

**О.В. Хоменко**

**Математичні задачі енергетики.**

**Моделювання і аналіз  
усталених режимів роботи  
електричних систем**

**Міністерство освіти і науки України  
Національний технічний університет України  
“Київський політехнічний інститут”**

**О.В. Хоменко**

**Математичні задачі енергетики.**

**Моделювання і аналіз  
усталених режимів роботи  
електричних систем**

*Затверджено Вченою радою НТУУ «КПІ» як навчальний посібник для студентів,  
які навчаються за спеціальністю  
«Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка»*

**Київ  
НТУУ «КПІ»  
2016**

УДК 621.311

*Гриф надано Вченою радою НТУУ "КПІ"  
(Протокол № 5 від 11.04.2016 р.)*

Рецензенти:

- Ю.І. Тугай, доктор техн. наук, доцент,  
завідувач відділом оптимізації систем електропостачання  
ІЕД НАН України
- А.М. Скрипник, кандидат техн. наук, доцент кафедри електропостачання  
ім. проф. В.М. Синькова ННІ автоматики, енергетики і  
енергозбереження НУБіП України

Відповідальний редактор  
Яндульський О.С., доктор техн. наук, професор  
Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут»

### **Навчальне електронне видання**

#### **Хоменко О.В.**

Математичні задачі енергетики. Моделювання і аналіз усталених режимів роботи електричних систем [Електронне видання]: навч. посіб. / О.В. Хоменко. – К.: НТУУ «КПІ», 2016. – 109 с. – Бібліогр.: с. 109.

Розглянуті питання формування складових математичної моделі електричної мережі ЕЕС у вигляді схем заміщення та розрахункових схем, систем лінійних і нелінійних рівнянь усталеного режиму. Наведені методи розв'язання таких систем рівнянь – методи Гауса, подвійної факторизації, Зейделя, Ньютона-Рафсона. На наскрізному розрахунковому прикладі електричної мережі докладно показані етапи моделювання усталених режимів, застосування методів розв'язання систем рівнянь і аналіз результатів розрахунків.

Призначений для бакалаврів спеціальності "Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка" спеціалізації "Системи управління виробництвом та розподілом електроенергії".

**УДК 621.311**

О.В. Хоменко, 2016

## Зміст

<b>ПЕРЕДМОВА</b> .....	<b>5</b>
<b>РОЗДІЛ 1. СХЕМА ЗАМІЩЕННЯ І РОЗРАХУНКОВА СХЕМА ЕЛЕКТРИЧНОЇ МЕРЕЖІ. ОБЧИСЛЕННЯ ПАРАМЕТРІВ ЕЛЕМЕНТІВ СХЕМИ ЗАМІЩЕННЯ</b> .....	<b>7</b>
1.1. ФОРМУВАННЯ СХЕМИ ЗАМІЩЕННЯ ЕЛЕКТРИЧНОЇ МЕРЕЖІ. ОБЧИСЛЕННЯ ПАРАМЕТРІВ ЇЇ ЕЛЕМЕНТІВ.....	8
1.2. ПРИКЛАД ФОРМУВАННЯ СХЕМИ ЗАМІЩЕННЯ ЕЛЕКТРИЧНОЇ МЕРЕЖІ .....	11
1.3. КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ ДО РОЗДІЛУ 1: .....	17
<b>РОЗДІЛ 2. ОБЧИСЛЕННЯ ВЛАСНИХ І ВЗАЄМНИХ ПРОВІДНОСТЕЙ ВУЗЛІВ ЕЛЕКТРИЧНОЇ МЕРЕЖІ. СКЛАДАННЯ РІВНЯНЬ УСТАЛЕНОГО РЕЖИМУ У ФОРМІ БАЛАНСУ СТРУМІВ І БАЛАНСУ ПОТУЖНОСТЕЙ</b> .....	<b>18</b>
2.1. ФОРМУВАННЯ РІВНЯНЬ УСТАЛЕНОГО РЕЖИМУ .....	18
2.2. ПРИКЛАД ФОРМУВАННЯ РІВНЯНЬ УСТАЛЕНОГО РЕЖИМУ.....	21
2.3. КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ ДО РОЗДІЛУ 2: .....	25
<b>РОЗДІЛ 3. ФОРМУВАННЯ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ УСТАЛЕНОГО РЕЖИМУ РОБОТИ ЕЛЕКТРИЧНОЇ МЕРЕЖІ. МАТРИЦЯ ПРОВІДНОСТЕЙ.</b> .....	<b>27</b>
3.1. ФОРМУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ РЕЖИМУ РОБОТИ ЕЛЕКТРИЧНОЇ МЕРЕЖІ .....	27
3.2. ПРИКЛАД ФОРМУВАННЯ СИСТЕМ РІВНЯНЬ УСТАЛЕНОГО РЕЖИМУ .....	30
3.3. КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ ДО РОЗДІЛУ 3: .....	38
<b>РОЗДІЛ 4. РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ УСТАЛЕНОГО РЕЖИМУ РОБОТИ ЕЛЕКТРИЧНОЇ МЕРЕЖІ. МЕТОД ГАУСА</b> .....	<b>39</b>
4.1. АЛГОРИТМ МЕТОДУ ГАУСА ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ УСТАЛЕНОГО РЕЖИМУ РОБОТИ ЕЛЕКТРИЧНОЇ МЕРЕЖІ .....	39
4.2. ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ УСТАЛЕНОГО РЕЖИМУ ЕЛЕКТРИЧНОЇ МЕРЕЖІ МЕТОДОМ ГАУСА .....	41
4.3. КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ ДО РОЗДІЛУ 4 .....	51
<b>РОЗДІЛ 5. РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ УСТАЛЕНОГО РЕЖИМУ РОБОТИ ЕЛЕКТРИЧНОЇ МЕРЕЖІ. МЕТОД ПОДВІЙНОЇ ФАКТОРИЗАЦІЇ</b> .....	<b>52</b>
5.1. МЕТОД ПОДВІЙНОЇ ФАКТОРИЗАЦІЇ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ УСТАЛЕНОГО РЕЖИМУ .....	52
5.2. ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ УСТАЛЕНОГО РЕЖИМУ МЕТОДОМ ПОДВІЙНОЇ ФАКТОРИЗАЦІЇ .....	55
5.3. КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ ДО РОЗДІЛУ 5: .....	63
<b>РОЗДІЛ 6. РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМИ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ УСТАЛЕНОГО РЕЖИМУ РОБОТИ ЕЛЕКТРИЧНОЇ МЕРЕЖІ. МЕТОД ЗЕЙДЕЛЯ</b> .....	<b>64</b>
6.1. АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ УСТАЛЕНОГО РЕЖИМУ МЕТОДОМ ЗЕЙДЕЛЯ .....	64
6.2. ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМИ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ УСТАЛЕНОГО РЕЖИМУ МЕТОДОМ ЗЕЙДЕЛЯ.....	67
6.3. КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ ДО РОЗДІЛУ 6: .....	74
<b>РОЗДІЛ 7. РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМИ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ УСТАЛЕНОГО РЕЖИМУ РОБОТИ ЕЛЕКТРИЧНОЇ МЕРЕЖІ. МЕТОД НЬЮТОНА-РАФСОНА.</b> .....	<b>75</b>
7.1. ЕТАП 1: ПІДГОТОВЧІ ПЕРЕТВОРЕННЯ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ .....	75
7.2. ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ ПІДГОТОВЧИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ.....	79
7.3. КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ ДО РОЗДІЛУ 7.1. ....	85
7.4. ЕТАП 2: РЕАЛІЗАЦІЯ АЛГОРИТМУ МЕТОДУ МЕТОДУ НЬЮТОНА-РАФСОНА.....	86
7.5. ПРИКЛАД РЕАЛІЗАЦІЇ АЛГОРИТМУ МЕТОДУ НЬЮТОНА-РАФСОНА.....	87
7.6. КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ ДО РОЗДІЛУ 7.4. ....	98
<b>РОЗДІЛ 8. ОБЧИСЛЕННЯ ПАРАМЕТРІВ РЕЖИМУ РОБОТИ ЕЛЕКТРИЧНОЇ МЕРЕЖІ</b> .....	<b>99</b>
8.1. ЗАКЛЮЧНІ ОБЧИСЛЕННЯ ПАРАМЕТРІВ РЕЖИМУ .....	99
8.2. ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ ЗАКЛЮЧНИХ ОБЧИСЛЕНЬ ПАРАМЕТРІВ РЕЖИМУ .....	103
8.3. КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ ДО РОЗДІЛУ 8.....	106
<b>ДОДАТКИ</b> .....	<b>107</b>
<b>БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК</b> .....	<b>109</b>

## Передмова

Управління процесами, що відбуваються в електроенергетичній системі, потребує постійного визначення технічних умов роботи системи, аналізу її поточних і перспективних режимів. Одним із напрямків розв'язання цієї задачі в сучасних умовах є *моделювання* режимів, в тому числі *усталених*. При цьому обчислюються і аналізуються значення основних параметрів режиму – напруги у вузлах електричної мережі, струморозподіл та потокорозподіл в елементах мережі, втрати активної потужності в окремих елементах мережі і сумарні втрати в мережі в цілому тощо. Параметри режиму визначаються на основі схеми заміщення і розрахункової схеми електричної мережі та її параметрів, електричних навантажень споживачів і джерел електроенергії. При моделюванні режимів електричної мережі параметри схеми та частина параметрів режиму відома і незмінна, інша частина параметрів режиму потребує свого визначення в ході розрахунків.

З математичної точки зору задача полягає у формуванні та розв'язанні системи алгебраїчних рівнянь з комплексними коефіцієнтами та невідомими. Це *рівняння усталеного режиму* електричної мережі. Вони визначають аналітичну залежність між заданими, відомими та невідомими параметрами схеми і режиму.

*Математична модель* електричної мережі складається з двох взаємозв'язаних складових:

- *модель схеми мережі*, яка представляється у формі схем заміщення і розрахункових схем. Описує послідовність з'єднань елементів мережі, їх параметри і властивості.
- *модель режиму роботи* електричної мережі. Представляється як система лінійних або нелінійних алгебраїчних рівнянь, які зв'язують задані, відомі і невідомі параметри схеми і режиму. Вони описують найсуттєвіші взаємозв'язки між цими параметрами, відображають дію засадничих законів електротехніки в електричних мережах.

У сучасному розумінні математична модель електричної мережі представляється як *комплекс комп'ютерних програм*, які реалізують методи і алгоритми формування складових математичної моделі і розв'язання відповідних систем рівнянь усталеного режиму.

Основним результатом розв'язання системи рівнянь усталеного режиму є значення рівнів напруг у вузлах електричної мережі. Для більш повної характеристики режиму виконуються додаткові *заключні обчислення параметрів* режиму. Вони передбачають: розрахунок струмів у вузлах і ділянках електричної мережі (струморозподіл), розрахунок потоків потужності у вузлах і ділянках мережі (потокорозподіл), визначення втрат активної потужності в окремих елементах електричної мережі і сумарних втрат в мережі в цілому, оцінку балансу потужностей в мережі тощо.

Методичний *посібник містить* стислий узагальнений теоретичний матеріал і *докладні* розрахункові приклади формування складових математичної моделі простої електричної мережі. На *наскрізному* прикладі електричної мережі розглянуто складання схеми заміщення мережі, визначення параметрів її елементів і формування розрахункової схеми. Показано формування систем рівнянь усталеного режиму (з комплексними і дійсними складовими). Для їх розв'язання застосовані *прямі* математичні методи (метод Гауса, метод подвійної факторизації) і *ітераційні* методи (методи Зейделя і Ньютона-Рафсона). Основним результатом розв'язання системи рівнянь усталеного режиму є рівні напруг у вузлах мережі.

Заключні обчислення параметрів режиму підтверджують коректність і правильність проведених розрахунків і дозволяють повно оцінити режим роботи електричної мережі.

## **Розділ 1. Схема заміщення і розрахункова схема електричної мережі. Обчислення параметрів елементів схеми заміщення**

*Розглядаються питання розробки складових математичної моделі електричної мережі у вигляді схем заміщення і розрахункових схем.*

Керування режимами роботи електроенергетичних систем потребує обробки й аналізу великих обсягів різномірної інформації про конфігурацію електричної мережі, параметри її елементів, параметри режимів роботи електричної мережі тощо. Один із важливих засобів вирішення цієї проблеми - використання математичних моделей об'єктів і процесів в них для отримання, обробки й аналізу інформації, прийняття відповідних рішень щодо керування електроенергетичними системами.

*Математична модель являє собою систему алгебраїчних або диференціальних рівнянь, яка описує основні взаємозв'язки між параметрами модельованого об'єкта. У сучасному розумінні вона включає системи рівнянь, що описують об'єкт, методи розв'язання цих рівнянь, алгоритми та комп'ютерні програми, які реалізують відповідні методи. Математична модель електричної мережі для аналізу усталеного режиму її роботи складається із двох взаємозв'язаних елементів.*

*А). Модель конфігурації мережі. Описує зв'язки між елементами мережі, їх параметри і властивості. Подається здебільшого у вигляді схем заміщення та розрахункових схем. Однією із форм подання моделі конфігурації є також матриця провідностей.*

*Б). Модель режиму роботи електричної мережі. Подається у вигляді системи рівнянь усталеного режиму. Це алгебричні рівняння з комплексними складовими, що зв'язують задані, відомі та невідомі параметри режиму і схеми заміщення.*

## 1.1. Формування схеми заміщення електричної мережі.

### Обчислення параметрів її елементів

Схема заміщення електричної мережі формується із схем заміщення елементів мережі (лінії електропередач (ЛЕП), трансформатори, вузли навантажень і генерації тощо) відповідно до послідовності їх з'єднання [3, 7].

Для розрахунків усталеного режиму ділянки ліній електропередач подають  $\Pi$  - подібною схемою заміщення (рис. 1.1, а).

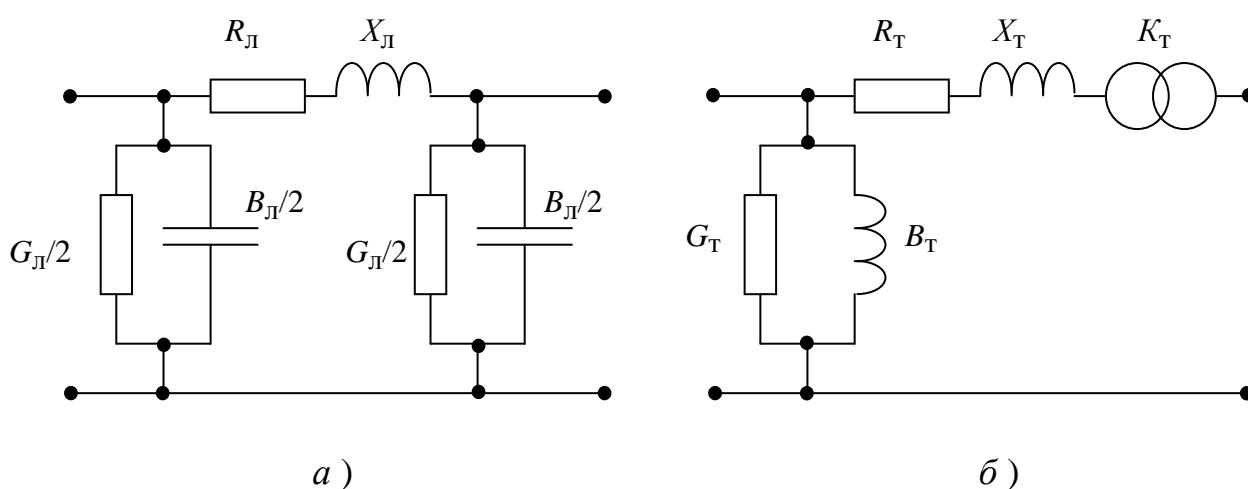


Рис. 1.1. - Схеми заміщення елементів електричної мережі

Схема заміщення ЛЕП складається із повздовжніх параметрів - активний і реактивний опори ( $R_L$ ,  $X_L$ ) та поперечних параметрів – активна і реактивна провідність ( $G_L$ ,  $B_L$ ). Ці параметри обчислюються на основі довідкових даних (див. Додатки) за формулами:

$$- \text{активний опір ділянки ЛЕП (Ом):} \quad R_L = z_0 l; \quad (1.1)$$

$$- \text{реактивний опір ділянки ЛЕП (Ом):} \quad X_L = x_0 l; \quad (1.2)$$

$$- \text{активна поперечна провідність (См):} \quad G_L = g_0 l; \quad (1.3)$$

$$- \text{реактивна поперечна провідність (См):} \quad B_L = b_0 l. \quad (1.4)$$



У формулах (1.1) - (1.4):  $l$  — довжина ділянки ЛЕП, км;  $r_0, x_0, g_0, b_0$  — погонні опори і провідності 1 км проводу. Їх вибирають із довідкової таблиці для проводів відповідних марок. Вибираючи  $x_0, b_0$ , треба враховувати клас напруги ЛЕП, у якій використовується провід. Для мережі ЛЕП напругою 110 кВ і нижче можна знехтувати провідністю  $G_{л}$ , а для мережі 35 кВ і менше — і провідністю  $B_{л}$ .

При моделюванні визначаються і аналізуються такі параметри режиму ЛЕП:

- напруги у вузлах початку і кінця лінії  $\dot{U}_i, \dot{U}_j$ . Якщо ЛЕП під навантаженням, то напруги на початку і в кінці лінії відрізняються  $\dot{U}_i \neq \dot{U}_j$ ;
- струм в лінії  $\dot{I}_{ij} = (\dot{U}_i - \dot{U}_j) \cdot Y_{ij}$ . Тут  $Y_{ij}$  — повздовжня провідність лінії. Це величина, зворотна її опору  $Y_{ij} = 1/Z_{ij} = 1/(R_{ij} + jX_{ij})$ ;
- струми у поперечних провідностях  $I_i = U_i * Y_i$ ;  $I_j = U_j * Y_j$ ;
- потоки потужності в лінії. На початку і в кінці лінії вони відрізняються на величину втрат потужності в лінії. Потік потужності на початку лінії  $S_{ij(i)} = \dot{U}_i \cdot \dot{I}_{ij}^*$ , в кінці лінії  $\dot{S}_{ij(j)} = \dot{U}_j \cdot \dot{I}_{ij}^*$ ;
- втрати потужності в лінії  $\Delta \dot{S}_{ij} = \dot{S}_{ij(i)} - \dot{S}_{ij(j)}$ .

Для двохобмоткових трансформаторів і автотрансформаторів використовують  $\Gamma$ -подібну схему заміщення (рис. 1.1, б). Її параметри розраховують на основі довідкових даних (див. Додатки) за формулами:

$$\text{— активний опір (Ом):} \quad R_T = \Delta P_{к.з} U_{ном}^2 / S_T^2; \quad (1.5)$$

$$\text{— реактивний опір (Ом):} \quad X_T = U_p U_{ном}^2 / 100 S_m; \quad (1.6)$$

$$\text{— активна поперечна провідність (См):} \quad G_T = \Delta P_{x.x} / U_{ном}^2; \quad (1.7)$$

$$\text{— реактивна поперечна провідність (См):} \quad B_T = I_{x.x} S_T / 100 U_{ном}^2; \quad (1.8)$$

$$\text{— коефіцієнт трансформації:} \quad K_{ТНОМ} = U_{НОМ} / U_{НОМ}^H. \quad (1.9)$$

Якщо трансформатор має додаткові регульовальні відгалуження і пристрій регулювання напруги, то коефіцієнт трансформації визначається за формулою:

$$K_T = K_{Тном} \cdot (1 \pm n \cdot \Delta / 100). \quad (1.10)$$

У формулах (1.5)-(1.10):  $U_{ном}$ ,  $U_{ном}^H$  - номінальна напруга основного вводу обмоток високої (ВН) і низької (НН) напруг трансформатора, кВ;  $U_p$  - реактивна складова спаду напруги в трансформаторі, %. При розрахунках параметрів мережі 35 кВ і вище, припускають, що  $U_p \approx U_k$ ;  $S_T$  - номінальна потужність трансформатора, МВА;  $\Delta P_{к.з.}$ ,  $\Delta P_{х.х}$  - втрати потужності короткого замикання і холостого ходу, МВт;  $I_{х.х}$  - струм холостого ходу, %;  $n$  - номер регульовального відгалуження,  $\Delta$  - крок регулювання, %.

Можна використовувати також розрахункові дані  $R_T$ ,  $X_T$ , що наводяться у довідкових таблицях.

При моделюванні визначаються і аналізуються такі параметри режиму трансформаторів:

- напруги на вході і виході трансформатора (обмотки ВН і НН)  $\dot{U}_B, \dot{U}_H$ ,

$$\dot{U}_B = K_T \cdot \dot{U}_H;$$

- струми в обмотках трансформатора.

В обмотці ВН  $\dot{I}_B = (\dot{U}_B - \dot{U}_H * K_T) \cdot Y_T$ , в обмотці НН  $\dot{I}_H = \dot{I}_B \cdot K_T$ . Тут

$Y_T = 1/Z_T = 1/(R_T + j X_T)$  - повздовжня провідність трансформатора;

- втрати потужності в обмотках трансформатора  $\Delta S_T = \dot{I}_B^2 \cdot Z_T$ .

Спосіб завдання вузлових *навантажень* в схемах заміщення залежить від виду мережі і мети розрахунків. Навантаження задають постійним по модулю і фазі струмом, постійною потужністю, статичними характеристиками навантажень, постійною провідністю тощо.

*Джерела електроенергії* (генератори електростанцій (ЕС), батареї статичних конденсаторів (БСК), синхронні компенсатори (СК)) в схемах заміщення задають постійною активною і реактивною потужністю, постійними

активною потужністю і модулем напруги, постійними модулем і кутом напруги.

*Повна схема заміщення* електричної мережі складається із схем заміщення її елементів, які розташовуються в порядку їх з'єднання у вихідній схемі. Враховуючи класи напруг елементів мережі, схему заміщення можна *спростити* за рахунок нехтування деякими її елементами.

Схема заміщення є основою для формування *розрахункової схеми* електричної мережі, яка містить всю необхідну інформацію для подальшого моделювання режимів. Розрахункова схема описує послідовність з'єднання елементів мережі, їх параметри (опори, провідності, коефіцієнти трансформації тощо), навантаження і генерації у вузлах мережі, напруги в опорних вузлах тощо.

### 1.2. Приклад формування схеми заміщення електричної мережі

Схема з'єднань електричної мережі має наступний вигляд:

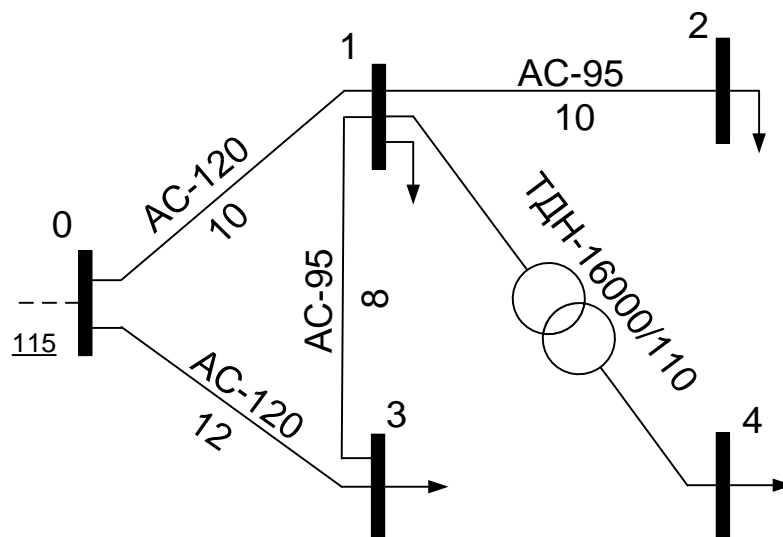


Рис. 1.2. - Приклад схеми електричних з'єднань

Задані потужності навантаження у вузлах мережі:

$$S_1 = P_1 + jQ_1 = 3 + j2 \text{ МВА};$$

$$S_2 = P_2 + jQ_2 = 5 + j2 \text{ МВА};$$

$$S_3 = P_3 + jQ_3 = 4 + j3 \text{ МВА};$$

$$S_4 = P_4 + jQ_4 = 1 + j0,3 \text{ МВА}.$$

Опорний вузол 0;  $U_0 = 115 + j0 \text{ кВ}$ .

*Опис* схеми: Електрична мережа живиться від шин підстанції (опорний вузол 0), включає елементи двох класів напруг:

- 110 кВ – вузли 0,1,2 і 3; ділянки 0-1, 1-2, 0-3, 1-3;
- 35 кВ – вузол 4.

Схема складається із чотирьох ЛЕП–110 кВ і одного понижувального трансформатора. Схема замкнена, має один контур, який утворений лініями 0-1, 1-3, 0-3, і дві радіальні лінії. ЛЕП виконані сталевалюмінієвими дротами марок АС-120 і АС-95. Тип трансформатора – ТДН-16000/110, його потужність 16000 кВА, напруга обмотки ВН - 110 кВ, обмотки НН - 35 кВ.

У вузлах мережі підключені споживачі електроенергії, задані постійними потужностями  $S_1, S_2, S_3, S_4$ .

Повна *схема заміщення* електричної мережі Рис. 1.2. для розрахунків усталених режимів роботи складається із схем заміщення її елементів (рис. 1.3). В схемах заміщення електричних мереж напругою, нижчою за 330 кВ, можна не враховувати параметр  $g_{ij}$  – активну складову поперечної провідності ЛЕП. Тоді спрощена схема заміщення заданої мережі 110-35 кВ набуває вигляду, як показано на рис. 1.4.

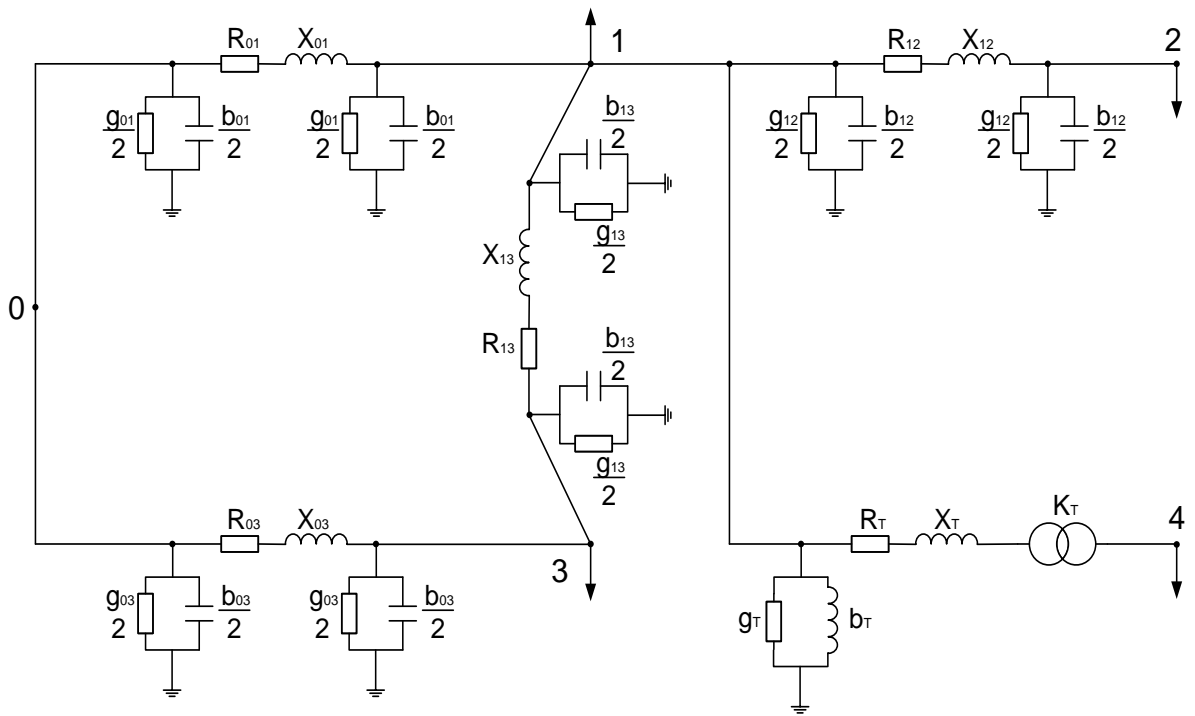


Рис. 1.3. - Повна схема заміщення електричної мережі

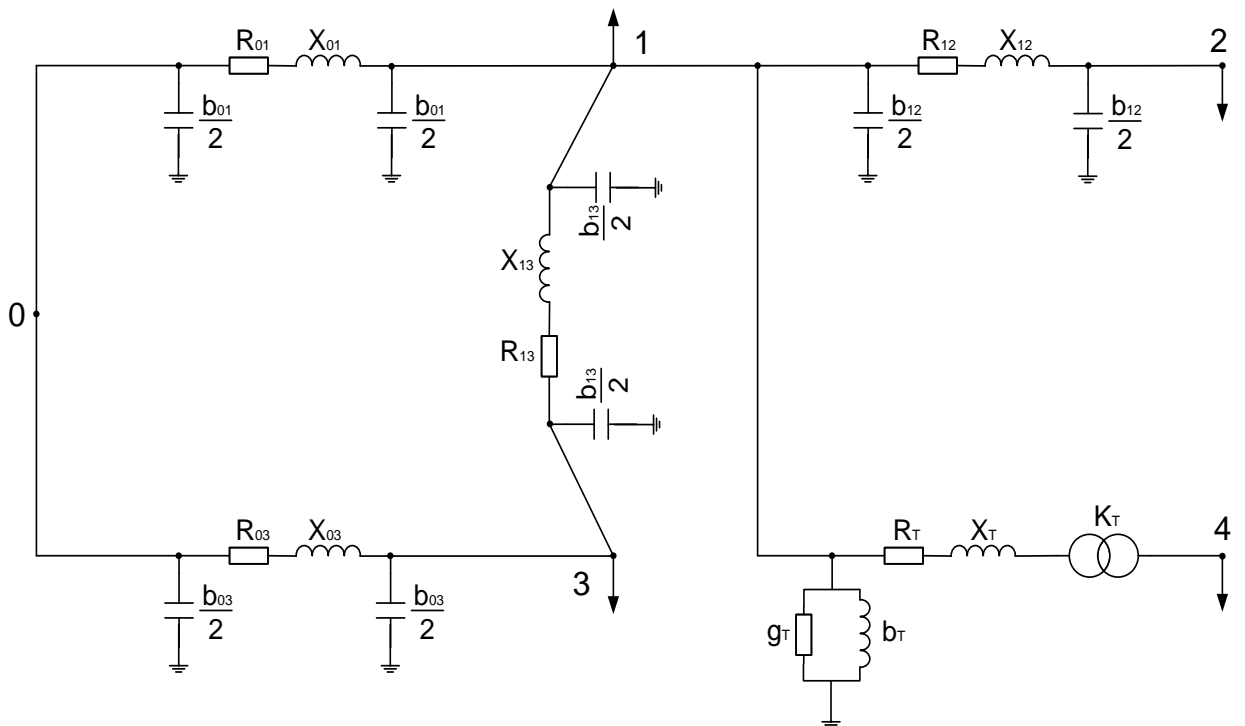


Рис. 1.4. - Спрощена схема заміщення

Схема заміщення заданої електричної мережі характеризується такими параметрами:

– повздовжні параметри: опори ділянок ЛЕП і трансформатора, коефіцієнт трансформації :

$$Z_{01} = R_{01} + jX_{01};$$

$$Z_{12} = R_{12} + jX_{12};$$

$$Z_{03} = R_{03} + jX_{03};$$

$$Z_{13} = R_{13} + jX_{13};$$

$$Z_T = R_T + jX_T; \quad K_{\text{ТНОМ}} = U_1/U_4;$$

– поперечні параметри: поперечні провідності ділянок ЛЕП і трансформатора:

$$Y_{01}^{\text{II}} = jb_{01}; \quad Y_{12}^{\text{II}} = jb_{12}; \quad Y_{03}^{\text{II}} = jb_{03}; \quad Y_{13}^{\text{II}} = jb_{13}; \quad Y_T^{\text{II}} = g_T + jb_T.$$

В довідковій таблиці 1 (див. Додатки) наведені такі параметри дротів (на 100 Км, для 110 кВ) [2]:

$$\text{АС-120} \text{ — } r_0 = 24,9 \text{ Ом}; \quad X_0 = 42,3 \text{ Ом}; \quad b_0 = 2,69 \cdot 10^{-4} \text{ См};$$

$$\text{АС-95} \text{ — } r_0 = 31,4 \text{ Ом}; \quad X_0 = 42,9 \text{ Ом}; \quad b_0 = 2,65 \cdot 10^{-4} \text{ См};$$

Параметри трансформатора типу ТДН-16000/110:

$$S_{\text{НОМ}} = 16 \text{ МВА};$$

$$U_{\text{НОМ ВН}} = 115 \text{ кВ}; \quad U_{\text{НОМ НН}} = 38,5 \text{ кВ};$$

$$U_{\text{к\%}} = 10,5 \text{ \%};$$

$$\Delta P_{\text{к.з.}} = 85 \text{ кВт};$$

$$\Delta P_{\text{х.х.}} = 21 \text{ кВт};$$

$$I_{\text{х.х.\%}} = 0,85 \text{ \%};$$

$$R_T = 4,38 \text{ Ом}; \quad X_T = 86,7 \text{ Ом};$$

Параметри регулювання коефіцієнта трансформації:  $n = \pm 9$ ,  $\Delta = 1,78\%$ .

