відмінності інтерполяції функції виживання лінійними функціями від припущення Балдуччі.

Лабораторна робота № 3
Основи тарифних розрахунків з ризикових видів страхування

Мета: отримати уявлення про базові поняття теорії страхування життя (страхування життя, страхування на чисте дожиття, різні види рент); вивчити методи розрахунку актуарної сучасної вартості різних видів страхування.

Завдання: навчитися розраховувати актуарну сучасну вартість майбутнього страхового відшкодування та величину внесків.

Короткі теоретичні відомості з теми

Страхування життя зазвичай здійснюється в двох формах: страхування ***сум (капіталу)*** і ***страхування рент (ануїтетів)***. У першому випадку при настанні страхової події (смерті або дожиття) виплачується одноразово певна сума грошей, у другому випадку – страховик проводить регулярні виплати протягом певного періоду часу або довічно. У класичному страхуванні життя мають місце тільки два страхових події: дожиття до певного строку і смерть в період дії договору.

Найбільш простим варіантом є ***страхування на чисте дожиття***, яке полягає у страхуванні певної суми грошей на певний термін. У разі смерті страхувальника в період дії договору страхова сума не виплачується, і внески не повертаються.

Визначимо поточну вартість страхових виплат на момент укладання договору страхування. Нехай група страхувальників чисельністю l_x у віці x уклала зі страховиком договір страхування на дожиття терміном на n років. Ті, які дожили до закінчення періоду страхування повинні отримати страхову суму S. Очевидно, що сумарна виплата, яку повинен здійснити страховик після закінчення періоду договору, дорівнює числу тих, які дожили до віку, помноженого на страхову суму: $v^n \cdot l_{x+n} \cdot S$, де v – коефіцієнт дисконтування, i – річна процентна ставка, або річна норма прибутковості. У розрахунку на кожного страхувальника, який уклав договір, це становить величину:

$$P = \frac{v^n \cdot l_{x+n} \cdot S}{l_x}. \qquad (3.1)$$

Таким чином, отримаємо величину одноразового внеску, який повинен заплатити кожен страхувальник при укладенні договору.

Цей же результат можна отримати іншим шляхом, розраховуючи накопичену вартість фонду, сформованого внесками страхувальників у момент укладання договору. Якщо кожен страхувальник у віці x вніс внесок P, то первісна вартість фонду дорівнює $P \cdot l_x$. Множник нарощення за n років дорівнює $(1+x)^n$. До моменту закінчення договору накопичена вартість цього фонду складе $P \cdot l_x \cdot (1+x)^n$. Прирівнюючи цю величину до суми страхових виплат $S \cdot l_{x+n}$, отримаємо формулу (3.1).

Якщо порівняти формулу (3.1) з формулою $S = P \cdot (1+i)^n$ (приріст початкової суми при безперервній капіталізації відсотків), то видно, що вона відрізняється наявністю множника ${}_n p_x$ – ймовірністю дожиття до віку $x+n$ особи, застрахованої у віці x. Ця величина завжди менше одиниці, тому нетто-внесок кожного застрахованого буде менше поточної вартості одиничної страхової суми. Причина цього полягає в тому, що частина застрахованих, які сплатили внески, не доживає до кінця терміну страхування, і їх внески перерозподіляються між тими, що залишились у живих. З урахуванням цієї обставини внесок кожного з них зменшується на відповідну величину. Величину в правій частині формули (3.1) називають ***актуарною поточною вартістю*** страхової суми S або ***очікуваною поточною вартістю***.

Оскільки динаміка приросту капіталу і демографічні процеси ніяк не залежать від величини страхової суми, в актуарній математиці прийнято проводити всі розрахунки для страхової суми, яка дорівнює одиниці. Величину страхового внеску з одиниці страхової суми називають ***тарифною ставкою*** або ***тарифом***. Для будь-якої конкретної страхової суми величину страхового внеску легко отримати, множачи тарифну ставку на цю суму.

Для забезпечення єдиного підходу до вирішення актуарних задач зі страхування життя у 1898 році на другому Міжнародному конгресі актуаріїв в Лондоні були прийняті єдині актуарні позначення. Для позначення різного роду одноразових платежів використовується заголовна літера A, для регулярних періодичних платежів – мала літера a. При страхуванні на чисте дожиття очікувана поточна вартість страхових виплат у розрахунку на одного страхувальника зі страхової суми, яка дорівнює одиниці, позначається наступним чином:

$$A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} = v^n \frac{l_{x+n}}{l_x} = v^n \, {}_n p_x . \tag{3.2}$$

Формула (3.2) визначає очікувану поточну вартість одиничної суми. Ця величина має властивість:

$$A_{x:\overset{1}{\overline{n+m|}}} = A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} \cdot A_{x+n:\overset{1}{\overline{m|}}} .$$

Тобто, актуарне дисконтування на строк $n+m$ років від віку $x+n+m$ до віку x еквівалентно послідовному актуарному дисконтуванню спочатку на m років від віку $x+n+m$ до віку $x+m$, а потім ще на n років до віку лет x.

Для спрощення актуарних розрахунків часто використовують так звані комутаційні функції, для яких складені таблиці (Додаток Г). Функція, що використовується в страхуванні на дожиття:

$$D_x = v^x l_x . \tag{3.3}$$

Сенс формули (3.3) – якщо при народженні групи дітей чисельністю l_0 їх страхують на дожиття з умовою виплати одиничної страхової суми по досягненню віку x, то формула (3.3) дає очікувану поточну вартість суми страхових виплат, тобто сумарну страхову премію. За допомогою комутаційної функції формулу (3.3) можна представити у вигляді:

$$A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} = \frac{D_{x+n}}{D_x} . \tag{3.4}$$

У багатьох випадках більш прийнятним для страхувальників є не отримання одноразової виплати, а регулярний дохід протягом певного періоду або довічно. Регулярні виплати через рівні відрізки часу називають ***страховою рентою*** або ***ануїтетом***. Часто термін "ануїтет" відносять тільки до послідовності платежів з обмеженим терміном. Страхова рента відрізняється від звичайної фінансової ренти тим, що виплачується тільки за умови, що її одержувач живий, тобто є умовною рентою.

Найбільш поширеним видом страхової ренти є ***звичайна довічна рента***, що виплачується в кінці кожного року дожиття протягом всього життя застрахованого. Так як платежі здійснюються в кінці кожного часового періоду, то звичайну ренту називають ще рентою постнумерандо. Починаючи з деякого моменту $t_0 = 0$ людина раз на рік в кінці року починає отримувати певну суму (яку зазвичай приймають в якості умовної грошової одиниці). Виплати проводяться тільки під час життя людини.

Очікувана поточна вартість довічної ренти з одиничними виплатами в кінці кожного року для страхувальника у віці x дорівнює величині одноразового внеску, який повинен заплатити кожен страхувальник при укладанні договору. Внески за страховою рентою збираються з усіх, виплати ж здійснюються тільки тим, хто дожили до строків її виплати, на це показує множник ${}_k p_x$. Оскільки внески померлих перерозподіляються на користь тих, хто залишилися в живих, то при рівній величині виплат вартість страхової ренти завжди нижче вартості фінансової ренти.

Очікувана поточна вартість виплат рент дорівнює сумі очікуваних поточних вартостей виплат за відповідними контрактами на дожиття:

$$a_x = \sum_{k=1}^{\omega-x} A_{x:\overline{k|}}^{\;1} = \sum_{k=1}^{\omega-x} v^k \frac{l_{x+k}}{l_x} = \sum_{k=1}^{\omega-x} v^k \, {}_k p_x \, . \tag{3.5}$$

Поряд із звичайною рентою часто використовується ***приведена рента*** або пренумерандо, коли платежі здійснюються на початку кожного часового періоду. Починаючи з деякого моменту $t_0 = 0$ людина раз на рік починає отримувати певну суму (яку зазвичай приймають в якості умовної грошової одиниці). Виплати проводяться тільки під час життя людини.

Очікувана поточна вартість ренти пренумерандо обчислюється так само, як і для ренти постнумерандо:

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\omega-x} A_{x:\overline{k|}}^{\;1} = \sum_{k=0}^{\omega-x} v^k \frac{l_{x+k}}{l_x} = \sum_{k=0}^{\omega-x} v^k \, {}_k p_x \, . \tag{3.6}$$

Приведені ренти широко використовуються при розрахунку страхових внесків, що сплачуються в розстрочку. Порівнюючи формули (3.5) і (3.6) бачимо:

$$\ddot{a}_x = a_x + 1 \tag{3.7}$$

Для спрощення актуарних розрахунків зі страхування ренти використовують наступну комутаційну функцію:

$$N_x = \sum_{k=0}^{\omega-x} D_{x+k} = \sum_{t=x}^{\omega} D_t \, . \tag{3.8}$$

Сенс цієї функції наступний: якщо при народженні групи дітей чисельністю l_0 укладається договір страхування з умовою довічної виплати ренти розміром в одиницю на початку кожного року починаючи з віку x, то формула (3.8) дає поточну вартість страхових виплат або сумарну величину одноразової страхового внеску. За допомогою комутаційної функції формули (3.5) і (3.6) приймуть вигляд:

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x}, \tag{3.9}$$

$$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}. \tag{3.10}$$

Якщо виплата ренти обмежена певним строком, наприклад років, то рента називається ***терміновою***.

Нехай $t_0 = 0$ – поточний момент часу, а вік людини, якій виплачується рента – x років. Звичайна термінова рента визначається як серія виплат одиничної суми, здійснених раз на рік в кінці року довічно, починаючи з моменту $t = 1$, але не більше, ніж n років.

Вартість звичайної термінової ренти:

$$a_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n} v^k \frac{l_{x+k}}{l_x} = a_x - A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1} \cdot a_{x+n} = \frac{N_{x+1} - N_{x+1+n}}{D_x}. \tag{3.11}$$

Приведена термінова рента визначається як серія виплат одиничної суми, здійснених раз на рік довічно, починаючи з моменту $t_0 = 0$, але не більше, ніж n років. Вартість приведеної термінової ренти:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k \frac{l_{x+k}}{l_x} = \ddot{a}_x - A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1} \cdot \ddot{a}_{x+n} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}. \tag{3.12}$$

Розглянуті вище ренти називаються ***негайними***, так як термін їх дії починається відразу після укладення контракту. Термін дії ***відкладених*** (або ***відстрочених***) рент запізнюється щодо цього моменту на період відстрочки.

Нехай $t_0 = 0$ – поточний момент часу, а вік людини, якій виплачується рента – x років. Відкладена на m років звичайна довічна рента визначається як серія виплат одиничної суми, здійснених раз на рік, починаючи з моменту $t = m+1$, до тих пір, поки людина жива. Однак якщо людина помре до моменту $m+1$, то жодної виплати не відбувається. Вартість відкладеної на m років довічної ренти постнумерандо:

$$_{m|}a_x = \sum_{k=m+1}^{\omega-x} v^k \frac{l_{x+k}}{l_x} = v^m \frac{l_{x+m}}{l_x} \cdot a_{x+m} = A_{x:\overline{m}|}^{\;\;1} \cdot a_{x+m} = \frac{N_{x+m+1}}{D_x}. \tag{3.13}$$

Вартість відкладеної довічної ренти пренумерандо:

$$_{m|}\ddot{a}_x = \sum_{k=m}^{\omega-x} v^k \frac{l_{x+k}}{l_x} = v^m \frac{l_{x+m}}{l_x} \cdot a_{x+m} = A_{x:\overline{m}|}^{\;\;1} \cdot a_{x+m} = \frac{N_{x+m}}{D_x}. \tag{3.14}$$

Аналогічно визначаються очікувані вартості для відкладених термінових рент.

Відкладена термінова рента постнумерандо:

$$_{m|}a_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=m+1}^{m+n} v^k \frac{l_{x+k}}{l_x} = v^m \frac{l_{x+m}}{l_x} \cdot a_{x+m:\overline{n}|} = A_{x:\overline{m}|}^{\;\;1} \cdot a_{x+m:\overline{n}|} = \frac{N_{x+m+1} - N_{x+m+n+1}}{D_x}. \tag{3.15}$$

Відкладена термінова рента пренумерандо:

$$_{m|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=m}^{m+n-1} v^k \frac{l_{x+k}}{l_x} = v^m \frac{l_{x+m}}{l_x} \cdot \ddot{a}_{x+m:\overline{n}|} = A_{x:\overline{m}|}^{\;\;1} \cdot \ddot{a}_{x+m:\overline{n}|} = \frac{N_{x+m} - N_{x+m+n}}{D_x}. \tag{3.16}$$

Поряд зі страхуванням на дожиття популярним (і набагато більш дешевим) є ***страхування життя***, коли страхова виплата здійснюється в разі смерті застрахованого. Страхування життя має дві основні форми: а) довічне страхування; б) страхування на термін, коли страхова сума виплачується тільки в тому випадку, якщо застрахований помре, не доживши до терміну закінчення договору.

Нехай l_x осіб віку x уклали договір на довічне страхування. Через рік після укладання договору в живих залишаться тільки l_{x+1} осіб, а $d_x = l_x - l_{x+1}$ помруть протягом року. Будемо вважати для простоти, що страхові виплати здійснюються в кінці року смерті застрахованого. Тоді поточна вартість виплат першого року страхування буде дорівнювати vd_x, другого року – $v^2 d_{x+1}$, третього року – $v^3 d_{x+2}$ і так далі (розрахунки також здійснюються для одиничної суми).

