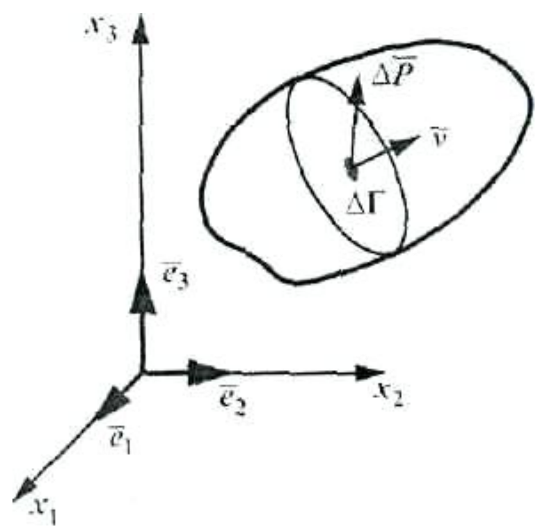
Лекція 3

Напружений стан

Якщо тверде тіло піддати зовнішнім діям, то таке тіло, деформуючись, зберігає, в певних межах, свою цілісність і безперервність. Залишаючись в рамках концепції суцільного середовища, таке явище можна пояснити появою гіпотетичних *внутрішніх зусиль,* що виникають як реакція на деформацію і що забезпечують цілісність тіла. Вивчення природи таких внутрішніх зусиль лежить за межами моделі суцільного середовища і для побудови механіки тіла, що деформується, не є обов'язковим.

Введемо кількісні характеристики внутрішніх зусиль, використовуючи підхід Ейлера. У деякий момент часу t розітнемо деформоване тіло площиною, що проходить через крапку (x_1, x_2, x_3). Орієнтацію такої площини задаватиме вектором одиничної нормалі (рис. 2.1).



Рисунрк 2.1 – Вектор напруг

Виділимо в перетині цією щільністю деяку малу околицю Г крапки $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$, яку називатимемо майданчиком з нормаллю $\bar{v}$ в крапці $\bar{x}$. Оскільки кожна з частин розітнутого тіла знаходиться в рівновазі, то це можна забезпечити введенням внутрішніх зусиль, що діють в точках площини розтину. Хай $\Delta\vec{P}_V$ - вектор внутрішніх зусиль, прикладених до майданчика Г. Чтоби виключити вплив розмірів майданчика, розділимо силу, на площу Г0.

Якщо така межа існує і не залежить від способу зменшення майданчика, то вектор

$$\Delta \vec{P}_V = \lim_{\Delta\Gamma \to 0} \frac{\Delta \vec{P}_V}{\Delta \Gamma}$$

називається *вектором напруг* в крапці $\bar{x}$ на майданчику з нормаллю $\bar{\nu}$.

Якщо побудувати вектори напруг на всіх майданчиках, що проходять через фіксовану точку простору, то, очевидно, одержимо повну характеристику напруженого стану в цій крапці. Такий опис навряд чи можна вважати задовільним, оскільки в кожній крапці можна побудувати нескінченне число майданчиків, і, отже, для опису напруженого стану в крапці буде потрібно нескінченне число векторів напруг. Проте виявилось, що можна описати напружений стан в крапці, використовуючи тільки кінцеве число параметрів.

Побудуємо в точці $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ три взаємноперпендикулярні майданчики з нормалями, паралельними координатним осям, тобто, співпадають по напряму з ортами $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ системи координат. Позначимо через $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$, вектори напруг на цих майданчиках. Розкладемо вектори $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$ по векторах базису ($\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$):

$$\begin{aligned} \vec{P}_1 &= \sigma_{11}\vec{e}_1 + \sigma_{12}\vec{e}_2 + \sigma_{13}\vec{e}_3, \\ \vec{P}_2 &= \sigma_{21}\vec{e}_1 + \sigma_{22}\vec{e}_2 + \sigma_{23}\vec{e}_3, \\ \vec{P}_3 &= \sigma_{31}\vec{e}_1 + \sigma_{32}\vec{e}_2 + \sigma_{33}\vec{e}_3 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Коефіцієнти розкладання, впорядковані у вигляді таблиці

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix},$$

при повороті системи координат перетворяться за законом перетворення компонент тензора 2-го рангу. Цей тензор називається тензором напруг Ейлера.