Обчислюємо параметри схеми заміщення ЛЕП за формулами 1.1. – 1.4.:

$$R_{ij} = r_0 \cdot \ell_{ij}/100; \quad X_{ij} = x_0 \cdot \ell_{ij}/100; \quad b_{ij} = b_0 \cdot \ell_{ij}/100;$$

$$R_{01} = 24,9 \cdot 10/100 = 2,49 \text{ Ом};$$

$$X_{01} = 42,3 \cdot 10/100 = 4,23 \text{ Ом};$$

$$b_{01} = 2,69 \cdot 10^{-4} \cdot 10/100 = 0,269 \cdot 10^{-4} \text{ СМ};$$

$$R_{03} = 24,9 \cdot 12/100 = 2,988 \text{ Ом};$$

$$X_{03} = 42,3 \cdot 12/100 = 5,076 \text{ Ом};$$

$$b_{03} = 2,69 \cdot 10^{-4} \cdot 12/100 = 0,323 \cdot 10^{-4} \text{ СМ};$$

$$R_{13} = 31,4 \cdot 8/100 = 2,512 \text{ Ом};$$

$$X_{13} = 42,9 \cdot 8/100 = 3,432 \text{ Ом};$$

$$b_{13} = 2,65 \cdot 10^{-4} \cdot 8/100 = 0,212 \cdot 10^{-4} \text{ СМ};$$

$$R_{12} = 31,4 \cdot 10/100 = 3,14 \text{ Ом};$$

$$X_{12} = 42,9 \cdot 10/100 = 4,29 \text{ Ом};$$

$$b_{12} = 2,65 \cdot 10^{-4} \cdot 10/100 = 0,265 \cdot 10^{-4} \text{ СМ};$$

Параметри схеми заміщення трансформатора обчислюємо за формулами 1.5 - 1.9:

$$R_T = \Delta P_{к.з.} \cdot U_{ном}^2 / S_{ном}^2 = 0,085 \cdot 115^2 / 16^2 = 4,391 \text{ Ом};$$

$$X_T = (U_{к\%}/100) \cdot (U_{ном}^2 / S_{ном}) = (10,5/100) \cdot (115^2 / 16) = 86,789 \text{ Ом};$$

Отримані значення трохи відмінні від відповідних табличних.

$$g_T = \Delta P_{х.х.} / U_{ном}^2 = 0,021 / 115^2 = 0,0159 \cdot 10^{-4} \text{ СМ};$$

$$b_T = (I_{х.х.\%}/100) \cdot (S_{ном} / U_{ном}^2) = (0,85/100) \cdot (16/115^2) = 0,1028 \cdot 10^{-4} \text{ СМ};$$

Номинальний коефіцієнт трансформації трансформатора:

$$K_{\text{ТНОМ}} = U_{\text{ВН}}/U_{\text{НН}} = 115/38,5 = 2,987.$$

При переключенні на регульовальне відгалуження  $n1=1$  коефіцієнт трансформації змінюється і набуває значення:

$$K_{\text{T}} = K_{\text{ТНОМ}} \cdot (1 + n1 \cdot \Delta/100) = 2,987 \cdot (1 + 1 \cdot 1,78/100) = 3,0402.$$

Результати обчислень параметрів елементів мережі заносимо в таблицю:

Ділянка мережі	Марка проводу, тип трансформатора	Довжина ділянки (км)	Розрахункові параметри елементів схеми заміщення	
			Опори $Z = R + jX$ (Ом)	Поперечна провідність $Y^{\text{II}} = g + jb$ (См)
0-1	АС-120	10	$2,49 + j4,23$	$j0,269 \cdot 10^{-4}$
0-3	АС-120	12	$2,988 + j5,076$	$j0,323 \cdot 10^{-4}$
1-2	АС-95	10	$3,14 + j4,29$	$j0,265 \cdot 10^{-4}$
1-3	АС-95	8	$2,512 + j3,432$	$j0,212 \cdot 10^{-4}$
1-4	ТДН-16000/110	—	$4,391 + j86,789$	$(0,0159 + j0,1028) \cdot 10^{-4}$

На основі схеми заміщення і результатів обчислень параметрів її елементів формується *розрахункова схема* електричної мережі, яка показана на рис 1.5. Вона містить всю інформацію, необхідну для подальшого моделювання режимів.

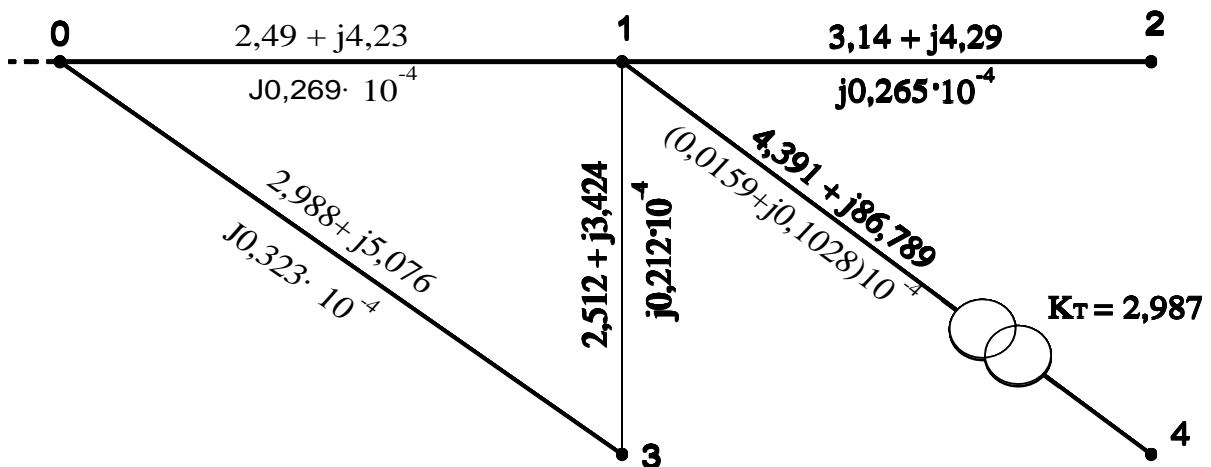


Рис. 1.5. – Розрахункова схема електричної мережі



### *1.3. Контрольні питання до розділу 1:*

1. Математична модель електричної мережі. Складові моделі;
2. Схема заміщення ЛЕП;
3. Параметри схеми заміщення ЛЕП, обчислення їх значень;
4. Параметри режиму, що характеризують роботу ЛЕП;
5. Схема заміщення двохобмоткового трансформатора;
6. Пояснити значення літер і цифр в позначенні типу трансформатора;
7. Параметри схеми заміщення трансформатора, обчислення їх значень;
8. Параметри режиму, що характеризують роботу трансформатора;
9. Представлення навантажень і генерації в схемах заміщення електричних мереж;
10. Порядок формування схеми заміщення електричної мережі;
11. Складання розрахункової схеми електричної мережі;
12. Структура довідкових таблиць і їх використання.

## **Розділ 2. Обчислення власних і взаємних провідностей вузлів електричної мережі.**

### **Складання рівнянь усталеного режиму у формі балансу струмів і балансу потужностей**

Розглядаються питання розробки елементів математичної моделі усталеного режиму роботи електричної мережі.

#### *2.1. Формування рівнянь усталеного режиму*

Формування математичної моделі усталеного режиму роботи електричної мережі передбачає складання алгебраїчних *рівнянь усталеного режиму*. Вони визначають аналітичну залежність між заданими, відомими і невідомими параметрами схеми та режиму. Рівняння описують баланс струму або потужності у вузлах мережі. Залежно від способу подання вузлових навантажень споживачів та джерел електроенергії (у вигляді струму чи потужності) рівняння усталеного режиму можуть бути лінійними або нелінійними [4,6]. Якщо навантаження (генерація) у вузлі мережі задані постійним струмом ( $I_i = const$ ), режим вузла описується *лінійним рівнянням балансу струмів*:

$$\dot{U}_i \cdot y_{ii} - \sum_{j=1}^n \dot{U}_j \cdot y_{ij} = \dot{I}_i . \quad (2.1)$$

Якщо навантаження у вузлі мережі задане постійною потужністю ( $S_i = const$ ), режим вузла описується *нелінійним рівнянням балансу струмів*:

$$\dot{U}_i \cdot y_{ii} - \sum_{j=1}^n \dot{U}_j \cdot y_{ij} = \frac{S_i^*}{U_i} , \quad (2.2)$$

або *балансу потужностей*:

$$\dot{U}_i^2 \cdot y_{ii} - U_i \cdot \sum_{j=1}^n \dot{U}_j \cdot y_{ij} = S_i^* \quad (2.3)$$

Рівняння (2.1), (2.2), (2.3) записані для одного  $i$ -го вузла мережі. В них  $Y_{ii}$ ,  $Y_{ij}$  - власні і взаємні провідності вузла;  $U_i$ ,  $U_j$  – напруги  $i$ -го та суміжних вузлів;  $I_i$ ,  $S_i$  - задані у вузлі струм або потужність;  $n$  – кількість вузлів мережі, які безпосередньо зв'язані з  $i$ -м вузлом. Всі складові в цих рівняннях – комплексні величини. Невідомими в цих рівняннях є вузлові напруги.

В практичних розрахунках комплексні рівняння (2.1), (2.2), (2.3) часто використовуються у перетвореному вигляді: комплексні величини у їх складі подаються у вигляді дійсних та уявних складових. В результаті перетворень комплексне рівняння розпадається на два дійсних рівняння. Наприклад, рівняння балансу потужностей (2.3) подається як два дійсних рівняння, які описують баланс активної та реактивної потужностей у вузлі. В *прямокутних* координатах:

$$\begin{cases} U_i^2 \cdot y'_{ii} - U_i \cdot \sum_j y'_{ij} \cdot U_j - y''_{ij} \cdot U_j - U_i \cdot \sum_j y''_{ij} \cdot U_j + y''_{ij} \cdot U_j = P_i \\ U_i^2 \cdot y''_{ii} - U_i \cdot \sum_j y'_{ij} \cdot U_j + y''_{ij} \cdot U_j + U_i \cdot \sum_j y'_{ij} \cdot U_j - y''_{ij} \cdot U_j = -Q_i \end{cases} \quad (2.4)$$

Тут  $U$ ,  $U'$ ,  $U''$  – модуль, дійсні та уявні складові напруг;  $y'$ ,  $y''$  – дійсні та уявні складові власних та взаємних провідностей вузла;  $P_i$ ,  $Q_i$  – задані активна та реактивна потужності у вузлі.

Рівняння (2.3), записане в *полярних* координатах:

$$\begin{cases} U_i^2 \cdot y'_{ii} - U_i \cdot \sum_j U_j \cdot [y'_{ij} \cdot \cos(\theta_i - \theta_j) + y''_{ij} \cdot \sin(\theta_i - \theta_j)] = P_i \\ U_i^2 \cdot y''_{ii} + U_i \cdot \sum_j U_j \cdot [y'_{ij} \cdot \sin(\theta_i - \theta_j) - y''_{ij} \cdot \cos(\theta_i - \theta_j)] = -Q_i \end{cases} \quad (2.5)$$

Тут  $U$ ,  $\theta$  - модулі і кути напруг у вузлах.

В усіх рівняннях усталеного режиму коефіцієнтами при невідомих напругах є взаємні та власні провідності вузлів.

*Взаємну провідність* вузлів  $i$  та  $j$  визначають як поздовжню провідність ділянки схеми заміщення, що з'єднує ці вузли:

$$Y_{ij} = 1/Z_{ij} = 1/(R_{ij} + jX_{ij}), \quad (2.6)$$

де  $R_{ij}, X_{ij}$  – активний і реактивний опори ділянки. При відсутності безпосереднього електричного зв'язку між вузлами відповідна взаємна провідність дорівнює нулю ( $Y_{ij} = 0$ ).

Якщо електрична мережа містить трансформатори, що з'єднують ділянки різних класів напруг, то при розрахунках провідностей треба враховувати параметри трансформаторної ділянки і її орієнтацію відносно вузла  $i$ . Будемо вважати, що вузол *початку* трансформаторної ділянки відповідає обмотці трансформатора з високою напругою, вузол *кінця* ділянки – його обмотці з низькою напругою. Коефіцієнт трансформації  $K_T$  розраховуємо за формулою (1.9).

Тоді взаємну провідність вузлів  $i$  та  $j$  обчислюють за формулою

$$Y_{ij}^{B3} = Y_{ij} \cdot K_T, \quad (2.7)$$

де  $Y_{ij}$  – поздовжня провідність ділянки (ЛЕП чи трансформатор). Визначається за формулою (2.6). При цьому величина  $Y_{ij}^{B3}$  не залежить від орієнтації трансформаторної ділянки відносно вузла  $i$ , тобто виконується принцип взаємності  $Y_{ij}^{B3} = Y_{ji}^{B3}$ .

Для ділянок ЛЕП коефіцієнт трансформації  $K_T = 1$ .

*Власна провідність  $i$ -го вузла  $Y_{ii}$*  дорівнює сумі провідностей усіх ділянок схеми заміщення (поздовжніх і поперечних), які з'єднані в ньому:

$$Y_{ii} = \sum_j Y_{ij} - 0,5 \sum_j Y_{ij}^{пл}, \quad (2.8)$$

де  $Y_{ij}$  - взаємна провідність вузлів  $i$  та  $j$  (формула (2.6));  $Y_{ij}^{пл} = G_{л} + jB_{л}$  - поперечна провідність ділянки ЛЕП. Її складові визначають за формулами (1.3) та (1.4).

Якщо у вузлі  $i$  з'єднані трансформаторні ділянки, власну провідність вузла розраховують за формулою

$$Y_{ii} = \sum_j Y_{ij}^{B3} \cdot p - 0,5 \sum_j Y_{ij}^{пл} + \sum_l Y_{il}^{пт} \quad (2.8)$$

де  $p = 1$  – для ділянки ЛЕП;  $p = 1 / K_T$ , якщо вузол  $i$  є вузлом початку трансформаторної ділянки;  $p = K_T$ , якщо вузол  $i$  є вузлом кінця трансформаторної ділянки;  $Y_{il}^{пт} = G_T + jB_T$  – поперечна провідність трансформатора. Враховується, якщо вузол  $i$  є вузлом початку трансформаторної ділянки. Її складові визначають за формулами (1.7) і (1.8).

## 2.2. Приклад формування рівнянь усталеного режиму

Всі обчислення виконуються для заданої схеми електричної мережі (рис.1.2).

Взаємні провідності вузлів схеми визначаємо за формулою:

$$y_{ij} = (1/z_{ij}) \cdot K_T,$$

де  $Z_{ij} = R_{ij} + jX_{ij}$  – опір ділянки між вузлами  $i$  та  $j$ ;

$K_T$  – коефіцієнт трансформації. Для ділянок ЛЕП дорівнює 1.

Для ділянок ЛЕП взаємна провідність між вузлами  $i$  та  $j$  відповідає повздовжній провідності цієї ділянки.

$$y_{01} = 1/Z_{01} = 1/(2,49 + j4,23) = 0,1034 - j0,1756 \text{ См};$$

$$y_{12} = 1/Z_{12} = 1/(3,14 + j4,29) = 0,1111 - j0,1518 \text{ См};$$

$$y_{03} = 1/Z_{03} = 1/(2,988 + j5,076) = 0,0861 - j0,1463 \text{ См};$$

$$y_{13} = 1/Z_{13} = 1/(2,512 + j3,424) = 0,1393 - j0,1899 \text{ См};$$

Для трансформаторної ділянки її провідність:

повздовжня  $y_{14} = 1/Z_{14} = 1/(4,391 + j86,789) = 0,0006 - j0,0115 \text{ См};$

взаємна  $y_{14} = y_{14} \cdot K_T = (0,0006 - j0,0115) \cdot 2,987 = 0,0017 - j0,0343 \text{ См}.$

Власна провідність вузла  $i$  дорівнює сумі провідностей всіх ділянок, які з'єднані в цьому вузлі (повздовжніх і поперечних):

$$y_{ii} = \sum_j y_{ij} \cdot p - 0,5 \cdot \sum_j y_{ij}^{пл} + \sum_f y_{if}^{пт}.$$

Тут  $Y_{ij}$  – взаємна провідність між вузлом  $i$  та суміжними вузлами  $j$ , що з'єднані з ним;

$p = 1$  для ділянок ЛЕП;  $p = 1/K_T$ , якщо вузол  $i$  є вузлом початку трансформаторної ділянки (обмотка ВН трансформатора);  $p = K_T$ , якщо вузол  $i$  є вузлом кінця трансформаторної ділянки (обмотка НН трансформатора);

$Y_{ij}^{ПЛ}$  – поперечна провідність ділянок ЛЕП між вузлом  $i$  та вузлами  $j$ , що з'єднані з ним;

$Y_{if}^{ПТ}$  – поперечна провідність трансформаторних ділянок між вузлом  $i$  та вузлами  $f$ . Враховується, якщо вузол  $i$  є вузлом початку трансформаторної ділянки.

Для вузлів заданої схеми:

$$Y_{00} = Y_{01} + Y_{03} - 0,5(Y_{01}^{\Pi} + Y_{03}^{\Pi}) = (0,1034 - j0,1756) + (0,0861 - j0,1463) - 0,5 \cdot (j0,269 \cdot 10^{-4} + j0,323 \cdot 10^{-4}) = 0,1895 - j0,3219 \text{ См};$$

$$Y_{11} = Y_{10} + Y_{12} + Y_{13} + Y_{14}/K_T - 0,5(Y_{10}^{\Pi} + Y_{12}^{\Pi} + Y_{13}^{\Pi}) + Y_{T14}^{\Pi} = (0,1034 - j0,1756) + (0,1111 - j0,1518) + (0,1393 - j0,1899) + (0,0017 - j0,0343)/2,987 - 0,5(j0,269 \cdot 10^{-4} + j0,265 \cdot 10^{-4} + 0,212 \cdot 10^{-4}) + (0,0159 + j0,1028) \cdot 10^{-4} = 0,3544 - j0,5288 \text{ См};$$

$$Y_{22} = Y_{21} - 0,5 Y_{21}^{\Pi} = (0,1111 - j0,1518) - j0,5 \cdot 0,265 \cdot 10^{-4} = 0,1111 - j0,1518 \text{ См};$$

$$Y_{33} = Y_{30} + Y_{31} - 0,5(Y_{30}^{\Pi} + Y_{31}^{\Pi}) = (0,0861 - j0,1463) + (0,1393 - j0,1899) - 0,5(j0,323 \cdot 10^{-4} + j0,212 \cdot 10^{-4}) = 0,2254 - j0,3362 \text{ См};$$

$$Y_{44} = Y_{41} \cdot K_T = (0,0017 - j0,0343) \cdot 2,987 = 0,0051 - j0,1025 \text{ См}.$$

Складаємо нелінійні рівняння усталеного режиму з комплексними складовими у формі балансу струмів.

Вузол 1:

$$i = 1 ; \text{ суміжні вузли } j = 0, 2, 3, 4.$$

$$y_{11} \dot{U}_1 - (y_{10} \dot{U}_0 + y_{12} \dot{U}_2 + y_{13} \dot{U}_3 + y_{14} \dot{U}_4) = \mathbf{S}_1^* / \mathbf{U}_1^*.$$

Підставляємо у рівняння обчислені значення власних та взаємних провідностей і задані потужності у вузлах.

$$(0,3544 - j0,5288) \dot{U}_1 - [(0,1034 - j0,1756) \dot{U}_0 + (0,1111 - j0,1518) \dot{U}_2 + + (0,1393 - j0,1899) \dot{U}_3 + (0,0017 - j0,0343) \dot{U}_4] = (3 - j2) / \mathbf{U}_1^*.$$

Вузол 2:

$$i = 2; j = 1.$$

$$y_{22} \dot{U}_2 - y_{21} \dot{U}_1 = \mathbf{S}_2^* / \mathbf{U}_2^*;$$

$$(0,1111 - j0,1518) \dot{U}_2 - (0,1111 - j0,1518) \dot{U}_1 = (5 - j2) / \mathbf{U}_2^*.$$

Вузол 3:

$$i = 3; j = 0, 1.$$

$$y_{33} \dot{U}_3 - (y_{30} \dot{U}_0 + y_{31} \dot{U}_1) = \mathbf{S}_3^* / \mathbf{U}_3^*;$$

$$(0,2254 - j0,3362) \dot{U}_3 - [(0,0861 - j0,1463) \dot{U}_0 + (0,1393 - j0,1899) \dot{U}_1] = (4 - j3) / \mathbf{U}_3^*.$$

Вузол 4:

$$i = 4; j = 1.$$

$$y_{44} \dot{U}_4 - y_{41} \dot{U}_1 = \mathbf{S}_4^* / \mathbf{U}_4^*;$$

$$(0,0051 - j0,1025) \dot{U}_4 - (0,0017 - j0,0343) \dot{U}_1 = (1 - j0,3) / \mathbf{U}_4^*.$$

Запишемо *рівняння усталеного режиму* із комплексними складовими у формі *балансу потужностей*. Їх можна отримати із рівнянь балансу струмів, помноживши ці рівняння на  $\dot{U}_i^*$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ):

$$y_{11} U_1^2 - \dot{U}_1^* (y_{10} \dot{U}_0 + y_{12} \dot{U}_2 + y_{13} \dot{U}_3 + y_{14} \dot{U}_4) = \dot{S}_1^*;$$

$$y_{22} U_2^2 - y_{21} \dot{U}_1^* \dot{U}_2 = \dot{S}_2^*;$$

$$y_{33} U_3^2 - \dot{U}_3^* (y_{30} \dot{U}_0 + y_{31} \dot{U}_1) = \dot{S}_3^*;$$

$$y_{44} U_4^2 - y_{41} \dot{U}_1^* \dot{U}_4 = \dot{S}_4^*.$$

Підставляємо в рівняння обчислені значення провідностей і задані потужності у вузлах.

Запишемо рівняння балансу потужностей із *дійсними* складовими у *прямокутних координатах* для вузла 1:

$$y'_{11} U_1^2 - U_1' [(y'_{10} U_0' - y''_{10} U_0'') + (y'_{12} U_2' - y''_{12} U_2'') + (y'_{13} U_3' - y''_{13} U_3'') + (y'_{14} U_4' - y''_{14} U_4'')] - U_1'' [(y'_{10} U_0'' + y''_{10} U_0') + (y'_{12} U_2'' + y''_{12} U_2') + (y'_{13} U_3'' + y''_{13} U_3') + (y'_{14} U_4'' + y''_{14} U_4')] = P_1;$$

$$y''_{11} U_1^2 - U_1' [(y'_{10} U_0'' + y''_{10} U_0') + (y'_{12} U_2'' + y''_{12} U_2') + (y'_{13} U_3'' + y''_{13} U_3') + (y'_{14} U_4'' + y''_{14} U_4')] + U_1'' [(y'_{10} U_0' - y''_{10} U_0'') + (y'_{12} U_2' - y''_{12} U_2'') + (y'_{13} U_3' - y''_{13} U_3'') + (y'_{14} U_4' - y''_{14} U_4'')] = -Q_1.$$

Аналогічно складаються рівняння для інших вузлів схеми.

Дійсні рівняння балансу потужностей у *полярних координатах* для вузла 1 мають вигляд:



$$\begin{aligned}
& y'_{11} U_1^2 - U_1 [U_0 (y'_{10} \cos(\Theta_1 - \Theta_0) + y''_{10} \sin(\Theta_1 - \Theta_0)) + \\
& + U_2 (y'_{12} \cos(\Theta_1 - \Theta_2) + y''_{12} \sin(\Theta_1 - \Theta_2)) + U_3 (y'_{13} \cos(\Theta_1 - \Theta_3) + \\
& + y''_{13} \sin(\Theta_1 - \Theta_3)) + U_4 (y'_{14} \cos(\Theta_1 - \Theta_4) + y''_{14} \sin(\Theta_1 - \Theta_4))] = P_1; \\
& y''_{11} U_1^2 + U_1 [U_0 (y'_{10} \sin(\Theta_1 - \Theta_0) - y''_{10} \cos(\Theta_1 - \Theta_0)) + \\
& + U_2 (y'_{12} \sin(\Theta_1 - \Theta_2) - y''_{12} \cos(\Theta_1 - \Theta_2)) + U_3 (y'_{13} \sin(\Theta_1 - \Theta_3) - \\
& - y''_{13} \cos(\Theta_1 - \Theta_3)) + U_4 (y'_{14} \sin(\Theta_1 - \Theta_4) - y''_{14} \cos(\Theta_1 - \Theta_4))] = -Q_1.
\end{aligned}$$

Аналогічно складаються рівняння для інших вузів схеми.

### 2.3. Контрольні питання до розділу 2:

1. Як обчислюється взаємна провідність вузлів;
2. Як обчислюється власна провідність вузлів;
3. Як враховуються трансформатори при обчисленні взаємних та власних провідностей вузлів;
4. Як складається комплексне рівняння усталеного режиму у формі балансу струмів;
5. Як складається комплексне рівняння усталеного режиму у формі балансу потужностей;
6. Які величини входять до складу рівнянь усталеного режиму. Які з них невідомі, які відомі, які задані;
7. При яких параметрах, заданих у вузлах, утворюються лінійні чи нелінійні рівняння усталеного режиму. Як формується права частина рівнянь;
8. Як складаються рівняння усталеного режиму з дійсними складовими у прямокутних координатах;

9. Які величини входять до складу рівнянь усталеного режиму з дійсними складовими у прямокутних координатах. Які з них невідомі, які відомі і які задані;
10. Як складаються рівняння усталеного режиму з дійсними складовими у полярних координатах;
11. Які величини входять до складу рівнянь усталеного режиму з дійсними складовими у полярних координатах. Які з них невідомі, які відомі і які задані.

### Розділ 3. Формування системи рівнянь усталеного режиму роботи електричної мережі. Матриця провідностей.

Розглядаються питання розробки математичної моделі усталеного режиму роботи електричної мережі у вигляді систем рівнянь усталеного режиму.

#### 3.1. Формування математичної моделі режиму роботи електричної мережі

Матриця провідностей електричної мережі — це форма упорядкованого запису коефіцієнтів при невідомих напругах системи рівнянь усталеного режиму. Її можна розглядати як модель схеми електричної мережі, що описує конфігурацію мережі та параметри її елементів. Матриця провідностей квадратна, симетрична, слабозаповнена.

Елементи матриці провідностей — *взаємні провідності* вузлів електричної мережі ( $y_{ij}$ ) і *власні провідності* її вузлів ( $y_{ii}$ ). Власні провідності розміщуються на головній діагоналі матриці, взаємні провідності - поза головною діагоналлю із зворотнім знаком (рис. 3.1).

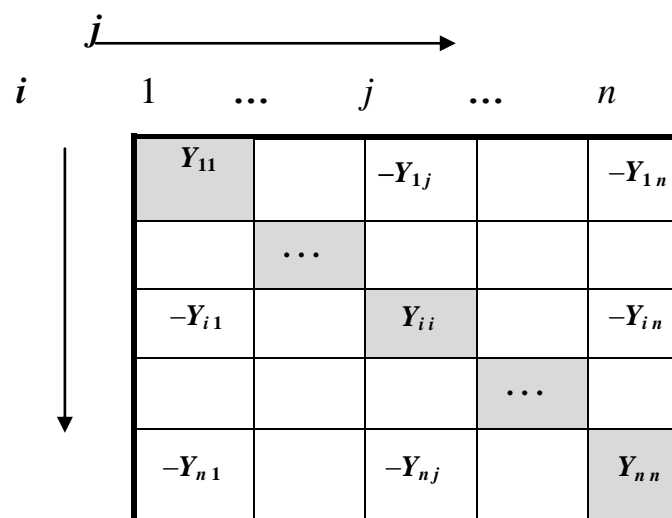


Рис. 3.1. Структура матриці провідностей

Математична модель усталеного режиму роботи електричної мережі представляється у вигляді системи алгебраїчних рівнянь усталеного режиму [7, 9]. Рівняння записуються для усіх вузлів мережі, крім опорних по напрузі. Якщо навантаження (генерація) у вузлах мережі задані постійним струмом ( $I_i = \text{const}, i = 1, \dots, n$ ), усталений режим моделюється системою лінійних алгебраїчних рівнянь у формі балансу струмів, яка має загальний вигляд:

$$\left. \begin{aligned} y_{11}\dot{U}_1 - y_{12}\dot{U}_2 - \dots - y_{1n}\dot{U}_n &= y_{10}\dot{U}_0 + \dot{I}_1; \\ -y_{21}\dot{U}_1 + y_{22}\dot{U}_2 - \dots - y_{2n}\dot{U}_n &= y_{20}\dot{U}_0 + \dot{I}_2; \\ \dots & \dots \dots \\ -y_{n1}\dot{U}_1 - y_{n2}\dot{U}_2 - \dots + y_{nn}\dot{U}_n &= y_{n0}\dot{U}_0 + \dot{I}_n. \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Це система рівнянь відносно невідомих напруг у вузлах  $\dot{U}_i$ . Має розмірність  $n$ , що відповідає кількості вузлів у схемі мережі (без опорних). Коефіцієнтами при невідомих є власні та взаємні провідності вузлів ( $Y_{ii}$  і  $Y_{ij}$ ). У правій частині системи рівнянь:  $I_i$  — задані струми у вузлах;  $U_0$  — задана напруга в опорному (балансуючому) вузлі;  $y_{i0}$  — взаємна провідність між вузлами схеми та опорним вузлом.

Кожне  $i$ -те рівняння системи (3.1) відповідає одному  $i$ -му вузлу схеми електричної мережі і визначає баланс струмів у ньому. У матричній формі систему (3.1) можна записати так:

$$\begin{bmatrix} y_{11} & -y_{12} & \dots & -y_{1n} \\ -y_{21} & y_{22} & \dots & -y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -y_{n1} & -y_{n2} & \dots & y_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \dots \\ \dot{U}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{10} \\ y_{20} \\ \dots \\ y_{n0} \end{bmatrix} U_0 + \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dots \\ \dot{I}_n \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

або  $YU = J$ .

Матриця коефіцієнтів при невідомих напругах у системі (3.2) є матрицею провідностей електричної мережі.

У разі завдання вузлових навантажень споживачів і джерел електроенергії постійними активними і реактивними *потужностями* ( $S_i = P_i + jQ_i = \text{const}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ) усталений режим електричної мережі моделюється системою *нелінійних* алгебраїчних *рівнянь* (у формі балансу струмів або балансу потужностей). Нелінійні рівняння *балансу струмів* мають загальний вигляд:

$$\left. \begin{aligned} y_{11}\dot{U}_1 - y_{12}\dot{U}_2 - \dots - y_{1n}\dot{U}_n &= y_{10}\dot{U}_0 + S_1^*/U_1^*; \\ -y_{21}\dot{U}_1 + y_{22}\dot{U}_2 - \dots - y_{2n}\dot{U}_n &= y_{20}\dot{U}_0 + S_2^*/U_2^*; \\ \dots & \dots \dots \\ -y_{n1}\dot{U}_1 - y_{n2}\dot{U}_2 - \dots + y_{nn}\dot{U}_n &= y_{n0}\dot{U}_0 + S_n^*/U_n^*. \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

Систему рівнянь у вигляді *балансу потужностей* можна отримати, якщо рівняння (3.3) домножити на  $U_i^*$ :

$$\left. \begin{aligned} U_1^* \cdot (-y_{10}\dot{U}_0 + y_{11}\dot{U}_1 - y_{12}\dot{U}_2 - \dots - y_{1n}\dot{U}_n) &= S_1^*; \\ U_2^* \cdot (-y_{20}\dot{U}_0 - y_{21}\dot{U}_1 + y_{22}\dot{U}_2 - \dots - y_{2n}\dot{U}_n) &= S_2^*; \\ \dots & \dots \dots \\ U_n^* \cdot (-y_{n0}\dot{U}_0 - y_{n1}\dot{U}_1 - y_{n2}\dot{U}_2 - \dots + y_{nn}\dot{U}_n) &= S_n^*. \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

Системи рівнянь (3.1), (3.3), (3.4) є формами *математичної моделі режиму* роботи електричної мережі. Розв'язання цих систем рівнянь дозволяє визначити напруги у вузлах мережі у заданому режимі.

Система рівнянь балансу потужностей з *дійсними* складовими може бути отримана перетворенням системи (3.4) і включає  $2n$  рівнянь балансу активних і реактивних потужностей у вузлах, де  $n$  – кількість вузлів схеми без опорних. Відповідні рівняння були сформовані в підрозділі 2.2.