Поточна вартість страхових виплат за всіма договорами становить:

$$A_x l_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} d_{x+k} \,. \tag{3.17}$$

У розрахунку на один договір страхування отримаємо:

$$A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \frac{d_{x+k}}{l_x} \,. \tag{3.18}$$

Формула (3.18) визначає поточну вартість довічного страхування з виплатою в кінці року смерті. Слід відзначити, що внесок виплат за $k+1$ рік страхування у вартість поліса зі страхування життя дорівнює поточній вартості виплат, помноженій на ймовірність померти протягом $(k+1)$-го року, яка в свою чергу дорівнює ймовірності дожити до початку цього року, помноженій на ймовірність смерті протягом року.

При страхуванні життя на строк (n років) очікувана поточна вартість виплат буде:

$$A_{x:\overline{n}|}^{\,1} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \frac{d_{x+k}}{l_x} = A_x - A_{x+n} \frac{D_{x+n}}{D_x} \,. \tag{3.19}$$

Для спрощення розрахунків зі страхування життя вводяться наступні комутаційні функції:

$$C_x = v^{x+1} d_x \,, \tag{3.20}$$

$$M_x = \sum_{k=0}^{\infty} C_{x+k} \,. \tag{3.21}$$

Тоді формули (3.18) і (3.19) можна переписати у такому вигляді:

$$A_x = \frac{M_x}{D_x}, \quad A_{x:\overline{n}|}^{\,1} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}. \tag{3.22}$$

На практиці, як правило, договір страхування передбачає виплату страхової суми відразу після встановлення факту смерті. Тому при обчисленні поточної вартості страхової виплати слід здійснювати дисконтування від моменту смерті, а не від кінця року.

Очікувана поточна вартість страхових виплат, що здійснюються в момент смерті, для довічного страхування ($\overline{A}_x$) дорівнює:

$$\bar{A}_x = \frac{i}{\ln(1+i)} \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \frac{d_{x+k}}{l_x} = \frac{i}{\ln(1+i)} A_x . \qquad (3.23)$$

В актуарній математиці позначення з рискою зверху відносяться до неперервних виплат. У даному випадку страхові виплати відбуваються досить часто, тобто практично безперервно протягом кожного року страхування.

Аналогічним чином для вартості термінового контракту зі страхування життя строком на n років замість формули (3.19) отримуємо:

$$\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} = \frac{i}{\ln s} \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \frac{d_{x+k}}{l_x} = \frac{i}{\ln s} A^1_{x:\overline{n}|}. \qquad (3.24)$$

Якщо виплати ренти відбуваються досить часто, то можна вважати, що процес виплати рент ***безперервний*** (особливо для щотижневих виплат). Поточна вартість безперервної ренти дорівнює:

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = a_{x:\overline{n}|} + \frac{D_x - D_{x+n}}{2D_x} = \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{D_x - D_{x+n}}{2D_x} = \frac{a_{x:\overline{n}|} + \ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{2}. \qquad (3.25)$$

У страховій практиці часто використовують накопичувальні схеми страхування, в яких фіксуються величини не страхових виплат, а сплачуваних внесків. Шукана величина, що підлягає визначенню за допомогою актуарних розрахунків, – ***накопичена величина вкладів***. Причина популярності таких схем полягає в тому, що страхувальники психологічно легше сприймають банківську схему нарощення вкладу, яка дозволяє легко оцінити прибутковість. Крім того, внаслідок постійної зміни процентної ставки, не представляється можливим гарантовано спланувати на термін більше року страхування за класичною схемою з нормою прибутковості, здатною конкурувати з сьогоднішньої прибутковістю банківських вкладів. Застосування схеми з фіксованими внесками дозволяє працювати з плаваючою процентною ставкою, яку можна в кожен момент часу вибрати на досить високому конкурентоспроможному рівні.

Якщо кожен член великої групи чисельністю l_x у віці x внесе до фонду одиничний платіж, то через n років накопичена сума буде дорівнювати $l_x s^n$. У розрахунку на одного, хто дожив до віку $x+n$, буде:

$$s_{x:\overline{n}|} = \frac{l_x s^n}{l_{x+n}} = \frac{1}{A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}} . \qquad (3.26)$$

З формули (3.26) видно, що нарощення суми буде відбуватися більш високими темпами, ніж на банківському вкладі з такою ж процентною ставкою, за рахунок перерозподілу внесків померлих між тими, хто дожив.

Якщо кожен член групи на початку кожного року вносить у фонд одиничну суму (рента пренумерандо), то накопичена через n років сума у розрахунку на одного, хто дожив, буде:

$$\ddot{s}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{l_{x+k} s^{n-k}}{l_{x+n}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{A_{x+k:\overline{n-k}|}^{\ \ \ 1}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D_{x+k}}{D_{x+n}} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_{x+n}} . \qquad (3.27)$$

Якщо внески будуть вноситися в кінці кожного року (рента постнумерандо), то аналогічним чином отримаємо:

$$s_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n} \frac{D_{x+k}}{D_{x+n}} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_{x+n}}. \quad (3.28)$$

Порівнюючи формули (3.27), (3.28) з формулами (3.9) і (3.10) бачимо, що вони пов'язані універсальним співвідношенням:

$$\frac{a_{x:\overline{n}|}}{s_{x:\overline{n}|}} = \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{s}_{x:\overline{n}|}} = A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}. \quad (3.29)$$

Вище була розглянута теорія страхових виплат для різних видів страхування життя і була визначена одноразова вартість страхових виплат на момент укладання договору. Однак довгострокові контракти зі страхування життя оплачуються одноразовим внеском тільки в рідкісних випадках – занадто велика їх вартість. Як правило, страхова премія сплачується в розстрочку – щорічно, щоквартально, щомісячно. Якщо при одноразовій оплаті страхувальник повністю виконує свої зобов'язання на момент укладання договору, то при періодичній сплаті внесків вони виконуються в розстрочку. Очевидно, що від способу сплати страхової премії страхувальником вартість зобов'язань страховика ніяк не залежить.

При розрахунку величини періодично сплачуваних внесків необхідно враховувати як процентний дохід від їх інвестування, так і демографічні фактори (смертність). Останній фактор робить істотний вплив на величину внесків, оскільки далеко не всі страхувальники встигають до настання смерті сплатити всі передбачені контрактом внески. Якщо величина періодично сплачуваних внесків постійна, то сукупність цих внесків являє собою постійну ренту платежів. У зв'язку з тим, що договір страхування набирає чинності тільки після отримання першого внеску, рента страхових платежів завжди є приведеною.

Основа для розрахунку величини страхових внесків – умова рівності зобов'язань страховика і страхувальника на момент укладання договору: очікувана поточна вартість майбутніх страхових виплат повинна дорівнювати очікуваній поточній вартості майбутніх поточних внесків. Якщо договір страхування строком на n років укладено у віці x, очікувана поточна вартість страхових виплат дорівнює A, а невідома величина щорічних страхових внесків дорівнює P, то ця рівність має вигляд:

$$A = P\,\ddot{a}_{x:\overline{n}|}, \quad (3.30)$$

де $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ – очікувана поточна вартість ренти з щорічними платежами одиничної величини.

Звідси щорічний внесок:

$$P = \frac{A}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}. \quad (3.31)$$

Формула (3.31) показує, у скільки разів величина щорічного внеску менше величини одноразового внеску, тому величину $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ часто ще називають ***коефіцієнтом розстрочки***. Якщо зменшення чисельності страхувальників та процентний дохід від внесків дорівнюють нулю ($l = const$, $i = 0$) ,то коефіцієнт розстрочки буде в точності дорівнювати тривалості терміну платежів n.

Часто період сплати страхової премії складає лише частину терміну дії договору страхування. Протягом періоду сплати страхової премії страхувальник зобов'язаний повністю зробити внески, що підлягають сплаті, тобто повністю виконати свої зобов'язання. Термін сплати премій будемо позначати буквою m. Перша премія вноситься на початку першого року страхування, остання – на початку m-ого року. Величина щорічного внеску визначається тоді формулою:

$$P = \frac{A}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}. \qquad (3.32)$$

Період від дати сплати останнього внеску до першої (або єдиної) страхової виплати називають вичікувальним. При страхуванні капіталу на дожиття вичікувальний період триває до закінчення терміну договору страхування. При страхуванні ренти вичікувальний період закінчується з початком періоду виплат ренти.

Розглянемо визначення нетто-премій для різних видів страхування. При страхуванні на чисте дожиття спочатку розглянемо найбільш просту ситуацію, коли вичікувальний період відсутній і сплата страхової премії відбувається протягом всього терміну дії договору страхування. Нехай вік застрахованого x років, термін страхування n років дорівнює періоду сплати премії. У відповідності з формулою (3.31) величина страхового внеску з одиничної страхової суми дорівнює одноразовій вартості страхування, поділеній на відповідний коефіцієнт розстрочки:

$$P_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = \frac{A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}. \qquad (3.33)$$

Період сплати внесків або може збігатися з терміном дії договору, або бути менше нього. В останньому випадку на полісі вказується вік застрахованого, по досягненні якого поліс повинен бути повністю оплачений.

Якщо тривалість періоду сплати страхової премії дорівнює m років, то величина щорічного внеску відповідно до (3.32) дорівнює:

$$P_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = \frac{A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}. \qquad (3.34)$$

Страхування рент є різновидом страхування на дожиття, коли замість одноразової виплати по дожиттю до терміну закінчення договору передбачено ряд регулярних страхових виплат протягом деякого періоду часу або довічно (за умови дожиття до термінів виплати). Тому на додаток до періоду сплати страхової премії і вичікувального періоду, що передбачені при страхуванні на дожиття, тут виділяють також період страхових виплат, протягом якого страховик виконує свої фінансові обов'язки по відношенню до страхувальника.

Розглянемо більш простий випадок, коли вичікувальний період відсутній. Будемо вважати, що період виплат довічної ренти (пенсії) починається після досягнення людиною певного віку p, а договір страхування укладено у віці x і передбачений період сплати внесків протягом $m = p - x$ років. Тоді очікувана поточна вартість цієї відстроченої на m років ренти на момент укладання договору страхування дорівнює:

$$ {}_{m|}\ddot{a}_{x:} = \frac{N_{x+m}}{D_x} = \frac{N_p}{D_x}. \qquad (3.35)$$

Коефіцієнт розстрочки, відповідний заданому періоду сплати страхової премії, дорівнює:

$$\ddot{a}_{x:\overline{m}|} = \frac{N_x - N_{x+m}}{D_x} = \frac{N_x - N_p}{D_x}. \qquad (3.36)$$

Розділивши (3.35) на (3.36), отримаємо:

$$ {}_{m|}P_x = \frac{{}_{m|}\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}} = \frac{N_{x+m}}{N_x - N_{x+m}}. \qquad (3.37)$$

Якщо період сплати внесків менше терміну відстрочки, то величина щорічного внеску визначається за формулою:

$$ {}_{p-x|}P_x = \frac{{}_{p-x|}\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}} = \frac{N_p}{N_x - N_{x+m}}. \qquad (3.38)$$

Для термінової ренти тривалістю n років отримаємо:

$$ {}_{p-x|}P_{x:\overline{n}|} = \frac{{}_{p-x|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}} = \frac{N_p - N_{p+n}}{N_x - N_{x+m}}. \qquad (3.39)$$

На відміну від страхування на дожиття в страхуванні на випадок смерті відсутній вичікувальний період, тобто період, коли страхова премія вже повністю внесена, а обов'язки страховика здійснювати страхові виплати ще не настали. Це пов’язано з тим, що страховим випадком, що зобов’язує зробити виплату, є смерть застрахованого, яка може настати в будь-який момент після укладання договору.

Розглянемо простий випадок довічного страхування, коли внески сплачуються страхувальником, поки він живий (тобто період сплати внесків збігається з терміном страхування), а страхова виплата проводитиметься безпосередньо після смерті. Величина страхового поліса з одиничною страховою сумою дорівнює одноразовій вартості поліса, діленої на відповідний коефіцієнт розстрочки:

$$\overline{P}_x = \frac{\overline{A}_x}{\ddot{a}_x} = \frac{i}{\ln(1+i)} \cdot \frac{M_x}{N_x}. \qquad (3.40)$$

Якщо період сплати внесків при довічному страхуванні на випадок смерті обмежений (до віку p), то коефіцієнт розстрочки:

$$\ddot{a}_{x:\overline{p-x}|} = \frac{N_x - N_p}{D_x}, \qquad (3.41)$$

тоді величина річного внеску з одиничною страхової суми визначається формулою:

$$\overline{P}_x = \frac{\overline{A}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{p-x}|}} = \frac{i}{\ln(1+i)} \cdot \frac{M_x}{N_x - N_p}. \qquad (3.42)$$

Для страхування життя строком на n років маємо:

$$\overline{P}_{x:\overline{n}|} = \frac{\overline{A}^1_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{p-x}|}} = \frac{i}{\ln(1+i)} \cdot \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_p}. \qquad (3.43)$$

Приклад виконання лабораторної роботи

Задача 3.1. Відомо, що кількість осіб у віці 50,51 та 52 роки з початкової групи у 100000 новонароджених відповідно дорівнює $l_{50} = 70354$, $l_{51} = 68353$, $l_{52} = 66246$, ефективна річна процентна ставка $i = 16\%$. Вік людини на момент укладання договору (трирічна тимчасова довічна рента) 50 років. Знайти актуарну сучасну вартість трирічної тимчасової довічної ренти, що виплачується раз на рік на початку року у розмірі 50000 грн.

