Лекція 7

КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ПРЕСУВАННЯ ПРОФІЛІВ

Основні рівняння, що описують деформацію металу при пресуванні

Завдання про пресування профілів є одним із завдань теорії обробки металів тиском, що базується на механіці суцільних середовищ. Це означає, що базові рівняння, що описують крайове завдання пресування профілів, не відрізняються від рівнянь більшості інших крайових завдань ОМТ. Особливостями пресування профілів з погляду формулювання крайового завдання можна вважати виражений тривимірний характер формо змінення металу, великі деформації, істотний вплив на деформацію металу теплових процесів у вогнищі деформації. Для повноти викладу приведемо в замкнутому вигляді рівняння і граничні умови, що описують крайове завдання пресування профілів.

Диференціальні рівняння рівноваги (3 рівняння, в яких як невідомі функції входять компоненти тензора напруг σ_{ij}):

$$\sigma_{ij} = 0$$

З урахуванням симетричності тензора напруг, число цих невідомих функцій дорівнює 6. Інерційними навантаженнями в даному випадку нехтуємо.

Співвідношення зв'язку напруженого і деформованого станів (скористаємося теорією пластичного перебігу нестискуваного нелінійно-в'язкого середовища з деформаційним зміцненням):

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij}\sigma_0 + \frac{2T(H,\Lambda,t)}{H}\xi_{ij}$$

де Eij – тензор Кронекера; уij – компоненти тензора швидкості деформації; H – інтенсивність швидкості деформації здвигу; _0 – середня напруга.

Властивості, реологій металу, визначаються при такій постановці завдання тільки залежністю інтенсивності напруг здвигу T від інтенсивності швидкості деформації здвигу H, температури t і величини накопиченої деформації, яка обчислюється за формулою:

$$\Lambda = \int_0^{\tau} H d\tau$$

де _ – час деформації. Основу такого припущення складає гіпотеза єдиної кривої [11, стор. 84-85].

Залежність $T(H,t\Lambda)$ називатимемо кривою, реології матеріалу. Задається вона за наслідками пластометричних випробувань або за літературними даними для конкретного матеріалу і діапазону умов його деформації.

Нелінійність кривої, реології, є серйозною перешкодою для вирішення завдання. При використанні методу кінцевих елементів, а в деяких випадках і методу граничних елементів, для лінеаризації завдання може бути використаний метод гідродинамічних наближень [14], який є аналогом методу січного модуля А.А. Ільюшина стосовно теорії пластичної течії.

У рівняннях зв'язку напруженого і деформованого станів маємо 12 невідомих (компоненти тензорів напруг і швидкостей деформацій), які входять в 6 рівнянь алгебри.

– Рівняння Стоксу, зв’язуючи швидкості перебіг металу Vi і компоненти тензора швидкості деформації уij (6 рівнянь, в які входять 6 компонент тензора швидкості деформації і 3 компоненти вектора швидкості течії):

$$\xi_{ij} = \frac{1}{2}\left(V_{i,j} + V_{j,i}\right)$$

Таким чином, в цілому маємо 15 невідомих функцій й 15 рівнянь, 9 з яких – диференціальні рівняння в приватних похідних.

Окрім основної системи рівнянь є ще ряд наступних умов, яким повинно задовольняти рішення. Умова постійності об'єму:

$$\delta_{ij}\xi_{ij} = 0$$

Граничні умови на поверхні контакту деформуючого інструменту (матриця, внутрішні стінки контейнера, робоча поверхня пуансона) і металу задані у вигляді змішаних умов. У напрямі, нормальному до поверхні контакту швидкість перебігу металу $V_п$ повинна тат рівної швидкості руху інструменту w_n. Цю умову іноді називають умовою непроникності інструменту або умовою обтікання інструменту. Записується воно таким чином:

$$V_n - w_n = 0$$

Інша умова на поверхні контакту металу і деформуючого інструменту пов'язана з дією напруг тертя. Його формулювання розбивається на дві частини, пов'язані з напрямом дії і величиною напруг тертя. У першій частині необхідно забезпечити узгодження напряму швидкості ковзання металу по інструменту V_i і дії напруг тертя у кожній точці контакту. Записується ця умова таким чином:

$$\sigma_{\tau i} = \left|\overrightarrow{\sigma_{\tau}}\right| \frac{\Delta V_i}{\left|\Delta V_i\right|}$$

У тривимірному випадку дана умова не може бути задана в явному вигляді, оскільки швидкість ковзання наперед не відома і підлягає визначенню з рішення. З цієї причини різні автори пропонують алгоритми ітераційного уточнення напряму дії напруги тертя. Ця проблема докладніше буде розглянута далі при рішенні тривимірних задач пресування за допомогою методу кінцевих елементів. У другій частині умови на поверхні контакту у напрямі дії напруг тертя задається їх величина відповідно до використовуваного закону тертя. Дослідження у області моделювання процесів пресування показали, що якнайкращі результати дає використання закону тертя, одержаного з експериментальних досліджень А.Н. Льованова [21]:

$$\sigma_\tau = K_П \left[1 - \exp\left(\frac{1{,}25\sigma_n}{\sigma_S} \right) \right] \tau_S$$

де Кп – константа поверхні; _s – опір металу пластичної деформації на зрушення; _n – нормальна контактна напруга; _s – опір металу пластичної деформації.

Граничні умови на вільних поверхнях задаються в напругах, за відсутності натягнення переднього кінця:

$$\sigma_i = 0$$

При натягненні $\sigma_x = 0$; $\sigma_y = 0$; $\sigma_z = \sigma_{нат}$ (z – напрям пресування).