### 3.2. Приклад формування систем рівнянь усталеного режиму

Повна матриця провідностей записується для всіх вузлів електричної мережі. Для схеми Рис. 1.2. її розмірність становить  $5 \times 5$ . Елементами матриці є власні і взаємні провідності вузлів. Власні провідності розташовані на головній діагоналі матриці, обчислюються як сума провідностей всіх ділянок, що з'єднані у вузлі. Взаємні провідності із зворотнім знаком розташовані поза головною діагоналлю на перетині відповідних рядків і стовпців. Якщо вузли не зв'язані між собою, то їх взаємна провідність дорівнює нулю.

$$\begin{matrix}
 & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\
 \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{matrix} Y_{00} & -Y_{01} & & -Y_{03} & \\ -Y_{10} & Y_{11} & -Y_{12} & -Y_{13} & -Y_{14} \\ & -Y_{21} & Y_{22} & & \\ -Y_{30} & -Y_{31} & & Y_{33} & \\ & -Y_{41} & & & Y_{44} \end{matrix} \\
 \end{matrix} =
 \begin{matrix}
 & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\
 \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{matrix} 0,1895 - & -0,1034+ & 0 & -0,0861+ & 0 \\ -j0,3219 & +j0,1756 & & +j0,1463 & \\ -0,1034+ & 0,3544 - & -0,1111+ & -0,1393+ & -0,0017+ \\ +j0,1756 & -j0,5288 & +j0,1518 & +j0,1899 & +j0,0343 \\ 0 & -0,1111+ & 0,1111 - & 0 & 0 \\ +j0,1518 & -j0,1518 & & & \\ -0,0861+ & -0,1393+ & 0 & 0,2254 - & 0 \\ +j0,1463 & +j0,1899 & & -j0,3362 & \\ 0 & -0,0017+ & 0 & 0 & 0,0051 - \\ +j0,0343 & +j0,0343 & & & -j0,1025 \end{matrix} \\
 \end{matrix}$$

Неповну матрицю провідностей отримуємо із повної, видаливши з неї рядки і стовпці, що відповідають опорним (балансуючим) вузлам. В заданій схемі опорний – вузол 0. Видаляємо відповідний рядок і стовпець матриці:

	1	2	3	4		
$Y =$	1	$y_{11}$	$-y_{12}$	$-y_{13}$	$-y_{14}$	$=$
	2	$-y_{21}$	$y_{22}$			
	3	$-y_{31}$		$y_{33}$		
	4	$-y_{41}$			$y_{44}$	

$=$	0,3544 – – j0,5288	–0,1111+ + j0,1518	–0,1393+ + j0,1899	–0,0017+ + j0,0343
	–0,1111+ + j0,1518	0,1111 – – j0,1518	0	0
	–0,1393+ + j0,1899	0	0,2254 – – j0,3362	0
	–0,0017+ + j0,0343	0	0	0,0051 – – j0,1025

Система комплексних рівнянь усталеного режиму у формі балансу струмів має вигляд:

$$Y \cdot \dot{U} = \dot{S}^* / U^* + Y_{\delta} U_{\delta}$$

Рівняння записуються для всіх вузлів мережі, крім опорних (балансуючих). Використовується неповна матриця провідностей  $Y$ :

$$\begin{bmatrix} y_{11} & -y_{12} & -y_{13} & -y_{14} \\ -y_{21} & y_{22} & 0 & 0 \\ -y_{31} & 0 & y_{33} & 0 \\ -y_{41} & 0 & 0 & y_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \dot{U}_3 \\ \dot{U}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{S}_1^* / U_1^* \\ \dot{S}_2^* / U_2^* \\ \dot{S}_3^* / U_3^* \\ \dot{S}_4^* / U_4^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_{10} \\ 0 \\ y_{30} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot U_0,$$

або

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{11} \dot{U}_1 - y_{12} \dot{U}_2 - y_{13} \dot{U}_3 - y_{14} \dot{U}_4 = \dot{S}_1^* / \dot{U}_1^* + y_{10} \dot{U}_0; \\ - y_{21} \dot{U}_1 + y_{22} \dot{U}_2 - 0 - 0 = \dot{S}_2^* / \dot{U}_2^*; \\ - y_{31} \dot{U}_1 - 0 + y_{33} \dot{U}_3 - 0 = \dot{S}_3^* / \dot{U}_3^* + y_{30} \dot{U}_0; \\ - y_{41} \dot{U}_1 - 0 - 0 + y_{44} \dot{U}_4 = \dot{S}_4^* / \dot{U}_4^*. \end{array} \right.$$

Підставляємо обчислені значення провідностей  $Y_{ii}$ ,  $Y_{ij}$  і задані величини

вузлових потужностей і напруги в опорному вузлі  $\dot{S}_{in}$ ,  $\dot{U}_0$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} (0,3544 - j0,5288) \dot{U}_1 - (0,1111 - j0,1518) \dot{U}_2 - (0,1393 - j0,1899) \dot{U}_3 - \\ - (0,0017 - j0,0343) \dot{U}_4 = (3 - j2) / \dot{U}_1^* + (0,1034 - j0,1756) \cdot 115; \\ - (0,1111 - j0,1518) \dot{U}_1 + (0,1111 - j0,1518) \dot{U}_2 = (5 - j2) / \dot{U}_2^*; \\ - (0,1393 - j0,1899) \dot{U}_1 + (0,2254 - j0,3362) \dot{U}_3 = (4 - j3) / \dot{U}_3^* + \\ + (0,0861 - j0,1463) \cdot 115; \\ - (0,0017 - j0,0343) \dot{U}_1 + (0,0051 - j0,1025) \dot{U}_4 = (1 - j0,3) / \dot{U}_4^*. \end{array} \right.$$

Система комплексних рівнянь усталеного режиму у формі балансу потужностей має вигляд:

$$\dot{U} (YU - Y_\delta U_\delta) = \dot{S}^*.$$

Для заданої схеми:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{U}_1 (y_{11} \dot{U}_1 - y_{12} \dot{U}_2 - y_{13} \dot{U}_3 - y_{14} \dot{U}_4 - y_{10} \dot{U}_0) = \dot{S}_1^*; \\ \dot{U}_2 (-y_{21} \dot{U}_1 + y_{22} \dot{U}_2) = \dot{S}_2^*; \\ \dot{U}_3 (-y_{31} \dot{U}_1 + y_{33} \dot{U}_3 - y_{30} \dot{U}_0) = \dot{S}_3^*; \\ \dot{U}_4 (-y_{41} \dot{U}_1 + y_{44} \dot{U}_4) = \dot{S}_4^*. \end{array} \right.$$



Система дійсних рівнянь балансу потужностей у прямокутних координатах формується із відповідних рівнянь, що складені в підрозділі 2.2. Рівняння записуються для всіх вузлів схеми, крім опорного (балансуючого) вузла 0:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 y'_{11} U_1^2 - U'_1 [(y'_{10} U'_0 - y''_{10} U''_0) + (y'_{12} U'_2 - y''_{12} U''_2) + (y'_{13} U'_3 - y''_{13} U''_3) + (y'_{14} U'_4 - y''_{14} U''_4)] - U''_1 [(y'_{10} U''_0 + y''_{10} U'_0) + (y'_{12} U''_2 + y''_{12} U'_2) + (y'_{13} U''_3 + y''_{13} U'_3) + (y'_{14} U''_4 + y''_{14} U'_4)] = P_1; \\
 y''_{11} U_1^2 - U'_1 [(y'_{10} U''_0 + y''_{10} U'_0) + (y'_{12} U''_2 + y''_{12} U'_2) + (y'_{13} U''_3 + y''_{13} U'_3) + (y'_{14} U''_4 + y''_{14} U'_4)] + U''_1 [(y'_{10} U'_0 - y''_{10} U''_0) + (y'_{12} U'_2 - y''_{12} U''_2) + (y'_{13} U'_3 - y''_{13} U''_3) + (y'_{14} U'_4 - y''_{14} U''_4)] = -Q_1; \\
 y'_{22} U_2^2 - U'_2 (y'_{21} U'_1 - y''_{21} U''_1) - U''_2 (y'_{21} U''_1 + y''_{21} U'_1) = P_2; \\
 y''_{22} U_2^2 - U'_2 (y'_{21} U''_1 + y''_{21} U'_1) + U''_2 (y'_{21} U''_1 - y''_{21} U'_1) = -Q_2; \\
 y'_{33} U_3^2 - U'_3 [(y'_{30} U'_0 - y''_{30} U''_0) + (y'_{31} U'_1 - y''_{31} U''_1)] - U''_3 [(y'_{30} U''_0 + y''_{30} U'_0) + (y'_{31} U''_1 + y''_{31} U'_1)] = P_3; \\
 y''_{33} U_3^2 - U'_3 [(y'_{30} U''_0 + y''_{30} U'_0) + (y'_{31} U''_1 + y''_{31} U'_1)] + U''_3 [(y'_{30} U'_0 - y''_{30} U''_0) + (y'_{31} U'_1 - y''_{31} U''_1)] = -Q_3; \\
 y'_{44} U_4^2 - U'_4 (y'_{41} U'_1 - y''_{41} U''_1) - U''_4 (y'_{41} U''_1 + y''_{41} U'_1) = P_4; \\
 y''_{44} U_4^2 - U'_4 (y'_{41} U''_1 + y''_{41} U'_1) + U''_4 (y'_{41} U''_1 - y''_{41} U'_1) = -Q_4.
 \end{array} \right.$$

Підставимо в цю систему рівнянь задані значення параметрів: напруга в опорному вузлі ( $U'_0 = 115 \text{ кВ}$ ,  $U''_0 = 0$ ), активні та реактивні потужності у вузлах, обчислені значення - власні та взаємні провідності вузлів:

$$\begin{aligned}
& 0,3544 U_1^2 - U'_1 [(0,1034) \cdot 115 - (-0,1756) \cdot 0] + (0,1111 U'_2 - \\
& - (-0,1518) U''_2) + (0,1393 U'_3 - (-0,1899) U''_3) + (0,0017 U'_4 - \\
& - (-0,0343) U''_4) - U''_1 [(0,1034 \cdot 0 + (-0,1756) \cdot 115) + (0,1111 U''_2 + \\
& + (-0,1518) U'_2) + (0,1393 U''_3 + (-0,1899) U'_3) + (0,0017 U''_4 + \\
& + (-0,0343) U'_4)] = 3; \\
& - 0,5288 U_1^2 - U'_1 [(0,1034 \cdot 0 + (-0,1756) \cdot 115) + (0,1111 U''_2 + \\
& + (-0,1518) U'_2) + (0,1393 U''_3 + (-0,1899) U'_3) + (0,0017 U''_4 + \\
& + (-0,0343) U'_4)] + U''_1 [(0,1034 \cdot 115 - (-0,1756) \cdot 0) + (0,1111 U'_2 - \\
& - (-0,1518) U''_2) + (0,1393 U'_3 - (-0,1899) U''_3) + (0,0017 U'_4 + \\
& - (-0,0343) U''_4)] = -2; \\
& 0,1111 U_2^2 - U'_2 (0,1111 U'_1 - (-0,1518) U''_1) - U''_2 (0,1111 U''_1 + \\
& + (-0,1518) U'_1) = 5; \\
& - 0,1518 U_2^2 - U'_2 (0,1111 U''_1 + (-0,1518) U'_1) + U''_2 (0,1111 U''_1 - \\
& - (-0,1518) U'_1) = -2; \\
& 0,2254 U_3^2 - U'_3 [(0,0861 \cdot 115 - (-0,1463) \cdot 0) + (0,1393 U'_1 - \\
& - (-0,1899) U''_1)] - U''_3 [(0,0861 \cdot 0 + (-0,1463) \cdot 115) + (0,1393 U''_1 + \\
& + (-0,1899) U'_1)] = 4; \\
& - 0,3362 U_3^2 - U'_3 [(0,0861 \cdot 0 + (-0,1463) \cdot 115) + (0,1393 U''_1 + \\
& + (-0,1899) U'_1)] + U''_3 [(0,0861 \cdot 115 - (-0,1463) \cdot 0) + (0,1393 U'_1 - \\
& - (-0,1899) U''_1)] = -3; \\
& 0,0051 U_4^2 - U'_4 (0,0017 U'_1 - (-0,0343) U''_1) - U''_4 (0,0017 U''_1 + \\
& + (-0,0343) U'_1) = 1; \\
& - 0,1025 U_4^2 - U'_4 (0,0017 U''_1 + (-0,0343) U'_1) + U''_4 (0,0017 U'_1 - \\
& - (-0,0343) U''_1) = -0,3.
\end{aligned}$$

Або:

$$\begin{cases}
0,3544 U_1^2 - U'_1(11,891 + 0,1111 U'_2 + 0,1518 U''_2 + 0,1393 U'_3 + \\
+ 0,1899 U''_3 + 0,0017 U'_4 + 0,0343 U''_4) - U''_1(-20,194 + 0,1111 U''_2 - \\
- 0,1518 U'_2 + 0,1393 U''_3 - 0,1899 U'_3 + 0,0017 U''_4 - 0,0343 U'_4) = 3; \\
- 0,5288 U_1^2 - U'_1(-20,194 + 0,1111 U''_2 - 0,1518 U'_2 + 0,1393 U''_3 - \\
- 0,1899 U'_3 + 0,0017 U''_4 - 0,0343 U'_4) + U''_1(11,891 + 0,1111 U'_2 + \\
- 0,1518 U''_2 + 0,1393 U'_3 + 0,1899 U''_3 + 0,0017 U'_4 + 0,0343 U''_4) = -2; \\
0,1111 U_2^2 - U'_2(0,1111 U'_1 + 0,1518 U''_1) - U''_2(0,1111 U''_1 - \\
- 0,1518 U'_1) = 5; \\
- 0,1518 U_2^2 - U'_2(0,1111 U''_1 - 0,1518 U'_1) + U''_2(0,1111 U''_1 + \\
+ 0,1518 U'_1) = -2; \\
0,2254 U_3^2 - U'_3(9,902 + 0,1393 U'_1 + 0,1899 U''_1) - U''_3(-16,825 + \\
+ 0,1393 U''_1 - 0,1899 U'_1) = 4; \\
- 0,3362 U_3^2 - U'_3(-16,825 + 0,1393 U''_1 - 0,1899 U'_1) + U''_3(9,902 + \\
+ 0,1393 U'_1 - 0,1899 U''_1) = -3; \\
0,0051 U_4^2 - U'_4(0,0017 U'_1 + 0,0343 U''_1) - U''_4(0,0017 U''_1 - \\
- 0,0343 U'_1) = 1; \\
- 0,1025 U_4^2 - U'_4(0,0017 U''_1 - 0,0343 U'_1) + U''_4(0,0017 U'_1 + \\
+ 0,0343 U''_1) = -0,3.
\end{cases}$$

Отримали систему із 8 нелінійних рівнянь з дійсними складовими відносно невідомих складових вузлових напруг  $U'_1, U''_1, U'_2, U''_2, U'_3, U''_3, U'_4, U''_4$ .

Система дійсних рівнянь балансу потужностей у полярних координатах формується із відповідних рівнянь, що складені у підрозділі 2.2. Рівняння записуються для всіх вузлів схеми, крім опорного (балансуючого) вузла 0:

$$y'_{11} U_1^2 - U_1 [U_0 (y'_{10} \cos(\Theta_1 - \Theta_0) + y''_{10} \sin(\Theta_1 - \Theta_0)) + U_2 (y'_{12} \cos(\Theta_1 - \Theta_2) + y''_{12} \sin(\Theta_1 - \Theta_2)) + U_3 (y'_{13} \cos(\Theta_1 - \Theta_3) + y''_{13} \sin(\Theta_1 - \Theta_3)) + U_4 (y'_{14} \cos(\Theta_1 - \Theta_4) + y''_{14} \sin(\Theta_1 - \Theta_4))] = P_1;$$

$$y''_{11} U_1^2 + U_1 [U_0 (y'_{10} \sin(\Theta_1 - \Theta_0) - y''_{10} \cos(\Theta_1 - \Theta_0)) + U_2 (y'_{12} \sin(\Theta_1 - \Theta_2) - y''_{12} \cos(\Theta_1 - \Theta_2)) + U_3 (y'_{13} \sin(\Theta_1 - \Theta_3) - y''_{13} \cos(\Theta_1 - \Theta_3)) + U_4 (y'_{14} \sin(\Theta_1 - \Theta_4) - y''_{14} \cos(\Theta_1 - \Theta_4))] = -Q_1;$$

$$y'_{22} U_2^2 - U_2 [U_1 (y'_{21} \cos(\Theta_2 - \Theta_1) + y''_{21} \sin(\Theta_2 - \Theta_1))] = P_2;$$

$$y''_{22} U_2^2 + U_2 [U_1 (y'_{21} \sin(\Theta_2 - \Theta_1) - y''_{21} \cos(\Theta_2 - \Theta_1))] = -Q_2;$$

$$y'_{33} U_3^2 - U_3 [U_0 (y'_{30} \cos(\Theta_3 - \Theta_0) + y''_{30} \sin(\Theta_3 - \Theta_0)) + U_1 (y'_{31} \cos(\Theta_3 - \Theta_1) + y''_{31} \sin(\Theta_3 - \Theta_1))] = P_3;$$

$$y''_{33} U_3^2 + U_3 [U_0 (y'_{30} \sin(\Theta_3 - \Theta_0) - y''_{30} \cos(\Theta_3 - \Theta_0)) + U_1 (y'_{31} \sin(\Theta_3 - \Theta_1) - y''_{31} \cos(\Theta_3 - \Theta_1))] = -Q_3;$$

$$y'_{44} U_4^2 - U_4 [U_1 (y'_{41} \cos(\Theta_4 - \Theta_1) + y''_{41} \sin(\Theta_4 - \Theta_1))] = P_4;$$

$$y''_{44} U_4^2 + U_4 [U_1 (y'_{41} \sin(\Theta_4 - \Theta_1) - y''_{41} \cos(\Theta_4 - \Theta_1))] = -Q_4.$$

Підставимо в цю систему рівнянь *задані* значення параметрів: напруга в опорному вузлі ( $U_0 = 115 \text{ кВ}$ ,  $\theta_0 = 0$ ), активні та реактивні потужності у вузлах; *обчислені* значення – складові власних та взаємних провідностей:

$$0,3544 \cdot U_1^2 - U_1 \cdot [115 \cdot (0,1034 \cdot \cos(\Theta_1 - 0) + (-0,1756) \cdot \sin(\Theta_1 - 0)) + U_2 (0,1111 \cdot \cos(\Theta_1 - \Theta_2) + (-0,1518) \cdot \sin(\Theta_1 - \Theta_2)) + U_3 (0,1393 \cdot \cos(\Theta_1 - \Theta_3) + (-0,1899) \cdot \sin(\Theta_1 - \Theta_3)) + U_4 (0,0017 \cdot \cos(\Theta_1 - \Theta_4) + (-0,0343) \cdot \sin(\Theta_1 - \Theta_4))] = 3;$$

$$(-0,5288) \cdot U_1^2 + U_1 \cdot [115 \cdot (0,1034 \cdot \sin(\Theta_1 - 0) - (-0,1756) \cdot \cos(\Theta_1 - 0)) + U_2 (0,1111 \cdot \sin(\Theta_1 - \Theta_2) - (-0,1518) \cdot \cos(\Theta_1 - \Theta_2)) + U_3 (0,1393 \cdot \sin(\Theta_1 - \Theta_3) - (-0,1899) \cdot \cos(\Theta_1 - \Theta_3)) + U_4 (0,0017 \cdot \sin(\Theta_1 - \Theta_4) - (-0,0343) \cdot \cos(\Theta_1 - \Theta_4))] = -2;$$

$$0,1111 \cdot U_2^2 - U_2 [U_1 (0,1111 \cdot \cos(\Theta_2 - \Theta_1) + (-0,1518) \cdot \sin(\Theta_2 - \Theta_1))] = 5;$$

$$(-0,1518) \cdot U_2^2 + U_2 [U_1 (0,1111 \cdot \sin(\Theta_2 - \Theta_1) - (-0,1518) \cdot \cos(\Theta_2 - \Theta_1))] = -2;$$

$$0,2254 \cdot U_3^2 - U_3 [115 \cdot (0,0861 \cdot \cos(\Theta_3 - 0) + (-0,1463) \cdot \sin(\Theta_3 - 0)) + U_1 (0,1393 \cdot \cos(\Theta_3 - \Theta_1) + (-0,1899) \cdot \sin(\Theta_3 - \Theta_1))] = 4;$$

$$(-0,3362) \cdot U_3^2 + U_3 [115 \cdot (0,0861 \cdot \sin(\Theta_3 - 0) - (-0,1463) \cdot \cos(\Theta_3 - 0)) + U_1 (0,1393 \cdot \sin(\Theta_3 - \Theta_1) - (-0,1899) \cdot \cos(\Theta_3 - \Theta_1))] = -3;$$

$$0,0051 \cdot U_4^2 - U_4 [U_1 (0,0017 \cdot \cos(\Theta_4 - \Theta_1) + (-0,0343) \cdot \sin(\Theta_4 - \Theta_1))] = 1;$$

$$(-0,1025) \cdot U_4^2 + U_4 [U_1 (0,0017 \cdot \sin(\Theta_4 - \Theta_1) - (-0,0343) \cdot \cos(\Theta_4 - \Theta_1))] = -0,3.$$

Отримали систему з 8 нелінійних рівнянь відносно невідомих дійсних складових вузлових напруг (модулів та кутів):  
 $U_1, \theta_1, U_2, \theta_2, U_3, \theta_3, U_4, \theta_4.$

### 3.3. Контрольні питання до розділу 3:

1. Структура матриці провідностей;
2. Властивості матриці провідностей;
3. Обчислення власних і взаємних провідностей вузлів;
4. Що таке опорний по напрузі вузол мережі. Які параметри режиму в ньому задані, які невідомі;
5. Як отримати неповну матрицю провідностей. Її розмірність;
6. Чим визначається розмірність системи рівнянь усталеного режиму;
7. Основні форми запису рівнянь усталеного режиму;
8. Як здійснюється перехід від нелінійних рівнянь у формі балансу струмів до рівнянь у формі балансу потужностей;
9. Послідовність складання системи рівнянь усталеного режиму у формі балансу струмів;
10. Послідовність складання системи рівнянь усталеного режиму у формі балансу потужностей;
11. Призначення балансуєчого по потужності вузла. Які величини в ньому задані, які невідомі;
12. Призначення опорного по напрузі вузла. Які величини в ньому задані, які невідомі;
13. Формування системи рівнянь усталеного режиму з дійсними складовими в прямокутних координатах. Розмірність системи;
14. Формування системи рівнянь усталеного режиму з дійсними складовими в полярних координатах. Розмірність системи.

## **Розділ 4. Розв'язання системи лінійних рівнянь усталеного режиму роботи електричної мережі. Метод Гауса**

*Розглядається алгоритм і приклади розв'язання систем лінійних рівнянь усталеного режиму роботи електричної мережі методом Гауса.*

### *4.1. Алгоритм методу Гауса для розв'язання систем лінійних рівнянь усталеного режиму роботи електричної мережі*

Усталений режим роботи електричної мережі, у вузлах якої задані постійні струми, описується системою лінійних рівнянь виду (3.1), (3.2). Невідомими величинами в ній є напруги у вузлах мережі  $U_i$ , коефіцієнтами при невідомих – взаємні та власні провідності вузлів  $Y_{ij}$  і  $Y_{ii}$ .

Для розв'язання таких систем рівнянь застосовують зазвичай прямі методи. Один з них – *метод Гауса*, передбачає послідовне перетворення вихідної системи рівнянь з квадратною матрицею коефіцієнтів у спрощену *еквівалентну* систему з трикутною матрицею коефіцієнтів. Розв'язання еквівалентної системи рівнянь дає розв'язок вихідної системи.

Класичний метод Гауса передбачає виконання двох основних етапів: прямого і зворотного ходу [1, 8]. *Прямий хід* – послідовність однотипних кроків виключення невідомих (напруги  $U_i$ ) із рівнянь системи (3.1).

На першому кроці виконуються еквівалентні перетворення рівнянь системи, в результаті яких невідома  $U_1$  виключається із усіх рівнянь, починаючи з другого. Наприклад, для виключення  $U_1$  з другого рівняння, це рівняння можна помножити на  $y_{11}$ , перше помножити на  $y_{21}$  і скласти їх. Для виключення  $U_1$  із третього і четвертого рівнянь виконуються аналогічні перетворення. Перше рівняння залишається без змін. В результаті вихідна система (3.1) набуває вигляду:

$$\left. \begin{array}{l} y_{11}\dot{U}_1 - y_{12}\dot{U}_2 - \dots - y_{1n}\dot{U}_n = b_1; \\ 0 + y_{22}^{(1)}\dot{U}_2 - \dots - y_{2n}^{(1)}\dot{U}_n = b_2^{(1)}; \\ \dots \qquad \dots \qquad \dots \\ 0 - y_{n2}^{(1)}\dot{U}_2 - \dots + y_{nn}^{(1)}\dot{U}_n = b_n^{(1)}. \end{array} \right\} \quad (4.1)$$

Тут  $Y_{ij}^{(1)}$ ,  $Y_{ii}^{(1)}$ ,  $b_i^{(1)}$  – нові значення коефіцієнтів при невідомих і вільних членів рівнянь, обчислені в ході перетворень (верхній індекс показує номер кроку виключення невідомих).

На другому кроці виключення невідомих виключається  $U_2$  із рівнянь, починаючи з третього і т.д. У результаті виконання (n-1)-го кроку виключення вихідна система (3.1) або (3.2) з квадратною матрицею коефіцієнтів перетворюється на еквівалентну систему рівнянь з трикутною матрицею коефіцієнтів при невідомих:

$$\left. \begin{array}{l} y_{11}\dot{U}_1 - y_{12}\dot{U}_2 - y_{13}\dot{U}_3 - \dots - y_{1n}\dot{U}_n = b_1; \\ y_{22}^{(1)}\dot{U}_2 - y_{23}^{(1)}\dot{U}_3 - \dots - y_{2n}^{(1)}\dot{U}_n = b_2^{(1)}; \\ \dots \qquad \dots \qquad \dots \\ y_{n-1,n-1}^{(n-2)}\dot{U}_{n-1} - y_{n-1,n}^{(n-2)}\dot{U}_n = b_{n-1}^{(n-2)}; \\ y_{nn}^{(n-1)}\dot{U}_n = b_n^{(n-1)}. \end{array} \right\} \quad (4.2)$$

На кожному кроці виключення невідомих спосіб еквівалентних перетворень системи рівнянь може бути довільним. Наприклад, перерахунок коефіцієнтів і вільних членів системи рівнянь можна виконувати за формулами:

$$\begin{aligned} y_{ij}^{(k)} &= y_{ij}^{(k-1)} - y_{kj}^{(k-1)} y_{ik}^{(k-1)} / y_{kk}^{(k-1)}; \\ b_i^{(k)} &= b_i^{(k-1)} - y_{ik}^{(k-1)} b_k^{(k-1)} / y_{kk}^{(k-1)}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

де  $k = 1, \dots, n-1$  – номер кроку виключення невідомих. Збігається з номером рівняння системи, в якому розміщений опорний елемент  $y_{kk}$ ;  $i = k+1, \dots, n$  – номер рівняння, із якого виключається невідоме;



$j = k, \dots, n$  — номер елемента в рівнянні;  $y_{ij}, y_{kk}$  — коефіцієнти при невідомих;

$b_i = y_{i0}\dot{U}_0 + \dot{I}_i$  — вільні члени рівнянь.

*Зворотній хід* — розв'язання системи (4.2) і обчислення значень усіх невідомих, починаючи з  $\dot{U}_n$ .

Із останнього рівняння системи (4.2) отримуємо:

$$\dot{U}_n = b_n^{(n-1)} / y_{nn}^{(n-1)}.$$

Підставляємо його в передостаннє рівняння системи (4.2.) і обчислюємо  $\dot{U}_{n-1}$

і т. д. Послідовно визначаємо  $\dot{U}_{n-2}, \dot{U}_{n-3}, \dots, \dot{U}_2, \dot{U}_1$  із решти рівнянь.

Загальна формула при цьому має вигляд:

$$\dot{U}_i = (b_i^{(i-1)} - \sum_{j=i+1}^n y_{ij}^{(i-1)} \dot{U}_j) / y_{ii}^{(i-1)}, \quad i = n-1, \dots, 1. \quad (4.4)$$

При підстановці правильно обчислених значень невідомих  $\dot{U}_1, \dot{U}_2, \dots, \dot{U}_n$  у вихідну систему (3.1), всі її рівняння перетворюються на тотожності.

#### 4.2. Приклад розв'язання системи лінійних рівнянь усталеного режиму електричної мережі методом Гауса

Система комплексних нелінійних рівнянь усталеного режиму у формі балансу струмів була складена у розділі 3:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{11}\dot{U}_1 - y_{12}\dot{U}_2 - y_{13}\dot{U}_3 - y_{14}\dot{U}_4 = \dot{S}_1^* / \dot{U}_1^* + y_{10}\dot{U}_0; \\ -y_{21}\dot{U}_1 + y_{22}\dot{U}_2 - 0 - 0 = \dot{S}_2^* / \dot{U}_2^*; \\ -y_{31}\dot{U}_1 - 0 + y_{33}\dot{U}_3 - 0 = \dot{S}_3^* / \dot{U}_3^* + y_{30}\dot{U}_0; \\ -y_{41}\dot{U}_1 - 0 - 0 + y_{44}\dot{U}_4 = \dot{S}_4^* / \dot{U}_4^*, \end{array} \right.$$

або

$$\left\{ \begin{array}{l} (0,3544 - j0,5288) \dot{U}_1 - (0,1111 - j0,1518) \dot{U}_2 - (0,1393 - j0,1899) \dot{U}_3 - \\ \quad - (0,0017 - j0,0343) \dot{U}_4 = (3 - j2)/U_1^* + (0,1034 - j0,1756) \cdot 115; \\ - (0,1111 - j0,1518) \dot{U}_1 + (0,1111 - j0,1518) \dot{U}_2 = (5 - j2)/U_2^*; \\ - (0,1393 - j0,1899) \dot{U}_1 + (0,2254 - j0,3362) \dot{U}_3 = (4 - j3)/U_3^* + \\ \quad + (0,0861 - j0,1463) \cdot 115; \\ - (0,0017 - j0,0343) \dot{U}_1 + (0,0051 - j0,1025) \dot{U}_4 = (1 - j0,3)/U_4^* . \end{array} \right.$$

При заданих у вузлах постійних потужностях рівняння системи нелінійні. Лінійні рівняння отримуємо при завданні у вузлах постійних струмів  $I_i = \text{const}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ). Для переходу до струмів  $i$ , відповідно до лінійних рівнянь, обчислимо *наближені* значення вузлових струмів при заданих потужностях і *номінальній* напрузі вузлів. Праві частини рівнянь системи при цьому набувають значень:

$$\begin{aligned} \dot{J}_1 &= \dot{S}_{1i}^* / U_{1i\hat{i}} + y_{10} \cdot U_0 = (3 - j2)/110 + (0,1034 - j0,1756) \cdot 115 = \\ &= (11,9183 - j20,2122) \text{ kA}; \end{aligned}$$

$$\dot{J}_2 = \dot{S}_{2i}^* / U_{2i\hat{i}} = (5 - j2)/110 = (0,0455 - j0,0182) \text{ kA};$$

$$\begin{aligned} \dot{J}_3 &= \dot{S}_{3i}^* / U_{3i\hat{i}} + y_{30} \cdot U_0 = (4 - j3)/110 + (0,0861 - j0,1463) \cdot 115 = \\ &= (9,9379 - j16,8518) \text{ kA}; \end{aligned}$$

$$\dot{J}_4 = \dot{S}_{4i}^* / U_{4i\hat{i}} = -(1 - j0,3)/35 = (0,0286 - j0,0086) \text{ kA} .$$

Система лінійних рівнянь усталеного режиму у формі балансу струмів набуває вигляду:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{11} \dot{U}_1 - y_{12} \dot{U}_2 - y_{13} \dot{U}_3 - y_{14} \dot{U}_4 = \dot{J}_1 ; \\ -y_{21} \dot{U}_1 + y_{22} \dot{U}_2 - 0 - 0 = \dot{J}_2 ; \\ -y_{31} \dot{U}_1 - 0 + y_{33} \dot{U}_3 - 0 = \dot{J}_3 ; \\ -y_{41} \dot{U}_1 - 0 - 0 + y_{44} \dot{U}_4 = \dot{J}_4 , \end{array} \right.$$

або

$$\left\{ \begin{array}{l} (0,3544 - j0,5288) \dot{U}_1 - (0,1111 - j0,1518) \dot{U}_2 - (0,1393 - j0,1899) \dot{U}_3 - \\ \quad - (0,0017 - j0,0343) \dot{U}_4 = 11,9183 - j20,2122 ; \\ - (0,1111 - j0,1518) \dot{U}_1 + (0,1111 - j0,1518) \dot{U}_2 = 0,0455 - j0,0182 ; \\ - (0,1393 - j0,1899) \dot{U}_1 + (0,2254 - j0,3362) \dot{U}_3 = 9,9379 - j16,8518 ; \\ - (0,0017 - j0,0343) \dot{U}_1 + (0,0051 - j0,1025) \dot{U}_4 = 0,0286 - j0,0086 . \end{array} \right.$$

Систему рівнянь розв'язуємо методом Гауса із зворотнім ходом.

#### I. Прямий хід методу Гауса.

Необхідно виконати *три кроки* виключення невідомих.

На першому кроці перетворюємо рівняння 2, 3 і 4 системи так, щоб виключити із них невідому  $U_1$ .

Виключаємо  $U_1$  із другого рівняння.

Домножаємо перше рівняння на  $Y_{21} = -(0,1111 - j0,1518)$ :

$$-(0,1111 - j0,1518)(0,3544 - j0,5288) \dot{U}_1 + (0,1111 - j0,1518) (0,1111 - j0,1518) \dot{U}_2 + (0,1111 - j0,1518)(0,1393 - j0,1899) \dot{U}_3 + (0,1111 - j0,1518)(0,0017 - j0,0343) \dot{U}_4 = -(0,1111 - j0,1518)(11,9183 - j20,2122),$$

або

$$(0,0409 + j0,1125) \dot{U}_1 - (0,0107 + j0,0337) \dot{U}_2 - (0,0134 + j0,0422) \dot{U}_3 - (0,0050 + j0,0041) \dot{U}_4 = 1,7441 + j4,0548.$$

Домножаємо друге рівняння на  $Y_{11} = 0,3544 - j0,5288$ :

$$-(0,3544 - j0,5288)(0,1111 - j0,1518) \dot{U}_1 + (0,3544 - j0,5288)(0,1111 - j0,1518) \dot{U}_2 = -(0,3544 - j0,5288)(0,0455 - j0,0182),$$

або

$$(0,0409+j0,1125) \dot{U}_1 - (0,0409+j0,1125) \dot{U}_2 = 0,0065-j0,0305.$$

Віднімаємо ці рівняння. Отримуємо перетворене *друге* рівняння, із якого виключена перша складова, що містить невідому  $\dot{U}_1$ :

$$0 + (0,0302+j0,0788) \dot{U}_2 - (0,0134+j0,0422) \dot{U}_3 - (0,005+j0,0041) \dot{U}_4 = 1,7376+j4,0853.$$

Виключаємо  $\dot{U}_1$  із третього рівняння системи. Домножаємо перше рівняння на  $Y_{31} = -(0,1393 - j0,1899)$ :

$$\begin{aligned} &-(0,1393-j0,1899)(0,3544-j0,5288) \dot{U}_1 + (0,1393-j0,1899) (0,1111-j0,1518) \dot{U}_2 \\ &+ (0,1393-j0,1899)(0,1393-j0,1899) \dot{U}_3 + (0,1393-j0,1899)(0,0017-j0,0343) \dot{U}_4 \\ &= - (0,1393 - j0,1899)(11,9183-j20,2122), \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} &(0,0511+j0,1410) \dot{U}_1 - (0,0134+j0,0422) \dot{U}_2 - (0,0167+j0,0529) \dot{U}_3 - \\ &-(0,0063+j0,0051) \dot{U}_4 = 2,1781+j5,0788. \end{aligned}$$

Домножаємо третє рівняння на  $Y_{11} = 0,3544-j0,5288$ :

$$\begin{aligned} &-(0,3544-j0,5288)(0,1393-j0,1899) \dot{U}_1 + (0,3544-j0,5288)(0,2254-j0,3362) \dot{U}_3 = \\ &(0,3544-j0,5288)(9,9379-j16,8518), \end{aligned}$$

або

$$(0,0511+j0,1410) \dot{U}_1 - (0,0979+j0,2383) \dot{U}_3 = -(5,3892+j11,2274).$$

Віднімаємо ці рівняння. Отримуємо перетворене *третє* рівняння, із якого виключена перша складова, що містить невідому  $\dot{U}_1$ :

$$\begin{aligned} &0 - (0,0134+j0,0422) \dot{U}_2 + (0,0812+j0,1854) \dot{U}_3 - (0,0063+j0,0051) \dot{U}_4 = \\ &= 7,5673+j16,3062. \end{aligned}$$

Виключаємо  $\dot{U}_1$  із четвертого рівняння системи. Домножаємо перше рівняння на  $Y_{41} = -(0,0017-j0,0343)$ :

$$-(0,0017-j0,0343)(0,3544-j0,5288) \dot{U}_1 + (0,0017-j0,0343)(0,1111-j0,1518) \dot{U}_2 + (0,0017-j0,0343)(0,1393-j0,1899) \dot{U}_3 + (0,0017-j0,0343) \dot{U}_4 = -(0,0017-j0,0343)(11,9183-j20,2122),$$

або

$$(0,0175+j0,0131) \dot{U}_1 - (0,005+j0,0041) \dot{U}_2 - (0,0063+j0,0051) \dot{U}_3 - (0,0012+j0,0001) \dot{U}_4 = 0,6730+j0,4432.$$

Домножаємо четверте рівняння на  $U_{11}=0,3544-j0,5288$ :

$$-(0,3544-j0,5288)(0,0017-j0,0343) \dot{U}_1 + (0,3544-j0,5288)(0,0051-j0,1025) \dot{U}_4 = -(0,3544-j0,5288)(0,0286-j0,0086),$$

або

$$(0,0175+j0,0131) \dot{U}_1 - (0,0524+j0,0393) \dot{U}_4 = 0,0056 - j0,0182.$$

Віднімаємо ці рівняння. Отримуємо перетворене *четверте* рівняння, із якого виключена перша складова, що містить невідому  $\dot{U}_1$ :

$$0 - (0,005+j0,0041) \dot{U}_2 - (0,0063+j0,0051) \dot{U}_3 + (0,0512+j0,0392) \dot{U}_4 = 0,6674 + j0,4614.$$

В результаті виконання першого кроку виключення невідомих ( $\dot{U}_1$ ), отримуємо *еквівалентну* систему рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{11} \dot{U}_1 - y_{12} \dot{U}_2 - y_{13} \dot{U}_3 - y_{14} \dot{U}_4 = \dot{J}_1 ; \\ 0 + y_{22}^{(1)} \dot{U}_2 - y_{23}^{(1)} \dot{U}_3 - y_{24}^{(1)} \dot{U}_4 = \dot{J}_2^{(1)} ; \\ 0 - y_{32}^{(1)} \dot{U}_2 + y_{33}^{(1)} \dot{U}_3 - y_{34}^{(1)} \dot{U}_4 = \dot{J}_3^{(1)} ; \\ 0 - y_{42}^{(1)} \dot{U}_2 - y_{43}^{(1)} \dot{U}_3 + y_{44}^{(1)} \dot{U}_4 = \dot{J}_4^{(1)} , \end{array} \right.$$

або

$$\left\{ \begin{array}{l} (0,3544 - j0,5288) \dot{U}_1 - (0,1111 - j0,1518) \dot{U}_2 - (0,1393 - j0,1899) \dot{U}_3 - \\ \quad - (0,0017 - j0,0343) \dot{U}_4 = 11,9183 - j20,2122; \\ 0 \quad + (0,0302 + j0,0788) \dot{U}_2 - (0,0134 + j0,0422) \dot{U}_3 - \\ \quad - (0,0050 + j0,0041) \dot{U}_4 = 1,7376 + j4,0853; \\ 0 \quad - (0,0134 + j0,0422) \dot{U}_2 + (0,0812 + j0,1854) \dot{U}_3 - \\ \quad - (0,0063 + j0,0051) \dot{U}_4 = 7,5673 + j16,3062; \\ 0 \quad - (0,0050 + j0,0041) \dot{U}_2 - (0,0063 + j0,0051) \dot{U}_3 + \\ \quad + (0,0512 + j0,0392) \dot{U}_4 = 0,6674 + j0,4614. \end{array} \right.$$

*Другий крок* виключення невідомих.