Розв'язок. Актуарна сучасна вартість тимчасової довічної ренти, що виплачується раз на рік на початку року для суми в одну грошову одиницю дорівнює:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{l_x}(l_x + vl_{x+1} + v^2 l_{x+2} + \ldots + v^{n-1} l_{x+n-1}),$$

де $v = \frac{1}{1+i}$ – коефіцієнт дисконтування.

Тоді шукана величина, позначимо її P, дорівнює $P = 50000 \cdot \ddot{a}_{50:\overline{3}|}$:

$$\ddot{a}_{50:\overline{3}|} = \frac{1}{l_{50}}\left(l_{50} + vl_{51} + v^2 l_{52}\right) = 2,5373194;$$

$$P = 50000 \cdot 2,5373194 = 126866.$$

Задача 3.2. Батьки семирічної дівчинки оформляють договір на оплату вищої освіти дитини, по досягненні нею 18 років. Термін навчання 5 років, вартість 9000 грн. на рік. Ефективна процентна ставка $i = 5\%$. Знайти вартість поліса.

Розв'язок. Вартість поліса дорівнює $P = 9000 \cdot {}_{11|}\ddot{a}_{7:\overline{5}|}$, де ${}_{11|}\ddot{a}_{7:\overline{5}|}$ – актуарна сучасна вартість відкладеної тимчасової довічної ренти, що виплачується раз на рік на початку року для суми в одну грошову одиницю, визначається за формулою (3.16). Комутаційні числа N_x та D_x знаходять за таблицею комутаційних чисел:

$${}_{11|}\ddot{a}_{7:\overline{5}|} = \frac{N_{18} - N_{23}}{D_7} = \frac{772493,4 - 588600,4}{69658,85} = 2,63991;$$

$$P = 9000 \cdot 2,63991 = 23759,2.$$

Задача 3.3. 45-річний чоловік купує за 120000 грн. довічну ренту (пенсію), виплати якої починаються з віку 65 років. Ефективна процентна ставка $i = 5\%$. Знайти величину щорічних виплат.

Розв'язок. Величина щорічних виплат, позначимо її S, дорівнює $S = \dfrac{120000}{{}_{20|}\ddot{a}_{45}}$. В знаменнику ${}_{20|}\ddot{a}_{45}$ – актуарна сучасна вартість відкладеної довічної ренти, що визначається за формулою (3.14). Комутаційні числа N_x та D_x знаходять за таблицею комутаційних чисел:

$$ {}_{20|}\ddot{a}_{45} = \frac{N_{65}}{D_{45}} = \frac{13273,4}{8612,903} = 1,541106407\,; $$

$$ S = \frac{120000}{1,541106407} = 77866\,. $$

Задача 3.4. 50-річний чоловік придбав довічний страховий поліс, за яким у разі його смерті спадкоємці повинні отримати 100000 грн. Ефективна процентна ставка $i = 5\%$. Знайти вартість поліса.

Розв'язок. Вартість поліса, позначимо її P, дорівнює $P = 100000 \cdot \bar{A}_{50}$. $\bar{A}_x$ – очікувана поточна вартість страхових виплат, що здійснюються в момент смерті, для довічного страхування, визначається за формулою (3.23):

$$ \bar{A}_{50} = \frac{0,05}{\ln(1,05)} \cdot \frac{M_{50}}{D_{50}} = \frac{0,05}{\ln(1,05)} \cdot \frac{2888,06}{6135,131} = 0,4824142\,; $$

$$ P = 100000 \cdot 0,4824142 = 48241,42\,. $$

Задача 3.5. 60-річний чоловік придбав довічну ренту з виплатою 4000 грн. в кінці кожного року. Ефективна процентна ставка $i = 5\%$. Знайти вартість поліса.

Розв'язок. Вартість поліса, позначимо її P, дорівнює $P = 4000 \cdot a_{60}$, де a_{60} – актуарна сучасна вартість довічної ренти, що визначається за формулою (3.10). Комутаційні числа N_x та D_x знаходять за таблицею комутаційних чисел:

$$ a_{60} = \frac{N_{61}}{D_{60}} = \frac{21749,14}{2689,946} = 8,0853445\,; $$

$$ P = 4000 \cdot 8,0853445 = 32341,38\,. $$

Задача 3.6. Страхувальник у віці 40 років уклав договір, згідно з яким, починаючи з 65 років, довічно буде виплачуватися пенсія у розмірі 5000 грн. на початку кожного року. Ефективна процентна ставка $i = 5\%$. Знайти величину річних внесків, які будуть сплачуватися страхувальником з 40 до 65 років.

Розв'язок. Шукана величина річних внесків, позначимо її P, дорівнює $P = 5000 \cdot {}_{25|}P_{40}$, де ${}_{25|}P_{40}$ – величина щорічного внеску, розрахована на суму в одну умовну одиницю, що визначається за формулою (3.37):

$$ P = 5000 \cdot \frac{{}_{25|}\ddot{a}_{40}}{\ddot{a}_{40:\overline{25|}}} = 5000 \cdot \frac{N_{65}}{N_{40} - N_{65}} = 5000 \cdot \frac{13273,74}{158412,7 - 13273,74} = 457,3\,. $$

Задача 3.7. 40-річний чоловік купує за 100000 грн. довічну ренту (пенсію), виплати якої починаються з віку 65 років. Ефективна процентна ставка $i = 5\%$. Знайти величину щорічних виплат.

Розв'язок. Шукана величина щорічних виплат дорівнює $\frac{100000}{{}_{25|}\ddot{a}_{40}}$, де ${}_{25|}\ddot{a}_{40}$ – актуарна сучасна вартість довічної відкладеної ренти, що визначається за формулою (3.35):

$${}_{25|}\ddot{a}_{40} = \frac{N_{65}}{D_{40}} = \frac{13273,74}{11838,66} = 1,1212198 .$$

Величина щорічних виплат дорівнює $\frac{100000}{1,1212198} = 89189$.

Задача 3.8. Страхувальник (жінка) у віці 47 років уклав довічний договір страхування з умовою щорічної сплати внесків, поки він живий. Страхова сума складає 15000 грн., ефективна процентна ставка $i = 5\%$. Знайти величину річних внесків.

Розв'язок. Шукана величина річних внесків дорівнює $15000 \cdot \overline{P}_{47}$, де $\overline{P}_{47}$ – величина річного внеску з одиничною страхової суми, що визначається за формулою (3.40):

$$\overline{P}_{47} = \frac{\overline{A}_{47}}{\ddot{a}_{47}} = \frac{0,05}{\ln(1,05)} \cdot \frac{M_{47}}{N_{47}} = \frac{0,05}{\ln(1,05)} \cdot \frac{2661,98}{137652,6} = 0,019817921 .$$

Величина річних внесків тоді дорівнює $15000 \cdot 0,019817921 = 297,3$.

Задача 3.9. Батьки п'ятирічного хлопчика придбали поліс з оплати отримання дитиною вищої освіти по досягненні нею 18 років. Термін навчання 5 років, вартість 11000 грн. на рік. Ефективна процентна ставка $i = 5\%$. Знайти величину щорічних внесків.

Розв'язок. Шукана величина щорічних внесків дорівнює $11000 \cdot {}_{13|}P_{5:\overline{5|}}$, де ${}_{13|}P_{5:\overline{5|}}$ – величина щорічного внеску для відкладеної термінової ренти, що визначається за формулою (3.39):

$${}_{18-5|}P_{5:\overline{5|}} = \frac{{}_{18-5|}\ddot{a}_{5:\overline{5|}}}{\ddot{a}_{5:\overline{18-5|}}} = \frac{N_{18} - N_{23}}{N_5 - N_{18}} = \frac{690374,2 - 509368,8}{1441033 - 690374,2} = 0,24112873 .$$

Тоді величина щорічних внесків дорівнює $11000 \cdot 0,24112873 = 2652,4$.

Завдання до лабораторної роботи

1. 40-річна жінка придбала довічну страхову ренту, що передбачає щорічні виплати у розмірі 50000 грн., починаючи з віку 55 років. Ефективна процентна ставка $i = 5\%$. Знайти вартість поліса.

2. 25-річна жінка купує страхову ренту з щомісячними страховими виплатами в розмірі 500 грн., починаючи з віку 55 років. Вона має намір оплатити вартість поліса за допомогою щорічних премій, що сплачуються на початку кожного року протягом 20 років. Знайти величину щорічних нетто-премій, якщо ефективна процентна ставка $i = 5\%$.

3. 30-річний чоловік придбав поліс довічного страхування у розмірі 200000 грн., з виплатою в кінці року смерті. Вартість поліса він буде оплачувати за допомогою серії платежів на початку кожного року протягом всього свого життя. Знайти розмір щорічних внесків.

4. 55-річний чоловік уклав договір страхування. Знайти актуарну сучасну вартість п'ятирічної тимчасової довічної ренти, що виплачується раз на рік в кінці року в розмірі $1000 \cdot N$ грн. (N – номер варіанта студента). Ефективна річна процентна ставка $i = 15\%$.

5. 37-річний чоловік купує за 10000 грн. довічну ренту (пенсію), виплати якої починаються з віку 65 років. Ефективна процентна ставка $i = 5\%$. Знайти величину щомісячних виплат.

6. 39-річна жінка придбала довічний страховий поліс, за яким у разі її смерті спадкоємці повинні отримати $20000 \cdot N$ грн. (N – номер варіанта студента). Ефективна процентна ставка $i = 5\%$. Знайти вартість поліса.

7. Батьки шестирічної дівчинки придбали поліс з оплати отримання дитиною вищої освіти по досягненні нею 18 років. Термін навчання 5 років, вартість $3000 \cdot N$ грн. на рік (N – номер варіанта студента). Ефективна процентна ставка $i = 5\%$. Знайти величину щомісячних внесків.

8. Страхувальник (чоловік) у віці 51 року уклав договір страхування життя строком на N років (N – номер варіанта студента). Норма прибутковості – 5%. Знайти щорічну нетто-ставку у відсотках (%).

9. Страхувальник (жінка) у віці 45 років уклав договір страхування на дожиття терміном на 10 років (норма прибутковості – 5%, страхова сума – $2000 \cdot N$ грн., N – номер варіанта студента). Знайти величину щорічних внесків.

10. Чоловік у віці 44 років уклав договір змішаного страхування життя строком на 6 років (норма прибутковості – 5%, страхова сума – 60000 грн.). Знайти величину щорічних внесків.

Питання для самоконтролю

1. Наведіть визначення очікуваної поточної вартості виплат при страхуванні на чисте дожиття.
2. Наведіть визначення звичайної і приведеної довічної ренти.
3. Поясніть розрахунок очікуваної поточної вартості звичайної і приведеної довічної ренти.
4. Наведіть визначення термінової ренти.
5. Наведіть визначення очікуваної поточної вартості термінової ренти.
6. Наведіть визначення відкладеної ренти.
7. Наведіть визначення очікуваної поточної вартості відкладеної ренти.
8. Наведіть визначення очікуваної поточної вартості довічного страхування.
9. Що таке комутаційні функції в актуарній математиці?
10. Поясніть розрахунок нетто-премії для страхування на чисте дожиття.
11. Поясніть розрахунок нетто-премії для страхування рент.
12. Поясніть розрахунок нетто-премії для страхування життя.
13. Наведіть визначення змішаного (комбінованого) страхування життя.

Лабораторна робота № 4
Страхові резерви та перестрахування

Мета: отримати уявлення про принцип розрахунку ймовірності розорення (не розорення) страхової компанії та про перестрахування.

Завдання: навчитися оцінювати ймовірність розорення (не розорення) страхової компанії, вирішувати задачі про оптимальний вибір межі утримання у разі укладення договорів перестрахування.

Короткі теоретичні відомості з теми

Для страхової компанії цікавим є не конкретний страховий випадок і пов'язана з ним виплата страхової суми, а загальна сума виплат за всіма договорами. Якщо ця сума менша або дорівнює, ніж активи компанії, то компанія успішно виконає свої зобов’язання. Якщо ж ні, то компанія не зможе виплатити всі страхові відшкодування; в цьому випадку ми говоримо про розорення компанії. Таким чином, ймовірність розорення компанії це додаткова функція розподілу сумарного збитку. Відповідно функція розподілу сумарного збитку – це ймовірність не розорення. Розрахунок цих ймовірностей являє фундаментальний інтерес для компанії та слугує основою для прийняття найважливіших рішень.

Питання про те, яку плату страхова компанія повинна призначати за те, що приймає на себе той чи інший ризик, вкрай складне. При його вирішенні враховується велике число різнорідних факторів: ймовірність настання страхового випадку, його очікувана величина і можливі флуктуації, зв'язок з іншими ризиками, які вже прийняті компанією, організаційні витрати компанії на ведення справи, співвідношення між попитом і пропозицією за даним видом ризиків на ринку страхових послуг тощо. Проте основним зазвичай є принцип еквівалентності фінансових зобов'язань страхової компанії та застрахованого. У розглянутих раніше найпростіших видах страхування, коли плата за страховку повністю вноситься в момент укладання договору, зобов'язання застрахованого виражається в сплаті премії p. Зобов'язання компанії полягає в оплаті збитку ξ. Однак ми не можемо висловити принцип еквівалентності зобов'язань рівністю $p = \xi$, оскільки премія p – детермінована величина, а збиток ξ – випадкова.

Щоб вирішити цю проблему, спробуємо замінити випадкову величину ξ її середнім значенням $E\xi$, тобто призначимо в якості плати за страховку очікувану величину збитку.