Сенс введення тензора напруг як інваріантної характеристики напруженого стану пояснюється тим. що вектор напруг на *будь-якому* майданчику, що проходить через точку, може бути виражений через компоненти тензора напруг в цій точці. Насправді, проведемо через точку $\bar{x}$ *довільний* майданчик з нормаллю $\bar{v}$. і хай $\Delta\vec{P}_V$ - вектор напруг на цьому майданчику. Цей вектор можна виразити через вектори $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$:

$$\Delta\vec{P}_V = \vec{P}_1\cos(\vec{v}, x_1) + \vec{P}_2\cos(\vec{v}, x_2) + \vec{P}_3\cos(\vec{v}, x_3) = \vec{P}_i\vec{v}_i$$

Підставляючи тепер замість, відповідні вирази згідно (2.6). одержуємо: $\Delta\vec{P}_V = \sigma_{ij}v_j\vec{e}_i$.

Отже, для повного опису напруженого стану в точці досить мати в своєму розпорядженні лише дев'ять компонентів тензора напруг.

Компонентам тензора напруг можна додати наступний механічний сенс: σ_{ij} можна розглядати як проекцію на вісь x_j вектора напруг, що діє на майданчику з нормаллю $\vec{e}_i$. При $i = j$ значення σ_{ij} називаються *нормальними,* а при *ij* - *дотичними* напругами (рис. 2.2).

Тензор напруг Ейлера характеризує напружений стан в поточному положенні тіла і представляється найбільш природною мірою напруженого стану.

Тензор напруг Лагранжа характеризує напружений стан в точці тіла по відношенню до майданчиків, узятих в початковому стані. Оскільки в процесі деформації змінюється як орієнтація, так і розміри майданчиків, то тензор напруг Лагранжа має умовний зміст і застосовується в основному у разі малих деформацій, коли зміною розмірів і орієнтації майданчиків можна нехтувати і тензори напруг Ейлера і Лагранжа співпадають.

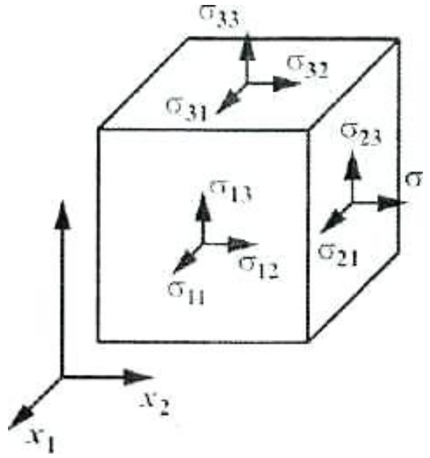


Рисунок 2.2 – Механічний сенс компонент тензора напруг

У теорії ОМТ у разі кінцевих деформацій використовуються, як правило, співвідношення Сен-Венана-Льові-Мізеса. у які входить повний вектор напруг Ейлера, і потреби в диференціюванні параметрів напруженого стану немає. При малій пружнопластичності деформациях.в якості міри для швидкості зміни напруженого стану приймається тензор 2-го рангу, складений з похідних за часом від компонент тензора напруг Лагранжа.

Розкладемо тензор напруг Ейлера на кульову і девіаторну частини:

$$\sigma_{ij} = \sigma_0 \delta_{ij} + s_{ij}$$

Скалярна величина

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$$

називається середнім гідростатичним тиском і є лінійним інваріантом тензора напруг.

Як квадратичні інваріанти тензора напруг звичайно використовуються або інтенсивність напруг:

$$\sigma_u = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}} \ ,$$

або інтенсивність дотичних напруг:

$$\tau_u = T = \sqrt{\frac{1}{2} s_{ij} s_{ij}}$$

Деформований стан

Якщо для опису суцільного середовища прийняти підхід Лагранжа, то деформований стан повністю описується вектором $\overline{u}=(u_1,u_2,u_3)$ переміщень всіх матеріальних точок тіла. Позначимо через $\overline{x}=(x_1,x_2,x_3)$ координати матеріальної точки тіла в початковий момент процесу деформації, через $y_i(\overline{x},t)$ - координати тієї ж точки у момент часу t. Тоді вектор переміщення $\overline{u}$ має координати:

$$u_i(\overline{x},t)=y_i(\overline{x},t)-x_i, \qquad i=1,2,3$$

Використання вектора $\overline{u}(\overline{x},t)$ як заходи деформованого стану не цілком розумно, оскільки при русі тіла як жорсткого цілого, тобто за відсутності *деформації* вектор $\overline{u}(\overline{x},t)$ відмінний від нуля. Тому для опису власне деформованого стану використовуються похідні від вектора характеристики:

$$\varepsilon_{ij}(\overline{x},t)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i(\overline{x},t)}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j(\overline{x},t)}{\partial x_i}\right)+\frac{\partial u_k(\overline{x},t)}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial u_k(\overline{x},t)}{\partial x_j} \tag{2.4}$$

При русі тіла як жорсткого цілого маємо $\varepsilon_{ij}(\overline{x},t)\equiv 0$.