Перетворюємо рівняння 3 і 4 еквівалентної системи так, щоб виключити з них невідому  $\dot{U}_2$ .

Виключаємо  $\dot{U}_2$  із третього рівняння. Для цього друге рівняння домножаємо

на  $y_{32}^{(1)} = -0,0134 - j0,0422$ :

$$\begin{aligned} & -(0,0134 + j0,0422)(0,0302 + j0,0788) \dot{U}_2 + (0,0134 + j0,0422)(0,0134 + \\ & \quad + j0,0422) \dot{U}_3 + (0,0134 + j0,0422)(0,0050 + j0,0041) \dot{U}_4 = \\ & = -(0,0134 + j0,0422)(1,7376 + j4,0853), \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} 0 - (-0,0029 + j0,0023) \dot{U}_2 - (0,0016 - j0,0011) \dot{U}_3 + (-0,0001 + j0,0003) \dot{U}_4 = \\ = 0,1491 - j0,1281. \end{aligned}$$

Домножаємо третє рівняння еквівалентної системи на

$y_{22}^{(1)} = 0,0302 + j0,0788$ :

$$\begin{aligned} & -(0,0302 + j0,0788)(0,0134 + j0,0422) \dot{U}_2 + (0,0302 + j0,0788)(0,0812 + j0,1854) \dot{U}_3 - \\ & -(0,0302 + j0,0788)(0,0063 + j0,0051) \dot{U}_4 = (0,0302 + j0,0788)(7,5673 + j16,3062), \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} 0 - (-0,0029 + j0,0023) \dot{U}_2 + (-0,0122 + j0,0120) \dot{U}_3 - (-0,0002 + j0,0007) \dot{U}_4 = \\ = -1,0564 + j1,0888. \end{aligned}$$

Віднімаємо ці рівняння. Отримуємо перетворене *третє* рівняння із якого виключена складова, що містить невідому  $\dot{U}_2$ :

$$0 + 0 + (0,0106 - j0,0109) \dot{U}_3 + (-0,0003 + j0,0010) \dot{U}_4 = 1,2055 - j1,2169.$$

Виключаємо невідому  $\dot{U}_2$  із четвертого рівняння еквівалентної системи рівнянь. Домножаємо друге рівняння на  $y_{42}^{(1)} = -0,005 - j0,0041$ :

$$0 - (0,005 + j0,0041)(0,0302 + j0,0788) \dot{U}_2 + (0,005 + j0,0041)(0,0134 + j0,0422) \dot{U}_3 + (0,005 + j0,0041)(0,005 + j0,0041) \dot{U}_4 = -(0,005 + j0,0041)(1,7376 + j4,0853),$$

або

$$0 - (-0,0002 + j0,0005) \dot{U}_2 + (-0,0001 + j0,0003) \dot{U}_3 + (0,000008 + j0,000041) \dot{U}_4 = 0,0081 - j0,0276.$$

Домножаємо четверте рівняння на  $y_{22}^{(1)} = 0,0302 + j0,0788$ :

$$-(0,0302 + j0,0788)(0,005 + j0,0041) \dot{U}_2 - (0,0302 + j0,0788)(0,0063 + j0,0051) \dot{U}_3 + (0,0302 + j0,0788)(0,0512 + j0,0392) \dot{U}_4 = (0,0302 + j0,0788)(0,6674 + j0,4614),$$

або

$$0 - (-0,0002 + j0,0005) \dot{U}_2 - (-0,0002 + j0,0007) \dot{U}_3 + (-0,0015 + j0,0052) \dot{U}_4 = -0,0162 + j0,0665.$$

Віднімаємо ці рівняння:

$$0 + 0 + (-0,0003 + j0,0010) \dot{U}_3 + (0,0015 - j0,0052) \dot{U}_4 = 0,0243 - j0,0941.$$

Отримали перетворене *четверте* рівняння системи, із якого виключена невідома  $\dot{U}_2$ .

В результаті виконання *другого* кроку виключення невідомих отримуємо еквівалентну систему рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{11} \dot{U}_1 - y_{12} \dot{U}_2 - y_{13} \dot{U}_3 - y_{14} \dot{U}_4 = \dot{J}_1 ; \\ 0 + y_{22}^{(1)} \dot{U}_2 - y_{23}^{(1)} \dot{U}_3 - y_{24}^{(1)} \dot{U}_4 = \dot{J}_2^{(1)} ; \\ 0 + 0 + y_{33}^{(2)} \dot{U}_3 - y_{34}^{(2)} \dot{U}_4 = \dot{J}_3^{(2)} ; \\ 0 + 0 - y_{43}^{(2)} \dot{U}_3 + y_{44}^{(2)} \dot{U}_4 = \dot{J}_4^{(2)} , \end{array} \right.$$

або

$$\left\{ \begin{array}{l} (0,3544 - j0,5288) \dot{U}_1 - (0,1111 - j0,1518) \dot{U}_2 - (0,1393 - j0,1899) \dot{U}_3 - \\ \quad - (0,0017 - j0,0343) \dot{U}_4 = 11,9183 - j20,2122 ; \\ 0 + (0,0302 + j0,0788) \dot{U}_2 - (0,0134 + j0,0422) \dot{U}_3 - \\ \quad - (0,0050 + j0,0041) \dot{U}_4 = 1,7376 + j4,0853 ; \\ 0 + 0 + (0,0106 - j0,0109) \dot{U}_3 + (-0,0003 + j0,0010) \dot{U}_4 = 1,2055 - j1,2169 ; \\ 0 + 0 + (-0,0003 + j0,0010) \dot{U}_3 + (0,0015 - j0,0052) \dot{U}_4 = 0,0243 - j0,0941 . \end{array} \right.$$

Третій крок виключення невідомих. Перетворюємо рівняння еквівалентної системи так, щоб виключити невідому  $\dot{U}_3$  із четвертого рівняння. Для цього домножаємо третє рівняння на  $y_{43}^{(2)} = -0,0003 + j0,0010$ :

$$(-0,0003 + j0,0010)(0,0106 - j0,0109) \dot{U}_3 + (-0,0003 + j0,0010)(-0,0003 + j0,0010) \dot{U}_4 = (-0,0003 + j0,0010)(1,2055 - j1,2169),$$

або

$$0 + 0 + (7,72 + j13,87) \cdot 10^{-6} \dot{U}_3 - (0,91 + j0,6) \cdot 10^{-6} \dot{U}_4 = (8,5525 + j15,7057) \cdot 10^{-4}.$$

Домножаємо четверте рівняння на  $y_{33}^{(2)} = 0,0106 - j0,0109$ :

$$(0,0106 - j0,0109)(-0,0003 + j0,0010) \dot{U}_3 + (0,0106 - j0,0109)(0,0015 - j0,0052) \dot{U}_4 = (0,0106 - j0,0109)(0,0243 - j0,0941),$$

або



$$0 + 0 + (7,72 + j13,87) \cdot 10^{-6} \dot{U}_3 - (40,78 + j71,47) \cdot 10^{-6} \dot{U}_4 = \\ = -(7,6811 + j12,6233) \cdot 10^{-4}.$$

Віднімаємо ці рівняння:

$$0 + 0 + 0 + (39,87 + j70,87) \cdot 10^{-6} \dot{U}_4 = (16,2336 + j28,3290) \cdot 10^{-4}.$$

Отримали перетворене *четверте* рівняння, із якого виключена невідома  $\dot{U}_3$ .

В результаті виконання останнього, третього кроку виключення невідомих, отримали еквівалентну систему рівнянь із *трикутною* матрицею коефіцієнтів:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{11} \dot{U}_1 - y_{12} \dot{U}_2 - y_{13} \dot{U}_3 - y_{14} \dot{U}_4 = \dot{J}_1 ; \\ 0 + y_{22}^{(1)} \dot{U}_2 - y_{23}^{(1)} \dot{U}_3 - y_{24}^{(1)} \dot{U}_4 = \dot{J}_2^{(1)} ; \\ 0 + 0 + y_{33}^{(2)} \dot{U}_3 - y_{34}^{(2)} \dot{U}_4 = \dot{J}_3^{(2)} ; \\ 0 + 0 - 0 + y_{44}^{(3)} \dot{U}_4 = \dot{J}_4^{(3)} , \end{array} \right.$$

або

$$\left\{ \begin{array}{l} (0,3544 - j0,5288) \dot{U}_1 - (0,1111 - j0,1518) \dot{U}_2 - (0,1393 - j0,1899) \dot{U}_3 - \\ \quad - (0,0017 - j0,0343) \dot{U}_4 = 11,9183 - j20,2122 ; \\ 0 + (0,0302 + j0,0788) \dot{U}_2 - (0,0134 + j0,0422) \dot{U}_3 - \\ \quad - (0,0050 + j0,0041) \dot{U}_4 = 1,7376 + j4,0853 ; \\ 0 + 0 + (0,0106 - j0,0109) \dot{U}_3 + (-0,0003 + j0,0010) \dot{U}_4 = 1,2055 - j1,2169 ; \\ 0 + 0 + 0 + (39,87 + j70,87) \cdot 10^{-6} \dot{U}_4 = (16,2336 + j28,3290) \cdot 10^{-4} . \end{array} \right.$$

Цим закінчується прямий хід метода Гауса.

II. *Зворотній хід* метода Гауса. Полягає у розв'язанні еквівалентної системи рівнянь з трикутною матрицею коефіцієнтів і обчисленні значень невідомих.

Розв'язання починаємо із останнього рівняння, звідки знаходимо  $\dot{U}_4$ :

$$\dot{U}_4 = \dot{I}_4 / y_{44}^{(3)} = (16,2336 + j28,3290) \cdot 10^{-4} / (39,87 + j70,87) \cdot 10^{-6} = 37,152 - j0,318 \text{ кВ.}$$

Підставляємо це значення в передостаннє рівняння і знаходимо  $\dot{U}_3$ :

$$\begin{aligned} \dot{U}_3 = & (\dot{I}_3 + y_{34}^{(2)} \dot{U}_4) / y_{33}^{(2)} = [(1,2055 - j1,2169) - \\ & - (-0,0003 + j0,0010)(37,152 - j0,318)] / (0,0106 - j0,0109) = 114,764 - j0,161 \text{ кВ.} \end{aligned}$$

Підставляємо  $\dot{U}_3$  і  $\dot{U}_4$  в друге рівняння і знаходимо  $\dot{U}_2$ :

$$\begin{aligned} \dot{U}_2 = & (\dot{I}_2 + y_{23}^{(1)} \dot{U}_3 + y_{24}^{(1)} \dot{U}_4) / y_{22}^{(1)} = [(1,7376 + j4,0853) + \\ & + (0,0134 + j0,0422)(114,764 - j0,161) + \\ & + (0,0050 + j0,0041)(37,152 - j0,318)] / (0,0302 + j0,0788) = 114,573 - j0,322 \text{ кВ.} \end{aligned}$$

Підставляємо знайдені значення  $\dot{U}_2$ ,  $\dot{U}_3$  і  $\dot{U}_4$  в перше рівняння і знаходимо

$\dot{U}_1$ :

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 = & (\dot{I}_1 + y_{12} \dot{U}_2 + y_{13} \dot{U}_3 + y_{14} \dot{U}_4) / y_{11} = [(11,9183 - j20,2122) + \\ & + (0,1111 - j0,1518)(114,573 - j0,322) + (0,1393 - j0,1899)(114,764 - j0,161) + \\ & + (0,0017 - j0,0343)(37,152 - j0,318)] / (0,3544 - j0,5288) = 114,722 - j0,202 \text{ кВ.} \end{aligned}$$

Цим закінчується зворотній хід метода Гауса.

Для перевірки правильності розв'язання системи рівнянь, необхідно обчисленні значення напруг підставити у всі рівняння вихідної системи.

Наприклад, для третього рівняння:

$$\begin{aligned} & -(0,1393 - j0,1899) \cdot (114,722 - j0,202) + (0,2254 - j0,3362) \cdot (114,764 - j0,161) = \\ & = 9,8713 - j16,8061; \end{aligned}$$

$$(9,8713 - j16,8061) \approx (9,9379 - j16,8518).$$

Рівняння перетворюється на тотожність.

Таким чином, *розв'язком* системи рівнянь усталеного режиму є такі значення напруг у вузлах мережі:

$$\dot{U}_1 = 114,722 - j0,202 \text{ кВ}$$

$$\dot{U}_2 = 114,573 - j0,322 \text{ кВ};$$

$$\dot{U}_3 = 114,764 - j0,161 \text{ кВ};$$

$$\dot{U}_4 = 37,152 - j0,318 \text{ кВ.}$$

Аналіз результатів моделювання показує, що рівні напруг у вузлах відповідають їх номінальним напругам і знаходяться в допустимих межах  $\pm 5\%$  від  $U_{\text{ном}}$ .

#### 4.3. Контрольні питання до розділу 4

1. Для розв'язання яких систем рівнянь (лінійних чи нелінійних) застосовується метод Гауса;
2. Основні етапи класичного методу Гауса;
3. Який результат перетворень на прямому ході методу Гауса;
4. Які перетворення системи рівнянь виконуються на прямому ході;
5. Що таке еквівалентна система рівнянь, які перетворення вважаються еквівалентними;
6. В чому полягає зворотній хід методу Гауса;
7. Як перевірити правильність розв'язання СЛАР;
8. Значення яких параметрів режиму отримуємо в результаті розв'язання системи рівнянь усталеного режиму.

**Розділ 5. Розв'язання системи лінійних рівнянь  
усталеного режиму роботи електричної мережі.  
Метод подвійної факторизації**

*Розглядається алгоритм і приклади розв'язання систем лінійних рівнянь усталеного режиму роботи електричної мережі методом подвійної факторизації.*

*5.1. Метод подвійної факторизації для розв'язання систем лінійних рівнянь усталеного режиму*

Метод подвійної факторизації [3, 10] передбачає розв'язання системи лінійних рівнянь усталеного режиму (3.1), (3.2) і визначення невідомих напруг  $\dot{U}_i$  у вигляді

$$\dot{U} = Y^{-1} \dot{J}, \quad (5.1)$$

де  $Y^{-1}$  — обернена матриця провідностей;  $\dot{J} = Y_0 \dot{U}_0 + \dot{I}$  — вектор вільних членів рівнянь системи.

Для обернення матриці провідностей використовують *подвійну факторизацію* — подання оберненої матриці як добуток послідовності елементарних верхніх ( $R_k$ ) і нижніх ( $L_k$ ) трикутних матриць, у яких не дорівнюють нулю елементи тільки одного рядка чи стовпця :

$$Y^{-1} = R_1 \cdot R_2 \dots R_k \dots R_{n-1} \cdot L_n \cdot L_{n-1} \dots L_k \dots L_1, \quad (5.2)$$

де  $k = 1, \dots, n$  — номер кроку перетворення матриці  $Y$  (крок факторизації).

Ці матриці називаються *факторними* матрицями ( $L_k$  — *ліві факторні* матриці,  $R_k$  — *праві факторні* матриці) . Структуру факторних матриць на  $k$ -му кроці факторизації показано на рис. 5.1.

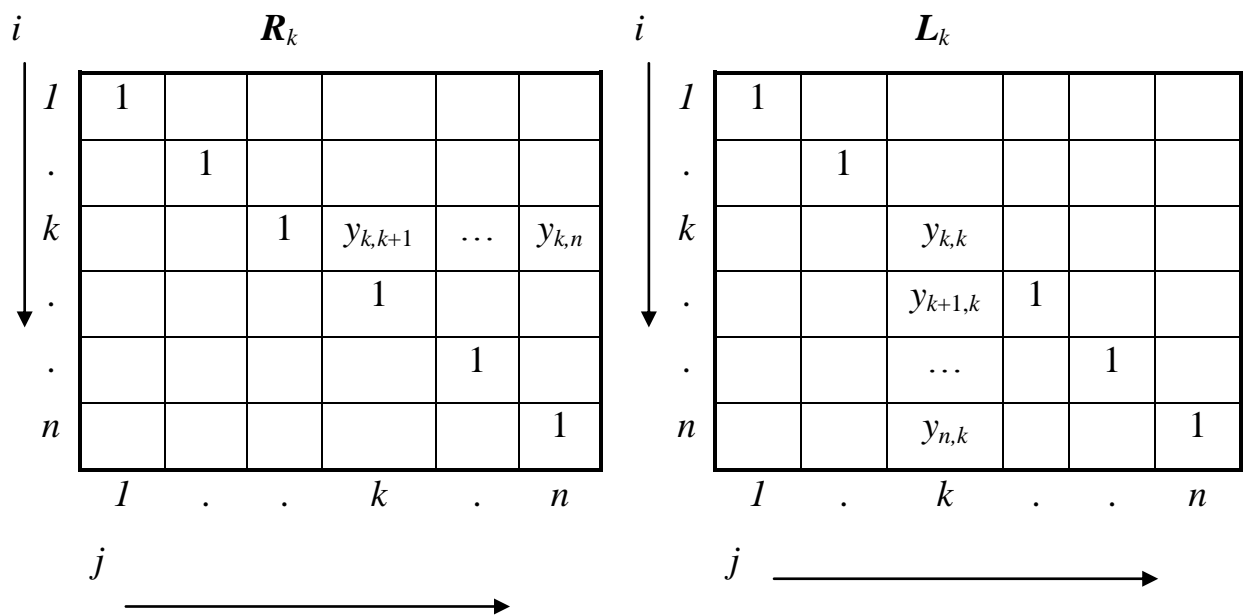


Рис. 5.1. - Структура факторних матриць

Їх елементи обчислюють за формулами:

– матриця  $L_k$ :  $y_{kk}^* = 1 / y_{kk}$ ; (5.3)

$$y_{ik}^* = -y_{ik} y_{kk}^* ; \quad (5.4)$$

– матриця  $R_k$ :  $y_{kj}^* = -y_{kj} y_{kk}^* , \quad (5.5)$

де  $i, j$  – відповідно номери рядка і стовпця матриці провідностей ( $i, j = k + 1, \dots, n$ );  $k$  – номер кроку факторизації ( $k = 1, \dots, n$ );  $y$  – елементи матриці провідностей на  $k$ -му кроці факторизації.

На кожному кроці факторизації виконується перерахунок усіх елементів неперетвореної раніше частини матриці  $Y$  за формулою

$$y_{ij}^* = y_{ij} + y_{ik}^* y_{kj} ; \quad i, j = k + 1, \dots, n . \quad (5.4)$$

У результаті виконання  $n$  кроків перетворення отримуємо  $(n - 1)$  праву факторну матрицю  $R$  і  $n$  лівих факторних матриць  $L$ . Їх елементи розміщені на полі вихідної матриці  $Y$  і утворюють факторизовану матрицю  $Y^*$ . На їх головній діагоналі припускають одиниці.

*Загальний алгоритм* подвійної факторизації матриці передбачає виконання таких кроків:

- 1) визначення номера чергового кроку факторизації  $k$  ( $k = 1, \dots, n$ );
- 2) вибір чергового опорного елемента  $y_{kk}$  (діагональний елемент);
- 3) розрахунок елементів лівої факторної матриці  $L_k$  за формулами (5.3) і (5.4);
- 4) розрахунок інших елементів матриці  $Y$ , що не входили в опорний рядок і стовпець на цьому і попередніх кроках перетворення за формулою (5.4);
- 5) розрахунок елементів правої факторної матриці  $R_k$  за формулою (5.5).

В результаті отримаємо чергові  $k$ -ті факторні матриці  $L_k$  і  $R_k$ .

- б) повернення до пункту 1.

Після виконання  $n$  кроків перетворення, кожний з яких включає пп. 1 – 6, отримуємо *факторизовану* матрицю  $Y^*$ , елементами якої є ненульові елементи  $n$  лівих факторних матриць  $L_1, L_2, \dots, L_n$  та  $(n-1)$ -ї правої факторної матриці  $R_1, R_2, \dots, R_{n-1}$ . Із сформованої факторизованої матриці виділяємо факторні матриці відповідно до їх структури рис. 5.1., перемножуємо їх і визначаємо обернену матрицю  $Y^1$  відповідно до (5.2). Напруги у вузлах мережі обчислюємо за формулою (5.1).

5.2. *Приклад розв'язання системи лінійних рівнянь усталеного режиму методом подвійної факторизації*

Система лінійних рівнянь усталеного режиму у формі балансу струмів складена у попередніх розділах. Вона має вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{11} \dot{U}_1 - y_{12} \dot{U}_2 - y_{13} \dot{U}_3 - y_{14} \dot{U}_4 = \dot{J}_1 ; \\ -y_{21} \dot{U}_1 + y_{22} \dot{U}_2 - 0 - 0 = \dot{J}_2 ; \\ -y_{31} \dot{U}_1 - 0 + y_{33} \dot{U}_3 - 0 = \dot{J}_3 ; \\ -y_{41} \dot{U}_1 - 0 - 0 + y_{44} \dot{U}_4 = \dot{J}_4 , \end{array} \right.$$

або

$$\left\{ \begin{array}{l} (0,3544 - j0,5288) \dot{U}_1 - (0,1111 - j0,1518) \dot{U}_2 - (0,1393 - j0,1899) \dot{U}_3 - \\ \quad - (0,0017 - j0,0343) \dot{U}_4 = 11,9183 - j20,2122 ; \\ - (0,1111 - j0,1518) \dot{U}_1 + (0,1111 - j0,1518) \dot{U}_2 = 0,0455 - j0,0182 ; \\ - (0,1393 - j0,1899) \dot{U}_1 + (0,2254 - j0,3362) \dot{U}_3 = 9,9379 - j16,8518 ; \\ - (0,0017 - j0,0343) \dot{U}_1 + (0,0051 - j0,1025) \dot{U}_4 = 0,0286 - j0,0086 . \end{array} \right.$$

У матричній формі цю систему рівнянь можна записати:

0,3544 - j0,5288	-0,1111 + j0,1518	-0,1393 + j0,1899	-0,0017 + j0,0343	*	=	U <sub>1</sub>	11,9183 - j20,2122
-0,1111 + j0,1518	0,1111 - j0,1518	0	0			U <sub>2</sub>	0,0455 - j0,0182
-0,1393 + j0,1899	0	0,2254 - j0,3362	0			U <sub>3</sub>	9,9379 - j16,851
-0,0017 + j0,0343	0	0	0,0051 - j0,1025			U <sub>4</sub>	0,0286 - j0,0086

Або  $Y \cdot U = J$ , де  $Y$  – матриця коефіцієнтів системи рівнянь - неповна матриця провідностей,  $U$  – вектор невідомих напруг,  $J$  – вектор вільних членів системи рівнянь.

Розв'язання системи рівнянь визначаємо у вигляді  $U = Y^{-1} * J$ , де  $Y^{-1}$  – обернена матриця провідностей.

Для обернення матриці провідностей виконуємо подвійну факторизацію:

1. Формуємо *факторизовану* матрицю провідностей.

*Перший* крок факторизації ( $k=1$ ). Вибираємо опорний елемент  $Y_{kk} = Y_{11} = 0,3544 - j0,5288$ . Опорні – перший рядок і стовпець.

Обчислюємо елементи *першої лівої* факторної матриці:

$$L_{11} = 1/Y_{11} = 1/(0,3544 - j0,5288) = 0,8746 + j1,3049;$$

$$L_{21} = -Y_{21} * L_{11} = -(-0,1111 + j0,1518) * (0,8746 + j1,3049) = 0,2953 + j0,0122;$$

$$L_{31} = -Y_{31} * L_{11} = -(-0,1393 + j0,1899) * (0,8746 + j1,3049) = 0,3696 + j0,0157;$$

$$L_{41} = -Y_{41} * L_{11} = -(-0,0017 + j0,0343) * (0,8746 + j1,3049) = 0,0462 - j0,0278.$$

Розраховуємо елементи поза опорним рядком і стовпцем ( $YI_{ij}$ ):

$$k=1, i=2, j=2;$$

$$YI_{22} = Y_{22} + L_{21} * Y_{12} = (0,1111 - j0,1518) + (0,2953 + j0,0122) * (-0,1111 + j0,1518) = 0,0764 - j0,1083;$$

$$k=1, i=2, j=3;$$

$$YI_{23} = Y_{23} + L_{21} * Y_{13} = 0 + (0,2953 + j0,0122) * (-0,1393 + j0,1899) = -0,0435 + j0,0544;$$

$$k=1, i=2, j=4;$$

$$YI_{24} = Y_{24} + L_{21} * Y_{14} = 0 + (0,2953 + j0,0122) * (-0,0017 + j0,0343) = -0,0009 + j0,0101;$$

$$k=1, i=3, j=2;$$

$$YI_{32} = Y_{32} + L_{31} * Y_{12} = 0 + (0,3696 + j0,0157) * (-0,1111 + j0,1518) = -0,0435 + j0,0544;$$

$$k=1, i=3, j=3;$$

$$YI_{33} = Y_{33} + L_{31} * Y_{13} = 0,2254 - j0,3362 + (0,3696 + j0,0157) * (-0,1393 +$$



$$+ j0,1899) = 0,1709 - j0,2682;$$

$$k=1, i=3, j=4;$$

$$Yl_{34} = Y_{34} + L_{31} * Y_{14} = 0 + (0,3696 + j0,0157) * (-0,0017 + j0,0343) = -0,0012 + j0,0127;$$

$$k=1, i=4, j=2;$$

$$Yl_{42} = Y_{42} + L_{41} * Y_{12} = 0 + (0,0462 - j0,0278) * (-0,1111 + j0,1518) = -0,0009 + j0,0101;$$

$$k=1, i=4, j=3;$$

$$Yl_{43} = Y_{43} + L_{41} * Y_{13} = 0 + (0,0462 - j0,0278) * (-0,1393 + j0,1899) = -0,0012 + j0,0126;$$

$$k=1, i=4, j=4;$$

$$Yl_{44} = Y_{44} + L_{41} * Y_{14} = (0,0051 - j0,1025) + (0,0462 - j0,0278) * (-0,0017 + j0,0343) = 0,0060 - j0,1009.$$

Обчислюємо елементи *першої правої* факторної матриці:

$$k=1, j=2;$$

$$R_{12} = -Y_{12} * L_{11} = -(-0,1111 + j0,1518) * (0,8746 + j1,3049) = 0,2953 + j0,0122;$$

$$k=1, j=3;$$

$$R_{13} = -Y_{13} * L_{11} = -(-0,1393 + j0,1899) * (0,8746 + j1,3049) = 0,3696 + j0,0157;$$

$$k=1, j=4;$$

$$R_{14} = -Y_{14} * L_{11} = -(-0,0017 + j0,0343) * (0,8746 + j1,3049) = 0,0462 - j0,0278.$$

Таким чином, після першого кроку факторизації матриця провідностей набуває вигляду:

0,8746+j1,3049	0,2953 + j0,0122	0,3696 + j0,0157	0,0462 -j0,0278	R <sub>1</sub>
0,2953 +j0,0122	0,0764 -j0,1083	-0,0435 + j0,0544	-0,0009 + j0,0101	
0,3696 +j0,0157	-0,0435 + j0,0544	0,1709 - j0,2682	-0,0012 + j0,0127	
0,0462 - j0,0278	-0,0009 +j0,0101	-0,0012 +j0,0126	0,0060 -j0,1009	
L <sub>1</sub>	Yl <sub>ij</sub>			

Другий крок факторизації ( $k = 2$ ). Вибираємо опорний елемент  $YI_{kk} = YI_{22} = 0,0764 - j0,1083$ . Опорні – другий рядок і стовпець.

Обчислюємо елементи *другої лівої* факторної матриці:

$$L_{22} = 1 / YI_{22} = 1 / (0,0764 - j0,1083) = 4,3493 + j6,1654;$$

$$L_{32} = - YI_{32} * L_{22} = -(-0,0435 + j0,0544) * (4,3493 + j6,1654) = 0,5246 + j0,0316;$$

$$L_{42} = - YI_{42} * L_{22} = -(-0,0009 + j0,0101) * (4,3493 + j6,1654) = 0,0662 - j0,0384.$$

Розраховуємо елементи поза опорним рядком і стовпцем ( $Y2_{ij}$ ):

$$k=2, i=3, j=3;$$

$$Y2_{33} = YI_{33} + L_{32} * YI_{23} = (0,1709 - j0,2682) + (0,5246 + j0,0316) * (-0,0435 + j0,0544) = 0,1464 - j0,2410;$$

$$k=2, i=3, j=4;$$

$$Y2_{34} = YI_{34} + L_{32} * YI_{24} = (-0,0012 + j0,0127) + (0,5246 + j0,0316) * (-0,0009 + j0,0101) = -0,0020 + j0,0180;$$

$$k=2, i=4, j=3;$$

$$Y2_{43} = YI_{43} + L_{42} * YI_{23} = (-0,0012 + j0,0126) + (0,0662 - j0,0384) * (-0,0435 + j0,0544) = -0,0020 + j0,0180;$$

$$k=2, i=4, j=4;$$

$$Y2_{44} = YI_{44} + L_{42} * YI_{24} = (0,0060 - j0,1009) + (0,0662 - j0,0384) * (-0,0009 + j0,0101) = 0,0063 - j0,1002.$$

Обчислюємо елементи *другої правої* факторної матриці:

$$k=2, j=3;$$

$$R_{23} = -YI_{23} * L_{22} = -(-0,0435 + j0,0544) * (4,3493 + j6,1654) = 0,5246 + j0,0316;$$

$$k=2, j=4;$$

$$R_{24} = -YI_{24} * L_{22} = -(-0,0009 + j0,0101) * (4,3493 + j6,1654) = 0,0662 - j0,0384.$$

Таким чином, після другого кроку факторизації матриця набуває вигляду:

0,8746+j1,3049	0,2953 + j0,0122	0,3696 + j0,0157	0,0462 -j0,0278	R <sub>1</sub>
0,2953 +j0,0122	4,3493 + j6,1654	0,5246 + j0,0316	0,0662 - j0,0384	R <sub>2</sub>
0,3696 +j0,0157	0,5246 + j0,0316	0,1464 - j0,2410	-0,0020 + j0,0180	
0,0462 - j0,0278	0,0662 - j0,0384	-0,0020 + j0,0179	0,0063 - j0,1002	
L <sub>1</sub>	L <sub>2</sub>	Y <sub>2ij</sub>		

Третій крок факторизації ( $k = 3$ ). Вибираємо опорний елемент  $Y_{kk} = Y_{33} = 0,1464 - j0,2410$ . Опорні – третій рядок і стовпець.

Обчислюємо елементи *третьої лівої* факторної матриці:

$$L_{33} = 1 / Y_{33} = 1 / (0,1464 - j0,2410) = 1,8412 + j3,0309;$$

$$L_{43} = - Y_{43} * L_{33} = -(-0,0020 + j0,0180) * (1,8412 + j3,0309) = 0,0582 - j0,0271.$$

Розраховуємо елемент поза опорним рядком і стовпцем ( $Y_{k_{ij}}$ ):

$$k=3, i=4, j=4;$$

$$Y_{344} = Y_{244} + L_{43} * Y_{234} = (0,0063 - j0,1002) + (0,0579 - j0,0269) * (-0,0020 + j0,0180) = 0,0067 - j0,0991.$$

Обчислюємо елемент *третьої правої* факторної матриці:

$$k=3, j=4;$$

$$R_{34} = -Y_{34} * L_{33} = -(-0,0020 + j0,0180) * (1,8412 + j3,0309) = 0,0582 - j0,0271.$$

Таким чином, після третього кроку факторизації матриця набуває вигляду:

0,8746+j1,3049	0,2953 + j0,0122	0,3696 + j0,0157	0,0462 -j0,0278	R <sub>1</sub>
0,2953 +j0,0122	4,3493 + j6,1654	0,5246 + j0,0316	0,0662 - j0,0384	R <sub>2</sub>
0,3696 +j0,0157	0,5246 + j0,0316	1,8412 + j3,0309	0,0582 - j0,0271	R <sub>3</sub>
0,0462 - j0,0278	0,0662 - j0,0384	0,0582 - j0,0271	0,0067 - j0,0991	
L <sub>1</sub>	L <sub>2</sub>	L <sub>3</sub>	Y <sub>3<sub>ij</sub></sub>	

Четвертий крок факторизації ( $k = 4$ ). Вибираємо опорний елемент  $Y_{kk} = Y_{44} = 0,0070 - j0,0994$ .

Обчислюємо елементи *четвертої лівої* факторної матриці:

$$L_{44} = 1 / Y_{44} = 1 / (0,0067 - j0,0991) = 0,6791 + j10,0449.$$

Після виконання чотирьох кроків перетворень отримуємо *факторизовану* матрицю провідностей:

0,8746+j1,3049	0,2953 + j0,0122	0,3696 + j0,0157	0,0462 -j0,0278	R <sub>1</sub>
0,2953 +j0,0122	4,3493 + j6,1654	0,5246 + j0,0316	0,0662 - j0,0384	R <sub>2</sub>
0,3696 +j0,0157	0,5246 + j0,0316	1,8412 + j3,0309	0,0582 - j0,0271	R <sub>3</sub>
0,0462 - j0,0278	0,0662 - j0,0384	0,0582 - j0,0271	0,6791 + j10,0449	
L <sub>1</sub>	L <sub>2</sub>	L <sub>3</sub>	L <sub>4</sub>	

Її елементами є ненульові елементи факторних матриць.

2. Формуємо праві і ліві факторні матриці відповідно до їх структури і перемножуємо їх:

1	0,2953 +j0,0122	0,3696+ j0,0157	0,0462 -j0,0278
	1		
		1	
			1

x

$R_1$

1			
	1	0,5246+ j0,0316	0,0662- j0,0384
		1	
			1

x

$R_2$

1			
	1		
		1	0,0582- j0,0271
			1

x

$R_3$

1			
	1		
		1	
			0,6791+ j10,0449

x

$L_4$

1			
	1		
		1,8412+ j3,0309	
		0,0582-j0,0271	1

x

$L_3$

1			
	4,3493+ j6,1654		
	0,5246+ j0,0316	1	
	0,0662- j0,0384		1

x

$L_2$

0,8746+j1,3049			
0,2953+j0,0122	1		
0,3696 +j0,0157		1	
0,0462-j0,0278			1

=

$L_1$

1,7170+j2,8263	1,7176+j2,8280	0,9289+j1,6859	0,5756+j0,9457
1,7176+j2,8280	4,8579+j7,1206	0,9293+j1,6876	0,5763+j0,9458
0,9289+j1,6859	0,9293+j1,6876	1,8747+j3,0554	0,3117+j0,5662
0,5756+j0,9457	0,5763+j0,9458	0,3117+j0,5662	0,6791+j10,0449

$Y^{-1}$

В результаті перемноження факторних матриць отримуємо *обернену* матрицю провідностей  $Y^{-1}$ . Для *перевірки* правильності результату треба перемножити вихідну матрицю провідностей і обернену матрицю та отримати одиничну матрицю.