Оцінимо тепер наслідки цього рішення для можливості виконання компанією своїх зобов'язань, тобто підрахуємо ймовірність руйнування (в рамках розглянутої моделі). Нехай, N – число договорів в портфелі компанії, випадкові величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$ виражають збитки за цими договорами, $S = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_N$ – величина сумарного збитку. Оскільки ми вирішили в якості плати p_i за i-й договір взяти $E\xi_i$, резервний фонд компанії дорівнює:

$$u = \sum_{i=1}^{N} E\xi_i = E(\sum_{i=1}^{N} \xi_i) = ES\,. \tag{4.1}$$

Тому ймовірність руйнування є:

$$R = P(S > ES). \quad (4.2)$$

Застосовуючи гаусівське наближення, ми отримаємо:

$$R = P(S - ES > 0) = P(\frac{S - ES}{\sqrt{DS}} > 0) \approx 1 - \Phi(0) = \frac{1}{2}. \quad (4.3)$$

Звичайно, це абсолютно неприйнятна величина ймовірності розорення. Це й не дивно, тому що рівність $p = E\xi$ насправді не виражає еквівалентність зобов'язань компанії та застрахованого. Хоча в середньому і компанія, і застрахований платять одну і ту ж суму, компанія має ризик, пов'язаний з тим, що в силу випадкових обставин їй, може бути, доведеться виплатити набагато більшу суму, ніж $E\xi$. Застрахований же такого ризику не має. Тому було б справедливо, щоб плата за страховку включала деяку надбавку l, яка служила б еквівалентом випадковості, що впливає на компанію. Отже, призначимо в якості плати за i-ту страховку суму $p_i = E\xi_i + l_i$, де l_i – деяка додаткова сума. Тепер резерви компанії дорівнюють:

$$u = \sum_{i=1}^{N} (E\xi_i + l_i) = ES + l, \quad (4.4)$$

де $l = \sum_{i=1}^{N} l_i$.

Відповідно ймовірність розорення компанії дорівнює:

$$R = P(S > u) = P(S > ES + l). \quad (4.5)$$

Застосовуючи гаусівське наближення, отримаємо:

$$R = P(\frac{S - ES}{\sqrt{DS}} > \frac{l}{\sqrt{DS}}) \approx 1 - \Phi(\frac{l}{\sqrt{DS}}). \quad (4.6)$$

Якщо ймовірність не розорення компанії дорівнює α (α – деяке число, близьке до 1), то $\frac{l}{\sqrt{DS}}$ повинно дорівнювати квантилі x_α, тобто:

$$l = x_\alpha \cdot \sqrt{DS}. \quad (4.7)$$

Оскільки DS описує величину випадкових флуктуацій сумарного збитку навколо його середнього значення, додаткова сума дійсно в деякому розумінні є компенсацією страхової компанії за те, що вона взяла на себе небезпеку, пов'язану з непередбачуваністю збитків.

Рівняння (4.7) дає величину загальної додаткової суми l. Тепер ми повинні вирішити, як справедливим чином розділити її між усіма договорами.

Зазвичай суму l ділять пропорційно очікуваному збитку $E\xi_i$, тобто вважають:

$$l_i = k \cdot E\xi_i. \quad (4.8)$$

Оскільки відомі $\sum_{i=1}^{N} l_i = l$ і $\sum_{i=1}^{N} \xi_i = ES$, коефіцієнт пропорціональності k задається формулою:

$$k = x_\alpha \cdot \frac{\sqrt{DS}}{ES}. \quad (4.9)$$

Відповідно для премії ми маємо:

$$p_i = (1+k)\cdot E\xi_i = E\xi_i \cdot (1 + x_\alpha \cdot \frac{\sqrt{DS}}{ES}). \qquad (4.10)$$

Основний внесок у величину p_i звичайно дає $p_0 = E\xi_i$, яку ми раніше назвали нетто-премією. Додаткову суму $l_i = k \cdot E\xi_i$ називають страховою (або захисної) надбавкою, а $\theta_i = \frac{l_i}{EX_i}$ – відносної страхової надбавкою. У розглянутому випадку відносна страхова надбавка одна і та ж для всіх договорів. Однак призначення індивідуальних премій за даним правилом не зовсім справедливо по відношенню до договорів з малими флуктуаціями можливого збитку, тобто з малими дисперсіями $D\xi_i$ (якщо нетто-премія $E\xi_i$ велика). Ці договори оплачують випадковості, пов'язані з іншими договорами. Маючи на увазі те, що сумарна надбавка l пов'язана саме з сумарною дисперсією $DS = \sum_{i=1}^{N} D\xi_i$, було б справедливо ділити l на частини l_i, пропорційні дисперсіям $D\xi_i$ або середнім квадратичним відхиленням $\sqrt{D\xi_i}$. Підсумовуючи за $i = 1, 2, \ldots, N$ маємо два випадки (табл. 4.1).

Таблиця 4.1

Два випадки розрахунку страхової премії

Показник	1 випадок	2 випадок
Сумарна надбавка	$l_i = k \cdot D\xi_i$	$l_i = k \cdot \sqrt{D\xi_i}$
Коефіцієнт пропорціональності	$k = \frac{x_\alpha}{\sqrt{DS}}$	$k = x_\alpha \cdot \frac{\sqrt{DS}}{\sum_{i=1}^{N}\sqrt{D\xi_i}}$
Індивідуальна премія	$p_i = E\xi_i + \frac{x_\alpha}{\sqrt{DS}} \cdot E\xi_i$	$p_i = E\xi_i + x_\alpha \cdot \frac{\sqrt{DS}}{\sum_{i=1}^{N}\sqrt{D\xi_i}} \cdot \sqrt{D\xi_i}$
Страхова надбавка	$\theta_i = \frac{x_\alpha}{\sqrt{DS}} \cdot \frac{D\xi_i}{E\xi_i}$	$\theta_i = x_\alpha \cdot \frac{\sqrt{DS}}{\sum_{i=1}^{N}\sqrt{D\xi_i}} \cdot \frac{\sqrt{D\xi_i}}{E\xi_i}$

Розглянемо процес перестрахування. Фізичні та юридичні особи укладають договір страхування зі страховими компаніями для того, щоб позбавитися від фінансових втрат, пов'язаних з невизначеністю настання тих чи інших випадкових подій. До укладення договору страхування клієнт мав деякий ризик, який міг призвести до випадкових втрат X (а міг і не привести до них). Після укладення договору страхування, клієнт позбавився від цього ризику (за невипадкову плату $p = (1+\theta)\cdot EX$). Іншими словами, клієнт іде на невеликі детерміновані витрати з тим, щоб позбутися від випадкових втрат, які хоч і малоймовірні, але можуть бути катастрофічно великими для нього. Однак, сам ризик не зник – його прийняла на себе страхова компанія. Інша справа, що, маючи великий портфель договорів, страхова компанія забезпечує собі вкрай малу ймовірність розорення. Тим не менше, можливі дуже великі позови, які призведуть до розорення компанії. З цієї точки зору страхова компанія потрапляє в ту ж ситуацію, в якій спочатку (до укладення договорів страхування) знаходилися її клієнти – існує небезпека фінансових втрат, пов'язана з невизначеністю пред'явлення дуже великих позовів.

Для вирішення цієї проблеми страхові компанії вдаються до засобу – страхуванню свого ризику в іншої компанії. Такий вид страхування називається ***перестрахуванням***.

Компанія, яка безпосередньо укладає договори страхування і яка бажає перестрахувати частину свого ризику, називається передавальною компанією, а компанія, яка страхує вихідну страхову компанію, називається перестраховою компанією.

При перестрахуванні можуть перестраховуватися як надмірно великі індивідуальні позови, так і сумарний позов за певний період, припустимо, один рік.

Поділ договорів перестрахування на різні типи пов'язаний з видом поділу відповідальності між передавальною і страхувальною компанією.

Якщо передавальна компанія самостійно задовольняє деяку частку α, ($0 \le \alpha \le 1$) від кожного позову, а перестрахувальна компанія – частку, що залишилася $1-\alpha$, то такий вид перестрахування називається пропорційним. Параметр α називається межею утримання.

Припустимо тепер, що передавальна компанія самостійно оплачує всі позови аж до деякої межі r грошових одиниць, а для позовів, що перевищують r, оплачує суму r самостійно і пред'являє позов на суму, що залишилася до перестрахувальної компанії. Якщо це правило застосовується до кожного індивідуального позову, то такий вид перестрахування називається перестрахуванням перевищення втрат. Параметр r називається межею утримання. Якщо ж це правило застосовується до загального позову за деякий період, то такий вид перестрахування називається перестрахуванням, зупиняючим втрати. Параметр r в цьому випадку називається франшизою.

Перестрахувальна компанія приймає на себе ризик від передавальної компанії за певну плату. По суті, для перестрахувальної компанії операція виглядає як звичайне страхування. Тому плата за перестрахування встановлюється на тих же принципах, що і премії для звичайного страхування, тобто плата за перестрахування ризику дорівнює $(1+\theta_1)\cdot Eh(X)$, де $Eh(X)$ – очікуваний позов до перестрахувальної компанії, а θ_1 – відносна страхова надбавка, встановлена компанією, що страхує.

Ми будемо розглядати договір перестрахування тільки з точки зору передавальної компанії. Тому будемо вважати, що відносна страхова надбавка, встановлена перестрахувальною компанією фіксована. Основна проблема буде полягати у виборі договору перестрахування і, перш за все, у виборі основного числового параметра договору – межі утримання, оптимальної з точки зору передавальної компанії.

Модель індивідуального ризику – це найпростіша модель функціонування страхової компанії, призначена для розрахунку ймовірності розорення. Вона базується на наступних припущеннях:

– аналізується фіксований відносно короткий (так що можна знехтувати інфляцією і не враховувати дохід від інвестування) відрізок часу – зазвичай це один рік;

– число договорів страхування N – фіксоване і невипадкове;

– плата за страховку повністю вноситься на початку періоду, що аналізується; ніяких надходжень протягом цього періоду немає;

– ми спостерігаємо кожен окремий договір страхування і знаємо статистичні властивості пов'язаного з ним індивідуального позову X (оскільки не всі договори призводять до позову).

В рамках цієї моделі розорення визначається сумарним позовом $S = X_1 + \ldots + X_N$ до страхової компанії. Якщо цей сумарний позов більше, ніж резерви компанії u, то компанія не зможе виконати свої зобов'язання і розориться. Тому ймовірність розорення компанії дорівнює $P(X_1 + \ldots + X_N > u)$. Іншими словами, ймовірність розорення – це додаткова функція розподілу величини сумарного позову до компанії за розглянутий відрізок часу.

Розглянемо випадок ***пропорційного перестрахування***. Після перестрахування сумарний позов до передавальної компанії, який дорівнював $S = X_1 + \ldots + X_N$, зменшується і стає рівним $\alpha S = \alpha X_1 + \ldots + \alpha X_N$. Однак одночасно зменшується і капітал передавальної компанії. До укладення договору перестрахування він дорівнював $u + (1+\theta) \cdot ES$, де u – початковий фонд, а θ – відносна страхова надбавка. Укладення договору перестрахування призводить до виплати перестрахувальною компанією суми $(1+\theta_1) \cdot (1-\alpha) \cdot ES$, де $(1-\alpha) \cdot ES$ – очікуваний сумарний позов до перестрахувальної компанії, а θ_1 – відносна страхова надбавка, встановлена компанією, що перестраховується. Тому після укладення договору перестрахування резервний фонд компанії дорівнює:

$$u + (1+\theta) \cdot ES - (1+\theta_1) \cdot (1-\alpha) \cdot ES = u + (\theta - \theta_1 + (1+\theta_1) \cdot \alpha) \cdot ES .$$

Відповідно, ймовірність розорення дорівнює:

$$P(\alpha S > u + (\theta - \theta_1 + (1+\theta_1) \cdot \alpha) \cdot ES) = P(S > 1 + \theta_1 + \frac{(\frac{u}{ES} + \theta - \theta_1)}{\alpha} \cdot ES) . \qquad (4.11)$$

Якщо $\theta_1 < \theta + \frac{u}{ES}$, то при зменшенні межі утримання α від 1 (присутність перестрахування) до 0 (повне перестрахування) ймовірність розорення убуває від початкового значення $P(S > (1 + \theta + \frac{u}{ES}) \cdot ES$. Однак, одночасно зменшується й очікуваний дохід передавальної компанії:

$$I = (1+\theta) \cdot ES - (1+\theta_1) \cdot (1-\alpha) \cdot ES - \alpha \cdot ES = (\theta - \theta_1 + \alpha\theta_1) \cdot ES .$$

При цьому в разі $\theta_1 > \theta$ при повному перестрахуванні компанія в дійсності буде мати збиток величиною $(\theta_1 - \theta) \cdot ES$. У цьому випадку, очевидно, параметр

α не може бути менше, ніж $\frac{(\theta_1-\theta)}{\theta_1}$ (при цьому значенні α очікуваний дохід дорівнює 0).

Отже, якщо $\theta_1 < \theta + \frac{u}{ES}$, то за рахунок перестрахування можна зменшити ймовірність розорення (з одночасним зменшенням очікуваного доходу).

Якщо, $\theta_1 > \theta + \frac{u}{ES}$, то при зменшенні межі утримання ймовірність руйнування зростає і тому від перестрахування потрібно відмовитися.

І, нарешті, якщо $\theta_1 = \theta + \frac{u}{ES}$, то ймовірність розорення взагалі не залежить від межі утримання. Однак, оскільки очікуваний дохід убуває разом зі зменшенням межі утримання, в цьому випадку від перестрахування також краще відмовитися.

