

Лекція 5

ВИБІР ВИМІРЮВАЛЬНОЇ АПАРАТУРИ ТА ОЦІНКА ПОХИБОК ВИМІРУ

5.1 Основні критерії вибору засобів вимірювання

Вибір типа апаратури, вимірювальної схеми і її елементів визначається цілями і умовами проведення експерименту, тобто характером вимірюваних параметрів (статичні або динамічні), необхідною точністю вимірів, часом протікання процесу, швидкістю зміни параметрів, числом одночасно реєстрованих величин, межами їх зміни і ін.

При вимірі і реєстрації статичних величин визначальним чинником є точність засобів вимірів. Для дослідження динамічних процесів первинне значення набуває швидкодія вимірювальної апаратури, тобто діапазон її робочих частот, який повинен перекривати максимальну частоту процесу. Для вимірювальної установки, що включає декілька елементів (датчик, підсилювач, реєструючий прилад), робочий діапазон визначається елементом, що має мінімальний діапазон (межа) робочих частот. Так, для найгрубіших шлейфових гальванометрів верхня межа робочих частот не перевищує 5000-6000 Гц, а для найвідчутливіших - 10...60 Гц.

Робочий діапазон частот в установках, зібраних за безпідсилювальними схемами, обмежений найчастіше частотною характеристикою шлейфів, а в підсилювальних схемах - несучою частотою (при роботі на змінному струмі). В деяких випадках лімітуючою виступає власна частота коливань чутливих елементів датчиків.

Таким чином, для правильного вибору засобів вимірів - датчиків, підсилювачів, реєструючих приладів - потрібно знати частотний діапазон, спектр частот або хоч би максимальну частоту досліджуваного процесу.

Вибираючи апаратуру, потрібно погоджувати опори входу і виходу елементів вимірювальної установки. Це особливо важливо при виборі

гальванометрів для шлейфових осцилографів, для яких узгодження вихідного опору вимірювального тракту з опором гальванометра важливе і з точки зору демпфування.

З випадкових (невраховуваних) чинників на точність виміру впливають ті, які приводять до нестабільності параметрів вимірювальної системи:

1) неоднорідність деформованого стану пружних елементів датчиків при навантаженні (ця неоднорідність обумовлена конструкцією і співвідношенням розмірів пружного елементу, а також додатковою напругою від перекосу, вигину, скручування і т. п.);

2) коливання напруги живлення вимірювального ланцюга;

3) нестабільність характеристик підсилювача (зміна чутливості, дрейф нуля і т. д.);

4) наведення від зовнішніх електромагнітних полів, вплив паразитних ємкостей і пр.;

5) випадкові струси, вібрація реєструючих приладів (цей чинник особливо впливаючий для осцилографів з чутливими шлейфами).

Врахувати заздалегідь вплив випадкових чинників при вимірах практично не можливо. Проте, маючи в своєму розпорядженні відповідні дослідні дані і користуючись методами математичної статистики, міру впливу цих чинників на точність виміру можна прогнозувати.

При виборі засобу вимірів слід завжди мати на увазі, що точність вимірювального приладу і точність результату вимірів - не одне і теж саме. Точність результату можна підвищити за рахунок збільшення числа повторних вимірів одного і того ж параметра. Враховуючи, що підвищення точності засобу вимірів, як правило, пов'язане із збільшенням його вартості, слід в розумних межах розміряти точність засобу вимірів з кількістю випробувань. Потрібно прагнути використовувати по можливості недороге устаткування, прилади потрібної, а не завищеної точності, робити стільки відліків, скільки потрібно для досягнення заданої точності вимірюваної величини. Невиправдане використання приладів високої точності,

планування завищеної кількості випробувань ведуть до зайвих матеріальних витрат і знижують ефективність досліджень.

5.2. Визначення максимальної частоти процесу

Зміна в часі таких параметрів, як сила, тиск, швидкість деформації і ін., є складним динамічним або стато-динамічним процесом, що характеризується періодичним графіком. Всякий складний періодичний процес можна представити сумою синусоїдальних складових, розклавши його в ряд Фур'є. В разі одиничного або аперіодичного процесу розкладання на складові проводять за допомогою інтеграла Фур'є.

Розкладання процесу на постійну і ряд гармонійних складових дає можливість представити реєстрацію складного процесу вимірювальним приладом у вигляді реакції приладу на кожну із складових. При гармонійному аналізі функцію $x=x(t)$, що описує періодичний графік, представляють у вигляді тригонометричного ряду Фур'є, що складається з постійної $a_0/2$ і нескінченної суми гармонік:

$$x(t) = a_0/2 + \sum_{z \rightarrow 1}^{\infty} a_z \sin(z\omega_0 t + \phi_z), \quad (5.1)$$

де $\omega_0 = 2\pi/T_0$; $T_0 = 1/n_0$ - період процесу; z - порядковий номер гармоніки. Амплітуда a_z і фаза ϕ_z гармонік визначаються формулами

$$a_z = \frac{2}{T_0} \sqrt{\left(\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t) \cos z\omega_0 t dt \right)^2 + \left(\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t) \sin z\omega_0 t dt \right)^2};$$

$$\phi = \frac{\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t) \sin z\omega_0 t dt}{\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t) \cos z\omega_0 t dt}. \quad (5.2)$$

(5.3)

Постійна складова $a_0/2$, яка є середнім значенням функції $x(t)$ за період T_0 ,

$$a_0/2 = \left(1/T_0\right) \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t) dt. \quad (5.4)$$

В теорії рядів Фур'є доводиться, що із збільшенням z амплітуди гармонік зменшуються до нуля. Отже, процес $x(t)$ з деяким наближенням можна описати кінцевою сумою гармонік. Вважається, що процес досить точно описується такою сумою, в якій остання гармоніка, що враховується, має амплітуду, приблизно в 10 разів меншу амплітуди першої, основної гармоніки з частотою ω_0 . Частоту останньої гармоніки, що враховується, називають максимальною частотою процесу. Таким чином, для визначення максимальної частоти періодичного процесу досить досліджувати залежність амплітуд гармонік від частоти.