3. Обчислюємо напруги  $U$  у вузлах мережі. Для цього обернену матрицю провідностей  $Y^{-1}$  множимо на вектор вільних членів системи рівнянь усталеного режиму  $J$ :

$$U = Y^{-1} \cdot J$$

1,7170+j2,8263	1,7176+j2,8280	0,9289+j1,6859	0,5756+j0,9457	*	11,9183 - j20,2122	=
1,7176+j2,8280	4,8579+j7,1206	0,9293+j1,6876	0,5763+j0,9458		0,0455 - j0,0182	
0,9289+j1,6859	0,9293+j1,6876	1,8747+j3,0554	0,3117+j0,5662		9,9379 - j16,8518	
0,5756+j0,9457	0,5763+j0,9458	0,3117+j0,5662	0,6791+j10,0449		0,0286 - j0,0086	

114,722 - j0,202
114,573 - j0,322
114,764 - j0,161
37,152 - j0,318

Таким чином, *розв'язком* системи рівнянь усталеного режиму є такі значення напруг у вузлах мережі:

$$\dot{U}_1 = 114,722 - j0,202 \text{ kV}$$

$$\dot{U}_2 = 114,573 - j0,322 \text{ kV};$$

$$\dot{U}_3 = 114,764 - j0,161 \text{ kV};$$

$$\dot{U}_4 = 37,152 - j0,318 \text{ kV}.$$

Для перевірки правильності розв'язання системи рівнянь, необхідно обчисленні значення напруг підставити у рівняння вихідної системи. Наприклад, для першого рівняння:

$$(0,3544 - j0,5288) \cdot (114,722 - j0,202) - (0,1111 - j0,1518) \cdot (114,573 - j0,322) - (0,1393 - j0,1899) \cdot (114,764 - j0,161) - (0,0017 - j0,0343) \cdot (37,152 - j0,318) = = 11,8622 - j20,2177$$

$$(11,8622 - j20,2177) \approx (11,9183 - j20,2122);$$

для третього рівняння:

$$-(0,1393 - j0,1899) \dot{U}_1 + (0,2254 - j0,3362) \dot{U}_3 =$$

$$-(0,1393 - j0,1899) \cdot (114,722 - j0,202) + (0,2254 - j0,3362) \cdot (114,764 - j0,161) = = 9,8713 - j16,8061;$$

$$(9,8713 - j16,8061) \approx (9,8651 - j16,7972).$$

Рівняння перетворюються на тотожність, тобто система рівнянь розв'язана правильно.

### *5. 3. Контрольні питання до розділу 5:*

1. Для розв'язання яких систем рівнянь (лінійних чи нелінійних) застосовується метод подвійної факторизації;
2. Факторні матриці. Їх структура, кількість;
3. Як обчислюються елементи факторних матриць;
4. Структура факторизованої матриці;
5. Як обчислюється обернена матриця провідностей;
6. Алгоритм розв'язання СЛАР усталеного режиму методом подвійної факторизації;
7. Як перевірити правильність розв'язання системи рівнянь усталеного режиму методом подвійної факторизації.

**Розділ 6. Розв'язання системи нелінійних рівнянь  
усталеного режиму роботи електричної мережі.  
Метод Зейделя**

*Розглядаються питання розв'язання систем нелінійних рівнянь  
усталеного режиму роботи електричної мережі методом Зейделя.*

*6.1. Алгоритм розв'язання систем нелінійних рівнянь усталеного режиму  
роботи електричної мережі методом Зейделя*

Метод Зейделя належить до групи ітераційних методів, що застосовуються для розв'язання систем нелінійних алгебраїчних рівнянь [3, 10]. Він дозволяє отримати значення невідомих величин із заданою точністю, як наслідок багаторазового виконання однотипних кроків обчислень, що називаються *ітераціями*.

Розв'язання системи нелінійних рівнянь цим методом потребує її попереднього перетворення. Для цього кожне  $i$ -те рівняння системи треба розв'язати відносно відповідної невідомої величини  $\dot{U}_i$ . У результаті система рівнянь балансу струмів виду (3.3) набуває вигляду:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= \frac{1}{y_{11}} (0 + y_{12}\dot{U}_2 + y_{13}\dot{U}_3 + \dots + y_{1n}\dot{U}_n + y_{10}\dot{U}_0 + S_1^*/U_1^*); \\ \dot{U}_2 &= \frac{1}{y_{22}} (y_{21}\dot{U}_1 + 0 + y_{23}\dot{U}_3 + \dots + y_{2n}\dot{U}_n + y_{20}\dot{U}_0 + S_2^*/U_2^*); \\ &\dots \\ \dot{U}_n &= \frac{1}{y_{nn}} (y_{n1}\dot{U}_1 + y_{n2}\dot{U}_2 + y_{n3}\dot{U}_3 + \dots + 0 + y_{n0}\dot{U}_0 + S_n^*/U_n^*). \end{aligned} \right\} (6.1)$$



Будь-яке  $i$ -те рівняння системи (6.1) у загальному вигляді можна записати:

$$\dot{U}_i = \frac{1}{y_{ii}} \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n y_{ij} \dot{U}_j + y_{i0} \dot{U}_0 + S_i^* / U_i^* \right), \quad (6.2)$$

де  $S_i$  – задана потужність у вузлі.

Рівняння (6.1) дозволяють отримати чергове  $(k+1)$ -ше наближення невідомих величин напруг  $\dot{U}_1^{(k+1)}, \dot{U}_2^{(k+1)}, \dots, \dot{U}_n^{(k+1)}$  при підстановці в них наближень цих величин  $\dot{U}_1^{(k)}, \dot{U}_2^{(k)}, \dots, \dot{U}_n^{(k)}$ , що обчислені на попередній  $k$ -й ітерації. Це відповідає послідовності розрахунків за методом *простої ітерації*.

Відмінність *методу Зейделя* полягає в тому, що для обчислення згідно з формулою (6.2) чергового  $(k + 1)$ -го наближення  $i$ -ї змінної  $\dot{U}_i^{(k+1)}$  використовуються  $(k + 1)$ -ші наближення змінних  $\dot{U}_1^{(k+1)}, \dot{U}_2^{(k+1)}, \dots, \dot{U}_{i-1}^{(k+1)}$ , обчислених раніше на цій самій  $(k + 1)$ -й ітерації, а також  $k$ -ті наближення змінних  $\dot{U}_{i+1}^{(k)}, \dot{U}_{i+2}^{(k)}, \dots, \dot{U}_n^{(k)}$ , що обчислені на попередній  $k$ -й ітерації. Тоді *рекурентне співвідношення методу Зейделя*, що походить із рівняння (6.2), можна записати:

$$\dot{U}_i^{(k+1)} = \frac{1}{y_{ii}} \left( \sum_{j=1}^{i-1} y_{ij} \dot{U}_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^n y_{ij} \dot{U}_j^{(k)} + y_{i0} \dot{U}_0 + S_i^* / U_i^* \right). \quad (6.3)$$

Складові під знаком суми в (6.2) розпадаються на дві групи. В (6.3) перша сума містить складові, що відповідають вузлам мережі з номерами  $j$  меншими за  $i$  ( тобто  $j = 1, 2, \dots, i-1$ ). Тут використовуються  $(k+1)$ -ші наближення невідомих напруг  $\dot{U}_j^{(k+1)}$ , що були обчислені раніше на цій же ітерації. Друга сума в (6.3) містить напруги вузлів з номерами, більшими за  $i$

(тобто  $j = i+1, i+2, \dots, n$ ). В цих складових використовується  $k$ -те наближення невідомих напруг  $\dot{U}_j^{(k)}$ , обчислене на попередній  $k$ -ій ітерації.

З урахуванням цього система рівнянь (6.1) в ітераційній формі, якщо розв'язувати її методом Зейделя, набуде вигляду:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1^{(k+1)} &= \frac{1}{y_{11}} (0 + y_{12} \dot{U}_2^{(k)} + y_{13} \dot{U}_3^{(k)} + \dots + y_{1n} \dot{U}_n^{(k)} + y_{10} \dot{U}_0 + S_1/U_1^* ); \\ \dot{U}_2^{(k+1)} &= \frac{1}{y_{22}} (y_{21} \dot{U}_1^{(k+1)} + 0 + y_{23} \dot{U}_3^{(k)} + \dots + y_{2n} \dot{U}_n^{(k)} + y_{20} \dot{U}_0 + S_2/U_2^* ); \\ &\dots \\ \dot{U}_n^{(k+1)} &= \frac{1}{y_{nn}} (y_{n1} \dot{U}_1^{(k+1)} + y_{n2} \dot{U}_2^{(k+1)} + \dots + y_{n,n-1} \dot{U}_{n-1}^{(k+1)} + 0 + y_{n0} \dot{U}_0 + S_n/U_n^* ). \end{aligned} \right\} (6.4)$$

Якщо ітераційний процес збігається, то після виконання певної кількості ітерацій за рівняннями (6.4) отримаємо чергові наближення невідомих напруг  $\dot{U}_i^{(k+1)}$ , значення яких наближаються до точного розв'язання системи рівнянь у межах заданої точності  $\varepsilon$ .

Загальний алгоритм розв'язання нелінійних рівнянь усталеного режиму методом Зейделя містить такі кроки:

1. Підготовчий етап: складання схеми заміщення електричної мережі, визначення параметрів її елементів, обчислення взаємних і власних провідностей вузлів;
2. Формування вихідної системи рівнянь усталеного режиму. Перетворення системи рівнянь і запис її в ітераційній формі (6.4);

3. Завдання початкового наближення вузлових напруг  $\dot{U}_1^{(0)} = \dot{U}_2^{(0)} = \dots = \dot{U}_n^{(0)} = \dot{U}_{\text{ном}}$ , де  $\dot{U}_{\text{ном}}$  — номінальна напруга вузла електричної мережі (кВ); завдання точності розрахунків  $\mathcal{E}$ ;
4. Визначення чергового наближення невідомих напруг із рівнянь (6.4);
5. Контроль завершення ітераційного процесу.

Якщо *поправки* до напруг, тобто різниця наближень напруг на суміжних ітераціях, у кожному вузлі відрізняються на величину меншу за задану точність  $\mathcal{E}$ :

$$\left| \dot{U}_i^{(k+1)} - \dot{U}_i^{(k)} \right| \leq \mathcal{E}; \quad i = 1, \dots, n, \quad (6.5)$$

то ітераційний процес закінчується. Наближення напруг, що визначені на останній  $(k+1)$ -й ітерації є розв'язком системи рівнянь із заданою точністю. Якщо умова (6.5) виконується не для всіх вузлів, то необхідна наступна ітерація і розрахунок нових наближень напруг відповідно до п. 4.

### 6.2. Приклад розв'язання системи нелінійних рівнянь усталеного режиму методом Зейделя

Нелінійні рівняння усталеного режиму у формі балансу струмів утворюються при завданні у вузлах мережі навантаження або генерації у вигляді постійної потужності  $S_i = \text{const}$ .

Система комплексних нелінійних рівнянь усталеного режиму у формі балансу струмів для заданої електричної мережі була складена у розділі 3:

$$\begin{cases} y_{11} \dot{U}_1 - y_{12} \dot{U}_2 - y_{13} \dot{U}_3 - y_{14} \dot{U}_4 = \dot{S}_1^* / \dot{U}_1^* + y_{10} \dot{U}_0; \\ -y_{21} \dot{U}_1 + y_{22} \dot{U}_2 - 0 - 0 = \dot{S}_2^* / \dot{U}_2^*; \\ -y_{31} \dot{U}_1 - 0 + y_{33} \dot{U}_3 - 0 = \dot{S}_3^* / \dot{U}_3^* + y_{30} \dot{U}_0; \\ -y_{41} \dot{U}_1 - 0 - 0 + y_{44} \dot{U}_4 = \dot{S}_4^* / \dot{U}_4^*, \end{cases}$$

Для розв'язання цієї системи методом Зейделя, її треба перетворити – розв'язати кожне рівняння системи відносно однієї із невідомих напруг  $\dot{U}_1, \dot{U}_2, \dot{U}_3$  і  $\dot{U}_4$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{U}_1 = (\dot{S}_1^* / \dot{U}_1^* + y_{10} \dot{U}_0 + y_{12} \dot{U}_2 + y_{13} \dot{U}_3 + y_{14} \dot{U}_4) / y_{11}; \\ \dot{U}_2 = (\dot{S}_2^* / \dot{U}_2^* + y_{21} \dot{U}_1) / y_{22}; \\ \dot{U}_3 = (\dot{S}_3^* / \dot{U}_3^* + y_{30} \dot{U}_0 + y_{31} \dot{U}_1) / y_{33}; \\ \dot{U}_4 = (\dot{S}_4^* / \dot{U}_4^* + y_{41} \dot{U}_1) / y_{44}. \end{array} \right.$$

Записуємо систему в *ітераційній формі* відповідно до обчислювальної схеми метода Зейделя:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{U}_1^{(K+1)} = (\dot{S}_{1H}^* / \dot{U}_1^{(K)} + y_{10} \dot{U}_0 + y_{12} \dot{U}_2^{(K)} + y_{13} \dot{U}_3^{(K)} + y_{14} \dot{U}_4^{(K)}) / y_{11}; \\ \dot{U}_2^{(K+1)} = (\dot{S}_{2H}^* / \dot{U}_2^{(K)} + y_{21} \dot{U}_1^{(K+1)}) / y_{22}; \\ \dot{U}_3^{(K+1)} = (\dot{S}_{3H}^* / \dot{U}_3^{(K)} + y_{30} \dot{U}_0 + y_{31} \dot{U}_1^{(K+1)}) / y_{33}; \\ \dot{U}_4^{(K+1)} = (\dot{S}_{4H}^* / \dot{U}_4^{(K)} + y_{41} \dot{U}_1^{(K+1)}) / y_{44}. \end{array} \right.$$

Підставляємо в цю систему відомі і задані величини – провідності, потужності навантаження у вузлах, напругу в опорному вузлі  $\dot{U}_0$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{U}_1^{(K+1)} = [(3 - j2) / \dot{U}_1^{(K)} + (0,1034 - j0,1756) \cdot 115 + (0,1111 - j0,1518) \dot{U}_2^{(K)} + \\ + (0,1393 - j0,1899) \dot{U}_3^{(K)} + (0,0017 - j0,0343) \dot{U}_4^{(K)}] / (0,3544 - j0,5288); \\ \dot{U}_2^{(K+1)} = [(5 - j2) / \dot{U}_2^{(K)} + (0,1111 - j0,1518) \dot{U}_1^{(K+1)}] / (0,1111 - j0,1518); \\ \dot{U}_3^{(K+1)} = [(4 - j3) / \dot{U}_3^{(K)} + (0,0861 - j0,1463) \cdot 115 + (0,1393 - j0,1899) \dot{U}_1^{(K+1)}] / \\ (0,2254 - j0,3362); \\ \dot{U}_4^{(K+1)} = [(1 - j0,3) / \dot{U}_4^{(K)} + (0,0017 - j0,0343) \dot{U}_1^{(K+1)}] / (0,0051 - j0,1025). \end{array} \right.$$

Перетворюємо та спрощуємо систему рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{U}_1^{(K+1)} = (5,2336+j2,1657)/U_1^{*(K)} + (36,7515 - j2,144) + (0,2953 + \\ \quad + j0,0122) \dot{U}_2^{(K)} + (0,3696 + j0,0157) \dot{U}_3^{(K)} + (0,0462 - j0,0278) \dot{U}_4^{(K)} ; \\ \dot{U}_2^{(K+1)} = (24,2777 + j15,1696)/U_2^{*(K)} + \dot{U}_1^{(K+1)} ; \\ \dot{U}_3^{(K+1)} = (11,6592+j4,0809)/U_3^{*(K)} + (48,147-j2,8282) + \\ \quad + (0,5813-j0,0246) \dot{U}_1^{(K+1)} ; \\ \dot{U}_4^{(K+1)} = (3,4038 + j9,5867)/U_4^{*(K)} + (0,3346 - j0,0001) \dot{U}_1^{(K+1)} . \end{array} \right.$$

Задаємо початкові наближення невідомих напруг. Як початкові приймаємо номінальні значення напруги вузлів:

$$\dot{U}_1^{(0)} = U_{1НОМ} = 110 + j0 \text{ кВ};$$

$$\dot{U}_2^{(0)} = U_{2НОМ} = 110 + j0 \text{ кВ};$$

$$\dot{U}_3^{(0)} = U_{3НОМ} = 110 + j0 \text{ кВ};$$

$$\dot{U}_4^{(0)} = U_{4НОМ} = 35 + j0 \text{ кВ}.$$

Виконуємо ітерації за методом Зейделя. Точність розрахунків  $\varepsilon = 0,01$  кВ.

*Ітерація 0,  $k=0$ .*

Підставляємо початкові наближення невідомих в перше рівняння:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1^{(1)} &= (5,2336+j2,1657)/U_1^{*(0)} + (36,7515 - j2,144) + (0,2953 + \\ &\quad + j0,0122) \dot{U}_2^{(0)} + (0,3696 + j0,0157) \dot{U}_3^{(0)} + (0,0462 - j0,0278) \dot{U}_4^{(0)} = \\ &= (5,2336+j2,1657)/110 + (36,7515 - j2,144) + (0,2953 + \\ &\quad + j0,0122) \cdot 110 + (0,3696 + j0,0157) \cdot 110 + (0,0462 - j0,0278) \cdot 35 = \\ &= 111,4599 - j0,0677 \text{ кВ}. \end{aligned}$$

Підставляємо  $\dot{U}_2^{(0)}$  і щойно знайдене значення  $\dot{U}_1^{(1)}$  в друге рівняння:

$$\begin{aligned}\dot{U}_2^{(1)} &= (24,2777 + j15,1696)/\dot{U}_2^{*(0)} + \dot{U}_1^{(1)} = \\ &= (24,2777 + j15,1696)/110 + (111,4599 - j0,0677) = 111,2392 - j0,2056 \text{ кВ.}\end{aligned}$$

Підставляємо  $\dot{U}_1^{(1)}$  і  $\dot{U}_3^{(0)}$  в третє рівняння:

$$\begin{aligned}\dot{U}_3^{(1)} &= (11,6592 + j4,0809)/\dot{U}_3^{*(0)} + (48,147 - j2,8282) + (0,5813 - j0,0246)\dot{U}_1^{(1)} = \\ &= (11,6592 + j4,0809)/110 + (48,147 - j2,8282) + \\ &+ (0,5813 - j0,0246)(111,4599 - j0,0677) = 112,8310 - j5,6466 \text{ кВ.}\end{aligned}$$

Підставляємо  $\dot{U}_1^{(1)}$  і  $\dot{U}_4^{(0)}$  в четверте рівняння:

$$\begin{aligned}\dot{U}_4^{(1)} &= (3,4038 + j9,5867)/\dot{U}_4^{*(0)} + (0,3346 - j0,0001)\dot{U}_1^{(1)} = \\ &= (3,4038 + j9,5867)/35 + (0,3346 - j0,0001)(111,4599 + j0,9045) = \\ &= 37,1972 - j0,3077 \text{ кВ.}\end{aligned}$$

Контроль завершення ітераційного розрахунку:

$$|\dot{U}_1^{(1)} - \dot{U}_1^{(0)}| = |(111,4599 - j0,0677) - 110| = |1,4599 - j0,0677| > \varepsilon.$$

Умова завершення не виконується, тому переходимо до наступної ітерації.

*Ітерація 1,  $\kappa=1$ .*

$$\begin{aligned}\dot{U}_1^{(2)} &= (5,2336 + j2,1657)/\dot{U}_1^{*(1)} + (36,7515 - j2,144) + (0,2953 + j0,0122)\dot{U}_2^{(1)} + \\ &+ (0,3696 + j0,0157)\dot{U}_3^{(1)} + (0,0462 - j0,0278)\dot{U}_4^{(1)} = \\ &= (5,2336 + j2,1657)/(111,4599 + j0,0677) + (36,7515 - j2,144) + (0,2953 + \\ &+ j0,0122) \cdot (111,2392 - j0,2056) + (0,3696 + j0,0157) \cdot (112,8310 - j5,6466) + \\ &+ (0,0462 - j0,0278) \cdot (37,1972 - j0,3077) = 113,0569 - j2,2309 \text{ кВ;}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{U}_2^{(2)} &= (24,2777 + j15,1696)/\dot{U}_2^{*(1)} + \dot{U}_1^{(2)} = \\ &= (24,2777 + j15,1696)/(111,2392 + j0,2056) + (113,0569 - j2,2309) =\end{aligned}$$

$$= 112,8384 - j2,3668 \text{ kВ};$$

$$\begin{aligned} \dot{U}_3^{(2)} &= (11,6592 + j4,0809) / \dot{U}_3^{*(1)} + (48,147 - j2,8282) + (0,5813 - j0,0246) \dot{U}_1^{(2)} = \\ &= (11,6592 + j4,0809) / (112,8310 + j5,6466) + (48,147 - j2,8282) + \\ &+ (0,5813 - j0,0246)(113,0569 - j2,2309) = 113,7072 - j6,9371 \text{ kВ}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{U}_4^{(2)} &= (3,4038 + j9,5867) / \dot{U}_4^{*(1)} + (0,3346 - j0,0001) \dot{U}_1^{(2)} = \\ &= (3,4038 + j9,5867) / (37,1972 + j0,3077) + (0,3346 - j0,0001)(113,0569 - \\ &- j2,2309) = 37,7350 - j1,0147 \text{ kВ}. \end{aligned}$$

Контроль завершення ітераційного розрахунку:

$$|\dot{U}_1^{(2)} - \dot{U}_1^{(1)}| = |(113,0569 - j2,2309) - (111,4599 - j0,0677)| = |1,597 - j2,1632| > \varepsilon.$$

Умова завершення не виконується, тому переходимо до наступної ітерації.

*Ітерація 2,  $\kappa=2$ .*

$$\begin{aligned} \dot{U}_1^{(3)} &= (5,2336 + j2,1657) / \dot{U}_1^{*(2)} + (36,7515 - j2,144) + (0,2953 + j0,0122) \dot{U}_2^{(2)} + \\ &+ (0,3696 + j0,0157) \dot{U}_3^{(2)} + (0,0462 - j0,0278) \dot{U}_4^{(2)} = \\ &= (5,2336 + j2,1657) / (113,0569 + j2,2309) + (36,7515 - j2,144) + (0,2953 + \\ &+ j0,0122) \cdot (112,8384 - j2,3668) + (0,3696 + j0,0157) \cdot (113,7072 - j6,9371) + \\ &+ (0,0462 - j0,0278) \cdot (37,7350 - j1,0147) = 113,9053 - j3,3592 \text{ kВ}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{U}_2^{(3)} &= (24,2777 + j15,1696) / \dot{U}_2^{*(2)} + \dot{U}_1^{(3)} = \\ &= (24,2777 + j15,1696) / (112,8389 + j2,3668) + (113,9053 - j3,3592) = \\ &= 113,6874 - j3,4891 \text{ kВ}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{U}_3^{(3)} &= (11,6592 + j4,0809) / \dot{U}_3^{*(2)} + (48,147 - j2,8282) + (0,5813 - j0,0246) \dot{U}_1^{(3)} = \\ &= (11,6592 + j4,0809) / (113,7072 + j6,9371) + (48,147 - j2,8282) + \\ &+ (0,5813 - j0,0246)(113,9053 - j3,3592) = 114,1732 - j7,6125 \text{ kВ}; \end{aligned}$$

$$\dot{U}_4^{(3)} = (3,4038 + j9,5867) / \dot{U}_4^{*(2)} + (0,3346 - j0,0001) \dot{U}_1^{(3)} =$$

$$= (3,4038 + j9,5867)/(37,7350 + j1,0147) + (0,3346 - j0,0001)(113,9053 - j3,3592) = 38,0154 - j1,3868 \text{ кВ.}$$

Контроль завершення ітераційного розрахунку:

$$|\dot{U}_1^{(3)} - \dot{U}_1^{(2)}| = |(113,9053 - j3,3592) - (113,0569 - j2,2309)| = |0,8484 - j1,1283| > \epsilon.$$

Після другої ітерації задана точність результату не досягнута, тобто не виконуються умови завершення розрахунку. Для отримання результату із заданою точністю треба виконати ще декілька ітерацій розрахунку.

Результати цих і подальших розрахунків на ПК наведені в таблиці:

Номер наближення невідомих $k$	$\dot{U}_1^{(k)}$	$\dot{U}_2^{(k)}$	$\dot{U}_3^{(k)}$	$\dot{U}_4^{(k)}$
0	110+j0	110+j0	110+j0	35+j0
1	111,4599-j0,0677	111,2392 -j0,2056	112,8310 -j5,6466	37,1972-j0,3077
2	113,0569-j2,2308	112,8384 -j2,3668	113,7072 -j6,9371	37,7350-j1,0147
3	113,9052-j3,3592	113,6873 -j3,4890	114,1731 -j7,6125	38,0154-j1,3868
4	114,3551-j3,9469	114,1377-j4,0737	114,4205-j7,9645	38,1642-j1,5807
5	114,5938-j4,2531	114,3766-j4,3782	114,5519-j8,1480	38,2432-j1,6816
6	114,7204-j4,4126	114,5034-j4,5369	114,6216-j8,2436	38,2852-j1,7342
7	114,7876-j4,4956	114,5706-j4,6195	114,6587-j8,2934	38,3074-j1,7616
8	114,8232-j4,5389	114,6063-j4,6625	114,6783-j8,3194	38,3192-j1,7758
9	114,8421-j4,5614	114,6252-j4,6849	114,6888-j8,3329	38,3255-j1,7833
10	114,8521-j4,5731	114,6353-j4,6966	114,6943-j8,3400	38,3288-j1,7871
11	114,8574-j4,5792	114,6406-j4,7027	114,6973-j8,3436	38,3306-j1,7891

Після виконання одинадцятої ітерації ( $k = 11$ ) досягається задана точність результату ( $\epsilon = 0,01$ ) і виконуються умови завершення ітераційного процесу по *поправках* для усіх напруг:

$$|U_1^{(11)} - U_1^{(10)}| = |(114,8574 - j4,5792) - (114,8521 - j4,5731)| = |0,0053 - j0,0061| = 0,0081 < \epsilon;$$



$$\begin{aligned} |U_2^{(11)} - U_2^{(10)}| &= |(114,6406 - j4,7027) - (114,6353 - j4,6966)| = |0,0053 - j0,0061| = \\ &= 0,0081 < \varepsilon; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |U_3^{(11)} - U_3^{(10)}| &= |(114,6973 - j8,3436) - (114,6943 - j8,3400)| = |0,003 - j0,0036| = \\ &= 0,0047 < \varepsilon; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |U_4^{(11)} - U_4^{(10)}| &= |(38,3306 - j1,7891) - (38,3288 - j1,7871)| = |0,0018 - j0,0020| = \\ &= 0,0027 < \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким чином, розв'язком системи нелінійних рівнянь усталеного режиму методом Зейделя з точністю  $\varepsilon = 0,01$  є такі значення напруг у вузлах мережі:

$$\dot{U}_1 = U_1^{(11)} = 114,8574 - j4,5792 \text{ кВ};$$

$$\dot{U}_2 = U_2^{(11)} = 114,6406 - j4,7027 \text{ кВ};$$

$$\dot{U}_3 = U_3^{(11)} = 114,6973 - j8,3436 \text{ кВ};$$

$$\dot{U}_4 = U_4^{(11)} = 38,3306 - j1,7891 \text{ кВ}.$$

Нев'язки рівнянь системи при цьому мають такі значення:

$$\begin{aligned} 1) \quad y_{11} \dot{U}_1 - (y_{10} \dot{U}_0 + y_{12} \dot{U}_2 + y_{13} \dot{U}_3 + y_{14} \dot{U}_4) - \mathbf{S}_1^* / \dot{U}_1 &= \\ = (0,3544 - j0,5288) \cdot (114,8574 - j4,5792) - [(0,1034 - j0,1756) \cdot 115 + (0,1111 - \\ - j0,1518) \cdot (114,6406 - j4,7027) + (0,1393 - j0,1899) \cdot (114,6973 - j8,3436) + \\ + (0,0017 - j0,0343) \cdot (38,3306 - j1,7891)] - (3 - j2) / (114,8574 + j4,5792) &= \\ = -0,0010 + j0,0021; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad y_{22} \dot{U}_2 - y_{21} \dot{U}_1 - \mathbf{S}_2^* / \dot{U}_2 &= \\ = (0,1111 - j0,1518) \cdot (114,6406 - j4,7027) - (0,1111 - j0,1518) \cdot (114,8574 - \\ - j4,5792) - (5 - j2) / (114,6406 + j4,7027) &= 0,0 + j0,0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3) \quad & y_{33} \dot{U}_3 - (y_{30} \dot{U}_0 + y_{31} \dot{U}_1) - \mathbf{S}_3^* / \mathbf{U}_3^* = \\
& = (0,2254 - j0,3362) \cdot (114,6973 - j8,3436) - [(0,0861 - j0,1463) \cdot 115 + (0,1393 - \\
& - j0,1899) \cdot (114,8574 - j4,5792)] - (4 - j3) / (114,6973 + j8,3436) = \\
& = -1,9511 - j1,1966;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4) \quad & y_{44} \dot{U}_4 - y_{41} \dot{U}_1 - \mathbf{S}_4^* / \mathbf{U}_4^* = \\
& = (0,0051 - j0,1025) \cdot (38,3306 - j1,7891) - (0,0017 - j0,0343) \cdot (114,8574 - \\
& - j4,5792) - (1 - j0,3) / (38,3306 + j1,7891) = -0,0004 + j0,0004.
\end{aligned}$$

Для досягнення заданої точності за *нев'язками* усіх рівнянь треба виконати ще декілька ітерацій розрахунку.

### 6.3. Контрольні питання до розділу 6:

1. В чому полягає суть методу Зейделя;
2. Які перетворення системи рівнянь необхідні для розв'язання її методом Зейделя;
3. Що таке ітераційна форма запису системи рівнянь;
4. Алгоритм розв'язання системи нелінійних рівнянь усталеного режиму методом Зейделя;
5. Які значення напруг вузлів приймаються як початкові наближення;
6. Значення яких параметрів режиму визначаються в результаті розв'язання системи рівнянь усталеного режиму;
7. Як виконується контроль завершення ітераційного розрахунку;
8. Що таке невязка рівняння, як визначаються невязки.

**Розділ 7. Розв'язання системи нелінійних рівнянь  
усталеного режиму роботи електричної мережі.  
Метод Ньютона-Рафсона.**

*7.1. Етап 1: Підготовчі перетворення системи рівнянь*

*Розглядаються питання підготовки розрахункових формул для реалізації алгоритму метода Ньютона-Рафсона розв'язання системи нелінійних рівнянь усталеного режиму роботи електричної мережі.*

Метод Ньютона-Рафсона [3, 8] належить до групи сучасних ітераційних методів, які застосовуються при розв'язанні систем нелінійних рівнянь усталеного режиму роботи електричної мережі. Він має відносно нескладний алгоритм обчислень та забезпечує швидку збіжність ітераційного процесу.

Суть методу полягає в послідовній заміні на кожній ітерації обчислень вихідної нелінійної системи рівнянь допоміжною лінійною системою, розв'язок якої дозволяє визначити чергові наближення невідомих величин (лінеаризація). Формування і розв'язання цієї лінійаризованої системи рівнянь виконується на кожній ітерації методу Ньютона-Рафсона:

$$Y \cdot \Delta U = -W. \quad (7.1)$$

Вектор невідомих в ній  $\Delta U$  містить поправки до модулів та кутів вузлових напруг  $U_i$  і  $\theta_i$ , матрицею коефіцієнтів при невідомих  $Y$  є матриця Якобі, вектор вільних членів  $W$  містить нев'язки нелінійних рівнянь вихідної системи при чергових наближеннях невідомих напруг. Нев'язки рівнянь усталеного режиму відповідають небалансам активної і реактивної потужностей у вузлах мережі.

Елементами матриці Якобі є похідні від рівнянь вихідної системи у формі нев'язок по всім невідомим величинам – складовим вузлових напруг (модулі та кути напруг  $U_i$  і  $\theta_i$ , або дійсні та уявні складові  $U'$  і  $U''$ ). Кожен рядок матриці містить похідні від одного рівняння.

Для застосування методу вихідна система рівнянь усталеного режиму з комплексними складовими у формі балансу потужностей (3.4) повинна бути *перетворена* – розділені дійсні та уявні її складові. При цьому кожне рівняння з комплексними складовими розпадається на два рівняння з дійсними складовими – рівняння балансу активної і реактивної потужностей у відповідному вузлі мережі. В полярних координатах ці рівняння мають вигляд (2.5). Отримана система рівнянь має розмірність  $2n$ , невідомими в ній є модулі та кути вузлових напруг  $U_i$  і  $\theta_i$ . Система таких рівнянь для заданої мережі сформована у розділі 3.

Розв’язання системи рівнянь усталеного режиму методом Ньютона-Рафсона передбачає виконання двох послідовних етапів:

- підготовчий етап. Тут визначаються всі аналітичні залежності за якими виконуються обчислення на ітераціях;
- реалізація алгоритму метода.

