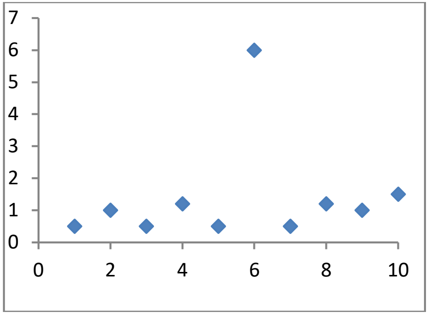
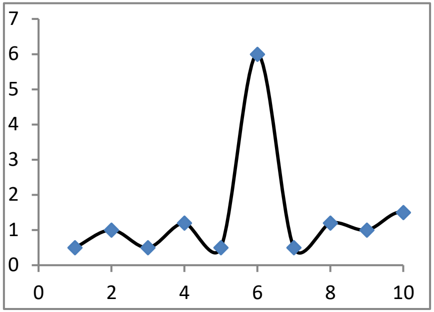
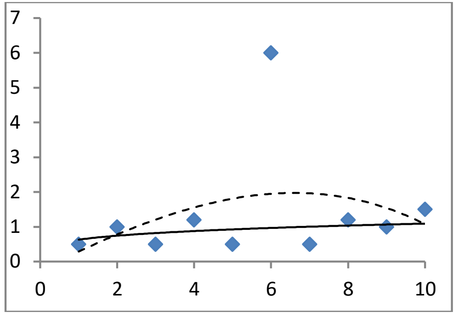
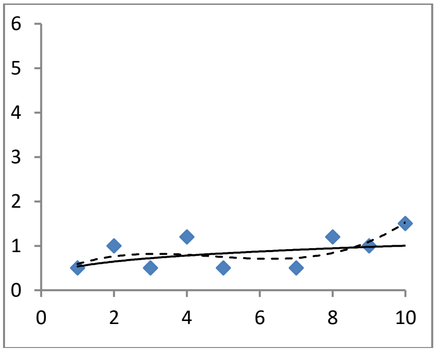
Інтерполяція і апроксимація







Чим відрізняється інтерполяція від апроксимації?
Які методи інтерполяції Вам відомі? апроксимації?
У яких випадках інтерполяція є невиправданою?



Точкове квадратичне апроксимування функцій однієї змінної. Вибір емпіричної функції.

Постановка задачі. Розглянемо сукупність точок на площині $\left\{\left(x_k, y_k\right)\right\}_{k=1}^{n}$, де $y_k = f(x_k), k = \overline{1,n}$. Тут функція однієї змінної $f(x)$ визначає експериментальні дані. Потрібно знайти емпіричну функцію

$$y = \tilde{f}\left(x, a_1, a_2, ..., a_m\right), \tag{1}$$

що апроксимує задану множину точок і визначається невідомими параметрами $a_1, a_2, ..., a_m$, при цьому їх кількість $m \ll n$. (Якщо $m = n$, то функція (1) є інтерполюючою) Відхилення в кожній точці визначається як

$$\varepsilon_k = \left|\tilde{f}\left(x_k, a_1, a_2, ..., a_m\right) - y_k\right| = \left|\tilde{f}\left(x_k, a_1, a_2, ..., a_m\right) - f(x_k)\right|,\ k = \overline{1,n}. \tag{2}$$

Загальне відхилення може характеризуватися однією із формул

$$\varepsilon = \max_{k=\overline{1,n}} \varepsilon_k, \quad \varepsilon = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k, \quad \varepsilon = \sum_{k=1}^{n} \left(\varepsilon_k\right)^2. \tag{3}$$

Метою є мінімізація загального відхилення.

Формула $\varepsilon = \sum_{k=1}^{n} \left(\varepsilon_k\right)^2$ задає *квадратичне відхилення*. А метод, що дозволяє знайти апроксимуючу функцію (1), яка відповідає мінімальному значенню квадратичного відхилення, називають *методом найменших квадратів (МНК)*.