Строго кажучи, поверхня контакту металу з інструментом і вільна поверхня металу наперед не визначені. При пресуванні профілів це може виявлятися за певних умов у вигляді відходу металу від поверхні робочого поясочка матриці або утворення у тяжини на останній стадії процесу. З цієї причини для визначення, чи знаходиться точка на контакті з деформуючим інструментом, використовують умову відриву – нормальні напруги _*n* на контакті можуть бути такими, що тільки стискають:

_*n* <0

Оскільки умова записана у вигляді нерівності, це породжує певні труднощі, пов'язані з необхідністю додаткового ітераційного процесу по уточненню дійсної поверхні контакту. Вперше той факт, що граничні умови в завданнях ОМТ формулюються у вигляді нерівностей був досліджений В.І. Кузьменко (у тому числі і стосовно процесу пресування [16]).

Крайове завдання пресування профілів має також і варіаційне формулювання. Гідністю її є пониження порядку похідних на одиницю, формулювання завдання у вигляді одного варіаційного принципу, деякі спрощення при задоволенні граничних умов на вільних поверхнях і на поверхнях, на яких задані всі три компоненти швидкості течії. Опускаючи ряд подробиць, істотно важливих для обґрунтування існування варіаційного формулювання, (їх можна знайти в книгах [9]), вкажемо лише один з найбільш поширених варіаційних принципів, вживаних для моделювання пластичної деформації нестискуваних матеріалів – принцип А.А. Маркова:

$$J = \int_V \left(\int_0^H T dH \right) dV + \int_V \sigma_0 \xi_0 dV - \int_F \sigma_\tau v_\tau dF$$

де *v_* – повна швидкість ковзання металу по інструменту; *F* – поверхня контакту інструменту і металу; у$_0$ – швидкість деформації всебічного стиснення. У даному варіаційному принципі рішення шукається виходячи з умови стаціонарності функціонала на полях швидкості перебігу *Vi* і середньої напруги _0.

Формулювання крайового теплового завдання буде дане в розділі, присвяченому температурі пресування. Відзначимо тільки, що результати рішення теплової задачі і завдання визначення формо змінення металу істотно зв'язані між собою через криву, реології матеріалу, виділення тепла пластичної деформації і тепла тертя металу при ковзанні по поверхні інструменту. З цієї причини необхідно вирішувати зв'язану термо-в'язкопластичну задачу.

Основні рівняння моделі теплових процесів при пресуванні

Розглянемо постановку завдання теплопровідності стосовно процесу пресування профілів. Основу її складає рівняння нестаціонарної теплопровідності, записане в наступному вигляді:

$$c_{eff}(t)\rho(t)\frac{dt}{d\tau} = div\left(k(t) grad(t)\right) + q_{def}$$

де &(t) – щільність металу, кг/м^3; *t* – температура (К); τ – час, с; *ρ(t)* – коефіцієнт теплопровідності, Вт/м; $c_{eff}(t)$ – приведена теплоємність (з урахуванням тепла алотропічного перетворення), Дж/кг До; *qrad* – потужність пластичної деформації на одиницю об'єму Вт/М^3:

$$q_{def} = 0{,}9\sigma_u \xi_u$$

Граничні умови задаються відповідно до закону конвективного теплообміну (граничні умови третього роду):

$$q_{conv} = \alpha(t - t_{\infty})$$

де q_{conv} – теплова енергія, яка передається через одиницю поверхні за одиницю часу, Вт/м^2; D – коефіцієнт теплопередачі, Вт/м^{2}К; t_{∞} – температура навколишнього середовища (у разі контакту металу з інструментом – температура поверхні матриці або контейнера).

На контакті металу, що деформується, з інструментом відбувається виділення тепла унаслідок тертя ковзання металу по інструменту. Потужність, що виділяється в цьому випадку у вигляді тепла визначається виразом:

$$q_{fr} = 0{,}9\sigma_{\tau}v_{\tau}$$

При цьому як у разі тепла деформації, так і тепло від тертя ковзання, не вся енергія виділяється у вигляді тепла. Звичайно передбачається, що близько 10% цій енергії переходить в енергію внутрішніх дефектів в металі, а не в теплову енергію. Тепло, що виділяється унаслідок тертя, частково переходить в метал, а частково – в інструмент. Можна приблизно прийняти, що це тепло розподіляється пропорційно абсолютним температурам металу і інструменту в точці їх зіткнення. Таким чином, частина тепла тертя, перехідна в метал запишеться таким чином:

$$q_{fr->met} = \frac{q_{fr}T_{tool}}{T_{met} + T_{tool}}$$

де T_{tool} – абсолютна температура інструменту; T_{met} – абсолютна температура металу в конкретній точці контакту з інструментом.

Постановка завдання теплопровідності при пресуванні можлива у варіаційному формулюванні. При цьому дійсне поле температури повинне задовольняти умові мінімуму наступного функціонала:

$$J = \int_V \left[\frac{k(t)}{2} \left(\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dt}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dt}{dz}\right)^2 \right) - Qt \right] dV + \int_S \frac{\alpha}{2}(t - t_{\infty})^2 dS + \int_S q_{fr\to met} t dS$$

де Q – функція, що враховує додаткові тепловиділення:

$$Q = q_{def} + \frac{dt}{d\tau}$$

Останній член виразу пов'язаний з нестаціонарною теплових процесів. При рішенні теплових задач методом кінцевих елементів або варіаційно-різницевим методом, цей член замінюється кінцево-різним аналогом.

В деяких випадках при рішенні теплової задачі пресування розглядають характерну фазу цього процесу. В цьому випадку похідні за часом пропадають, а в рівнянні теплопровідності і у функціоналі з'являються конвективні члени. Проблеми, що з'являються при такому формулюванні і шляху їх рішення будуть далі розглянуті.