На *підготовчому* етапі виконуються такі дії:

1. Рівняння системи із дійсними складовими записуються у формі *нев’язок*:

$$\begin{cases} \omega_{P_i} = U_i^2 \cdot y_{ii}' - U_i \cdot \sum_j U_j \cdot [y_{ij}' \cdot \cos \theta_i - \theta_j + y_{ij}'' \cdot \sin \theta_i - \theta_j] - P_i = 0; \\ \omega_{Q_i} = U_i^2 \cdot y_{ii}'' + U_i \cdot \sum_j U_j \cdot [y_{ij}' \cdot \sin \theta_i - \theta_j - y_{ij}'' \cdot \cos \theta_i - \theta_j] + Q_i = 0. \end{cases} \quad (7.2)$$

$$i = 1, \dots, n.$$

2. Перегрупування рівнянь системи – рівняння балансу активних потужностей  $\omega_{P_i}$  всіх вузлів переставляємо на початок системи:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\omega_{p1} = U_1^2 \cdot y'_{11} - U_1 \cdot \sum_{j=2}^n U_j \cdot [y'_{1j} \cdot \cos \theta_1 - \theta_j + y''_{1j} \cdot \sin \theta_1 - \theta_j] - P_1 = 0; \\
\omega_{p2} = U_2^2 \cdot y'_{22} - U_2 \cdot \sum_{j=1; j \neq 2}^n U_j \cdot [y'_{2j} \cdot \cos \theta_2 - \theta_j + y''_{2j} \cdot \sin \theta_2 - \theta_j] - P_2 = 0; \\
\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
\omega_{pn} = U_n^2 \cdot y'_{nn} - U_n \cdot \sum_{j=1}^{n-1} U_j \cdot [y'_{nj} \cdot \cos \theta_n - \theta_j + y''_{nj} \cdot \sin \theta_n - \theta_j] - P_n = 0; \\
\omega_{Q1} = U_1^2 \cdot y''_{11} + U_1 \cdot \sum_{j=2}^n U_j \cdot [y'_{1j} \cdot \sin (\Theta_1 - \theta_j) - y''_{1j} \cdot \cos (\Theta_1 - \theta_j)] + Q_1 = 0; \\
\omega_{Q2} = U_2^2 \cdot y''_{22} + U_2 \cdot \sum_{j=1; j \neq 2}^n U_j \cdot [y'_{2j} \cdot \sin (\Theta_2 - \theta_j) - y''_{2j} \cdot \cos (\Theta_2 - \theta_j)] + Q_2 = 0; \\
\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
\omega_{Qn} = U_n^2 \cdot y''_{nn} + U_n \cdot \sum_{j=1}^{n-1} U_j \cdot [y'_{nj} \cdot \sin (\Theta_n - \theta_j) - y''_{nj} \cdot \cos (\Theta_n - \theta_j)] + Q_n = 0.
\end{array} \right. \quad (7.3)$$

3. Формування матриці Якобі для системи (7.3). Її елементи – часткові похідні від усіх рівнянь системи по всім невідомим величинам. У загальному вигляді структуру матриці можна записати:

$$\mathbf{Я} = \begin{bmatrix}
\frac{\partial \omega_{p1}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \omega_{p1}}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial \omega_{p1}}{\partial \theta_n} & \frac{\partial \omega_{p1}}{\partial U_1} & \frac{\partial \omega_{p1}}{\partial U_2} & \dots & \frac{\partial \omega_{p1}}{\partial U_n} \\
\frac{\partial \omega_{p2}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \omega_{p2}}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial \omega_{p2}}{\partial \theta_n} & \frac{\partial \omega_{p2}}{\partial U_1} & \frac{\partial \omega_{p2}}{\partial U_2} & \dots & \frac{\partial \omega_{p2}}{\partial U_n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\frac{\partial \omega_{pn}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \omega_{pn}}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial \omega_{pn}}{\partial \theta_n} & \frac{\partial \omega_{pn}}{\partial U_1} & \frac{\partial \omega_{pn}}{\partial U_2} & \dots & \frac{\partial \omega_{pn}}{\partial U_n} \\
\frac{\partial \omega_{Q1}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \omega_{Q1}}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial \omega_{Q1}}{\partial \theta_n} & \frac{\partial \omega_{Q1}}{\partial U_1} & \frac{\partial \omega_{Q1}}{\partial U_2} & \dots & \frac{\partial \omega_{Q1}}{\partial U_n} \\
\frac{\partial \omega_{Q2}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \omega_{Q2}}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial \omega_{Q2}}{\partial \theta_n} & \frac{\partial \omega_{Q2}}{\partial U_1} & \frac{\partial \omega_{Q2}}{\partial U_2} & \dots & \frac{\partial \omega_{Q2}}{\partial U_n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\frac{\partial \omega_{Qn}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \omega_{Qn}}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial \omega_{Qn}}{\partial \theta_n} & \frac{\partial \omega_{Qn}}{\partial U_1} & \frac{\partial \omega_{Qn}}{\partial U_2} & \dots & \frac{\partial \omega_{Qn}}{\partial U_n}
\end{bmatrix} \quad (7.4)$$

4. Визначення аналітичних виразів похідних у складі матриці Якобі.

Для цього виконується аналітичне диференціювання рівнянь системи (7.3) по всім невідомим величинам  $\theta_i$  та  $U_i$ . В результаті отримуємо вісім типів похідних:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_{pi}}{\partial \theta_i} &= U_i \cdot \sum_j U_j \cdot [y'_{ij} \cdot \sin \theta_i - \theta_j - y''_{ij} \cdot \cos \theta_i - \theta_j]; \\ \frac{\partial \omega_{pi}}{\partial \theta_j} &= -U_i \cdot U_j \cdot [y'_{ij} \cdot \sin \theta_i - \theta_j - y''_{ij} \cdot \cos \theta_i - \theta_j]; \\ \frac{\partial \omega_{pi}}{\partial U_i} &= 2 \cdot U_i \cdot y''_{ii} - \sum_j U_j \cdot [y'_{ij} \cdot \cos \theta_i - \theta_j + y''_{ij} \cdot \sin \theta_i - \theta_j]; \\ \frac{\partial \omega_{pi}}{\partial U_j} &= -U_i \cdot [y'_{ij} \cdot \cos \theta_i - \theta_j + y''_{ij} \cdot \sin \theta_i - \theta_j]; \\ \frac{\partial \omega_{qi}}{\partial \theta_i} &= U_i \cdot \sum_j U_j \cdot [y'_{ij} \cdot \cos \theta_i - \theta_j + y''_{ij} \cdot \sin \theta_i - \theta_j]; \\ \frac{\partial \omega_{qi}}{\partial \theta_j} &= -U_i \cdot U_j \cdot [y'_{ij} \cdot \cos \theta_i - \theta_j + y''_{ij} \cdot \sin \theta_i - \theta_j]; \\ \frac{\partial \omega_{qi}}{\partial U_i} &= 2 \cdot U_i \cdot y''_{ii} + \sum_j U_j \cdot [y'_{ij} \cdot \sin \theta_i - \theta_j - y''_{ij} \cdot \cos \theta_i - \theta_j]; \\ \frac{\partial \omega_{qi}}{\partial U_j} &= U_i \cdot [y'_{ij} \cdot \sin \theta_i - \theta_j - y''_{ij} \cdot \cos \theta_i - \theta_j]. \end{aligned} \tag{7.5}$$

В усіх формулах індекс  $j$  відповідає номерам вузлів, які безпосередньо зв'язані з вузлом  $i$ .

5. Формування вектора нев'язок  $W$  в правій частині системи (7.1). Його елементи обчислюються при підстановці в рівняння (7.3) чергових наближень модулів і кутів напруг. Загальна структура вектора:

$$W = \begin{bmatrix} \omega_{p1} \\ \omega_{p2} \\ \dots \\ \omega_{pn} \\ \omega_{Q1} \\ \omega_{Q2} \\ \dots \\ \omega_{Qn} \end{bmatrix}. \quad (7.6)$$

6. Формування лінійизованої системи рівнянь (7.1). Загальна структура системи:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \omega_{p1}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \omega_{p1}}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial \omega_{p1}}{\partial \theta_n} & \frac{\partial \omega_{p1}}{\partial U_1} & \frac{\partial \omega_{p1}}{\partial U_2} & \dots & \frac{\partial \omega_{p1}}{\partial U_n} \\ \frac{\partial \omega_{p2}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \omega_{p2}}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial \omega_{p2}}{\partial \theta_n} & \frac{\partial \omega_{p2}}{\partial U_1} & \frac{\partial \omega_{p2}}{\partial U_2} & \dots & \frac{\partial \omega_{p2}}{\partial U_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \omega_{pn}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \omega_{pn}}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial \omega_{pn}}{\partial \theta_n} & \frac{\partial \omega_{pn}}{\partial U_1} & \frac{\partial \omega_{pn}}{\partial U_2} & \dots & \frac{\partial \omega_{pn}}{\partial U_n} \\ \frac{\partial \omega_{Q1}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \omega_{Q1}}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial \omega_{Q1}}{\partial \theta_n} & \frac{\partial \omega_{Q1}}{\partial U_1} & \frac{\partial \omega_{Q1}}{\partial U_2} & \dots & \frac{\partial \omega_{Q1}}{\partial U_n} \\ \frac{\partial \omega_{Q2}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \omega_{Q2}}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial \omega_{Q2}}{\partial \theta_n} & \frac{\partial \omega_{Q2}}{\partial U_1} & \frac{\partial \omega_{Q2}}{\partial U_2} & \dots & \frac{\partial \omega_{Q2}}{\partial U_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \omega_{Qn}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \omega_{Qn}}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial \omega_{Qn}}{\partial \theta_n} & \frac{\partial \omega_{Qn}}{\partial U_1} & \frac{\partial \omega_{Qn}}{\partial U_2} & \dots & \frac{\partial \omega_{Qn}}{\partial U_n} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta \theta_1 \\ \Delta \theta_2 \\ \dots \\ \Delta \theta_n \\ \Delta U_1 \\ \Delta U_2 \\ \dots \\ \Delta U_n \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \omega_{p1} \\ \omega_{p2} \\ \dots \\ \omega_{pn} \\ \omega_{Q1} \\ \omega_{Q2} \\ \dots \\ \omega_{Qn} \end{bmatrix}. \quad (7.7)$$

## 7.2. Приклад виконання підготовчих перетворень системи рівнянь

Система із восьми нелінійних рівнянь усталеного режиму у формі балансу потужностей з дійсними складовими у полярних координатах

сформована в розділі 3. Невідомими в ній є модулі та кути напруг у вузлах  $U_1, \theta_1, U_2, \theta_2, U_3, \theta_3, U_4, \theta_4$ .

Виконаємо прості *перетворення* рівнянь системи: перемножимо числові коефіцієнти, впорядкуємо знаки, переставимо рівняння балансу *активних* потужностей вузлів на початок системи і запишемо рівняння у *формі* нев'язок  $\omega_{pi}$  та  $\omega_{qi}$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_{p1}=0,3544 \cdot U_1^2 - U_1 \cdot [(11,891 \cdot \cos\theta_1 - 20,194 \cdot \sin\theta_1) + \\ + U_2 (0,1111 \cdot \cos(\theta_1 - \theta_2) - 0,1518 \cdot \sin(\theta_1 - \theta_2)) + \\ + U_3 (0,1393 \cdot \cos(\theta_1 - \theta_3) - 0,1899 \cdot \sin(\theta_1 - \theta_3)) + \\ + U_4 (0,0017 \cdot \cos(\theta_1 - \theta_4) - 0,0343 \cdot \sin(\theta_1 - \theta_4))] - 3 = 0; \\ \omega_{p2}=0,1111 \cdot U_2^2 - U_2 U_1 (0,1111 \cdot \cos(\theta_2 - \theta_1) - 0,1518 \cdot \sin(\theta_2 - \\ - \theta_1)) - 5 = 0; \\ \omega_{p3}=0,2254 \cdot U_3^2 - U_3 [(9,9015 \cdot \cos\theta_3 - 16,8245 \cdot \sin\theta_3) + \\ + U_1 (0,1393 \cdot \cos(\theta_3 - \theta_1) - 0,1899 \cdot \sin(\theta_3 - \theta_1))] - 4 = 0; \\ \omega_{p4}=0,0051 \cdot U_4^2 - U_4 U_1 (0,0017 \cdot \cos(\theta_4 - \theta_1) - 0,0343 \cdot \sin(\theta_4 - \\ - \theta_1)) - 1 = 0; \\ \omega_{q1} = -0,5288 \cdot U_1^2 + U_1 \cdot [(11,891 \cdot \sin\theta_1 + 20,194 \cdot \cos\theta_1) + \\ + U_2 (0,1111 \cdot \sin(\theta_1 - \theta_2) + 0,1518 \cdot \cos(\theta_1 - \theta_2)) + \\ + U_3 (0,1393 \cdot \sin(\theta_1 - \theta_3) + 0,1899 \cdot \cos(\theta_1 - \theta_3)) + \\ + U_4 (0,0017 \cdot \sin(\theta_1 - \theta_4) + 0,0343 \cdot \cos(\theta_1 - \theta_4))] + 2 = 0; \\ \omega_{q2} = -0,1518 \cdot U_2^2 + U_2 U_1 (0,1111 \cdot \sin(\theta_2 - \theta_1) + 0,1518 \cdot \cos(\theta_2 - \\ - \theta_1)) + 2 = 0; \\ \omega_{q3} = -0,3362 \cdot U_3^2 + U_3 [(9,9015 \cdot \sin\theta_3 + 16,8245 \cdot \cos\theta_3) + \\ + U_1 (0,1393 \cdot \sin(\theta_3 - \theta_1) + 0,1899 \cdot \cos(\theta_3 - \theta_1))] + 3 = 0; \\ \omega_{q4} = -0,1025 \cdot U_4^2 + U_4 U_1 (0,0017 \cdot \sin(\theta_4 - \theta_1) + 0,0343 \cdot \cos(\theta_4 - \\ - \theta_1)) + 0,3 = 0. \end{array} \right.$$

*Матриця Якобі* для системи рівнянь складається із часткових похідних від усіх рівнянь системи по всім невідомим величинам. Кожний  $i$ -й рядок



матриці містить похідні від одного  $i$ -го рівняння системи. Розмірність матриці Якобі відповідає кількості рівнянь в системі і кількості невідомих.

Для даної системи вона складає  $8 \times 8$ . Якщо вузли мережі не зв'язані між собою, то відповідні елементи матриці дорівнюють нулю. З урахуванням цього матриця Якобі має таку структуру:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix}
 \frac{\partial \omega_{p1}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \omega_{p1}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \omega_{p1}}{\partial \theta_3} & \frac{\partial \omega_{p1}}{\partial \theta_4} & \frac{\partial \omega_{p1}}{\partial U_1} & \frac{\partial \omega_{p1}}{\partial U_2} & \frac{\partial \omega_{p1}}{\partial U_3} & \frac{\partial \omega_{p1}}{\partial U_4} \\
 \frac{\partial \omega_{p2}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \omega_{p2}}{\partial \theta_2} & 0 & 0 & \frac{\partial \omega_{p2}}{\partial U_1} & \frac{\partial \omega_{p2}}{\partial U_2} & 0 & 0 \\
 \frac{\partial \omega_{p3}}{\partial \theta_1} & 0 & \frac{\partial \omega_{p3}}{\partial \theta_3} & 0 & \frac{\partial \omega_{p3}}{\partial U_1} & 0 & \frac{\partial \omega_{p3}}{\partial U_3} & 0 \\
 \frac{\partial \omega_{p4}}{\partial \theta_1} & 0 & 0 & \frac{\partial \omega_{p4}}{\partial \theta_4} & \frac{\partial \omega_{p4}}{\partial U_1} & 0 & 0 & \frac{\partial \omega_{p4}}{\partial U_4} \\
 \frac{\partial \omega_{q1}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \omega_{q1}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \omega_{q1}}{\partial \theta_3} & \frac{\partial \omega_{q1}}{\partial \theta_4} & \frac{\partial \omega_{q1}}{\partial U_1} & \frac{\partial \omega_{q1}}{\partial U_2} & \frac{\partial \omega_{q1}}{\partial U_3} & \frac{\partial \omega_{q1}}{\partial U_4} \\
 \frac{\partial \omega_{q2}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \omega_{q2}}{\partial \theta_2} & 0 & 0 & \frac{\partial \omega_{q2}}{\partial U_1} & \frac{\partial \omega_{q2}}{\partial U_2} & 0 & 0 \\
 \frac{\partial \omega_{q3}}{\partial \theta_1} & 0 & \frac{\partial \omega_{q3}}{\partial \theta_3} & 0 & \frac{\partial \omega_{q3}}{\partial U_1} & 0 & \frac{\partial \omega_{q3}}{\partial U_3} & 0 \\
 \frac{\partial \omega_{q4}}{\partial \theta_1} & 0 & 0 & \frac{\partial \omega_{q4}}{\partial \theta_4} & \frac{\partial \omega_{q4}}{\partial U_1} & 0 & 0 & \frac{\partial \omega_{q4}}{\partial U_4}
 \end{bmatrix}$$

Для визначення аналітичних виразів похідних у складі матриці Якобі виконуємо диференціювання рівнянь системи по невідомим величинам:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \omega_{p1}}{\partial \theta_1} &= U_1 \cdot [(11,891 \cdot \sin \Theta_1 + 20,194 \cdot \cos \Theta_1) + \\
 &+ U_2 (0,1111 \cdot \sin(\Theta_1 - \Theta_2) + 0,1518 \cdot \cos(\Theta_1 - \Theta_2)) + \\
 &+ U_3 (0,1393 \cdot \sin(\Theta_1 - \Theta_3) + 0,1899 \cdot \cos(\Theta_1 - \Theta_3)) + \\
 &+ U_4 (0,0017 \cdot \sin(\Theta_1 - \Theta_4) + 0,0343 \cdot \cos(\Theta_1 - \Theta_4))]; \\
 \frac{\partial \omega_{p1}}{\partial \theta_2} &= - U_1 \cdot U_2 (0,1111 \cdot \sin(\Theta_1 - \Theta_2) + 0,1518 \cdot \cos(\Theta_1 - \Theta_2)); \\
 \frac{\partial \omega_{p1}}{\partial \theta_3} &= - U_1 \cdot U_3 (0,1393 \cdot \sin(\Theta_1 - \Theta_3) + 0,1899 \cdot \cos(\Theta_1 - \Theta_3)); \\
 \frac{\partial \omega_{p1}}{\partial \theta_4} &= - U_1 \cdot U_4 (0,0017 \cdot \sin(\Theta_1 - \Theta_4) + 0,0343 \cdot \cos(\Theta_1 - \Theta_4));
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \omega_{p1}}{\partial U_1} &= 0,7088 \cdot U_1 - [(11,891 \cdot \cos \Theta_1 - 20,194 \cdot \sin \Theta_1) + \\
&\quad + U_2 (0,1111 \cdot \cos(\Theta_1 - \Theta_2) - 0,1518 \cdot \sin(\Theta_1 - \Theta_2)) + \\
&\quad + U_3 (0,1393 \cdot \cos(\Theta_1 - \Theta_3) - 0,1899 \cdot \sin(\Theta_1 - \Theta_3)) + \\
&\quad + U_4 (0,0017 \cdot \cos(\Theta_1 - \Theta_4) - 0,0343 \cdot \sin(\Theta_1 - \Theta_4))]; \\
\frac{\partial \omega_{p1}}{\partial U_2} &= -U_1 \cdot (0,1111 \cdot \cos(\Theta_1 - \Theta_2) - 0,1518 \cdot \sin(\Theta_1 - \Theta_2)); \\
\frac{\partial \omega_{p1}}{\partial U_3} &= -U_1 \cdot (0,1393 \cdot \cos(\Theta_1 - \Theta_3) - 0,1899 \cdot \sin(\Theta_1 - \Theta_3)); \\
\frac{\partial \omega_{p1}}{\partial U_4} &= -U_1 \cdot (0,0017 \cdot \cos(\Theta_1 - \Theta_4) - 0,0343 \cdot \sin(\Theta_1 - \Theta_4)); \\
\frac{\partial \omega_{p2}}{\partial \theta_1} &= -U_1 \cdot U_2 (0,1111 \cdot \sin(\Theta_2 - \Theta_1) + 0,1518 \cdot \cos(\Theta_2 - \Theta_1)); \\
\frac{\partial \omega_{p2}}{\partial \theta_2} &= U_2 \cdot U_1 [0,1111 \cdot \sin(\Theta_2 - \Theta_1) + 0,1518 \cdot \cos(\Theta_2 - \Theta_1)]; \\
\frac{\partial \omega_{p2}}{\partial U_1} &= -U_2 \cdot [0,1111 \cdot \cos(\Theta_2 - \Theta_1) - 0,1518 \cdot \sin(\Theta_2 - \Theta_1)]; \\
\frac{\partial \omega_{p2}}{\partial U_2} &= 0,2222 \cdot U_2 - U_1 [0,1111 \cdot \cos(\Theta_2 - \Theta_1) - 0,1518 \cdot \sin(\Theta_2 - \Theta_1)]; \\
\frac{\partial \omega_{p3}}{\partial \theta_1} &= -U_1 \cdot U_3 [0,1393 \cdot \sin(\Theta_3 - \Theta_1) + 0,1899 \cdot \cos(\Theta_3 - \Theta_1)]; \\
\frac{\partial \omega_{p3}}{\partial \theta_3} &= U_3 [(9,9015 \cdot \sin \Theta_3 + 16,8245 \cdot \cos \Theta_3) + U_1 (0,1393 \cdot \sin(\Theta_3 - \Theta_1) + \\
&\quad + 0,1899 \cdot \cos(\Theta_3 - \Theta_1))]; \\
\frac{\partial \omega_{p3}}{\partial U_1} &= -U_3 \cdot [0,1393 \cdot \cos(\Theta_3 - \Theta_1) - 0,1899 \cdot \sin(\Theta_3 - \Theta_1)]; \\
\frac{\partial \omega_{p3}}{\partial U_3} &= 0,4508 \cdot U_3 - [(9,9015 \cdot \cos \Theta_3 - 16,8245 \cdot \sin \Theta_3) + \\
&\quad + U_1 (0,1393 \cdot \cos(\Theta_3 - \Theta_1) - 0,1899 \cdot \sin(\Theta_3 - \Theta_1))]; \\
\frac{\partial \omega_{p4}}{\partial \theta_1} &= -U_1 \cdot U_4 [0,0017 \cdot \sin(\Theta_4 - \Theta_1) + 0,0343 \cdot \cos(\Theta_4 - \Theta_1)]; \\
\frac{\partial \omega_{p4}}{\partial \theta_4} &= U_4 \cdot U_1 [0,0017 \cdot \sin(\Theta_4 - \Theta_1) + 0,0343 \cdot \cos(\Theta_4 - \Theta_1)]; \\
\frac{\partial \omega_{p4}}{\partial U_1} &= -U_4 \cdot [0,0017 \cdot \cos(\Theta_4 - \Theta_1) - 0,0343 \cdot \sin(\Theta_4 - \Theta_1)]; \\
\frac{\partial \omega_{p4}}{\partial U_4} &= 0,0102 \cdot U_4 - U_1 [0,0017 \cdot \cos(\Theta_4 - \Theta_1) - 0,0343 \cdot \sin(\Theta_4 - \Theta_1)];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \omega_{\varrho_1}}{\partial \theta_1} &= U_1 \cdot [(11,891 \cdot \cos \Theta_1 - 20,194 \cdot \sin \Theta_1) + \\
&\quad + U_2 (0,1111 \cdot \cos(\Theta_1 - \Theta_2) - 0,1518 \cdot \sin(\Theta_1 - \Theta_2)) + \\
&\quad + U_3 (0,1393 \cdot \cos(\Theta_1 - \Theta_3) - 0,1899 \cdot \sin(\Theta_1 - \Theta_3)) + \\
&\quad + U_4 (0,0017 \cdot \cos(\Theta_1 - \Theta_4) - 0,0343 \cdot \sin(\Theta_1 - \Theta_4))]; \\
\frac{\partial \omega_{\varrho_1}}{\partial \theta_2} &= -U_1 \cdot U_2 [0,1111 \cdot \cos(\Theta_1 - \Theta_2) - 0,1518 \cdot \sin(\Theta_1 - \Theta_2)]; \\
\frac{\partial \omega_{\varrho_1}}{\partial \theta_3} &= -U_1 \cdot U_3 [0,1393 \cdot \cos(\Theta_1 - \Theta_3) - 0,1899 \cdot \sin(\Theta_1 - \Theta_3)]; \\
\frac{\partial \omega_{\varrho_1}}{\partial \theta_4} &= -U_1 \cdot U_4 [0,0017 \cdot \cos(\Theta_1 - \Theta_4) - 0,0343 \cdot \sin(\Theta_1 - \Theta_4)]; \\
\frac{\partial \omega_{\varrho_1}}{\partial U_1} &= -1,0576 \cdot U_1 + [(11,891 \cdot \sin \Theta_1 + 20,194 \cdot \cos \Theta_1) + \\
&\quad + U_2 (0,1111 \cdot \sin(\Theta_1 - \Theta_2) + 0,1518 \cdot \cos(\Theta_1 - \Theta_2)) + \\
&\quad + U_3 (0,1393 \cdot \sin(\Theta_1 - \Theta_3) + 0,1899 \cdot \cos(\Theta_1 - \Theta_3)) + \\
&\quad + U_4 (0,0017 \cdot \sin(\Theta_1 - \Theta_4) + 0,0343 \cdot \cos(\Theta_1 - \Theta_4))]; \\
\frac{\partial \omega_{\varrho_1}}{\partial U_2} &= U_1 \cdot [0,1111 \cdot \sin(\Theta_1 - \Theta_2) + 0,1518 \cdot \cos(\Theta_1 - \Theta_2)]; \\
\frac{\partial \omega_{\varrho_1}}{\partial U_3} &= U_1 \cdot [0,1393 \cdot \sin(\Theta_1 - \Theta_3) + 0,1899 \cdot \cos(\Theta_1 - \Theta_3)]; \\
\frac{\partial \omega_{\varrho_1}}{\partial U_4} &= U_1 \cdot [0,0017 \cdot \sin(\Theta_1 - \Theta_4) + 0,0343 \cdot \cos(\Theta_1 - \Theta_4)]; \\
\frac{\partial \omega_{\varrho_2}}{\partial \theta_1} &= -U_1 \cdot U_2 [0,1111 \cdot \cos(\Theta_2 - \Theta_1) - 0,1518 \cdot \sin(\Theta_2 - \Theta_1)]; \\
\frac{\partial \omega_{\varrho_2}}{\partial \theta_2} &= U_2 \cdot U_1 [0,1111 \cdot \cos(\Theta_2 - \Theta_1) - 0,1518 \cdot \sin(\Theta_2 - \Theta_1)]; \\
\frac{\partial \omega_{\varrho_2}}{\partial U_1} &= U_2 \cdot [0,1111 \cdot \sin(\Theta_2 - \Theta_1) + 0,1518 \cdot \cos(\Theta_2 - \Theta_1)]; \\
\frac{\partial \omega_{\varrho_2}}{\partial U_2} &= -0,3036 \cdot U_2 + U_1 [0,1111 \cdot \sin(\Theta_2 - \Theta_1) + 0,1518 \cdot \cos(\Theta_2 - \Theta_1)]; \\
\frac{\partial \omega_{\varrho_3}}{\partial \theta_1} &= -U_1 \cdot U_3 [0,1393 \cdot \cos(\Theta_3 - \Theta_1) - 0,1899 \cdot \sin(\Theta_3 - \Theta_1)]; \\
\frac{\partial \omega_{\varrho_3}}{\partial \theta_3} &= U_3 [(9,9015 \cdot \cos \Theta_3 - 16,8245 \cdot \sin \Theta_3) + \\
&\quad + U_1 (0,1393 \cdot \cos(\Theta_3 - \Theta_1) - 0,1899 \cdot \sin(\Theta_3 - \Theta_1))]; \\
\frac{\partial \omega_{\varrho_3}}{\partial U_1} &= U_3 \cdot [0,1393 \cdot \sin(\Theta_3 - \Theta_1) + 0,1899 \cdot \cos(\Theta_3 - \Theta_1)];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_{Q3}}{\partial U_3} &= -0,6724 \cdot U_3 + (9,9015 \cdot \sin \Theta_3 + 16,8245 \cdot \cos \Theta_3) + \\ &+ U_1 [0,1393 \cdot \sin(\Theta_3 - \Theta_1) + 0,1899 \cdot \cos(\Theta_3 - \Theta_1)]; \\ \frac{\partial \omega_{Q4}}{\partial \theta_1} &= -U_1 \cdot U_4 \cdot [0,0017 \cdot \cos(\Theta_4 - \Theta_1) - 0,0343 \cdot \sin(\Theta_4 - \Theta_1)]; \\ \frac{\partial \omega_{Q4}}{\partial \theta_4} &= U_4 \cdot U_1 \cdot [0,0017 \cdot \cos(\Theta_4 - \Theta_1) - 0,0343 \cdot \sin(\Theta_4 - \Theta_1)]; \\ \frac{\partial \omega_{Q4}}{\partial U_1} &= U_4 \cdot [0,0017 \cdot \sin(\Theta_4 - \Theta_1) + 0,0343 \cdot \cos(\Theta_4 - \Theta_1)]; \\ \frac{\partial \omega_{Q4}}{\partial U_4} &= -0,205 \cdot U_4 + U_1 \cdot [0,0017 \cdot \sin(\Theta_4 - \Theta_1) + 0,0343 \cdot \cos(\Theta_4 - \Theta_1)]. \end{aligned}$$

Елементами вектора нев'язок  $W$  є значення нев'язок рівнянь системи при підстановці в них чергових наближень невідомих напруг.

Вектор поправок до невідомих напруг  $\Delta U$  включає поправки до кутів  $\Delta \Theta_i$  та модулів  $\Delta U_i$  напруг. Вектори мають структуру:

$$W = \begin{bmatrix} \omega_{p1} \\ \omega_{p2} \\ \omega_{p3} \\ \omega_{p4} \\ \omega_{Q1} \\ \omega_{Q2} \\ \omega_{Q3} \\ \omega_{Q4} \end{bmatrix}; \quad \Delta U = \begin{bmatrix} \Delta \theta_1 \\ \Delta \theta_2 \\ \Delta \theta_3 \\ \Delta \theta_4 \\ \Delta U_1 \\ \Delta U_2 \\ \Delta U_3 \\ \Delta U_4 \end{bmatrix}.$$

Система лінійних (лінійаризованих) рівнянь, що формується і розв'язується на кожній ітерації метода Ньютона-Рафсона, в матричній формі має вигляд:

$$\begin{bmatrix}
\frac{\partial \omega_{p1}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \omega_{p1}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \omega_{p1}}{\partial \theta_3} & \frac{\partial \omega_{p1}}{\partial \theta_4} & \frac{\partial \omega_{p1}}{\partial U_1} & \frac{\partial \omega_{p1}}{\partial U_2} & \frac{\partial \omega_{p1}}{\partial U_3} & \frac{\partial \omega_{p1}}{\partial U_4} \\
\frac{\partial \omega_{p2}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \omega_{p2}}{\partial \theta_2} & 0 & 0 & \frac{\partial \omega_{p2}}{\partial U_1} & \frac{\partial \omega_{p2}}{\partial U_2} & 0 & 0 \\
\frac{\partial \omega_{p3}}{\partial \theta_1} & 0 & \frac{\partial \omega_{p3}}{\partial \theta_3} & 0 & \frac{\partial \omega_{p3}}{\partial U_1} & 0 & \frac{\partial \omega_{p3}}{\partial U_3} & 0 \\
\frac{\partial \omega_{p4}}{\partial \theta_1} & 0 & 0 & \frac{\partial \omega_{p4}}{\partial \theta_4} & \frac{\partial \omega_{p4}}{\partial U_1} & 0 & 0 & \frac{\partial \omega_{p4}}{\partial U_4} \\
\frac{\partial \omega_{q1}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \omega_{q1}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \omega_{q1}}{\partial \theta_3} & \frac{\partial \omega_{q1}}{\partial \theta_4} & \frac{\partial \omega_{q1}}{\partial U_1} & \frac{\partial \omega_{q1}}{\partial U_2} & \frac{\partial \omega_{q1}}{\partial U_3} & \frac{\partial \omega_{q1}}{\partial U_4} \\
\frac{\partial \omega_{q2}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \omega_{q2}}{\partial \theta_2} & 0 & 0 & \frac{\partial \omega_{q2}}{\partial U_1} & \frac{\partial \omega_{q2}}{\partial U_2} & 0 & 0 \\
\frac{\partial \omega_{q3}}{\partial \theta_1} & 0 & \frac{\partial \omega_{q3}}{\partial \theta_3} & 0 & \frac{\partial \omega_{q3}}{\partial U_1} & 0 & \frac{\partial \omega_{q3}}{\partial U_3} & 0 \\
\frac{\partial \omega_{q4}}{\partial \theta_1} & 0 & 0 & \frac{\partial \omega_{q4}}{\partial \theta_4} & \frac{\partial \omega_{q4}}{\partial U_1} & 0 & 0 & \frac{\partial \omega_{q4}}{\partial U_4}
\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta \theta_1 \\ \Delta \theta_2 \\ \Delta \theta_3 \\ \Delta \theta_4 \\ \Delta U_1 \\ \Delta U_2 \\ \Delta U_3 \\ \Delta U_4 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \omega_{p1} \\ \omega_{p2} \\ \omega_{p3} \\ \omega_{p4} \\ \omega_{q1} \\ \omega_{q2} \\ \omega_{q3} \\ \omega_{q4} \end{bmatrix}.$$

Невідомими величинами в ній є елементи вектора поправок  $\Delta \theta$ ,  $\Delta U$ .

### 7.3. Контрольні питання до розділу 7.1.:

1. Які перетворення вихідної системи рівнянь необхідні для розв'язання її методом Ньютона-Рафсона;
2. Що таке нев'язки рівнянь, фізична суть нев'язок рівнянь усталеного режиму;
3. Структура матриці Якобі. Елементи матриці. Блоки;
4. Загальна характеристика матриці Якобі;
5. Аналітичні вирази елементів матриці Якобі;
6. Структура вектора нев'язок  $W$  та вектора поправок до невідомих  $\Delta U$ ;
7. Структура системи лінійаризованих рівнянь;
8. Результат розв'язання системи лінійаризованих рівнянь.

#### 7.4. Етап 2: Реалізація алгоритму методу Ньютона-Рафсона

*Розглядаються питання реалізації алгоритму методу Ньютона-Рафсона для розв'язання системи нелінійних рівнянь усталеного режиму роботи електричної мережі*

Другий етап розв'язання системи рівнянь усталеного режиму методом Ньютона-Рафсона полягає у реалізації алгоритму методу. Він передбачає виконання послідовності *ітерацій*, на кожній з яких визначається чергове наближення невідомих напруг. Ітерації розрахунку включають такі кроки:

1. Завдання *початкового наближення* невідомих напруг. Як початкові наближення приймаються *номінальні* значення напруг вузлів  $U_{ном}$ :

$$k = 0; \rightarrow U_1^{(k)} = U_2^{(k)} = \dots = U_n^{(k)} = U_{ном}; \\ \theta_1^{(k)} = \theta_2^{(k)} = \dots = \theta_n^{(k)} = 0.$$

Завдання точності ітераційного розрахунку  $\varepsilon$ .

*Подальші пункти алгоритму виконуються на кожній ітерації.*

2. Визначення нев'язок рівнянь  $\omega_{p_i}^{(k)}$ ,  $\omega_{q_i}^{(k)}$  вихідної системи (7.3). Вони обчислюються при підстановці в ці рівняння чергових наближень невідомих  $U_i^{(k)}$ ,  $\theta_i^{(k)}$ ,  $i = 1, \dots, n$ .  
Формування вектора нев'язок  $W^{(k)}$  відповідно до (7.6).
3. Обчислення значень часткових похідних – елементів матриці Якобі. Вони визначаються при підстановці в (7.5) чергових наближень невідомих  $U_i^{(k)}$ ,  $\theta_i^{(k)}$ ,  $i = 1, \dots, n$ .  
Формування матриці Якобі  $Y^{(k)}$  відповідно до (7.4).
4. Формування лінійаризованої системи рівнянь (7.7).
5. Розв'язання лінійної (лінійаризованої) системи рівнянь. В результаті визначаються поправки до всіх невідомих напруг  $\Delta U_i^{(k)}$ ,  $\Delta \theta_i^{(k)}$ .

*Примітка: Для розв'язання лінійаризованої системи рівнянь на кожній ітерації алгоритму метода Ньютона-Рафсона можна використовувати існуючі програми і програмні засоби розв'язання СЛАР.*

6. Визначення нових наближень всіх невідомих напруг:

$$\begin{aligned} U_i^{(k+1)} &= U_i^{(k)} + \Delta U_i^{(k)}, \\ \theta_i^{(k+1)} &= \theta_i^{(k)} + \Delta \theta_i^{(k)}; \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

7. Контроль завершення ітераційного розрахунку. Якщо величини нев'язок рівнянь, що обчислені в п. 2, менші заданої точності  $\varepsilon$  (для усіх вузлів):

$$\left| \omega_{pi}^{(k)}, \omega_{Qi}^{(k)} \right| \leq \varepsilon, \quad i = 1, \dots, n,$$

то розрахунок завершується, а наближення вузлових напруг, що визначні на останній ітерації  $U_i^{(k+1)}, \theta_i^{(k+1)}$ , є розв'язком системи рівнянь усталеного режиму із заданою точністю.

В іншому випадку виконується наступна ітерація починаючи з пункту 2 при нових наближеннях напруг.