Точкове квадратичне апроксимування функції однієї змінної многочленом

Розглянемо сукупність точок на площині $\{(x_k, y_k)\}_{k=0}^{n}$, де $y_k = f(x_k), k = \overline{0,n}$. За емпіричну функцію оберемо многочлен

$$y = P(x, a_0, a_1, ..., a_m) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_i x^i + ... + a_m x^m. \tag{1a}$$

У загальному випадку, МНК потребує виконання обмеження $m \le n$. Однак на практиці, $m \ll n$. Квадратичне відхилення визначається формулою

$$\begin{gathered} Q(a_0, a_1, ..., a_m) = \sum_{k=0}^{n} \left(P(x_k, a_0, a_1, ..., a_m) - y_k \right)^2 = \\ = \sum_{k=0}^{n} \left(a_0 + a_1 x_k + a_2 (x_k)^2 + ... + a_i (x_k)^i + ... + a_m (x_k)^m - y_k \right)^2. \end{gathered} \tag{4}$$

Потрібно знайти мінімум зазначеної функції.

Знайдемо критичну точку функції Q:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial Q}{\partial a_0} = \sum\limits_{k=0}^{n}\Big(a_0 + a_1 x_k + a_2\left(x_k\right)^2 + \ldots + a_i\left(x_k\right)^i + \ldots + a_m\left(x_k\right)^m - y_k\Big)\cdot 1 = 0; \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial Q}{\partial a_1} = \sum\limits_{k=0}^{n}\Big(a_0 + a_1 x_k + a_2\left(x_k\right)^2 + \ldots + a_i\left(x_k\right)^i + \ldots + a_m\left(x_k\right)^m - y_k\Big)\cdot x_k = 0; \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial Q}{\partial a_2} = \sum\limits_{k=0}^{n}\Big(a_0 + a_1 x_k + a_2\left(x_k\right)^2 + \ldots + a_i\left(x_k\right)^i + \ldots + a_m\left(x_k\right)^m - y_k\Big)\cdot \left(x_k\right)^2 = 0; \\ \ldots \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial Q}{\partial a_i} = \sum\limits_{k=0}^{n}\Big(a_0 + a_1 x_k + a_2\left(x_k\right)^2 + \ldots + a_i\left(x_k\right)^i + \ldots + a_m\left(x_k\right)^m - y_k\Big)\cdot \left(x_k\right)^i = 0; \\ \ldots \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial Q}{\partial a_m} = \sum\limits_{k=0}^{n}\Big(a_0 + a_1 x_k + a_2\left(x_k\right)^2 + \ldots + a_i\left(x_k\right)^i + \ldots + a_m\left(x_k\right)^m - y_k\Big)\cdot \left(x_k\right)^m = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Отриману систему можна переписати у вигляді