У разі укладення договору ***перестрахування перевищення втрат***, позов X перетворюється на позов $X^{(r)} = \min(X, r)$ до передавальної компанії і в позов $\max(X-r, 0) = X - X^{(r)}$ до перестрахувальної компанії.

Припустимо, що компанія перестрахувала N однотипних договорів, тобто позови $X_1, \ldots, X_N$ за ними є незалежними і однаково розподіленими випадковими величинами.

Тоді сумарний позов до передавальної компанії, який дорівнював $S = X_1 + \ldots + X_N$, зменшується і стає рівним $S^{(r)} = X_1^{(r)} + \ldots + X_N^{(r)}$. Однак, одночасно зменшується і капітал передавальної компанії. До укладення договору перестрахування він дорівнював (для простоти враховуємо тільки плату за страховку): $Np = N(1+\theta)p_0$ де $p_0 = EX$ – нетто-премія, а θ – відносна страхова надбавка. Укладання договору перестрахування призводить до виплати перестрахувальній компанії суми $N(1+\theta_1)\cdot(EX - EX^{(r)})$, де $(EX - EX^{(r)})$ – очікуваний індивідуальний позов до перестрахувальної компанії, а θ_1 – відносна страхова надбавка, встановлена перестраховою компанією. Тому після укладання договору перестрахування капітал передавальної компанії дорівнює:

$$N(1+\theta)EX - N(1+\theta_1)\cdot(EX - EX^{(r)}) = N(\theta-\theta_1)EX + N(1+\theta_1)EX^{(r)}.$$

Відповідно, ймовірність розорення стає дорівнює:

$$P(S^{(r)} > N(\theta-\theta_1)EX + N(1+\theta_1)EX^{(r)}. \qquad (4.12)$$

Використовуючи гаусівське наближення, можемо записати ймовірність розорення після перестрахування як:

$$P(\frac{S^{(r)} - N\cdot EX^{(r)}}{\sqrt{N\cdot DX^{(r)}}} > \frac{N(\theta-\theta_1)EX + N\theta_1 EX^{(r)}}{\sqrt{N\cdot DX^{(r)}}} \approx 1 - \Phi(\sqrt{N}\frac{(\theta-\theta_1)EX + \theta_1 EX^{(r)}}{\sqrt{DX^{(r)}}}). \qquad (4.13)$$

Зрозуміло, що мінімізація ймовірності розорення означає максимізацію аргументу у функції $\Phi()$. Таким чином, щоб вирішити питання про доцільність перестрахування, і в разі позитивної відповіді вибрати оптимальну межу утримання r, ми повинні вивчити поведінку наступної функції від r:

$$\varphi(r) = \frac{((\theta-\theta_1)EX + \theta_1\cdot E(\min(X,r)))^2}{D(\min(X,r))}$$

і визначити її глобальний максимум при $0 \le r \le \infty$. Відзначимо, що якщо цей максимум досягається при $r = +\infty$, то перестрахування недоцільно; якщо ж при $r = 0$, то потрібно перестраховувати всі договори.

Приклад виконання лабораторної роботи

Задача 4.1. Припустимо, що в компанії застраховано $N = 3000$ осіб з ймовірністю смерті протягом року $q = 0,3\%$. Компанія виплачує суму $b = 250000$ грн. у випадку смерті застрахованого протягом року і не платить нічого, якщо ця людина доживе до кінця року. Визначте величину активів, достатню, щоб забезпечити ймовірність руйнування порядку 5%.

Розв'язок. Приймемо розмір страхової суми як нову грошову одиницю. Перш за все, ми повинні підрахувати середнє значення і дисперсію сумарного збитку S:

$$ES = NE\xi = 3000 \cdot 0,003 = 9,$$
$$DS = ND\xi = 3000 \cdot 0,997 \cdot 0,003 \approx 9.$$

Тому:

$$P(S \le u) = P(\frac{S - ES}{\sqrt{DS}} \le \frac{u - ES}{\sqrt{DS}}) = P(\frac{S - ES}{\sqrt{DS}} \le \frac{u - 9}{3}) \approx \Phi(\frac{u - 9}{3}).$$

Якщо ми хочемо, щоб ймовірність руйнування була 5%, величина $\frac{u-9}{3}$ повинна бути рівною $x_{0,95} = 1,645$, тобто $u = 3 \cdot 1,645 + 9 \approx 13,935$ (від величини страхової допомоги) або в абсолютних цифрах близько 3483750 грн.

Задача 4.2. Припустимо, що страхова компанія уклала $N = 10000$ договорів страхування життя строком на один рік на таких умовах: у випадку смерті застрахованого протягом року від нещасного випадку компанія виплачує спадкоємцям 1000000 грн., а в разі смерті протягом року від природних причин компанія виплачує спадкоємцям 250000 грн. Компанія не платить нічого, якщо застрахований не помре протягом року. Ймовірність смерті від нещасного випадку одна і та ж для всіх застрахованих і дорівнює 0.0005. Ймовірність смерті від природних причин залежить від віку. У першому наближенні можна розбити N застрахованих на дві вікові групи, що містять $N_1 = 4000$ та $N_2 = 6000$ осіб з ймовірністю смерті протягом року $q_1 = 0,004$ та $q_2 = 0,002$ відповідно. Підрахуйте величину премії, що гарантує виконання компанією своїх зобов'язань з ймовірністю 95%.

Розв'язок. Приймемо суму 250000 грн. як одиницю вимірювання грошових сум. Тоді для першої групи договорів індивідуальний збиток приймає три значення (табл. 4.2).

Таблиця 4.2

Індивідуальний збиток для першої групи

Розмір збитку	0	1	4
Ймовірність	0,9955	0,004	0,0005

Середнє значення і дисперсія величини індивідуального збитку для першої групи застрахованих дорівнюють:

$$m_1 = 1 \cdot 0,004 + 4 \cdot 0,0005 = 0,006,$$

$$\sigma_1^2 = 1^2 \cdot 0,004 + 4^2 \cdot 0,0005 - m_1^2 \approx 0,012.$$

Для другої групи договорів індивідуальний збиток приймає ті ж три значення 0,1 і 4, але з іншими ймовірностями (табл. 4.3).

Таблиця 4.3

Індивідуальний збиток для другої групи

Розмір збитку	0	1	4
Ймовірність	0,9975	0,002	0,0005

Середнє значення і дисперсія величини індивідуального збитку для першої групи застрахованих дорівнюють:

$$m_2 = 1 \cdot 0,002 + 4 \cdot 0,0005 = 0,004,$$

$$\sigma_2^2 = 1^2 \cdot 0,002 + 4^2 \cdot 0,0005 - m_2^2 \approx 0,01.$$

Середнє значення і дисперсія сумарного збитку дорівнюють:

$$ES = N_1 \cdot m_1 + N_2 \cdot m_2 = 4000 \cdot 0,006 + 6000 \cdot 0,004 = 48,$$

$$DS = N_1 \cdot \sigma_1^2 + N_2 \cdot \sigma_2^2 \approx 4000 \cdot 0,012 + 6000 \cdot 0,01 = 108.$$

Для того, щоб з ймовірність 95% гарантувати не розорення, резервний фонд компанії повинен дорівнювати $ES = l = 48 + l$, де додаткова сума l визначається за формулою: $l = x_{0,95} \cdot \sqrt{DS}$, що в нашому випадку – $l = 1,645 \cdot \sqrt{108}$.

Розглянемо тепер питання про призначення індивідуальних премій.

Перший випадок. Якщо додаткова сума l ділиться пропорційно нетто-премій, то відносна страхова надбавка одна і та ж для всіх договорів і дорівнює:

$$\theta = \frac{l}{ES} \approx 35,6\%.$$

Тому для договорів з першої групи премія дорівнює:

$$p_1 = m_1 \cdot (1 + \theta) \approx 0,00814 = 2034 \text{ грн.}$$

А для договорів другої групи:

$$p_2 = m_2 \cdot (1 + \theta) \approx 0,00542 = 1356 \text{ грн.}$$

Другий випадок. Якщо додаткова сума l ділиться пропорційно дисперсій, то коефіцієнт пропорційності k дорівнює:

$$k = \frac{l}{DS} \approx 15,8\%.$$

Тому для договорів з першої групи страхова надбавка дорівнює:

$$l_1 = k \cdot \sigma_1^2 \approx 0,001899,$$

так що премія дорівнює:

$$p_1 = m_1 + l_1 \approx 0,007899 = 1975 \text{ грн.},$$

а відносна страхова надбавка:

$$\theta_1 = \frac{l_1}{m_1} \approx 31,7\%.$$

Для договорів з другої групи страхова надбавка дорівнює:

$$l_2 = k \cdot \sigma_2^2 \approx 0{,}001583,$$

так що премія дорівнює:

$$p_1 = m_2 + l_2 \approx 0{,}005583 = 1396 \text{ грн.},$$

а відносна страхова надбавка:

$$\theta_2 = \frac{l_2}{m_2} \approx 39{,}6\%.$$

Третій випадок. Якщо додаткова сума l ділиться пропорційно середнім квадратичним відхиленням (вони дорівнюють $\sigma_1 \approx 0{,}1095$ для договорів першої групи і $\sigma_2 \approx 0{,}1$ для договорів другої групи), то коефіцієнт пропорційності k дорівнює:

$$k = \frac{l}{N_1\sigma_1 + N_1\sigma_2} \approx 0{,}0165.$$

Тому для договорів з першої групи страхова надбавка дорівнює: $l_1 = k \cdot \sigma_1 \approx 0{,}001804$, так що премія дорівнює: $p_1 = m_1 + l_1 \approx 0{,}007804 = 1951$ грн., а відносна страхова надбавка: $\theta_1 = \frac{l_1}{m_1} \approx 30\%$.

Для договорів з другої групи страхова надбавка дорівнює: $l_2 = k \cdot \sigma_2 \approx 0{,}001647$,так що премія дорівнює: $p_2 = m_2 + l_2 \approx 0{,}005647 = 1412$ грн., а відносна страхова надбавка: $\theta_2 = \frac{l_2}{m_2} \approx 41\%$.

Отже, зміна принципу призначення індивідуальних премій призводить до зменшення відносної страхової надбавки для договорів першої групи. Відповідно для договорів другої групи відносна захисна надбавка збільшується. Це пов'язано з тим, що коефіцієнт розсіювання сумарного збитку дорівнює $\frac{DS}{ES} - 1 = 1{,}25$, в той час як для договорів першої групи він дорівнює $\frac{\theta_1^2}{m_1} - 1 = 1$, а для договорів другої групи – $\frac{\theta_2^2}{m_2} - 1 = 1{,}5$.

Коефіцієнт варіації величини індивідуального збитку для договорів першої групи: $c_1 = \frac{\sigma_1}{m_1} \approx 18{,}26$. А для договорів другої групи він дорівнює: $c_2 = \frac{\sigma_2}{m_2} \approx 25$. Середній коефіцієнт варіації, усереднений за всім портфелем з вагами $\frac{E\xi_i}{ES}$ дорівнює:

$$c = c_1 \cdot \frac{N_1 m_1}{ES} + c_2 \cdot \frac{N_2 m_2}{ES} = c_1 \cdot \frac{24}{48} + c_2 \cdot \frac{24}{48} = \frac{c_1 + c_2}{2} \approx 21{,}63.$$

Задача 4.3. Страхова компанія пропонує договори страхування життя на один рік. Інформація щодо структури покриття наведена в табл. 4.4.

Відносна захисна надбавка дорівнює 20%. Припустимо, що окремі поліси незалежні і страховик використовує нормальне наближення для розподілу сумарних виплат.

Таблиця 4.4

Страхові суми та виплати при різних видах страхування

Страхова сума	Причина смерті	Ймовірність
500 000	Звичайна	0,1
1 000 000	Нещасний випадок	0,01

Розрахуйте кількість договорів, яку повинен продати страховик, щоб зібрана премія з ймовірністю 95% покривала сумарні виплати.

Розв'язок. Нехай N – загальне число проданих договорів. X_k – виплати по k-му договору, $S = X_1 + \ldots + X_N$ – сумарні виплати за всім портфелем, θ – відносна захисна надбавка, так що премія за одним договором дорівнює $p = (1+\theta)EX_k$. За умовою, $P(S < Np) = 0,95$. З іншого боку:

$$P(S < Np) = P(\frac{S - ES}{\sqrt{DS}} < \frac{Np - ES}{\sqrt{DS}}) \approx \Phi(\frac{Np - ES}{\sqrt{DS}}) = \Phi(\sqrt{N} \cdot \frac{\theta \cdot EX_k}{\sqrt{DX_k}}).$$

Тому $\sqrt{N} \cdot \frac{\theta \cdot EX_k}{\sqrt{DX_k}} = x_{0,95} = 1,645$, де $x_{0,95}$ – квантіль порядку 0,95 стандартного нормального (гаусівського) розподілу. Звідси для шуканого числа договорів маємо:

$$N = \frac{x_{0,95}^2 \cdot DX_k}{\theta^2 \cdot (EX_k)^2}.$$

Оскільки для індивідуального договору:

$$EX = 500000 \cdot 0,10 + 1000000 \cdot 0,1 = 60000,$$

$$EX^2 = 500000^2 \cdot 0,10 + 1000000^2 \cdot 0,1 = 35 \cdot 10^9,$$

$$DX = 314 \cdot 10^8,$$

то шукане число договорів одне й дорівнює 590.

Задача 4.4. Компанія АВС планує організувати групове страхування життя для своїх співробітників. Структура персоналу наведена в табл. 4.5.