### 7.5. Приклад реалізації алгоритму методу Ньютона-Рафсона

1. Як початкові наближення напруг приймаємо їх номінальні значення у відповідних вузлах:

$$\begin{aligned} U_1^{(0)} &= U_{i\bar{i}1} = 110 \text{ êÁ}, \quad \theta_1^{(0)} = 0; \\ U_2^{(0)} &= U_{i\bar{i}2} = 110 \text{ êÁ}, \quad \theta_2^{(0)} = 0; \\ U_3^{(0)} &= U_{i\bar{i}3} = 110 \text{ êÁ}, \quad \theta_3^{(0)} = 0; \\ U_4^{(0)} &= U_{i\bar{i}4} = 35 \text{ êÁ}, \quad \theta_4^{(0)} = 0. \end{aligned}$$

Розрахунок виконуємо з точністю  $\varepsilon = 0,01$ .

*Початкова ітерація розрахунку ( $k = 0$ ).*

2. Підставляємо ці значення в рівняння у формі нев'язок і визначаємо нев'язки рівнянь  $\omega_{pi}^{(0)}, \omega_{Qi}^{(0)}$  при початкових наближеннях невідомих:

$$\begin{aligned}
\omega_{p1}^{(0)} &= 0,3544 \cdot (U_1^{(0)})^2 - U_1^{(0)} \cdot [(11,891 \cdot \cos \theta_1^{(0)} - 20,194 \cdot \sin \theta_1^{(0)}) + \\
&\quad + U_2^{(0)} \cdot (0,1111 \cdot \cos(\theta_1^{(0)} - \theta_2^{(0)}) - 0,1518 \cdot \sin(\theta_1^{(0)} - \theta_2^{(0)})) + \\
&\quad + U_3^{(0)} \cdot (0,1393 \cdot \cos(\theta_1^{(0)} - \theta_3^{(0)}) - 0,1899 \cdot \sin(\theta_1^{(0)} - \theta_3^{(0)})) + \\
&\quad + U_4^{(0)} \cdot (0,0017 \cdot \cos(\theta_1^{(0)} - \theta_4^{(0)}) - 0,0343 \cdot \sin(\theta_1^{(0)} - \theta_4^{(0)}))] - 3 = \\
&= 0,3544 \cdot (110)^2 - 110 \cdot [(11,891 \cdot \cos(0) - 20,194 \cdot \sin(0)) + \\
&\quad + 110 \cdot (0,1111 \cdot \cos(0 - 0) - 0,1518 \cdot \sin(0 - 0)) + \\
&\quad + 110 \cdot (0,1393 \cdot \cos(0 - 0) - 0,1899 \cdot \sin(0 - 0)) + \\
&\quad + 35 \cdot (0,0017 \cdot \cos(0 - 0) - 0,0343 \cdot \sin(0 - 0))] - 3 = -53,155; \\
\omega_{p2}^{(0)} &= 0,1111 \cdot (U_2^{(0)})^2 - U_2^{(0)} \cdot U_1^{(0)} \cdot (0,1111 \cdot \cos(\theta_2^{(0)} - \theta_1^{(0)}) - 0,1518 \cdot \sin(\theta_2^{(0)} - \theta_1^{(0)})) \\
&\quad - 5 = \\
&= 0,1111 \cdot (110)^2 - 110 \cdot 110 \cdot (0,1111 \cdot \cos(0 - 0) - 0,1518 \cdot \sin(0 - 0)) + 5 = 5; \\
\omega_{p3}^{(0)} &= 0,2254 \cdot (U_3^{(0)})^2 - U_3^{(0)} \cdot [(9,9015 \cdot \cos \theta_3^{(0)} - 16,8245 \cdot \sin \theta_3^{(0)}) + \\
&\quad + U_1^{(0)} \cdot (0,1393 \cdot \cos(\theta_3^{(0)} - \theta_1^{(0)}) - 0,1899 \cdot \sin(\theta_3^{(0)} - \theta_1^{(0)}))] - 4 = \\
&= 0,2254 \cdot (110)^2 - 110 \cdot [(9,9015 \cdot \cos(0) - 16,8245 \cdot \sin(0)) + \\
&\quad + 110 \cdot (0,1393 \cdot \cos(0 - 0) - 0,1899 \cdot \sin(0 - 0))] - 4 = -43,355; \\
\omega_{p4}^{(0)} &= 0,0051 \cdot (U_4^{(0)})^2 - U_4^{(0)} \cdot U_1^{(0)} \cdot (0,0017 \cdot \cos(\theta_4^{(0)} - \theta_1^{(0)}) - 0,0343 \cdot \sin(\theta_4^{(0)} - \\
&\quad - \theta_1^{(0)})) - 1 = 0,0051 \cdot (35)^2 - 35 \cdot 110 \cdot (0,0017 \cdot \cos(0 - 0) - 0,0343 \cdot \sin(0 - \\
&\quad - 0)) - 1 = 0,7025; \\
\omega_{q1}^{(0)} &= -0,5288 \cdot (U_1^{(0)})^2 + U_1^{(0)} \cdot [(11,891 \cdot \sin \theta_1^{(0)} + 20,194 \cdot \cos \theta_1^{(0)}) + \\
&\quad + U_2^{(0)} \cdot (0,1111 \cdot \sin(\theta_1^{(0)} - \theta_2^{(0)}) + 0,1518 \cdot \cos(\theta_1^{(0)} - \theta_2^{(0)})) + \\
&\quad + U_3^{(0)} \cdot (0,1393 \cdot \sin(\theta_1^{(0)} - \theta_3^{(0)}) + 0,1899 \cdot \cos(\theta_1^{(0)} - \theta_3^{(0)})) + \\
&\quad + U_4^{(0)} \cdot (0,0017 \cdot \sin(\theta_1^{(0)} - \theta_4^{(0)}) + 0,0343 \cdot \cos(\theta_1^{(0)} - \theta_4^{(0)}))] + 2 = \\
&= -0,5288 \cdot (110)^2 + 110 \cdot [(11,891 \cdot \sin(0) + 20,194 \cdot \cos(0)) + \\
&\quad + 110 \cdot (0,1111 \cdot \sin(0 - 0) + 0,1518 \cdot \cos(0 - 0)) + \\
&\quad + 110 \cdot (0,1393 \cdot \sin(0 - 0) + 0,1899 \cdot \cos(0 - 0)) + \\
&\quad + 35 \cdot (0,0017 \cdot \sin(0 - 0) + 0,0343 \cdot \cos(0 - 0))] + 2 = 87,485; \\
\omega_{q2}^{(0)} &= -0,1518 \cdot (U_2^{(0)})^2 + U_2^{(0)} \cdot U_1^{(0)} \cdot (0,1111 \cdot \sin(\theta_2^{(0)} - \theta_1^{(0)}) + \\
&\quad + 0,1518 \cdot \cos(\theta_2^{(0)} - \theta_1^{(0)})) + 2 = \\
&= -0,1518 \cdot (110)^2 + 110 \cdot 110 \cdot (0,1111 \cdot \sin(0 - 0) + 0,1518 \cdot \cos(0 - 0)) + 2 = \\
&= 2; \\
\omega_{q3}^{(0)} &= -0,3362 \cdot (U_3^{(0)})^2 + U_3^{(0)} \cdot [(9,9015 \cdot \sin \theta_3^{(0)} + 16,8245 \cdot \cos \theta_3^{(0)}) + \\
&\quad + U_1^{(0)} \cdot (0,1393 \cdot \sin(\theta_3^{(0)} - \theta_1^{(0)}) + 0,1899 \cdot \cos(\theta_3^{(0)} - \theta_1^{(0)}))] + 3 = \\
&= -0,3362 \cdot (110)^2 + 110 \cdot [(9,9015 \cdot \sin(0) + 16,8245 \cdot \cos(0)) +
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& +110 \cdot (0,1393 \cdot \sin(0 - 0) + 0,1899 \cdot \cos(0 - 0)) + 3 = 77,465; \\
\omega_{q4}^{(0)} = & -0,1025 \cdot (U_4^{(0)})^2 + U_4^{(0)} \cdot U_1^{(0)} \cdot (0,0017 \cdot \sin(\theta_4^{(0)} - \theta_1^{(0)}) + \\
& + 0,0343 \cdot \cos(\theta_4^{(0)} - \theta_1^{(0)})) + 0,3 = -0,1025 \cdot (35)^2 + \\
& + 35 \cdot 110 \cdot (0,0017 \cdot \sin(0 - 0) + 0,0343 \cdot \cos(0 - 0)) + 0,3 = 6,1925.
\end{aligned}$$

За результатами обчислень формуємо вектор нев'язок рівнянь при початкових наближеннях напруг:

$$W^{(0)} = \begin{bmatrix} \omega_{p1}^{(0)} \\ \omega_{p2}^{(0)} \\ \omega_{p3}^{(0)} \\ \omega_{p4}^{(0)} \\ \omega_{q1}^{(0)} \\ \omega_{q2}^{(0)} \\ \omega_{q3}^{(0)} \\ \omega_{q4}^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -53,155 \\ 5 \\ -43,355 \\ 0,7025 \\ 87,485 \\ 2 \\ 77,465 \\ 6,1925 \end{bmatrix}.$$

3. Обчислюємо значення елементів матриці Якобі при початкових наближеннях напруг  $U_i^{(0)}$ ,  $\theta_i^{(0)}$ . Для цього відповідні значення підставляємо в аналітичні вирази похідних:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \omega_{p1}}{\partial \theta_1} &= U_1^{(0)} \cdot [(11,891 \cdot \sin \theta_1^{(0)} + 20,194 \cdot \cos \theta_1^{(0)}) + \\
& + U_2^{(0)} \cdot (0,1111 \cdot \sin(\theta_1^{(0)} - \theta_2^{(0)}) + 0,1518 \cdot \cos(\theta_1^{(0)} - \theta_2^{(0)})) + \\
& + U_3^{(0)} \cdot (0,1393 \cdot \sin(\theta_1^{(0)} - \theta_3^{(0)}) + 0,1899 \cdot \cos(\theta_1^{(0)} - \theta_3^{(0)})) + \\
& + U_4^{(0)} \cdot (0,0017 \cdot \sin(\theta_1^{(0)} - \theta_4^{(0)}) + 0,0343 \cdot \cos(\theta_1^{(0)} - \theta_4^{(0)}))] = \\
& = 110 \cdot [(11,891 \cdot \sin(0) + 20,194 \cdot \cos(0)) + \\
& + 110 \cdot (0,1111 \cdot \sin(0 - 0) + 0,1518 \cdot \cos(0 - 0)) + \\
& + 110 \cdot (0,1393 \cdot \sin(0 - 0) + 0,1899 \cdot \cos(0 - 0)) + \\
& + 35 \cdot (0,0017 \cdot \sin(0 - 0) + 0,0343 \cdot \cos(0 - 0))] = 6487,965; \\
\frac{\partial \omega_{p1}}{\partial \theta_2} &= -U_2^{(0)} \cdot U_1^{(0)} \cdot (0,1111 \cdot \sin(\theta_1^{(0)} - \theta_2^{(0)}) + 0,1518 \cdot \cos(\theta_1^{(0)} - \theta_2^{(0)})) = \\
& = -110 \cdot 110 \cdot (0,1111 \cdot \sin(0 - 0) + 0,1518 \cdot \cos(0 - 0)) = -1836,78; \\
\frac{\partial \omega_{p1}}{\partial \theta_3} &= -U_1^{(0)} \cdot U_3^{(0)} \cdot (0,1393 \cdot \sin(\theta_1^{(0)} - \theta_3^{(0)}) + 0,1899 \cdot \cos(\theta_1^{(0)} - \theta_3^{(0)})) = \\
& = -110 \cdot 110 \cdot (0,1393 \cdot \sin(0 - 0) + 0,1899 \cdot \cos(0 - 0)) = -2297,79;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \omega_{p1}}{\partial \theta_4} &= -U_4^{(0)} \cdot U_1^{(0)} \cdot (0,0017 \cdot \sin(\theta_1^{(0)} - \theta_4^{(0)}) + 0,0343 \cdot \cos(\theta_1^{(0)} - \theta_4^{(0)})) = \\
&= -35 \cdot 110 \cdot (0,0017 \cdot \sin(0 - 0) + 0,0343 \cdot \cos(0 - 0)) = -132,055; \\
\frac{\partial \omega_{p1}}{\partial U_1} &= 0,7088 \cdot U_1^{(0)} - [(11,891 \cdot \cos \theta_1^{(0)} - 20,194 \cdot \sin \theta_1^{(0)}) + \\
&+ U_2^{(0)} \cdot (0,1111 \cdot \cos(\theta_1^{(0)} - \theta_2^{(0)}) - 0,1518 \cdot \sin(\theta_1^{(0)} - \theta_2^{(0)})) + \\
&+ U_3^{(0)} \cdot (0,1393 \cdot \cos(\theta_1^{(0)} - \theta_3^{(0)}) - 0,1899 \cdot \sin(\theta_1^{(0)} - \theta_3^{(0)})) + \\
&+ U_4^{(0)} \cdot (0,0017 \cdot \cos(\theta_1^{(0)} - \theta_4^{(0)}) - 0,0343 \cdot \sin(\theta_1^{(0)} - \theta_4^{(0)}))] = \\
&= 0,7088 \cdot 110 - [(11,891 \cdot \cos(0) - 20,194 \cdot \sin(0)) + \\
&+ 110 \cdot (0,1111 \cdot \cos(0 - 0) - 0,1518 \cdot \sin(0 - 0)) + \\
&+ 110 \cdot (0,1393 \cdot \cos(0 - 0) - 0,1899 \cdot \sin(0 - 0)) + \\
&+ 35 \cdot (0,0017 \cdot \cos(0 - 0) - 0,0343 \cdot \sin(0 - 0))] = 38,4735; \\
\frac{\partial \omega_{p1}}{\partial U_2} &= -U_1^{(0)} \cdot (0,1111 \cdot \cos(\theta_1^{(0)} - \theta_2^{(0)}) - 0,1518 \cdot \sin(\theta_1^{(0)} - \theta_2^{(0)})) = \\
&= -110 \cdot (0,1111 \cdot \cos(0 - 0) - 0,1518 \cdot \sin(0 - 0)) = -12,221; \\
\frac{\partial \omega_{p1}}{\partial U_3} &= -U_1^{(0)} \cdot (0,1393 \cdot \cos(\theta_1^{(0)} - \theta_3^{(0)}) - 0,1899 \cdot \sin(\theta_1^{(0)} - \theta_3^{(0)})) = \\
&= -110 \cdot (0,1393 \cdot \cos(0 - 0) - 0,1899 \cdot \sin(0 - 0)) = -15,323; \\
\frac{\partial \omega_{p1}}{\partial U_4} &= -U_1^{(0)} \cdot (0,0017 \cdot \cos(\theta_1^{(0)} - \theta_4^{(0)}) - 0,0343 \cdot \sin(\theta_1^{(0)} - \theta_4^{(0)})) = \\
&= -110 \cdot (0,0017 \cdot \cos(0 - 0) - 0,0343 \cdot \sin(0 - 0)) = -0,187; \\
\frac{\partial \omega_{p2}}{\partial \theta_1} &= -U_1^{(0)} \cdot U_2^{(0)} \cdot (0,1111 \cdot \sin(\theta_2^{(0)} - \theta_1^{(0)}) + 0,1518 \cdot \cos(\theta_2^{(0)} - \theta_1^{(0)})) = \\
&= -110 \cdot 110 \cdot (0,1111 \cdot \sin(0 - 0) + 0,1518 \cdot \cos(0 - 0)) = -1836,78; \\
\frac{\partial \omega_{p2}}{\partial \theta_2} &= U_1^{(0)} \cdot U_2^{(0)} \cdot (0,1111 \cdot \sin(\theta_2^{(0)} - \theta_1^{(0)}) + 0,1518 \cdot \cos(\theta_2^{(0)} - \theta_1^{(0)})) = \\
&= 110 \cdot 110 \cdot (0,1111 \cdot \sin(0 - 0) + 0,1518 \cdot \cos(0 - 0)) = 1836,78; \\
\frac{\partial \omega_{p2}}{\partial U_1} &= -U_2^{(0)} \cdot (0,1111 \cdot \cos(\theta_2^{(0)} - \theta_1^{(0)}) - 0,1518 \cdot \sin(\theta_2^{(0)} - \theta_1^{(0)})) = \\
&= -110 \cdot (0,1111 \cdot \cos(0 - 0) - 0,1518 \cdot \sin(0 - 0)) = -12,221; \\
\frac{\partial \omega_{p2}}{\partial U_2} &= 0,2222 \cdot U_2^{(0)} - U_1^{(0)} \cdot (0,1111 \cdot \cos(\theta_2^{(0)} - \theta_1^{(0)}) - 0,1518 \cdot \sin(\theta_2^{(0)} - \theta_1^{(0)})) = \\
&= 0,2222 \cdot 110 - 110 \cdot (0,1111 \cdot \cos(0 - 0) - 0,1518 \cdot \sin(0 - 0)) = 12,221; \\
\frac{\partial \omega_{p3}}{\partial \theta_1} &= -U_1^{(0)} \cdot U_3^{(0)} \cdot (0,1393 \cdot \sin(\theta_3^{(0)} - \theta_1^{(0)}) + 0,1899 \cdot \cos(\theta_3^{(0)} - \theta_1^{(0)})) = \\
&= -110 \cdot 110 \cdot (0,1393 \cdot \sin(0 - 0) + 0,1899 \cdot \cos(0 - 0)) = -2297,79; \\
\frac{\partial \omega_{p3}}{\partial \theta_3} &= U_3^{(0)} \cdot [(9,9015 \cdot \sin \theta_3^{(0)} + 16,8245 \cdot \cos \theta_3^{(0)}) + U_1^{(0)} \cdot (0,1393 \cdot \sin(\theta_3^{(0)} - \theta_1^{(0)}) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 0,1899 \cdot \cos(\theta_3^{(0)} - \theta_1^{(0)})] = \\
& = 110 \cdot [(9,9015 \cdot \sin(0) + 16,8245 \cdot \cos(0)) + 110 \cdot (0,1393 \cdot \sin(0 - 0) + \\
& + 0,1899 \cdot \cos(0 - 0))] = 4148,485; \\
\frac{\partial \omega_{p3}}{\partial U_1} & = -U_3^{(0)} \cdot (0,1393 \cdot \cos(\theta_3^{(0)} - \theta_1^{(0)}) - 0,1899 \cdot \sin(\theta_3^{(0)} - \theta_1^{(0)})) = \\
& = -110 \cdot (0,1393 \cdot \cos(0 - 0) - 0,1899 \cdot \sin(0 - 0)) = -15,323; \\
\frac{\partial \omega_{p3}}{\partial U_3} & = 0,4508 \cdot U_3^{(0)} - [(9,9015 \cdot \cos \theta_3^{(0)} - 16,8245 \cdot \sin \theta_3^{(0)}) + U_1^{(0)} \cdot (0,1393 \cdot \cos(\theta_3^{(0)} - \\
& - \theta_1^{(0)}) - 0,1899 \cdot \sin(\theta_3^{(0)} - \theta_1^{(0)}))] = \\
& = 0,4508 \cdot 110 - [(9,9015 \cdot \cos(0) - 16,8245 \cdot \sin(0)) + U_1^{(0)} \cdot (0,1393 \cdot \cos(0 - 0) - \\
& - 0,1899 \cdot \sin(0 - 0))] = 24,3635; \\
\frac{\partial \omega_{p4}}{\partial \theta_1} & = -U_4^{(0)} \cdot U_1^{(0)} \cdot (0,0017 \cdot \sin(\theta_4^{(0)} - \theta_1^{(0)}) + 0,0343 \cdot \cos(\theta_4^{(0)} - \theta_1^{(0)})) = \\
& = -35 \cdot 110 \cdot (0,0017 \cdot \sin(0 - 0) + 0,0343 \cdot \cos(0 - 0)) = -132,055; \\
\frac{\partial \omega_{p4}}{\partial \theta_4} & = U_4^{(0)} \cdot U_1^{(0)} \cdot (0,0017 \cdot \sin(\theta_4^{(0)} - \theta_1^{(0)}) + 0,0343 \cdot \cos(\theta_4^{(0)} - \theta_1^{(0)})) = \\
& = 35 \cdot 110 \cdot (0,0017 \cdot \sin(0 - 0) + 0,0343 \cdot \cos(0 - 0)) = 132,055; \\
\frac{\partial \omega_{p4}}{\partial U_1} & = -U_4^{(0)} \cdot (0,0017 \cdot \cos(\theta_4^{(0)} - \theta_1^{(0)}) - 0,0343 \cdot \sin(\theta_4^{(0)} - \theta_1^{(0)})) = \\
& = -35 \cdot (0,0017 \cdot \cos(0 - 0) - 0,0343 \cdot \sin(0 - 0)) = -0,0595; \\
\frac{\partial \omega_{p4}}{\partial U_4} & = 0,0102 \cdot U_4^{(0)} - U_1^{(0)} \cdot (0,0017 \cdot \cos(\theta_4^{(0)} - \theta_1^{(0)}) - 0,0343 \cdot \sin(\theta_4^{(0)} - \theta_1^{(0)})) = \\
& = 0,0102 \cdot 35 - 110 \cdot (0,0017 \cdot \cos(0 - 0) - 0,0343 \cdot \sin(0 - 0)) = 0,17; \\
\frac{\partial \omega_{q1}}{\partial \theta_1} & = U_1^{(0)} \cdot [(11,891 \cdot \cos \theta_1^{(0)} - 20,194 \cdot \sin \theta_1^{(0)}) + \\
& + U_2^{(0)} \cdot (0,1111 \cdot \cos(\theta_1^{(0)} - \theta_2^{(0)}) - 0,1518 \cdot \sin(\theta_1^{(0)} - \theta_2^{(0)})) + \\
& + U_3^{(0)} \cdot (0,1393 \cdot \cos(\theta_1^{(0)} - \theta_3^{(0)}) - 0,1899 \cdot \sin(\theta_1^{(0)} - \theta_3^{(0)})) + \\
& + U_4^{(0)} \cdot (0,0017 \cdot \cos(\theta_1^{(0)} - \theta_4^{(0)}) - 0,0343 \cdot \sin(\theta_1^{(0)} - \theta_4^{(0)}))] = \\
& = 110 \cdot [(11,891 \cdot \cos(0) - 20,194 \cdot \sin(0)) + \\
& + 110 \cdot (0,1111 \cdot \cos(0 - 0) - 0,1518 \cdot \sin(0 - 0)) + \\
& + 110 \cdot (0,1393 \cdot \cos(0 - 0) - 0,1899 \cdot \sin(0 - 0)) + \\
& + 35 \cdot (0,0017 \cdot \cos(0 - 0) - 0,0343 \cdot \sin(0 - 0))] = 4344,395; \\
\frac{\partial \omega_{q1}}{\partial \theta_2} & = -U_1^{(0)} \cdot U_2^{(0)} \cdot (0,1111 \cdot \cos(\theta_1^{(0)} - \theta_2^{(0)}) - 0,1518 \cdot \sin(\theta_1^{(0)} - \theta_2^{(0)})) = \\
& = -110 \cdot 110 \cdot (0,1111 \cdot \cos(0 - 0) - 0,1518 \cdot \sin(0 - 0)) = -1344,31; \\
\frac{\partial \omega_{q1}}{\partial \theta_3} & = -U_1^{(0)} \cdot U_3^{(0)} \cdot (0,1393 \cdot \cos(\theta_1^{(0)} - \theta_3^{(0)}) - 0,1899 \cdot \sin(\theta_1^{(0)} - \theta_3^{(0)})) = \\
& = -110 \cdot 110 \cdot (0,1393 \cdot \cos(0 - 0) - 0,1899 \cdot \sin(0 - 0)) = -1685,53;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \omega_{q1}}{\partial \theta_4} &= -U_1^{(0)} \cdot U_4^{(0)} \cdot (0,0017 \cdot \cos(\theta_1^{(0)} - \theta_4^{(0)}) - 0,0343 \cdot \sin(\theta_1^{(0)} - \theta_4^{(0)})) = \\
&= -110 \cdot 35 \cdot (0,0017 \cdot \cos(0 - 0) - 0,0343 \cdot \sin(0 - 0)) = -6,545; \\
\frac{\partial \omega_{q1}}{\partial U_1} &= -1,0576 \cdot U_1^{(0)} + [(11,891 \cdot \sin \theta_1^{(0)} + 20,194 \cdot \cos \theta_1^{(0)}) + \\
&\quad + U_2^{(0)} \cdot (0,1111 \cdot \sin(\theta_1^{(0)} - \theta_2^{(0)}) + 0,1518 \cdot \cos(\theta_1^{(0)} - \theta_2^{(0)})) + \\
&\quad + U_3^{(0)} \cdot (0,1393 \cdot \sin(\theta_1^{(0)} - \theta_3^{(0)}) + 0,1899 \cdot \cos(\theta_1^{(0)} - \theta_3^{(0)})) + \\
&\quad + U_4^{(0)} \cdot (0,0017 \cdot \sin(\theta_1^{(0)} - \theta_4^{(0)}) + 0,0343 \cdot \cos(\theta_1^{(0)} - \theta_4^{(0)}))] = \\
&= -1,0576 \cdot 110 + [(11,891 \cdot \sin(0) + 20,194 \cdot \cos(0)) + \\
&\quad + 110 \cdot (0,1111 \cdot \sin(0 - 0) + 0,1518 \cdot \cos(0 - 0)) + \\
&\quad + 110 \cdot (0,1393 \cdot \sin(0 - 0) + 0,1899 \cdot \cos(0 - 0)) + \\
&\quad + 35 \cdot (0,0017 \cdot \sin(0 - 0) + 0,0343 \cdot \cos(0 - 0))] = -57,3545; \\
\frac{\partial \omega_{q1}}{\partial U_2} &= U_1^{(0)} \cdot (0,1111 \cdot \sin(\theta_1^{(0)} - \theta_2^{(0)}) + 0,1518 \cdot \cos(\theta_1^{(0)} - \theta_2^{(0)})) = \\
&= 110 \cdot (0,1111 \cdot \sin(0 - 0) + 0,1518 \cdot \cos(0 - 0)) = 16,698; \\
\frac{\partial \omega_{q1}}{\partial U_3} &= U_1^{(0)} \cdot (0,1393 \cdot \sin(\theta_1^{(0)} - \theta_3^{(0)}) + 0,1899 \cdot \cos(\theta_1^{(0)} - \theta_3^{(0)})) = \\
&= 110 \cdot (0,1393 \cdot \sin(0 - 0) + 0,1899 \cdot \cos(0 - 0)) = 20,889; \\
\frac{\partial \omega_{q1}}{\partial U_4} &= U_1^{(0)} \cdot (0,0017 \cdot \sin(\theta_1^{(0)} - \theta_4^{(0)}) + 0,0343 \cdot \cos(\theta_1^{(0)} - \theta_4^{(0)})) = \\
&= 110 \cdot (0,0017 \cdot \sin(0 - 0) + 0,0343 \cdot \cos(0 - 0)) = 3,773; \\
\frac{\partial \omega_{q2}}{\partial \theta_1} &= -U_1^{(0)} \cdot U_2^{(0)} \cdot (0,1111 \cdot \cos(\theta_2^{(0)} - \theta_1^{(0)}) - 0,1518 \cdot \sin(\theta_2^{(0)} - \theta_1^{(0)})) = \\
&= -110 \cdot 110 \cdot (0,1111 \cdot \cos(0 - 0) - 0,1518 \cdot \sin(0 - 0)) = -1344,31; \\
\frac{\partial \omega_{q2}}{\partial \theta_2} &= U_1^{(0)} \cdot U_2^{(0)} \cdot (0,1111 \cdot \cos(\theta_2^{(0)} - \theta_1^{(0)}) - 0,1518 \cdot \sin(\theta_2^{(0)} - \theta_1^{(0)})) = \\
&= 110 \cdot 110 \cdot (0,1111 \cdot \cos(0 - 0) - 0,1518 \cdot \sin(0 - 0)) = 1344,31; \\
\frac{\partial \omega_{q2}}{\partial U_1} &= U_2^{(0)} \cdot (0,1111 \cdot \sin(\theta_2^{(0)} - \theta_1^{(0)}) + 0,1518 \cdot \cos(\theta_2^{(0)} - \theta_1^{(0)})) = \\
&= 110 \cdot (0,1111 \cdot \sin(0 - 0) + 0,1518 \cdot \cos(0 - 0)) = 16,698; \\
\frac{\partial \omega_{q2}}{\partial U_2} &= -0,3036 \cdot U_2^{(0)} + U_1^{(0)} \cdot (0,1111 \cdot \sin(\theta_2^{(0)} - \theta_1^{(0)}) + 0,1518 \cdot \cos(\theta_2^{(0)} - \theta_1^{(0)})) = \\
&= -0,3036 \cdot 110 + 110 \cdot (0,1111 \cdot \sin(0 - 0) + 0,1518 \cdot \cos(0 - 0)) = -16,698; \\
\frac{\partial \omega_{q3}}{\partial \theta_1} &= -U_1^{(0)} \cdot U_3^{(0)} \cdot (0,1393 \cdot \cos(\theta_3^{(0)} - \theta_1^{(0)}) - 0,1899 \cdot \sin(\theta_3^{(0)} - \theta_1^{(0)})) = \\
&= -110 \cdot 110 \cdot (0,1393 \cdot \cos(0 - 0) - 0,1899 \cdot \sin(0 - 0)) = -1685,53; \\
\frac{\partial \omega_{q3}}{\partial \theta_3} &= U_3^{(0)} \cdot [(9,9015 \cdot \cos \theta_3^{(0)} - 16,8245 \cdot \sin \theta_3^{(0)}) + U_1^{(0)} \cdot (0,1393 \cdot \cos(\theta_3^{(0)} - \theta_1^{(0)}) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 0,1899 \cdot \sin(\theta_3^{(0)} - \theta_1^{(0)})] = 110 \cdot [(9,9015 \cdot \cos(0) - 16,8245 \cdot \sin(0)) + \\
& + 110 \cdot (0,1393 \cdot \cos(0 - 0) - 0,1899 \cdot \sin(0 - 0))] = 2774,695; \\
\frac{\partial \omega_{q3}}{\partial U_1} &= U_3^{(0)} \cdot (0,1393 \cdot \sin(\theta_3^{(0)} - \theta_1^{(0)}) + 0,1899 \cdot \cos(\theta_3^{(0)} - \theta_1^{(0)})) = \\
&= 110 \cdot (0,1393 \cdot \sin(0 - 0) + 0,1899 \cdot \cos(0 - 0)) = 20,889; \\
\frac{\partial \omega_{q3}}{\partial U_3} &= -0,6724 \cdot U_3^{(0)} + (9,9015 \cdot \sin \theta_3^{(0)} + 16,8245 \cdot \cos \theta_3^{(0)}) + U_1^{(0)} \cdot (0,1393 \cdot \sin(\theta_3^{(0)} - \\
& - \theta_1^{(0)}) + 0,1899 \cdot \cos(\theta_3^{(0)} - \theta_1^{(0)})) = -0,6724 \cdot 110 + (9,9015 \cdot \sin(0) + \\
& + 16,8245 \cdot \cos(0)) + 110 \cdot (0,1393 \cdot \sin(0 - 0) + 0,1899 \cdot \cos(0 - 0)) = -36,2505; \\
\frac{\partial \omega_{q4}}{\partial \theta_1} &= -U_1^{(0)} \cdot U_4^{(0)} \cdot (0,0017 \cdot \cos(\theta_4^{(0)} - \theta_1^{(0)}) - 0,0343 \cdot \sin(\theta_4^{(0)} - \theta_1^{(0)})) = \\
&= -110 \cdot 35 \cdot (0,0017 \cdot \cos(0 - 0) - 0,0343 \cdot \sin(0 - 0)) = -6,545; \\
\frac{\partial \omega_{q4}}{\partial \theta_4} &= U_1^{(0)} \cdot U_4^{(0)} \cdot (0,0017 \cdot \cos(\theta_4^{(0)} - \theta_1^{(0)}) - 0,0343 \cdot \sin(\theta_4^{(0)} - \theta_1^{(0)})) = \\
&= 110 \cdot 35 \cdot (0,0017 \cdot \cos(0 - 0) - 0,0343 \cdot \sin(0 - 0)) = 6,545; \\
\frac{\partial \omega_{q4}}{\partial U_1} &= U_4^{(0)} \cdot (0,0017 \cdot \sin(\theta_4^{(0)} - \theta_1^{(0)}) + 0,0343 \cdot \cos(\theta_4^{(0)} - \theta_1^{(0)})) = \\
&= 35 \cdot (0,0017 \cdot \sin(0 - 0) + 0,0343 \cdot \cos(0 - 0)) = 1,2005; \\
\frac{\partial \omega_{q4}}{\partial U_4} &= -0,205 \cdot U_4^{(0)} + U_1^{(0)} \cdot (0,0017 \cdot \sin(\theta_4^{(0)} - \theta_1^{(0)}) + 0,0343 \cdot \cos(\theta_4^{(0)} - \theta_1^{(0)})) = \\
&= -0,205 \cdot 35 + 110 \cdot (0,0017 \cdot \sin(0 - 0) + 0,0343 \cdot \cos(0 - 0)) = -3,402.
\end{aligned}$$

4. За результатами обчислень формуємо матрицю Якобі при початкових наближеннях напруг. Формуємо відповідну систему лінійних (лінійаризованих) рівнянь. В матричній формі ця система рівнянь включає матрицю Якобі, вектор нев'язок і вектор поправок до невідомих. Значення поправок  $\Delta U_i^{(0)}$ ,  $\Delta \theta_i^{(0)}$  обчислюються при розв'язанні системи:

$$\begin{bmatrix} 6487,97 & -1836,78 & -2297,79 & -132,06 & 38,47 & -12,22 & -15,32 & -0,19 \\ -1836,78 & 1836,78 & 0 & 0 & -12,22 & 12,22 & 0 & 0 \\ -2297,79 & 0 & 4148,49 & 0 & -15,32 & 0 & 24,36 & 0 \\ -132,06 & 0 & 0 & 132,06 & -0,06 & 0 & 0 & 0,17 \\ 4344,395 & -1344,31 & -1685,53 & -6,545 & -57,35 & 16,698 & 20,89 & 3,77 \\ -1344,31 & 1344,31 & 0 & 0 & 16,698 & -16,698 & 0 & 0 \\ -1685,53 & 0 & 2774,695 & 0 & 20,889 & 0 & -36,25 & 0 \\ -6,545 & 0 & 0 & 6,545 & 1,201 & 0 & 0 & -3,402 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta\theta_1^{(0)} \\ \Delta\theta_2^{(0)} \\ \Delta\theta_3^{(0)} \\ \Delta\theta_4^{(0)} \\ \Delta U_1^{(0)} \\ \Delta U_2^{(0)} \\ \Delta U_3^{(0)} \\ \Delta U_4^{(0)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -53,155 \\ 5,000 \\ -43,355 \\ 0,703 \\ 87,485 \\ 2,000 \\ 77,465 \\ 6,193 \end{bmatrix}.$$

5. Розв'язання системи рівнянь можна виконати будь-яким відомим методом розв'язання СЛАР з використанням відповідних комп'ютерних програм і програмних засобів.