$$
\left\{
\begin{array}{c}
a_0 \cdot (n+1) + a_1 \cdot \sum_{k=0}^{n} x_k + a_2 \cdot \sum_{k=0}^{n} \left(x_k\right)^2 + \ldots + a_i \cdot \sum_{k=0}^{n} \left(x_k\right)^i + \ldots + a_m \cdot \sum_{k=0}^{n} \left(x_k\right)^m = \sum_{k=0}^{n} y_k; \\
a_0 \cdot \sum_{k=0}^{n} x_k + a_1 \cdot \sum_{k=0}^{n} \left(x_k\right)^2 + a_2 \cdot \sum_{k=0}^{n} \left(x_k\right)^3 + \ldots + a_i \cdot \sum_{k=0}^{n} \left(x_k\right)^{i+1} + \ldots + a_m \cdot \sum_{k=0}^{n} \left(x_k\right)^{m+1} = \sum_{k=0}^{n} x_k y_k; \\
a_0 \cdot \sum_{k=0}^{n} \left(x_k\right)^2 + a_1 \cdot \sum_{k=0}^{n} \left(x_k\right)^3 + a_2 \cdot \sum_{k=0}^{n} \left(x_k\right)^4 + \ldots + a_i \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(x_k\right)^{i+2} + \ldots + a_m \cdot \sum_{k=0}^{n} \left(x_k\right)^{m+2} = \sum_{k=0}^{n} \left(x_k\right)^2 y_k; \\
\ldots \\
a_0 \cdot \sum_{k=0}^{n} \left(x_k\right)^i + a_1 \cdot \sum_{k=0}^{n} \left(x_k\right)^{1+i} + a_2 \cdot \sum_{k=0}^{n} \left(x_k\right)^{2+i} + \ldots + a_i \cdot \sum_{k=0}^{n} \left(x_k\right)^{2i} + \ldots + a_m \cdot \sum_{k=0}^{n} \left(x_k\right)^{m+i} = \sum_{k=0}^{n} \left(x_k\right)^i y_k; \\
\ldots \\
a_0 \cdot \sum_{k=0}^{n} \left(x_k\right)^m + a_1 \cdot \sum_{k=0}^{n} \left(x_k\right)^{1+m} + a_2 \cdot \sum_{k=0}^{n} \left(x_k\right)^{2+m} + \ldots + a_i \cdot \sum_{k=0}^{n} \left(x_k\right)^{i+m} + \ldots + a_m \cdot \sum_{k=0}^{n} \left(x_k\right)^{2m} = \sum_{k=0}^{n} \left(x_k\right)^m y_k.
\end{array}
\right.
\tag{6}
$$

Уведемо позначення

$$S_r = \sum_{k=0}^{n} \left(x_k\right)^r, \; r = \overline{0,2m},$$

$$T_p = \sum_{k=0}^{n} \left(x_k\right)^p y_k, \; p = \overline{0,m},$$

тоді систему (6) можна переписати у вигляді

$$\begin{cases} a_0 \cdot S_0 + a_1 \cdot S_1 + a_2 \cdot S_2 + \ldots + a_i \cdot S_i + \ldots + a_m \cdot S_m = T_0; \\ a_0 \cdot S_1 + a_1 \cdot S_2 + a_2 \cdot S_3 + \ldots + a_i \cdot S_{i+1} + \ldots + a_m \cdot S_{m+1} = T_1; \\ a_0 \cdot S_2 + a_1 \cdot S_3 + a_2 \cdot S_4 + \ldots + a_i \cdot S_{i+2} + \ldots + a_m \cdot S_{m+2} = T_2; \\ \ldots \\ a_0 \cdot S_i + a_1 \cdot S_{1+i} + a_2 \cdot S_{2+i} + \ldots + a_i \cdot S_{2i} + \ldots + a_m \cdot S_{m+i} = T_i; \\ \ldots \\ a_0 \cdot S_m + a_1 \cdot S_{1+m} + a_2 \cdot S_{2+m} + \ldots + a_i \cdot S_{i+m} + \ldots + a_m \cdot S_{2m} = T_m. \end{cases} \tag{7}$$

<u>**І спосіб.**</u> Систему (7) можна подати в матричній формі

$$Z \cdot A = B, \tag{8}$$

$$Z = \begin{pmatrix} S_0 & S_1 & S_2 & \ldots & S_m \\ S_1 & S_2 & S_3 & \ldots & S_{m+1} \\ S_2 & S_3 & S_4 & \ldots & S_{m+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ S_m & S_{m+1} & S_{m+2} & \ldots & S_{2m} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} T_0 \\ T_1 \\ T_2 \\ \ldots \\ T_m \end{pmatrix}. \tag{9}$$

За допомогою II способу нижче буде доведено, що СЛАР (7) має єдиний розв'язок, якщо всі абсциси заданих точок - нерівні. Оскільки функція Q додатно визначена, то критична точка є точкою локального мінімуму даної функції. Відповідну точку мінімуму можна знайти за формулою

$$A = Z^{-1} B. \tag{10}$$

Якщо $m = n$, то апроксимуюча функція S є інтерполяційним многочленом Лагранжа для заданої системи точок.