Компанія АВС планує внести до страхового фонду суму, що дорівнює очікуваним виплатам страхових відшкодувань. Кожен співробітник, у свою чергу, повинен буде внести суму, що дорівнює певній частці δ від розміру очікуваної виплати. Розмір цієї частки визначається таким чином, щоб з імовірністю 95% коштів страхового фонду вистачило для виплати страхових відшкодувань.

Таблиця 4.5

Вихідні дані задачі для різних класів співробітників

Професіональний клас	Число співробітників	Страхова сума	Ймовірність смерті
1	100	1	0,1
2	100	1	0,2
3	200	2	0,1
4	200	2	0,2

Визначте розмір внеску для працівників четвертого професійного класу.

Розв'язок. Нехай q – ймовірність смерті співробітника, SA – розмір страхової суми. Оскільки індивідуальні втрати за договором приймають тільки два значення: 0 з ймовірністю $(1-q)$ та SA з ймовірністю q, середнє значення індивідуальних втрат визначається як $EX = q \cdot SA$, а дисперсія – $DX = q \cdot (1-q) \cdot (SA)^2$. Припускаючи незалежність часів життя співробітників компанії, можна підрахувати середнє і дисперсію сумарних виплат для кожного професійного класу. Для цього потрібно середнє (відповідно дисперсію) індивідуальних втрат помножити на число працівників в класі:

$$ES' = N \cdot EX,$$

$$DS' = N \cdot DX.$$

Результати розрахунків помістимо в табл. 4.6.

Таблиця 4.6

Результати розрахунків

Клас	Число співробітників	SA	q	EX	DX	ES'	DS'
1	100	1	0,1	0,1	0,09	10	9
2	100	1	0,2	0,2	0,16	20	16
3	200	2	0,1	0,2	0,36	40	72
4	200	2	0,2	0,4	0,64	80	128

Щоб отримати середнє значення (дисперсію) сумарних виплат для всього портфеля, потрібно скласти середні (дисперсії) сумарних втрат для всіх чотирьох професійних класів. Таким чином: $ES = 150$, $DS = 225$.

Розмір страхового фонду дорівнює $u = ES + \delta \cdot ES$. За умовою, має бути вірна рівність:

$P(S \le u) = 0,95$ або $P(\frac{S-ES}{\sqrt{DS}} \le \frac{u-ES}{\sqrt{DS}}) = 0,95$.

Застосовуючи гаусівське наближення для центрованої і нормованої величини загальних виплат, ми маємо:

$$\frac{u-ES}{\sqrt{DS}} = x_{0,95}..$$

У ситуації, що розглядається ця рівність прийме вигляд:

$$\delta = 0,1 \cdot x_{0,95} \approx 0,1645.$$

Відповідно захисна надбавка для працівників четвертого професійного класу дорівнює $0,1645 \cdot 0,4 = 0,0658$ або 6,58%.

Завдання до лабораторної роботи

1. Припустимо, що в компанії застраховано $N = 1000$ осіб з ймовірністю смерті протягом року $q = 0,4\%$. Компанія виплачує суму $b = 100000 \cdot N$ грн. (N – номер варіанта студента) у разі смерті застрахованого протягом року і не платить нічого, якщо ця людина доживе до кінця року. Визначте величину активів, достатню, щоб забезпечити ймовірність руйнування близько 5%.

2. Страхова компанія пропонує договори страхування життя на один рік. Інформація щодо структури покриття наведена в табл. 4.7.

Таблиця 4.7

Страхові суми та виплати при різних видах страхування

Страхова сума	Причина смерті	Ймовірність
100 000	Звичайна	0,1
1 000 000	Нещасний випадок	0,02

Відносна захисна надбавка дорівнює 25%. Припустимо, що окремі поліси незалежні і страховик використовує нормальне наближення для розподілу сумарних виплат. Розрахуйте кількість договорів, яку повинен продати страховик, щоб зібрана премія покривала сумарні виплати з ймовірністю 95%?

3. Компанія планує організувати групове страхування життя для своїх співробітників. Структура персоналу наведена в табл. 4.8.

Таблиця 4.8

Вихідні дані задачі для різних класів співробітників

Професіональний клас	Число працівників	Страхова сума	Ймовірність смерті
1	50	1	0,1
2	50	1	0,2
3	100	2	0,1
4	100	2	0,2

Компанія планує внести до страхового фонду суму, що дорівнює очікуваним виплатам страхових відшкодувань.

Кожен співробітник, у свою чергу, повинен буде внести суму, що дорівнює певній частці δ від розміру очікуваної виплати. Розмір цієї частки визначається таким чином, щоб з імовірністю 95% коштів страхового фонду вистачило для виплати страхових відшкодувань. Визначте розмір внеску для працівників другого професійного класу.

Питання для самоконтролю

1. Що таке резервний фонд страхової компанії?
2. Як розраховується ймовірність розорення компанії?
3. Назвіть основних учасників процесу перестрахування.
4. На яких припущеннях базується модель індивідуального ризику?
5. Поясніть процес пропорційного перестрахування.
6. Поясніть процес перестрахування перевищення втрат.

ЛІТЕРАТУРА

Основна:

1. Актуарная математика / [Бауэрс Н., Гербер Х., Джогс Д., Несбитт С., Хикман Дж. / перев. с англ. : под ред. В.К. Малиновского]. – М. : Янус–К, 2001. – 655 с.
2. Козьменко О.В. Актуарні розрахунки [Текст] : навч. посібник / О. В. Козьменко, О. В. Кузьменко. – Суми : Університетська книга, 2011. – 224 с.
3. Кудрявцев А.А. Математика страхования жизни. В 2–х выпусках. Вып. 1. Оценка обязательств компании страхования жизни / А.А. Кудрявцев. – СПб. : Ин–т страхования, 2009. – 258 с.
4. Кузнецова Н. Л. Актуарная математика : учеб. пособ. / Н. Л. Кузнецова, А. В. Сапожникова ; Тюм. гос. ун–т. – Тюмень : Изд–во ТюмГУ, 2010. – 192 с.
5. Негрей М.В. Актуарна математика: навчально-методичний посібник / М.В. Негрей. – Львів, ЛНУ ім. І. Франка, 2013. – 208 с.
6. Никулина Н.Н. Актуарные расчеты в страховании / Н.Н. Никулина, Н.Д. Эриашвили. – М. : Юнити–Дана, 2011. – 136 с.
7. Оленко А.Я. Збірник задач з актуарної математики / А.Я. Оленко. – Київ : ВПЦ ”Київський університет”, 2010. – 234 с.
8. Основи актуарних розрахунків / [С.М.Лаптєв, В.І.Грушко, М.П.Денисенко та ін.] – Київ : Алерта, 2010. – 328 с.
9. Рябикин В. Страхование и актуарные расчеты: учеб. / В. Рябикин, В. Баскаков, С. Тихомиров. – М. : Экономистъ, 2006. – 459 с.
10. Соловьев А.И. Актуарные расчеты в системе пенсионного страхования / А.И. Соловьев. – М. : Финансы и статистика, 2005. – 240 с.
11. Фалин Г.И. Актуарная математика в задачах / Г.И. Фалин, А.И. Фалин. – М. : Физматлит, 2009. – 192 с.
12. Фалин Г.И. Введение в актуарную математику / Г.И. Фалин, А.И. Фалин. – М. : Изд–во Моск. ун–та, 2008. – 357 с.

Додаткова:

1. Гвозденко А.А. Основы страхования : учеб. / А.А. Гвозденко. – М. : Финансы и статистика, 1998. – 304 с.
2. Гербер Х. Математика страхования жизни / Х. Гербер. – М. : Мир, 1995. – 154 с.
3. Кудрявцев А.А. Демографические основы страхования жизни / А.А. Кудрявцев. – СПб. : Ин–т страхования, 1996. – 238 с.
4. Кутуков В.Б. Основы финансовой и страховой математики: методы расчета кредитных, инвестиционных, пенсионных и страховых схем / В.Б. Кутуков. – М. : Дело, 1998. – 304 с.

5. Страхування: [підруч.] / [В.Д. Базилевич, Р.В. Пікус, А.О. Старостіна, О.І. Черняк, В.В. Шпирко та ін.] ; за ред. В.Д. Базилевича. – Київ : Знання, 2008. – 803 с.

6. Страхування: практикум: [навч. посіб.] / [В.Д. Базилевич, Р.В. Пікус, А.О. Старостіна, О.І. Черняк, В.В. Шпирко та ін.] ; за ред. В.Д.Базилевича. – 2-ге вид., перероб. і допов. – Київ : Знання, 2010.– 321 с.

7. Цінні папери: [підруч.] / [В.Д. Базилевич, А.Б. Камінський, О.В. Баженова, А.В. Ставицький, І.К. Федоренко та ін.] ; за ред. В.Д. Базилевича. – Київ : Знання, 2011. – 763 с.

ДОДАТОК А

Значення функції Лапласа $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} du$

Таблиця А.1

x	$\Phi_0(x)$	x	$\Phi_0(x)$	x	$\Phi_0(x)$	x	$\Phi_0(x)$
0,00	0,0000	0,32	0,1255	0,64	0,2389	0,96	0,3315
0,01	0,0040	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0,3340
0,02	0,0080	0,34	0,1331	0,66	0,2454	0,98	0,3365
0,03	0,0120	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389
0,04	0,0160	0,36	0,1406	0,68	0,2517	1,00	0,3413
0,05	0,0199	0,37	0,1443	0,69	0,2549	1,01	0,3438
0,06	0,0239	0,38	0,1480	0,70	0,2580	1,02	0,3461
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3485
0,08	0,0319	0,40	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508
0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0,2673	1,05	0,3531
0,10	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2703	1,06	0,3554
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1,07	0,3577
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0,2764	1,08	0,3599
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1,09	0,3621
0,14	0,0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,10	0,3643
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0,2852	1,11	0,3655
0,16	0,0636	0,48	0,1844	0,80	0,2881	1,12	0,3686
0,17	0,0675	0,49	0,1879	0,81	0,2910	1,13	0,3708
0,18	0,0714	0,50	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729
0,19	0,0753	0,51	0,1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749
0,20	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,3770
0,21	0,0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0,3790
0,22	0,0871	0,54	0,2054	0,86	0,3051	1,18	0,3810
0,23	0,0910	0,55	0,2088	0,87	0,3078	1,19	0,3830
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	0,3106	1,20	0,3849
0,25	0,0987	0,57	0,2157	0,89	0,3133	1,21	0,3869
0,26	0,1026	0,58	0,2190	0,90	0,3159	1,22	0,3883
0,27	0,1064	0,59	0,2224	0,91	0,3186	1,23	0,3907
0,28	0,1103	0,60	0,2257	0,92	0,3212	1,24	0,3925
0,29	0,1141	0,61	0,2291	0,93	0,3238	1,25	0,3907
0,30	0,1179	0,62	0,2324	0,94	0,3264	1,26	0,3925
0,31	0,1217	0,63	0,2357	0,95	0,3289	1,27	0,3944
1,26	0,3962	1,59	0,4441	1,92	0,4726	2,50	0,4938
1,27	0,3980	1,60	0,4452	1,93	0,4732	2,52	0,4941
1,28	0,3997	1,61	0,4463	1,94	0,4738	2,54	0,4945
1,29	0,4015	1,62	0,4474	1,95	0,4744	2,56	0,4948
1,30	0,4032	1,63	0,4484	1,96	0,4750	2,58	0,4951

Продовження таблиці А.1

x	$\Phi_0(x)$	x	$\Phi_0(x)$	x	$\Phi_0(x)$	x	$\Phi_0(x)$
1,31	0,4049	1,64	0,4495	1,97	0,4756	2,60	0,4953
1,32	0,4066	1,65	0,4505	1,98	0,4761	2,62	0,4956
1,33	0,4082	1,66	0,4515	1,99	0,4767	2,64	0,4959
1,34	0,4099	1,67	0,4525	2,00	0,4772	2,66	0,4961
1,35	0,4115	1,68	0,4535	2,02	0,4783	2,68	0,4963
1,36	0,4131	1,69	0,4545	2,04	0,4793	2,70	0,4965
1,37	0,4147	1,70	0,4554	2,06	0,4803	2,72	0,4967
1,38	0,4162	1,71	0,4564	2,08	0,4812	2,74	0,4969
1,39	0,4177	1,72	0,4573	2,10	0,4821	2,76	0,4971
1,40	0,4192	1,73	0,4582	2,12	0,4830	2,78	0,4973
1,41	0,4207	1,74	0,4591	2,14	0,4838	2,80	0,4974
1,42	0,4222	1,75	0,4599	2,16	0,4846	2,82	0,4976
1,43	0,4236	1,76	0,4608	2,18	0,4854	2,84	0,4977
1,44	0,4251	1,77	0,4616	2,20	0,4861	2,86	0,4979
1,45	0,4265	1,78	0,4625	2,22	0,4868	2,88	0,4980
1,46	0,4279	1,79	0,4633	2,24	0,4875	2,90	0,4981
1,47	0,4292	1,80	0,4641	2,26	0,4881	2,92	0,4982
1,48	0,4306	1,81	0,4649	2,28	0,4887	2,94	0,4984
1,49	0,4319	1,82	0,4656	2,30	0,4893	2,96	0,4985
1,50	0,4332	1,83	0,4564	2,32	0,4898	2,98	0,4986
1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,34	0,4904	3,00	0,49865
1,52	0,4357	1,85	0,4787	2,36	0,4909	3,20	0,49931
1,53	0,4370	1,86	0,4686	2,38	0,4913	3,40	0,49966
1,54	0,4382	1,87	0,4693	2,40	0,4918	3,60	0,499841
1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,42	0,4922	3,80	0,499928
1,56	0,4406	1,89	0,4706	2,44	0,4927	4,00	0,499968
1,57	0,4418	1,90	0,4713	2,46	0,4933	4,50	0,499997
1,58	0,4429	1,91	0,4719	2,48	0,4934	5,00	0,499997