В результаті розв'язання системи рівнянь визначені поправки до модулів та кутів невідомих напруг:

$$\Delta U^{(0)} = \begin{bmatrix} \Delta\theta_1^{(0)} \\ \Delta\theta_2^{(0)} \\ \Delta\theta_3^{(0)} \\ \Delta\theta_4^{(0)} \\ \Delta U_1^{(0)} \\ \Delta U_2^{(0)} \\ \Delta U_3^{(0)} \\ \Delta U_4^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.002 \\ -0.003 \\ 0.001 \\ -0.010 \\ 4.888 \\ 4.667 \\ 4.928 \\ 3.530 \end{bmatrix}.$$

6. Визначаємо нові наближення всіх напруг:

$$\dot{U}^{(1)} = \dot{U}^{(0)} + \Delta\dot{U}^{(0)};$$

$$\begin{bmatrix} \theta_1^{(1)} \\ \theta_2^{(1)} \\ \theta_3^{(1)} \\ \theta_4^{(1)} \\ U_1^{(1)} \\ U_2^{(1)} \\ U_3^{(1)} \\ U_4^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1^{(0)} \\ \theta_2^{(0)} \\ \theta_3^{(0)} \\ \theta_4^{(0)} \\ U_1^{(0)} \\ U_2^{(0)} \\ U_3^{(0)} \\ U_4^{(0)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta\theta_1^{(0)} \\ \Delta\theta_2^{(0)} \\ \Delta\theta_3^{(0)} \\ \Delta\theta_4^{(0)} \\ \Delta U_1^{(0)} \\ \Delta U_2^{(0)} \\ \Delta U_3^{(0)} \\ \Delta U_4^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 110 \\ 110 \\ 110 \\ 35 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.002 \\ -0.003 \\ 0.001 \\ -0.010 \\ 4.888 \\ 4.667 \\ 4.928 \\ 3.530 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.002 \\ -0.003 \\ 0.001 \\ -0.010 \\ 114.888 \\ 114.667 \\ 114.928 \\ 38.530 \end{bmatrix} \quad (kB).$$

7. Значення нев'язок, що обчислені в п. 2, значно перевищують задану точність  $\varepsilon = 0,01$ . Необхідно виконувати наступну ітерацію. Розрахунки продовжуємо з пункту 2 при нових значеннях напруг.

Наступна ітерація ( $k=1$ ) дає такі результати:

- матриця Якобі, нев'язки рівнянь і відповідна лінійаризована система рівнянь:

$$\begin{bmatrix} 6977.69 & -2001.62 & -2506.67 & -151.89 & 40.71 & -12.74 & -16.01 & -0.165 \\ -1997.947 & 1997.947 & 0 & 0 & -12,761 & 12,693 & 0 & 0 \\ -2508.11 & 0 & 4440.044 & 0 & -16,001 & 0 & 25,888 & 0 \\ -151,772 & 0 & 0 & 151,772 & -0,0756 & 0 & 0 & 0,168 \\ 4678.139 & -1461.101 & -1840.26 & -6,362 & -60,77 & 17,456 & 21,811 & 3,942 \\ -1466.12 & 1466.12 & 0 & 0 & 17,39 & -17,389 & 0 & 0 \\ -1838,307 & 0 & 2979.084 & 0 & 21,831 & 0 & -38,644 & 0 \\ -8,6885 & 0 & 0 & 8,6885 & 1,3210 & 0 & 0 & -3,9597 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta\theta_1^{(1)} \\ \Delta\theta_2^{(1)} \\ \Delta\theta_3^{(1)} \\ \Delta\theta_4^{(1)} \\ \Delta U_1^{(1)} \\ \Delta U_2^{(1)} \\ \Delta U_3^{(1)} \\ \Delta U_4^{(1)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 2,6433 \\ -0,3176 \\ 2,0801 \\ -0,1171 \\ -4,0248 \\ 0,0052 \\ -3,6034 \\ -0,6976 \end{bmatrix}.$$

Величини нев'язок рівнянь значно зменшились, але вони більші за задану точність;

- Розв'язуємо систему рівнянь. Визначаємо поправки та нові наближення напруг:

$$\dot{U}^{(2)} = \dot{U}^{(1)} + \Delta\dot{U}^{(1)};$$

$$\begin{bmatrix} \theta_1^{(2)} \\ \theta_2^{(2)} \\ \theta_3^{(2)} \\ \theta_4^{(2)} \\ U_1^{(2)} \\ U_2^{(2)} \\ U_3^{(2)} \\ U_4^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1^{(1)} \\ \theta_2^{(1)} \\ \theta_3^{(1)} \\ \theta_4^{(1)} \\ U_1^{(1)} \\ U_2^{(1)} \\ U_3^{(1)} \\ U_4^{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta\theta_1^{(1)} \\ \Delta\theta_2^{(1)} \\ \Delta\theta_3^{(1)} \\ \Delta\theta_4^{(1)} \\ \Delta U_1^{(1)} \\ \Delta U_2^{(1)} \\ \Delta U_3^{(1)} \\ \Delta U_4^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.002 \\ -0.003 \\ 0.001 \\ -0.010 \\ 114.888 \\ 114.667 \\ 114.928 \\ 38.530 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,000 \\ 0,000 \\ 0.000 \\ 0.001 \\ -0,219 \\ -0,210 \\ -0,217 \\ -0,247 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.002 \\ -0.003 \\ 0.001 \\ -0.009 \\ 114.669 \\ 114.457 \\ 114.711 \\ 38.283 \end{bmatrix} \text{ (kB)}.$$

Наступна ітерація (к=2) дає такі результати:

- матриця Якобі, нев'язки рівнянь і відповідна лінійаризована система рівнянь:

$$\begin{bmatrix} 6955.175 & -1994.007 & -2497.27 & -150,62 & 40,61 & -12,72 & -15,981 & -0,169 \\ -1990.63 & 1990.63 & 0 & 0 & -12,74 & 12,673 & 0 & 0 \\ -2498.53 & 0 & 4426.91 & 0 & -15,972 & 0 & 25,821 & 0 \\ -150,52 & 0 & 0 & 150,52 & -0,0739 & 0 & 0 & 0,169 \\ 4662.99 & -1455.94 & -1833.18 & -6,45 & -60,62 & 17,422 & 21,77 & 3,934 \\ -1460.45 & 1460.451 & 0 & 0 & 17,36 & -17,357 & 0 & 0 \\ -1831,47 & 0 & 2969,944 & 0 & 21,789 & 0 & -38,54 & 0 \\ -8,4756 & 0 & 0 & 8,4756 & 1,3126 & 0 & 0 & -3,916 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta\theta_1^{(2)} \\ \Delta\theta_2^{(2)} \\ \Delta\theta_3^{(2)} \\ \Delta\theta_4^{(2)} \\ \Delta U_1^{(2)} \\ \Delta U_2^{(2)} \\ \Delta U_3^{(2)} \\ \Delta U_4^{(2)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0,0061 \\ -0,0009 \\ 0,0042 \\ -0,0010 \\ -0,0076 \\ -0,0003 \\ -0,0066 \\ -0,0045 \end{bmatrix}.$$

- нові значення поправок і наближення напруг:

$$\dot{U}^{(3)} = \dot{U}^{(2)} + \Delta\dot{U}^{(2)};$$



$$\begin{bmatrix} \theta_1^{(3)} \\ \theta_2^{(3)} \\ \theta_3^{(3)} \\ \theta_4^{(2)} \\ U_1^{(3)} \\ U_2^{(3)} \\ U_3^{(3)} \\ U_4^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1^{(2)} \\ \theta_2^{(2)} \\ \theta_3^{(2)} \\ \theta_4^{(2)} \\ U_1^{(2)} \\ U_2^{(2)} \\ U_3^{(2)} \\ U_4^{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta\theta_1^{(2)} \\ \Delta\theta_2^{(2)} \\ \Delta\theta_3^{(2)} \\ \Delta\theta_4^{(2)} \\ \Delta U_1^{(2)} \\ \Delta U_2^{(2)} \\ \Delta U_3^{(2)} \\ \Delta U_4^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.002 \\ -0.003 \\ 0.001 \\ -0.009 \\ 114.669 \\ 114.457 \\ 114.711 \\ 38.283 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,00 \\ 0,00 \\ 0,00 \\ 0,00 \\ -0,001 \\ 0,000 \\ 0,000 \\ -0,001 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.00172 \\ -0.00288 \\ -0.00138 \\ -0.00844 \\ 114.6685 \\ 114.4563 \\ 114.7105 \\ 38.2819 \end{bmatrix} \text{ (kВ)}.$$

Значення нев'язок усіх рівнянь системи на останній ітерації по модулю менші за задану точність  $\varepsilon = 0,01$ :

$$W^{(2)} = \begin{bmatrix} \omega_{p1}^{(2)} \\ \omega_{p2}^{(2)} \\ \omega_{p3}^{(2)} \\ \omega_{p4}^{(2)} \\ \omega_{q1}^{(2)} \\ \omega_{q2}^{(2)} \\ \omega_{q3}^{(2)} \\ \omega_{q4}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0061 \\ -0,0009 \\ 0,0042 \\ -0,0010 \\ -0,0076 \\ -0,0003 \\ -0,0066 \\ -0,0045 \end{bmatrix} < \varepsilon.$$

Умови завершення ітераційного процесу виконуються. Значення напруг вузлів  $U_i^{(3)}$ ,  $\theta_i^{(3)}$ , обчислені на останній ітерації, є розв'язком системи рівнянь усталеного режиму із заданою точністю.

Таким чином, розв'язком заданої системи нелінійних рівнянь усталеного режиму методом Ньютона-Рафсона з точністю  $\varepsilon = 0,01$  є такі значення напруг у вузлах мережі:

$$\begin{aligned}
 U_1 &= 114,6685 \text{ kВ}; \theta_1 = -0,00172; \\
 U_2 &= 114,4563 \text{ kВ}; \theta_2 = -0,00288; \\
 U_3 &= 114,7105 \text{ kВ}; \theta_3 = -0,00138; \\
 U_4 &= 38,2819 \text{ kВ}; \theta_4 = -0,00844.
 \end{aligned}$$

Або в прямокутних координатах:

$$\begin{aligned}
 \dot{U}_1 &= 114,6683 - j0,1977 \text{ кВ}; \\
 \dot{U}_2 &= 114,4559 - j0,3296 \text{ кВ}; \\
 \dot{U}_3 &= 114,7104 - j0,1585 \text{ кВ}; \\
 \dot{U}_4 &= 38,2805 - j0,3232 \text{ кВ}.
 \end{aligned}$$

Для їх обчислення знадобилось тільки три ітерації метода Ньютона-Рафсона.

#### *7.6. Контрольні питання до розділу 7.4.:*

1. Суть методу Ньютона-Рафсона;
2. Алгоритм методу Ньютона-Рафсона;
3. Як вибираються початкові наближення невідомих при розв'язанні рівнянь усталеного режиму ітераційними методами;
4. Способи контролю завершення ітераційного процесу;
5. Модифікації методу Ньютона-Рафсона;
6. Порівняльна характеристика методів Зейделя та Ньютона-Рафсона.

## **Розділ 8. Обчислення параметрів режиму роботи електричної мережі**

*Розглядаються питання виконання заключних обчислень параметрів режиму - розрахунків струморозподілу, потокорозподілу та втрат потужності в електричній мережі.*

### *8.1. Заключні обчислення параметрів режиму*

Головним результатом розв'язання системи рівнянь усталеного режиму роботи електричної мережі є значення напруг у її вузлах. В залежності від постановки задачі і методу розв'язання системи це комплексні величини  $\dot{U}_i$ , або їх складові – модулі і кути напруг  $U_i$ ,  $\theta_i$  чи дійсні та уявні складові комплексів  $U_i'$ ,  $U_i''$ . Для повної характеристики режиму роботи електричної мережі необхідно обчислити значення ще ряду його основних параметрів [9].

#### 1. Струми у ділянках мережі, струми у вузлах. Струмозподіл.

При відомих напругах у вузлах мережі і параметрах її ділянок струм в кожній ділянці можна визначити за формулою:

$$\dot{I}_{ij} = (\dot{U}_i - \dot{U}_j) \cdot Y_{ij}. \quad (8.1)$$

Тут  $\dot{U}_i$ ,  $\dot{U}_j$  - напруги у вузлах початку та кінця ділянки,  $Y_{ij}$  - повздовжня провідність ділянки  $Y_{ij} = 1/Z_{ij}$ . Струм у будь-якій точці ділянки має однакові значення.

В трансформаторній ділянці струм в кінці ділянки (сторона НН) в  $K_T$  раз більший, ніж на початку цієї ділянки (сторона ВН):

$$\dot{I}_e = K_T \cdot \dot{I}_o, \quad (8.2)$$

де  $\dot{I}_i, \dot{I}_\ell, \hat{E}_0$  – струми на початку та в кінці трансформаторної ділянки і коефіцієнт трансформації трансформатора.

Струм на стороні ВН трансформаторної ділянки (початок ділянки) дорівнює:

$$\dot{I}_{ij} = (\dot{U}_i - K_T \cdot \dot{U}_j) \cdot Y_{ij}. \quad (8.3)$$

Струми у поперечних елементах схеми заміщення:

$$\dot{I}_{i-0} = \dot{U}_i \cdot Y_{i-0}, \quad (8.4)$$

де  $Y_{i-0}$  – поперечна провідність у вузлі  $i$ . Визначається як сума поперечних провідностей елементів мережі, які підключені у  $i$ -му вузлі з боку цього вузла. Наприклад, для вузла 1 схеми рис. 1.4:

$$Y_{1-0} = Y_0^i + 0,5 \cdot (Y_{01}^i + Y_{12}^i + Y_{13}^i).$$

Для вузла 4 поперечна провідність  $Y_{4-0} = 0$ .

Якщо у вузлі задана потужність  $\dot{S}_i$ , то струм у вузлі можна визначити за формулою:

$$\dot{I}_i = \dot{S}_i^* / U_i^* \quad (8.5)$$

Обчислені значення струмів в елементах електричної мережі визначають *струморозподіл* в ній.

У кожному вузлі мережі повинні виконуватись умови балансу струмів:

$$\sum_j \dot{I}_{ij} + \dot{I}_i + \dot{I}_{i-0} \approx 0. \quad (8.10)$$

Тут  $j$  – номери вузлів мережі, які безпосередньо зв'язані з  $i$  – м відповідними ділянками. При цьому необхідно враховувати напрямок протікання струму в ділянці – від вузла чи до вузла. Для трансформаторних ділянок треба враховувати, якою стороною - ВН чи НН вона підключена до вузла  $i$ .

2. Потоки потужності в ділянках мережі, потужності у вузлах.

Потокорозподіл.

Потік потужності в різних точках ділянки електричної мережі має різні значення. При аналізі режимів обчислюють зазвичай потужності на початку і в кінці ділянки:

$$S_{ij(i)}^{\dot{}} = \dot{U}_i \cdot I_{ij}^*; \quad S_{ij(j)}^{\dot{}} = \dot{U}_j \cdot I_{ij}^*, \quad (8.11)$$

де  $\dot{U}_i, \dot{U}_j$  - напруги у вузлах початку і кінця ділянки,  $I_{ij}^*$  - спряжений комплекс струму в ділянці. Відрізняються ці потужності на величину втрат потужності у ділянці.

Потужності у вузлі повинні відповідати умовам балансу потужностей:

$$\dot{S}_i + \sum_j \dot{S}_{ij(i)} \approx 0, \quad (8.12)$$

де  $j$  - номери вузлів мережі, які безпосередньо зв'язані з  $i$  - м,  $\dot{S}_i$  - задана потужність у вузлі. При цьому необхідно враховувати напрямок протікання потужності в ділянці - від вузла чи до вузла, і точку ділянки, в якій визначений потік потужності (початок, кінець тощо).

Обчислені значення потужностей в елементах електричної мережі визначають *потокорозподіл* в ній.

### 3. Втрати потужності у повздовжніх елементах електричної мережі.

Для визначення втрат потужності у ділянках мережі можна застосувати декілька формул:

$$\text{а) } \Delta \dot{S}_{ij} = S_{ij(i)}^{\dot{}} - S_{ij(j)}^{\dot{}},$$

де  $S_{ij(i)}^{\dot{}}, S_{ij(j)}^{\dot{}}$  - потоки потужності на початку і в кінці ділянки  $i-j$ ;

$$\text{б) } \Delta \dot{S}_{ij} = I_{ij}^2 \cdot Z_{ij},$$

де  $I_{ij}, Z_{ij}$  - струм в ділянці та опір ділянки;

$$\text{в) } \Delta \dot{S}_{ij} = \frac{P_{ij(i)}^2 + Q_{ij(i)}^2}{U_i^2} \cdot Z_{ij} \quad (\text{за умовами початку ділянки}),$$

$$\Delta \dot{S}_{ij} = \frac{P_{ij(j)}^2 + Q_{ij(j)}^2}{U_j^2} \cdot Z_{ij} \quad (\text{за умовами кінця ділянки}).$$

Тут  $P_{ij(i)}$ ,  $Q_{ij(i)}$ ;  $P_{ij(j)}$ ,  $Q_{ij(j)}$  - потоки активної та реактивної потужностей на початку та в кінці ділянки;  $U_i$ ,  $U_j$  - напруги у вузлах початку та кінця ділянки.

4. Втрати потужності у поперечних елементах електричної мережі.

$$\Delta \dot{S}_{i0} = U_i^2 \cdot Y_{i0}.$$

Тут  $U_i$ ,  $Y_{i0}$  - напруга і поперечна провідність у вузлі  $i$ .

5. Сумарні втрати потужності в електричній мережі.

Вони визначаються як сума втрат в усіх повздовжніх і поперечних елементах електричної мережі:

$$\Delta \dot{S}_{\Sigma} = \sum_{i,j} \Delta \dot{S}_{ij} + \sum_i \Delta \dot{S}_{i0}.$$

У пунктах 3, 4, 5 визначаються *технологічні втрати* потужності, пов'язані з протіканням струму в елементах електричної мережі (на відміну від комерційних втрат).

6. Баланс потужностей в електричній мережі.

Вся потужність, яка надійшла до електричної мережі, повинна бути миттєво спожита:

$$\dot{S}_{\Gamma\Sigma} = \dot{S}_{H\Sigma} + \Delta \dot{S}_{\Sigma},$$

де  $\dot{S}_{\Gamma\Sigma}$ ,  $\dot{S}_{H\Sigma}$  - сумарна потужність, що надійшла до мережі (генерація тощо) і сумарне корисне навантаження споживачів мережі.

Якщо в ході розрахунків електричних режимів умови балансу потужностей в мережі не виконуються, то відновити розрахунковий баланс потужностей можна зміною потужностей *балансирующего* вузла  $\dot{S}_B = P_B + jQ_B$ .

## 8.2. Приклад виконання заключних обчислень параметрів режиму

Для обчислення параметрів режиму використовуємо значення напруг у вузлах, які визначені в результаті розв'язання системи рівнянь усталеного режиму методом Ньютона-Рафсона (розділ 7).

1. Струми в ділянках ЛЕП визначаємо за формулою (8.1):

$$\begin{aligned}\dot{I}_{01} &= (\dot{U}_0 - \dot{U}_1) \cdot Y_{01} = (115,0 - j0,0) - (114,6683 - j0,1972) \cdot (0,1034 - j0,1756) = \\ &= 0,0689 - j0,0379 \text{ (kA)};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{I}_{03} &= (\dot{U}_0 - \dot{U}_3) \cdot Y_{03} = (115,0 - j0,0) - (114,7104 - j0,1583) \cdot (0,0861 - j0,1463) = \\ &= 0,0481 - j0,0287 \text{ (kA)};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{I}_{12} &= (\dot{U}_1 - \dot{U}_2) \cdot Y_{12} = (114,6683 - j0,1972) - (114,4558 - j0,3296) \cdot (0,1111 - j0,1518) = \\ &= 0,0437 - j0,0175 \text{ (kA)};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{I}_{13} &= (\dot{U}_1 - \dot{U}_3) \cdot Y_{13} = (114,6683 - j0,1982) - (114,7104 - j0,1583) \cdot (0,1393 - j0,1899) = \\ &= -0,0133 + j0,0026 \text{ (kA)};\end{aligned}$$

Струм на стороні ВН трансформаторної ділянки 1-4 визначаємо за формулою (8.3):

$$\begin{aligned}\dot{I}_{14B} &= (\dot{U}_1 - K_{Tii} \cdot \dot{U}_4) \cdot Y_{14} = (114,6683 - j0,1977) - 2,987 \cdot (38,2805 - j0,3232) \cdot (0,00058 - j0,01149) = \\ &= 0,00901 - j0,00328 \text{ (kA)};\end{aligned}$$

Струм на стороні НН трансформаторної ділянки 1-4 визначаємо за формулою (8.2):

$$\dot{I}_{14f} = \dot{I}_{14A} \cdot K_{Tii} = (0,00901 - j0,00328) \cdot 2,987 = 0,02606 - j0,00806 \text{ (kA)}.$$

Визначаємо струми у поперечних провідностях елементів схеми заміщення за формулою (8.4). Поперечні струми у вузлах:

$$\dot{I}_{1-0} = \dot{U}_1 \cdot Y_{1-0} = \dot{U}_1 \cdot (Y_0^i + 0,5 \cdot (Y_{01}^i + Y_{12}^i + Y_{13}^i)) = (114,6683 - j0,1972) \cdot (0,0159 + j0,1028 + 0,5 \cdot (0,0 - j0,269 + 0,0 - j0,265 + 0,0 - j0,212)) \cdot 10^{-4} = 0,000177 - j0,003099 \text{ (kA)};$$

$$\dot{I}_{2-0} = \dot{U}_2 \cdot Y_{2-0} = \dot{U}_2 \cdot (0,5 \cdot Y_{12}^i) = (114,4558 - j0,3296) \cdot (0,5 \cdot (0,0 - j0,265) \cdot 10^{-4}) = 0,0 - j0,001517 \text{ (kA)};$$

$$\dot{I}_{3-0} = \dot{U}_3 \cdot Y_{3-0} = \dot{U}_3 \cdot (0,5 \cdot (Y_{30}^i + Y_{31}^i)) = (114,7104 - j0,1583) \cdot (0,5 \cdot (0,0 - j0,323 + 0,0 - j0,212) \cdot 10^{-4}) = 0,0 - j0,003069 \text{ (kA)};$$

$\dot{I}_{4-0} = \dot{U}_4 \cdot Y_{4-0} = 0,0$ , тому що у цьому вузлі поперечна провідність дорівнює нулю.

Визначаємо струми навантаження у вузлах по заданій потужності і відомим напругам за формулою (8.5):

$$\dot{I}_1^* = S_1^* / U_1^* = (3 - j2) / (114,6683 + j0,1972) = 0,0261 - j0,0175 \text{ (kA)};$$

$$\dot{I}_2^* = S_2^* / U_2^* = (5 - j2) / (114,4558 + j0,3296) = 0,0436 - j0,0176 \text{ (kA)};$$

$$\dot{I}_3^* = S_3^* / U_3^* = (4 - j3) / (114,7104 + j0,1583) = 0,0348 - j0,0262 \text{ (kA)};$$

$$\dot{I}_4^* = S_4^* / U_4^* = (1 - j0,3) / (38,2805 + j0,3232) = 0,02606 - j0,00806 \text{ (kA)}.$$

Розрахункові небаланси струмів у вузлах, обчислені відповідно до (8.10), складають:

$$\Delta \dot{I}_1 = \dot{I}_{01} + \dot{I}_{31} - \dot{I}_{12} - \dot{I}_{14B} - \dot{I}_1 - \dot{I}_{1-0} = (0,0689 - j0,0379) + (0,0133 - j0,0026) - (0,0437 - j0,0175) - (0,009 - j0,0033) - (0,0261 - j0,0175) - (0,000177 - j0,003099) = 0,0032 + j0,0009 \text{ (kA)};$$

$$\Delta \dot{I}_2 = \dot{I}_{12} - \dot{I}_2 - \dot{I}_{2-0} = (0,0437 - j0,0175) - (0,0436 - j0,0176) - (0,0 - j0,001517) = 0,0001 + j0,0016 \text{ (kA)};$$

$$\Delta \dot{I}_3 = \dot{I}_{03} - \dot{I}_{31} - \dot{I}_3 - \dot{I}_{3-0} = (0,0481 - j0,0287) - (0,0133 - j0,0026) - (0,0348 - j0,0262) - (0,0 - j0,003069) = 0,0 + j0,0032 \text{ (kA)};$$

$$\Delta \dot{I}_4 = \dot{I}_{14H} - \dot{I}_4 - \dot{I}_{4-0} = (0,02606 - j0,00806) - (0,02606 - j0,00806) - 0,0 = 0,0 - j0,0 \text{ (kA)};$$



2. Потік потужності в ділянках мережі, на відміну від струму, має різні значення в різних точках ділянки. В практичних задачах визначають, зазвичай, потік на початку та/або в кінці ділянки. Визначаємо потоки потужності в ділянках схеми рис. 1.2 за формулами (8.11):

$$S_{01(0)}^{\dot{}} = \dot{U}_0 \cdot I_{01}^* = (115,0 - j0,0) \cdot (0,0689 + j0,0379) = 7,9235 + j4,3585 \text{ (MBA)};$$

$$S_{01(1)}^{\dot{}} = \dot{U}_1 \cdot I_{01}^* = (114,6683 - j0,1972) \cdot (0,0689 + j0,0379) = 7,9081 + j4,3323 \text{ (MBA)};$$

$$S_{03(0)}^{\dot{}} = \dot{U}_0 \cdot I_{03}^* = (115,0 - j0,0) \cdot (0,0481 + j0,0287) = 5,5315 + j3,3005 \text{ (MBA)};$$

$$S_{03(3)}^{\dot{}} = \dot{U}_3 \cdot I_{03}^* = (114,7104 - j0,1583) \cdot (0,0481 + j0,0287) = 5,5221 + j3,2846 \text{ (MBA)};$$

$$S_{12(1)}^{\dot{}} = \dot{U}_1 \cdot I_{12}^* = (114,6683 - j0,1972) \cdot (0,0437 + j0,0175) = 5,0145 + j1,9981 \text{ (MBA)};$$

$$S_{12(2)}^{\dot{}} = \dot{U}_2 \cdot I_{12}^* = (114,4558 - j0,3296) \cdot (0,0437 + j0,0175) = 5,0075 + j1,9886 \text{ (MBA)};$$

$$S_{13(1)}^{\dot{}} = \dot{U}_1 \cdot I_{13}^* = (114,6683 - j0,1982) \cdot (-0,0133 - j0,0026) = -1,5256 - j0,2955 \text{ (MBA)};$$

$$S_{13(3)}^{\dot{}} = \dot{U}_3 \cdot I_{13}^* = (114,7104 - j0,1583) \cdot (-0,0133 - j0,0026) = -1,5261 - j0,2961 \text{ (MBA)};$$

$$S_{14(1)}^{\dot{}} = \dot{U}_1 \cdot I_{14B}^* = (114,6683 - j0,1977) \cdot (0,009 + j0,00328) = 1,0327 + j0,3743 \text{ (MBA)};$$

$$S_{14(4)}^{\dot{}} = \dot{U}_4 \cdot I_{14H}^* = (38,2805 - j0,3232) \cdot (0,02606 + j0,00806) = 1,0002 + j0,3001 \text{ (MBA)};$$

### 8.3. Контрольні питання до розділу 8:

1. Як визначити струми у ділянках ЛЕП мережі;
2. Як визначити струми у трансформаторних ділянках мережі;
3. Як визначити струми у поперечних елементах схеми заміщення;
4. Як визначити струми у вузлах електричної мережі;
5. Баланс струмів у вузлах електричної мережі;
6. Що таке струморозподіл в електричній мережі;
7. Як відрізняється струм на початку ділянки і в кінці ділянки;
8. Як визначити потоки потужності у ділянках мережі;
9. Як перевірити баланс потужностей у вузлі мережі;
10. Що таке потокорозподіл в електричній мережі;
11. Як відрізняються потоки потужності на початку ділянки і в кінці ділянки;
12. Варіанти формул для обчислення втрат потужності у ділянках мережі;
13. Як обчислити сумарні втрати потужності в електричній мережі;
14. Як визначити потужності балансуєчого вузла;
15. Баланс потужностей в електричній мережі.

## Додатки

*Довідкова таблиця 1: Розрахункові дані ПЛ 35-150 кВ зі сталевалюмінієвими дротами АС (на 100 км):*

Переріз провода, мм <sup>2</sup>	r <sub>0</sub> , Ом, при +20°C	35 кВ		110 кВ			150 кВ		
		x <sub>0</sub> , Ом	b <sub>0</sub> , См · 10 <sup>-4</sup>	x <sub>0</sub> , Ом	b <sub>0</sub> , См · 10 <sup>-4</sup>	q <sub>0</sub> , Мвар	x <sub>0</sub> , Ом	b <sub>0</sub> , См · 10 <sup>-4</sup>	q <sub>0</sub> , Мвар
35	77,3	44,5	2,59	–	–	–	–	–	–
50	59,2	43,3	2,65	–	–	–	–	–	–
70	42	42,0	2,73	–	–	–	–	–	–
95	31,4	41,1	2,81	42,9	2,65	3,5	–	–	–
120	24,9	40,3	2,85	42,3	2,69	3,6	43,9	2,61	6,5
150	19,5	39,8	2,90	41,6	2,74	3,65	43,2	2,67	6,7
185	15,6	38,4	2,96	40,9	2,82	3,7	42,4	2,71	6,8
240	12	–	–	40,1	2,85	3,75	41,6	2,75	6,9

*Довідкова таблиця 2: Трифазні двохобмоткові трансформатори 110 кВ:*

Тип трансфор- матора	S <sub>ном</sub> мВА	Межі регулю- вання	Каталожні дані						Розрахункові дані		
			U <sub>ном</sub> обмоток, кВ		U <sub>к</sub> , %	ΔP <sub>кз</sub> кВт	ΔP <sub>х.х.</sub> кВт	I <sub>х.х.</sub> %	R <sub>т</sub> , Ом	X <sub>т</sub> , Ом	ΔQ <sub>х.х.</sub> , кВАр
			ВН	НН							
ТМН- 2500/110	2,5	±10×1,5% ±8×1,5%	110	6,6; 11; 22	10,5	22	5,0	1,5	46,6	555	37,5
ТМН- 4000/110	4,0	±9×1,78%	115	–	–	–	–	–	–	–	–
ТМН- 6300/110	6,3	±9×1,78%	115	6,6; 11; 22; 38,5	10,5	50	10	1,0	16,6	220	63
ТДН- 10000/110	10	±9×1,78%	115	6,6; 11; 22; 38,5	10,5	60	14	0,9	7,95	139	90
ТДН- 16000/110	16	±9×1,78%	115	6,6; 11; 22; 38,5	10,5	85	21	0,85	4,38	86,7	136
ТРДН- 25000/110	25	±9×1,78%	115	6,3/6,3; 6,3/10,5; 10,5/10,5	10,5	120	29	0,8	2,54	55,9	200
ТРДН- 32000/110	32	±9×1,78%	115		10,5	145	35	0,75	1,87	43,5	240
ТРДНС- 32000/110					16	145	35	0,75	1,87	66	240
ТРДН- 40000/110	40	±9×1,78%	115		10,5	175	42	0,7	1,44	34,8	280
ТРДНС- 40000/110				16	175	42	0,7	1,44	52,8	280	
ТД- 40000/110				10,5	175	52	0,7	1,44	34,8	280	
ТД- 40000/110		±2×2,5%	115	3,15; 6,3; 10,5	10,5	175	52	0,7	1,44	34,8	280
ТРДЦН- 63000/110	63	±9×1,78%	115	6,3/6,3; 6,3/10,5;	10,5	260	59	0,65	0,87	22	410
ТРДЦН- 80000/110	80	±9×1,78%	121	10,5/10,5	10,5	315	70	0,6	0,65	17,3	480
ТД- 80000/110	80	±2×2,5%	121	6,3; 10,5; 13,8; 3,15	10,5	315	70	0,6	0,65	17,3	480
ТДЦ- 125000/110	125	±2×2,5%	121	10,5; 13,8	10,5	520	120	0,55	0,33	11,1	678
ТДЦ- 200000/110	200	±2×2,5%	121	13,8; 18; 15,75; 20	10,5	700	170	0,5	0,23	6,95	1000
ТДЦ- 250000/110	250	±2×2,5%	121	15,75; 20	10,5	790	200	0,5	0,17	5,55	1250

**Позначення типів трансформаторів**

А	Т	С	Т	Г	Е			
				Н				
О	Р	ДП	АН	У	Е			
		МВ						
		Ц						

Автотрансформатор \_\_\_\_\_

Число фаз

трифазний \_\_\_\_\_

однофазний \_\_\_\_\_

З розщепленою обмоткою \_\_\_\_\_

Охолодження:

природне повітряне \_\_\_\_\_

природне масляне \_\_\_\_\_

масляне з наддувом і з природньою

циркуляцією масла \_\_\_\_\_

масляне з наддувом і з примусовою

циркуляцією масла \_\_\_\_\_

масляно-водяне з природньою

циркуляцією масла \_\_\_\_\_

масляно-водяне з примусовою

циркуляцією масла \_\_\_\_\_

Трьохобмотковий \_\_\_\_\_

Вид переключення віток: \_\_\_\_\_

виконання однієї з обмоток з

пристроєм регулювання під

напругою (РПН) \_\_\_\_\_

Особливості виконання:

грозозахисний \_\_\_\_\_

захисне виконання \_\_\_\_\_

удосконалений \_\_\_\_\_

те ж з автоматичним РПН \_\_\_\_\_

Для електрифікації залізниць \_\_\_\_\_

Номінальна потужність, кВ·А \_\_\_\_\_

Клас напруги обмотки ВН (для автотрансформаторів з обмоткою СН 110 кВ та вище – також клас напруги обмотки СН), кВ \_\_\_\_\_

## Бібліографічний список

1. *Демидович Б.П., Марон И. А.* Основы вычислительной математики.- М.: Наука, 1966.
2. Справочник по проектированию электроэнергетических систем. Под ред. С.С. Рокотяна и И. М. Шапиро. Изд.3-е, перераб. и доп. М., «Энергия», 1987.
3. *Идельчик В.И.* Расчёты и оптимизация режимов электрических сетей и систем. – М.: Энергоатомиздат, 1988. – 288 с.
4. Электрические системы. Режимы работы электрических систем и сетей. Под. Ред. В. А. Веникова. Учебн. пособие для электроэнерг. вузов. М., «Высш. школа», 1975.
5. Электрические системы. Математические задачи электроэнергетики: Учебник для студентов вузов / Под ред. В. А. Веникова – М.: Высш. школа, 1981. – 288 с.
6. *Перхач В. С.* Математичні задачі електроенергетики. – Львів: Вища школа. Вид-во при Львів. ун-ті. 1982. – 380 с.
7. *Романюк Ю.Ф.* Електричні системи та мережі: Навч. посіб. – К.: Знання, 2007. – 292 с.
8. *Миньков С.Л., Миньков Л.Л.* Основы численных методов. – Томск: Издательство научно-технической литературы, 2005.
9. *Сулейманов В.М.* Електричні мережі та системи: підручн. [Текст] / В.М. Сулейманов, Т.Л. Кацадзе. – К.: НТУУ «КПІ», 2008. – 456 с.
10. *Задачин В.М.* Чисельні методи: навчальний посібник / В.М. Задачин, І.Г. Конюшенко. – Х.: Вид. ХНЕУ ім. Кузнеця, 2014. – 180 с.