Для використання засобів MS Excel зручно застосувати таблицю

x^0	x^1	x^2	$\dots$	x^{2m}	y	xy	x^2y	$\dots$	$x^m y$
1	x_0	$(x_0)^2$	$\dots$	$(x_0)^{2m}$	y_0	x_0y_0	$(x_0)^2 y_0$	$\dots$	$(x_0)^m y_0$
1	x_1	$(x_1)^2$	$\dots$	$(x_1)^{2m}$	y_1	x_1y_1	$(x_1)^2 y_1$	$\dots$	$(x_1)^m y_1$
1	x_2	$(x_2)^2$	$\dots$	$(x_2)^{2m}$	y_2	x_2y_2	$(x_2)^2 y_2$	$\dots$	$(x_2)^m y_2$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
1	x_n	$(x_n)^2$		$(x_n)^{2m}$	y_n	x_ny_n	$(x_n)^2 y_n$		$(x_n)^2 y_n$
S_0	S_1	S_2		S_m	T_0	T_1	T_2		T_m

II спосіб. Подамо матричну форму системи (7) в інший спосіб. Для цього розглянемо матрицю M, вектор Y та матричні добутки

$$M = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & (x_0)^2 & ... & (x_0)^m \\ 1 & x_1 & (x_1)^2 & & (x_1)^m \\ 1 & x_2 & (x_2)^2 & & (x_2)^m \\ ... & ... & ... & & \\ 1 & x_n & (x_n)^2 & & (x_n)^m \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_m \end{pmatrix}, \tag{11}$$

$$M^t M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ (x_0)^2 & (x_1)^2 & (x_2)^2 & \dots & (x_n)^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (x_0)^m & (x_1)^m & (x_2)^m & \dots & (x_n)^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_0 & (x_0)^2 & \dots & (x_0)^m \\ 1 & x_1 & (x_1)^2 & \dots & (x_1)^m \\ 1 & x_2 & (x_2)^2 & \dots & (x_2)^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & (x_n)^2 & \dots & (x_n)^m \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} n+1 & \sum_{k=0}^{n} x_k & \sum_{k=0}^{n} (x_k)^2 & \dots & \sum_{k=0}^{n} (x_k)^m \\ \sum_{k=0}^{n} x_k & \sum_{k=0}^{n} (x_k)^2 & \sum_{k=0}^{n} (x_k)^3 & \dots & \sum_{k=0}^{n} (x_k)^{m+1} \\ \sum_{k=0}^{n} (x_k)^2 & \sum_{k=0}^{n} (x_k)^3 & \sum_{k=0}^{n} (x_k)^4 & \dots & \sum_{k=0}^{n} (x_k)^{m+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{k=0}^{n} (x_k)^m & \sum_{k=0}^{n} (x_k)^{m+1} & \sum_{k=0}^{n} (x_k)^{m+2} & \dots & \sum_{k=0}^{n} (x_k)^{2m} \end{pmatrix} = Z.$$

$$M^tY = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ (x_0)^2 & (x_1)^2 & (x_2)^2 & \dots & (x_n)^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (x_0)^m & (x_1)^m & (x_2)^m & \dots & (x_n)^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n} y_k \\ \sum_{k=0}^{n} x_k y_k \\ \sum_{k=0}^{n} (x_k)^2 y_k \\ \dots \\ \sum_{k=0}^{n} (x_k)^m y_k \end{pmatrix} = B.$$

Отже, система (7) може бути поданою у матричному вигляді в наступний спосіб:

$$M^tMA = M^tY, \tag{12}$$

а її розв'язок –

$$A = \left(M^tM\right)^{-1} M^tY. \tag{13}$$

Якщо абсциси заданих точок нерівні, то визначник добутку матриць, утворених із стовпців (рядків) матриці Вандермонда M^tM, не дорівнює нулю. Це існування єдиного розв'язку СЛАР (7).