ДОДАТОК Б

Значення функції Гауса $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

Таблиця Б.1

x	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	0,3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	0,3910	3902	3894	3005	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	0,3814	3802	3790	3778	3765	3752	3734	3726	3712	3697
0,4	0,3683	3660	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	0,3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	0,3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	0,3123	3101	3079	3056	3034	3111	2989	2966	2943	2920
0,8	0,2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	0,2661	2637	2613	2509	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	0,2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1979	1965
1,2	0,1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	0,1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	0,1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	0,1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	0,1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0,0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0,0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0,0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0,0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0,0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0,0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0,0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0,0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0,0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0,0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0,0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0,0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0,0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0,0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0,0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0,0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009

Продовження таблиці Б.1

x	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
3,5	0,0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0,0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0,0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0,0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0,0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

ДОДАТОК В
Таблиці смертності

Таблиця В.1

Вік	Чоловіки			Жінки		
x	l_x	d_x	q_x	l_x	d_x	q_x
0	100000	2047	0,02047	100000	1512	0, 01512
1	97953	200	0, 00242	98488	161	0, 001635
2	97753	113	0, 001156	98327	98	0, 000997
3	97640	85	0, 000871	98229	69	0, 000702
4	97555	78	0, 0008	98160	57	0, 000581
5	97477	74	0, 000759	98103	45	0, 000459
6	97403	69	0, 000708	98058	41	0, 000418
7	97334	62	0, 000637	98017	39	0, 000398
8	97272	57	0, 000586	97978	39	0, 000398
9	97215	57	0, 000586	97939	37	0, 000378
10	97158	54	0,000556	97902	31	0, 000317
11	97104	54	0,000556	97871	31	0, 000317
12	97050	56	0,000577	97840	31	0, 000317
13	96994	63	0,00065	97809	35	0, 000358
14	96931	70	0,000722	97774	38	0, 000389
15	96861	105	0,001084	97736	47	0, 000481
16	96756	151	0,001561	97689	68	0, 000696
17	96605	208	0,002153	97621	92	0, 000942
18	96397	261	0,002708	97529	92	0, 000943
19	96136	299	0,00311	97437	93	0, 000954
20	95837	351	0,003662	97344	93	0, 000955
21	95486	379	0,003969	97251	94	0,000967
22	95107	388	0,0048	97157	95	0,000978
23	94719	375	0,003959	97062	98	0,00101
24	94344	392	0,004155	96964	98	0,001011
25	93952	441	0,004694	96866	99	0,001022
26	93511	473	0,005058	96767	107	0,001106
27	93038	529	0,005686	96660	132	0,001366
28	92509	543	0,00587	96528	137	0,001419

Продовження таблиці В.1

Вік	Чоловіки	Жінки	Вік	Чоловіки	Жінки	Вік
x	l_x	d_x	x	l_x	d_x	x
29	91966	547	0,005948	96391	138	0,001432
30	91419	597	0,00653	96253	149	0,001548
31	90822	639	0,007037	96104	164	0,001706
32	90183	695	0,007707	95940	172	0,001793
33	89488	757	0,008459	95768	180	0,00188
34	88731	797	0,008982	95588	197	0,002061
35	87934	832	0,009462	95391	218	0,002285
36	87102	905	0,01039	95173	234	0,002459
37	86197	907	0,010522	94939	250	0,002633
38	85290	940	0,011021	94689	267	0,00282
39	84350	1006	0,011926	94422	279	0,002955
40	83344	1145	0,013738	94143	310	0,003293
41	82199	1198	0,014574	93833	344	0,003666
42	81001	1194	0,014741	93489	382	0,004086
43	79807	1208	0,015137	93107	417	0,004479
44	78599	1212	0,01542	92690	458	0,004941
45	77387	1292	0,016695	92232	449	0,004868
46	76095	1394	0,018319	91781	481	0,005241
47	74701	1379	0,01846	91302	512	0,005608
48	73322	1432	0,01953	90790	547	0,006025
49	71890	1536	0,021366	90243	571	0,006327
50	70354	2001	0,028442	89672	680	0,007583
51	68353	2107	0,030825	88992	847	0,009518
52	66246	2156	0,032545	88145	884	0,010029
53	64090	2143	0,033437	87261	966	0,01107
54	61947	2088	0,033706	86295	959	0,011113
55	59859	2028	0,03388	85336	949	0,011121
56	57831	1974	0,034134	84387	952	0,011281
57	55857	1917	0,03432	83435	954	0,011434
58	53940	1870	0,034668	82481	1009	0,012233
59	52070	1824	0,03503	81472	1012	0,012421

Продовження таблиці В.1

Вік	Чоловіки	Жінки	Вік	Чоловіки	Жінки	Вік
x	l_x	d_x	x	l_x	d_x	x
60	50246	2127	0,042332	80460	1121	0,013932
61	48119	2458	0,051082	79339	1334	0,016814
62	45661	2395	0,052452	78005	1499	0,019217
63	43266	2309	0,053368	76506	1621	0,021188
64	40957	2234	0,054545	74885	1745	0,023302
65	38723	2167	0,055962	73140	1785	0,024405
66	36556	2055	0,056215	71355	1812	0,025394
67	34501	2009	0,05823	69543	1834	0,026372
68	32492	1955	0,060169	67709	1844	0,027234
69	30537	1933	0,0633	65865	1914	0,029059
70	28604	1933	0,067578	63951	2075	0,032447
71	26671	1902	0,071313	61876	2198	0,035523
72	24769	1820	0,073479	59678	2375	0,039797
73	22949	1803	0,078566	57303	2515	0,043889
74	21146	1735	0,082049	54778	2712	0,0495
75	19411	1782	0,091804	52076	2987	0,057358
76	17629	1831	0,103863	49089	3173	0,064638
77	15798	1762	0,111533	45916	3337	0,072676
78	14036	1734	0,123539	42579	3538	0,083093
79	12302	1687	0,137132	39041	3399	0,087062
80	10615	1461	0,137635	35642	3301	0,092615
81	9154	1283	0,140157	32341	3287	0,101636
82	7871	1153	0,146487	29054	3224	0,110966
83	6718	1078	0,160464	25830	3156	0,122184
84	5640	960	0,170213	22674	3151	0,13897
85	4680	861	0,183974	19523	3001	0,153716
86	3819	791	0,207122	16522	2919	0,176674
87	3028	640	0,211361	13603	2618	0,192458
88	2388	529	0,221524	10985	2302	0,209558
89	1859	431	0,231845	8683	1979	0,227917
90	1428	348	0,243697	6704	1659	0,247464

Продовження таблиці В.1

Вік	Чоловіки	Жінки	Вік	Чоловіки	Жінки	Вік
x	l_x	d_x	x	l_x	d_x	x
91	1080	275	0,25463	5045	1355	0,268583
92	805	208	0,258385	3690	1083	0,290786
93	597	158	0,264657	2617	823	0,314482
94	439	138	0,314351	1794	610	0,340022
95	301	95	0,315615	1184	434	0,366554
96	206	66	0,320388	750	296	0,394667
97	140	45	0,321429	454	192	0,422907
98	95	32	0,336842	262	119	0,454198
99	63	22	0,349206	143	70	0,48951
100	41	41	1	73	73	1

ДОДАТОК Г

Таблиці комутаційних функцій

Таблиця Г.1

Чоловіки				Річна процентна ставка – 5%			
Вік x	D_x	N_x	C_x	M_x	R_x	a_x	D_x
0	100000	1887590	1949,524	10114,77	342608,9	17,8759	0,101148
1	93288,57	1787590	181,4059	8165,244	332494,2	18,16194	0,087527
2	88664,85	1694301	97,61365	7983,838	324328,9	18,10905	0,090045
3	84345,10	1605636	69,92971	7886,224	316345,1	18,03651	0,093499
4	80258,74	1521291	61,11504	7816,294	308458,9	17,95484	0,097389
5	76375,78	1441033	55,21994	7755,179	300642,6	17,86766	0,10154
6	72683,62	1364657	49,03701	7699,959	292887,4	17,7753	0,105938
7	69173,46	1291973	41,96404	7650,922	285187,4	17,6773	0,110605
8	65837,52	1222800	36,74271	7608,958	277536,5	17,57299	0,115572
9	62665,66	1156962	34,99306	7572,216	269927,6	17,46246	0,120835
10	59646,58	1094297	31,57268	7537,223	262355,3	17,34634	0,126365
11	56774,70	1034650	30,06922	7505,65	254818,1	17,22379	0,132201
12	54041,07	977875,3	29,698	7475,581	247312,5	17,09504	0,138331
13	51437,99	923834,2	31,81928	7445,883	239836,9	16,96015	0,144755
14	48956,74	872396,2	33,6712	7414,063	232391	16,81974	0,151441
15	46591,80	823439,5	48,10171	7380,392	224976,9	16,67349	0,158405
16	44325,04	776847,7	65,8808	7332,29	217596,5	16,52616	0,165421
17	42148,44	732522,7	86,4283	7266,41	210264,3	16,37959	0,1724
18	40054,94	690374,2	103,2866	7179,981	202997,8	16,23568	0,179253
19	38044,28	650319,3	112,69	7076,695	195817,9	16,09375	0,186012
20	36119,96	612275	125,9888	6964,005	188741,2	15,95116	0,192802
21	34273,97	576155	129,5611	6838,016	181777,2	15,81028	0,19951
22	32512,32	541881,1	126,3217	6708,455	174939,2	15,66695	0,206336
23	30837,79	509368,8	116,2755	6582,133	168230,7	15,51768	0,213444
24	29253,05	478531	115,7587	6465,858	161648,6	15,35833	0,221032
25	27744,29	449277,9	124,0272	6350,099	155182,7	15,19353	0,22888
26	26299,10	421533,6	126,6923	6226,072	148832,6	15,02844	0,236741
27	24920,07	395234,5	134,9445	6099,38	142606,5	14,86009	0,244758
28	23598,46	370314,5	131,9199	5964,435	136507,2	14,69232	0,252747
29	22342,80	346716	126,5635	5832,515	130542,7	14,51802	0,261047
30	21152,29	324373,2	131,5546	5705,952	124710,2	14,33513	0,269756
31	20013,49	303220,9	134,1045	5574,397	119004,3	14,15083	0,278532
32	18926,36	283207,4	138,9114	5440,293	113429,9	13,96365	0,287445
33	17886,19	264281,1	144,0986	5301,381	107989,6	13,7757	0,296395
34	16890,37	246394,9	144,4884	5157,283	102688,2	13,58789	0,305339

Продовження таблиці Г.1

Чоловіки				Річна процентна ставка – 5%			
Вік x	D_x	Вік x	D_x	Вік x	D_x	Вік x	D_x
35	15941,58	229504,5	143,651	5012,794	97530,9	13,3966	0,314448
36	15038,81	213562,9	148,8142	4869,144	92518,1	13,20079	0,323772
37	14173,86	198524,1	142,0411	4720,329	87648,96	13,00636	0,333031
38	13356,87	184350,3	140,1991	4578,288	82928,63	12,8019	0,342767
39	12580,63	170993,4	142,898	4438,089	78350,34	12,5918	0,352772
40	1 1838,66	158412,7	154,8974	4295,191	73912,25	12,38097	0,362811
41	11120,01	146574,1	154,3499	4140,294	69617,06	12,18111	0,372328
42	10436,14	135454,1	146,5091	3985,944	65476,77	11,97933	0,381937
43	9792,67	125017,9	141,1685	3839,435	61490,83	11,76648	0,392072
44	9185,184	115225,3	134,8914	3698,266	57651,39	11,54469	0,402634
45	8612,903	106040,1	136,9477	3563,375	53953,12	11,31177	0,413725
46	8065,817	97427,19	140,7232	3426,427	50389,75	11,07902	0,424808
47	7541,007	89361,37	132,58	3285,704	46963,32	10,85006	0,435712
48	7049,332	81820,36	131,1195	3153,124	43677,62	10,60683	0,447294
49	6582,53	74771,03	133,9449	3022,005	40524,49	10,35901	0,459095
50	6135,131	68188,5	166,1854	2888,06	37502,49	10,11443	0,470741
51	5676,797	62053,37	166,656	2721,874	34614,43	9,931054	0,479474
52	5239,817	56376,57	162,4112	2555,218	31892,56	9,759264	0,487654
53	4827,891	51136,76	153,7447	2392,807	29337,34	9,591946	0,495622
54	4444,246	46308,86	142,6655	2239,062	26944,53	9,419959	0,503811
55	4089,95	41864,62	131,9676	2096,397	24705,47	9,235973	0,512573
56	3763,223	37774,67	122,3368	1964,429	22609,07	9,03785	0,522007
57	3461,685	34011,44	113,1469	1842,092	20644,64	8,825112	0,532138
58	3183,696	30549,76	105,117	1728,946	18802,55	8,59569	0,543062
59	2926,974	27366,06	97,6488	1623,829	17073,6	8,349608	0,554781
60	2689,946	24439,09	108,4477	1526,18	15449,78	8,085346	0,567364
61	2453,406	21749,14	119,3563	1417,732	13923,6	7,864879	0,577863
62	2217,22	19295,74	110,7592	1298,376	12505,86	7,70267	0,585587
63	2000,879	17078,52	101,6972	1187,617	11207,49	7,535506	0,593547
64	1803,902	15077,64	93,70844	1085,919	10019,87	7,358345	0,601984
65	1624,294	13273,74	86,56955	992,211	8933,951	7,172005	0,610857
66	1460,377	11649,44	78,18596	905,6415	7941,74	6,977011	0,620142
67	1312,649	10189,07	72,79601	827,4555	7036,099	6,762216	0,630371
68	1177,346	8876,416	67,46603	754,6595	6208,643	6,539344	0,640984
69	1053,816	7699,07	63,5303	687,1935	5453,984	6,305897	0,6521
70	940,1039	6645,254	60,50505	623,6632	4766,79	6,068639	0,663398
71	834,832	5705,15	56,69973	563,1581	4143,127	5,833891	0,674577
72	738,3783	4870,319	51,67168	506,4584	3579,969	5,595966	0,685906