Показано, що величини ε_{ij} при повороті декартової системи координат перетворяться за законом перетворення компонент тензора 2-го рангу, тобто в сукупності утворюють інваріантний об'єкт - тензор 2-го рангу, який називається тензором деформацій Лагранжа.

Співвідношення (2.4) вводяться без яких-небудь обмежень на величини деформацій і переміщень, і тому справедливі як у разі малих, так і у разі великих (кінцевих) деформацій. Відзначимо, що зв'язок між переміщеннями і деформаціями згідно (2.4) є *нелінійним.* Якщо вважати деформації малими і відкинути малі 2-го порядку, то приходимо до лінійних співвідношень Коші для компоненту тензора малих деформацій:

$$\varepsilon_{ij}(\bar{x},t) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i(\bar{x},t)}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j(\bar{x},t)}{\partial x_i}\right)$$

Для характеристики темпу зміни деформації в часі в рамках підходу Лагранжа вводиться тензор швидкостей деформацій Лагранжа:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}(\bar{x},t) = \frac{\partial \varepsilon_{ij}(\bar{x},t)}{\partial t},$$

компоненти якого виражається через компоненти $\dot{u}_i(x,t)$ вектора швидкості переміщень матеріальної частинки співвідношеннями:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}(\bar{x},t) = \frac{1}{2}(\dot{u}_{ij} + \dot{u}_{ji}) + \dot{u}_{ki}u_{kj} + u_{ki}\dot{u}_{kj}$$

лінійними щодо швидкостей переміщень.

При малих деформаціях маємо:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}(\bar{x},t) = \frac{1}{2}(\dot{u}_{ij} + \dot{u}_{ji})$$

В рамках підходу Ейлера рух суцільного середовища однозначно визначається вектором швидкостей $\bar{v}(\bar{x},t)$ матеріальних крапок, які у момент часу t знаходяться в точках $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ простору. Поняття переміщення в підході Ейлера втрачає сенс.

Для того, щоб характеризувати чисто деформаційну частину руху суцільного середовища, вводиться поняття швидкості деформації Ейлера:

$$\varsigma_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) = \frac{1}{2}\left(v_{ij} + v_{ji}\right) \qquad (2.5)$$

Показано, що величини, можуть розглядатися як компоненти симетричного тензора 2-го рангу, який називається тензором швидкостей деформацій Ейлера (або просто тензором швидкостей деформацій).

Відзначимо, що зв'язок (2.5) між компонентами тензора швидкостей деформацій і вектора швидкості є лінійним і при великих деформаціях і переміщеннях. Підкреслимо також, що, не дивлячись на схожі назви, тензори $\dot{\varepsilon}_{ij}$ і ς_{ij} мають абсолютно різний сенс. Зокрема, компоненти ς_{ij} не можна одержувати з ε_{ij} шляхом диференціювання за часом.

Таким чином, деформація суцільних середовищ як при підході Лагранжа, так і при підході Ейлера характеризується інваріантними математичними об'єктами - векторами і тензорами 2-го рангу.

Представимо тензор деформацій у вигляді суми кульового тензора і девіатора:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_0 \delta_{ij} + e_{ij}; \qquad \varepsilon_0 = \frac{1}{3}\varepsilon_{ij}\delta_{ij}.$$

Кульовий тензор з компонентами $\varepsilon\delta_{ij}$ характеризує деформацію зміни об'єму в околиці даної матеріальної крапки, а девіатор тензора деформацій з компонентами e_{ij} - деформацію зміни форми.

Аналогічно при використанні підходу Ейлера тензор швидкостей деформацій розбивається на суму кульового тензора і девіатора:

$$\varsigma_{ij} = \varsigma_0 \delta_{ij} + \eta_{ij}; \qquad \varsigma_0 = \frac{1}{3}\varsigma_{ij}\delta_{ij}$$

При побудові моделей пластичного тіла використовуються два перші інваріанти тензорів деформації і тензорів швидкостей деформацій. Як перший (лінійного) інваріант звичайно приймається: середня деформація ε_0 - при підході Лагранжа; швидкість зміни об'єму ς_0 - при підході Ейлера.

Другі (квадратичні) інваріанти найчастіше вибираються у вигляді інтенсивності деформацій:

$$\varepsilon_u = \sqrt{\frac{2}{3}e_{ij}e_{ij}}$$

або інтенсивності деформацій зрушення:

$$\varepsilon_u = \Gamma = \sqrt{2e_{ij}e_{ij}}$$

В рамках підходу Ейлера звичайно використовується, як другий інваріант, інтенсивність швидкостей деформацій зрушення:

$$\varsigma_u = \mathrm{H} = \sqrt{2\varsigma_{ij}\varsigma_{ij}}$$