Вибір способу подання системи (7) у матричній формі (8) або (12), а її розв'язку у вигляді (9) або (13) залежить від Ваших власних пріоритетів.

Точкове квадратичне апроксимування функції однієї змінної лінійною комбінацією лінійно незалежних функцій

Розглянемо сукупність точок на площині $\left\{\left(x_k, y_k\right)\right\}_{k=0}^{n}$, де $y_k = f(x_k), k=\overline{0,n}$. За емпіричну функцію оберемо лінійну комбінацію лінійно незалежних функцій $\left\{\varphi_i(x_k)\right\}_{i=0}^{m}$

$$y = P\left(x, a_0, a_1, ..., a_m\right) = a_0\varphi_0(x_k) + a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + ... + a_m\varphi_{\text{ь}}(x)..$$

У загальному випадку $m \le n$. На практиці, $m \ll n$. Квадратичне відхилення визначається формулою

$$Q\left(a_0, a_1, ..., a_m\right) = \sum_{k=0}^{n}\left(P\left(x_k, a_0, a_1, ..., a_m\right) - y_k\right)^2 = \qquad (14)$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\left(a_0\varphi_0(x_k) + a_1\varphi_1(x_k) + a_2\varphi_2(x_k) + ... + a_m\varphi_m(x_k) - y_k\right)^2.$$

Потрібно знайти мінімум зазначеної функції.

Введемо позначення

$$S_{r,p} = \sum_{k=0}^{n}\varphi_r(x_k)\varphi_p(x_k),\ T_p = \sum_{k=0}^{n}\varphi_p(x_k)y_k,\ r,p=\overline{0,m},$$

тоді точку мінімуму функції Q можна знайти за формулою

$$A = W^{-1}B, \qquad (15)$$

де $W = \left(S_{r,p}\right)_{r,p=0}^{m}$, $B = \left(T_0\ T_1\ T_2\ ...T_m\right)^t$.

Двопараметрична точкова квадратична апроксимація функції однієї змінної

Розглянемо лінійну функцію (1а) з двома параметрами a, b, тобто

$$y = P(x, a, b) = a + bx.$$

Це найпростіший випадок МНК. Однак його можна поширити на випадки інших функцій, які після логарифмування і певних замін зводяться до лінійного випадку.

Розглянемо на прикладах. Розглянемо апроксимуючу функцію виду $y = ae^{bx}$. Після логарифмування отримаємо

$$\ln y = \ln a + bx.$$

Позначення $Y = \ln y,\ A = \ln a,\ B = b,\ X = x$ зводять розв'язання до лінійної функції $Y = A + BX$.

Розглянемо іншу функцію $y = ax^b$, тоді $\ln y = \ln a + b \ln x$. Позначення $Y = \ln y,\ A = \ln a,\ B = b,\ X = \ln x$ зводять розв'язання до лінійної функції $Y = A + BX$.

№ п/п	Функция	Y	X	A	B
1	$y = a + b/x$	y	$1/x$	a	b
2	$y = 1/(a + bx)$	$1/y$	x	a	b
3	$y = x/(a + bx)$	x/y	x	a	b
4	$y = ab^x$	$\ln y$	x	$\ln a$	$\ln b$
5	$y = ae^{bx}$	$\ln y$	x	$\ln a$	b
6	$y = 1/(a + be^{\;\;x})$	$1/y$	$e^{\;\;x}$	a	b
7	$y = ax^b$	$\ln y$	$\ln x$	$\ln a$	b
8	$y = a + b\ln x$	y	$\ln x$	a	b
9	$y = a/(b + x)$	$1/y$	x	b/a	$1/a$
10	$y = ax/(b + x)$	$1/y$	$1/x$	$1/a$	b/a
11	$y = ae^{b/x}$	$\ln y$	$1/x$	$\ln a$	b
12	$y = a + bx^n$	y	x^n	a	b