Продовження таблиці Г.1

Чоловіки				Річна процентна ставка – 5%			
Вік x	D_x	Вік x	D_x	Вік x	D_x	Вік x	D_x
73	651,5458	4131,94	48,75146	454,7867	3073,511	5,34175	0,698012
74	571,7683	3480,394	44,67886	406,0353	2618,724	5,087071	0,710139
75	499,8624	2908,626	43,70398	361,3564	2212,689	4,818853	0,722912
76	432,3555	2408,764	42,76735	317,6524	1851,332	4,571258	0,734702
77	368,9998	1976,408	39,19589	274,8851	1533,68	4,356123	0,744947
78	312,2324	1607,408	36,73622	235,6892	1258,795	4,148115	0,754852
79	260,628	1295,176	34,03856	198,953	1023,106	3,969443	0,76336
80	214,1786	1034,548	28,07482	164,9144	824,1526	3,830305	0,769985
81	175,9048	820,3694	23,48033	136,8396	659,2382	3,663712	0,777918
82	144,0481	644,4646	20,09636	113,3593	522,3986	3,473956	0,786954
83	117,0923	500,4165	17,89442	93,2629	409,0393	3,273695	0,796491
84	93,62201	383,3243	15,17682	75,36848	315,7764	3,094382	0,805029
85	73,987	289,7023	12,96353	60,19166	240,408	2,915583	0,813544
86	57,50028	215,7153	1 1,34247	47,22812	180,2163	2,751552	0,821355
87	43,4197	158,215	8,740206	35,88566	132,9882	2,643852	0,826483
88	32,61189	114,7953	6,880311	27,14545	97,10253	2,520044	0,832379
89	24,17863	82,18339	5,338759	20,26514	69,95708	2,399009	0,838142
90	17,68851	58,00476	4,105377	14,92638	49,69194	2,279233	0,843846
91	12,74082	40,31625	3,089706	10,821	34,76556	2,164336	0,849317
92	9,044413	27,57542	2,225658	7,731297	23,94456	2,04889	0,854815
93	6,388068	18,53101	1,610138	5,505639	16,21326	1,900879	0,861863
94	4,473737	12,14294	1,339355	3,895501	10,70762	1,714273	0,870749
95	2,921347	7,669204	0,878114	2,556146	6,812123	1,625229	0,874989
96	1,904121	4,747858	0,581008	1,678032	4,255977	1,493465	0,881264
97	1,232441	2,843737	0,377278	1,097025	2,577945	1,307403	0,890124
98	0,796475	1,611296	0,255511	0,719747	1,48092	1,023034	0,903665
99	0,503037	0,814821	0,167299	0,464236	0,761173	0,619803	0,922867
100	0,311784	0,311784	0,296937	0,296937	0,296937	0	0,952381

Таблиця Г.2

Жінки				Річна процентна ставка – 5%			
Вік x	D_x	N_x	C_x	M_x	R_x	a_x	A_x
0	100000	1977650	1440	5826,207	226663,7	18,7765	0,058262
1	93798,1	1877650	146,0317	4386,207	220837,4	19,01799	0,046762
2	89185,49	1783852	84,65608	4240,176	216451,2	19,00159	0,047543
3	84853,9	1694666	56,76647	4155,52	212211,1	18,97157	0,048973
4	80756,47	1609812	44,66099	4098,753	208055,5	18,93416	0,050754
5	76866,27	1529056	33,57969	4054,092	203956,8	18,89241	0,052742
6	73172,39	1452189	29,13793	4020,512	199902,7	18,84614	0,054946
7	69658,85	1379017	26,39674	3991,374	195882,2	18,79672	0,057299
8	66315,37	1309358	25,13975	3964,978	191890,8	18,74442	0,05979
9	63132,35	1243043	22,71479	3939,838	187925,8	18,68947	0,062406
10	60103,34	1179910	18,12506	3917,123	183986	18,63136	0,065173
11	57223,15	1119807	17,26196	3898,998	180068,9	18,56913	0,068137
12	54480,97	1062584	16,43996	3881,736	176169,9	18,50376	0,071249
13	51870,2	1008103	17,67738	3865,296	172288,1	18,43511	0,074519
14	49382,51	956232,8	18,27865	3847,619	168422,8	18,36379	0,077915
15	47012,69	906850,3	21,53124	3829,34	164575,2	18,28948	0,081453
16	44752,46	859837,6	29,66817	3807,809	160745,9	18,21319	0,085086
17	42591,72	815085,1	38,2279	3778,141	156938,1	18,13717	0,088706
18	40525,31	772493,4	36,40752	3739,913	153159,9	18,062	0,092286
19	38559,13	731968,1	35,05072	3703,505	149420	17,983	0,096047
20	36687,93	693409	33,38164	3668,455	145716,5	17,90019	0,099991
21	34907,5	656721	32,13389	3635,073	142048,1	17,81318	0,104134
22	33213,11	621813,5	30,92927	3602,939	138413	17,72193	0,108479
23	31600,6	588600,4	30,38666	3572,01	134810,1	17,62624	0,113036
24	30065,42	556999,8	28,93967	3541,623	131238	17,52626	0,117797
25	28604,8	526934,4	27,84283	3512,683	127696,4	17,42119	0,1228
26	27214,82	498329,6	28,65977	3484,841	124183,7	17,31096	0,128049
27	25890,22	471114,8	33,67236	3456,181	120698,9	17,19663	0,133494
28	24623,68	445224,6	33.28365	3422,509	117242,7	17,08116	0,138993
29	23417,84	420600,9	31,93009	3389,225	113820,2	16,9607	0,144728
30	22270,77	397183,1	32,83356	3357,295	110431	16,83427	0,150749
31	21177,43	374912,3	34,41805	3324,461	107073,7	16,70339	0,156981
32	20134,56	353734,9	34,37808	3290,043	103749,2	16,56854	0,163403
33	19141,39	333600,3	34,26386	3255,665	100459,2	16,42821	0,170085
34	18195,63	314458,9	35,71419	3221,401	97203,52	16,28211	0,177043
35	17293,46	296263,3	37,63932	3185,687	93982,11	16,13152	0,184213
36	16432,32	278969,8	38,47794	3148,048	90796,43	15,97689	0,191577

Продовження таблиці Г.2

Жінки				Річна процентна ставка – 5%			
Вік x	D_x	Вік x	D_x	Вік x	D_x	Вік x	D_x
37	15611,35	262537,5	39,15134	3109,57	87648,38	15,81709	0,199186
38	14828,81	246926,1	39,82251	3070,418	84538,81	15,65179	0,207058
39	14082,85	232097,3	39,63075	3030,596	81468,39	15,48085	0,215198
40	13372,61	218014,5	41,9373	2990,965	78437,8	15,30306	0,223664
41	12693,88	204641,9	44,32083	2949,028	75446,83	15,1213	0,232319
42	12045,09	191948	46,87308	2904,707	72497,8	14,93579	0,241153
43	11424,64	179902,9	48,73118	2857,834	69593,1	14,74692	0,250147
44	10831,88	168478,3	50,9738	2809,103	66735,26	14,55393	0,259337
45	10265,1	157646,4	47,59251	2758,129	63926,16	14,35751	0,26869
46	9728,693	147381,3	48,55657	2710,537	61168,03	14,14914	0,278613
47	9216,865	137652,6	49,22476	2661,98	58457,49	13,93486	0,288816
48	8728,742	128435,7	50,08546	2612,755	55795,51	13,71412	0,299328
49	8263,002	119707	49,79333	2562,67	53182,76	13,48711	0,310138
50	7819,733	111444	56,47479	2512,876	50620,09	13,25164	0,321351
51	7390,89	103624,2	66,99461	2456,402	48107,21	13,02054	0,332355
52	6971,948	96233,36	66,59159	2389,407	45650,81	12,80294	0,342717
53	6573,359	89261,41	69,30347	2322,815	43261,4	12,57927	0,353368
54	6191,038	82688,05	65,52502	2253,512	40938,59	12,35609	0,363996
55	5830,702	76497,01	61,75405	2187,987	38685,08	12,11969	0,375253
56	5491,295	70666,31	58,99931	2126,233	36497,09	1 1,86879	0,387201
57	5170,806	65175,02	56,30786	2067,234	34370,86	11,60442	0,399789
58	4868,269	60004,21	56,71821	2010,926	32303,62	1 1,32557	0,413068
59	4579,729	55135,94	54,17795	1954,207	30292,7	11,03913	0,426708
60	4307,468	50556,21	57,15554	1900,03	28338,49	10,73687	0,441101
61	4045,195	46248,74	64,77677	1842,874	26438.46	10,43301	0,455571
62	3787,79	42203,55	69,32275	1778,097	24595,59	10,142	0,469429
63	3538,096	38415,76	71,39501	1708,774	22817,49	9,857748	0.482964
64	3298,221	34877,66	73,19661	1637,379	21108,71	9,574691	0,496443
65	3067,966	31579,44	71,30902	1564,183	19471,34	9,293284	0,509811
66	2850,563	28511,48	68,94062	1492,874	17907,15	9,00205	0,523712
67	2645,881	25660,91	66,4549	1423,933	16414,28	8,698437	0,53817
68	2453,432	23015,03	63,63547	1357,478	14990,35	8,380749	0,553298
69	2272,967	20561,6	62,90584	1293,843	13632,87	8,046151	0,56923
70	2101,824	18288,63	64,94981	1230,937	12339,02	7,701314	0,585652
71	1936,788	16186,81	65,52366	1165,987	11108,09	7,357555	0,602021
72	1779,036	14250,02	67,4287	1100,464	9942,1	7,009968	0,618573
73	1626,891	12470,99	68,00328	1033,035	8841,637	6,665531	0,634975

Продовження таблиці Г.2

Жінки				Річна процентна ставка – 5%			
Вік x	D_x	Вік x	D_x	Вік x	D_x	Вік x	D_x
74	1481,417	10844,09	69,83807	965,0315	7808,602	6,320082	0,651425
75	1341.035	9362,677	73,25689	895,1935	6843,57	5,981679	0,667539
76	1203,92	8021,642	74,11294	821,9366	5948,377	5,662939	0,682717
77	1072,477	6817,723	74,23195	747,8236	5126,44	5,356987	0,697286
78	947,1748	5745,245	74,95545	673,5917	4378,617	5,065666	0,711159
79	827,1158	1798,071	68,58154	598,6362	3705,025	4,800966	0,723764
80	719,1478	3970,955	63.43257	530,0547	3106,389	4,521751	0,737059
81	621,4701	3251,807	60,15575	466,6221	2576,334	4,232444	0,750836
82	531,7205	2630,337	56,19313	406,4664	2109,712	3,946842	0,764436
83	450,2074	2098,617	52,38849	350,2732	1703,246	3,661444	0,778026
84	376,3804	1648,409	49,81475	297,8847	1352,972	3,379636	0,791446
85	308,6428	1272,029	45,18417	248,07	1055,088	3,121362	0,803745
86	248,7613	963,386	41,85671	202,8858	807,0176	2,872732	0,815584
87	195,0589	714,6247	35,7529	161,0291	604,1317	2,663636	0,825541
88	150,0174	519,5658	29,94041	125,2762	443,1026	2,463369	0,835078
89	112,9333	369,5484	24,5137	95,3358	317,8264	2,27227	0,844178
90	83,04186	256,615	19,57132	70,8221	222,4906	2,090189	0,852848
91	59,51617	173,5732	15,22382	51,25078	151,6685	1,916403	0,861124
92	41,45824	114,057	11,4814	36,02695	100,4177	1,75113	0,868994
93	28,00264	72,59875	8,386982	24,54555	64,39079	1,592569	0,876544
94	18,28219	44,59612	5,920337	16,15857	39,84524	1,43932	0,883842
95	11,49128	26,31392	4,011594	10,23823	23,68667	1,289904	0,890957
96	6,932479	14,82264	2,605732	6,226639	13,44843	1,138145	0,898184
97	3,996629	7,890166	1,609718	3,620907	7,221796	0,974205	0,90599
98	2,196595	3,893537	0,950181	2,011188	3,600889	0,772533	0,915594
99	1,141814	1,696942	0,532314	1,061007	1,589701	0,48618	0,92923
100	0,555128	0,555128	0,528693	0,528693	0,528693	0	0,952381

Навчально-методичне видання
(українською мовою)

Очеретін Дмитро Валерійович
Чижевська Тетяна Вікторівна

АКТУАРНА МАТЕМАТИКА

Методичні рекомендації до лабораторних занять
для здобувачів ступеня вищої освіти магістра спеціальності “Економіка”
освітньо-професійної програми “Економічна кібернетика”

Рецензент *А.В. Бакурова*
Відповідальний за випуск *Н.К. Максишко*
Коректор *Д.В. Очеретін*