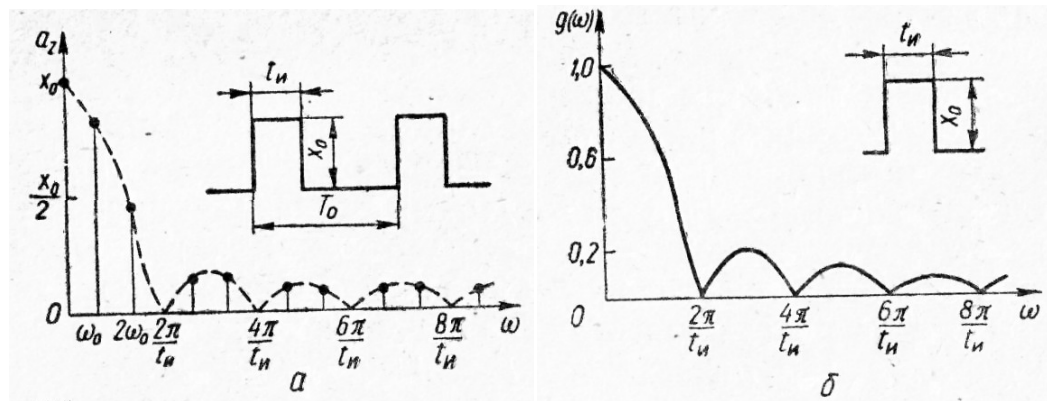


Рис.5.1 Спектри графіків: *a* - періодичної функції; *б* - одиничного імпульсу.

Для прямокутного імпульсу, до якого близькі параметри графіків прокатки і деяких інших процесів ОМТ, залежність a_z від частоти $z\omega_0$ має вигляд:

$$a_z = \frac{2x_0t_u}{T_0} \left| \frac{\sin(z\omega_0t_u/2)}{z\omega_0t_u/2} \right|, \quad (5.5)$$

де x_0 , t_u , T_0 - відповідно амплітуда, тривалість і період імпульсу.

На рис.5.1, *a* приведений графік залежності a_z від частоти $\omega = z\omega_0$ при $t_u/T_0 = 1/3$. На частотах, що задовольняють умові $\omega t_u/2 = k\pi$ ($k=1, 2, 3, \dots$), a_z

На рис.5.1, б приведена залежність

$$g(\omega) = \frac{S(\omega)}{S(0)} = \left| \frac{\sin(\omega t_u/2)}{\omega t_u/2} \right|. \quad (5.15)$$

Функція $g(\omega)$ називається *нормованою спектральною щільністю*. В даному випадку максимальна частота процесу - частота, при якій $g(\omega) = 0,1$. З рис.5.1, б видно, що при $\omega > 6\pi/t_u$ функція $g(\omega) < 0,1$. Отже, максимальну частоту процесу вигляду одиночного прямокутного імпульсу тривалістю t_u можна прийняти рівною $\omega_{\max} = 6\pi/t_u$, або

$$n_{\max} = \omega_{\max}/2\pi = 3/t_u \quad (5.16)$$

Для процесів з формою імпульсу, що відрізняється від прямокутної, наприклад трапецеїдальною, $n_{\max} = 3/t_u$. Тому незалежно від форми графіка максимальну частоту процесу з деяким запасом можна визначати по формулі (5.16).

5.3 Вибір несучої частоти тензометричної апаратури

Як уже згадувалося, точність реєстрації вимірюваного процесу залежить від несучої частоти апаратури $n_{\text{нес}}$, яка знаходиться в певному співвідношенні з максимальною частотою процесу $n_{\text{пр}}$:

$$m = n_{\text{нес}}/n_{\text{пр}}. \quad (5.17)$$

Відношення m визначає смугу пропускання вимірювального тракту, що забезпечує передачу результату виміру з допустимими спотвореннями. Отже, раціональний вибір цієї величини - найважливіша умова правильного виміру того або іншого механічного параметра за допомогою stato-динамічної апаратури.

Рекомендацій по раціональному вибору величини m в технічній літературі багато, причому, за даними різних джерел, ця величина змінюється у вельми широких межах (від 2 до 30). В більшості випадків при розрахунку нової і виборі наявної тензометричної апаратури величину m приймають рівною 10 по аналогії з механікою, де таке ж відношення вибирають, вивчаючи вимушені коливання в лінійних системах, або по аналогії з

радіотехнікою, де для створення поля випромінювання використовують високочастотні коливання, що модулюються коливаннями низької частоти.

Серйозного теоретичного обґрунтування вибору величини m в технічній літературі немає. Деякі автори пов'язують вибір цієї величини з відношенням між поляризуючою і робочою напругою фазочутливого пристрою (ФЧУ), що обумовлює здобуття мінімальних спотворень на виході мостової схеми апаратури.

Прийнявши рівняння ідеальної фазової характеристики апаратури у вигляді:

$$(d\varphi/dn) \operatorname{tg} \varphi_0 = t_{\text{зан}} = \text{const}, \quad (5.18)$$

рівняння реальної фазової характеристики цієї апаратури можна записати таким чином:

$$\varphi(\omega) = (2/\pi) \operatorname{arth} (1/m) = (2/\pi m) (1 + 1/3m^2 + 1/5m^4 + \dots) \quad (5.19)$$

де $t_{\text{зан}}$ – час запізнювання сигналу при проходженні ним вимірювального тракту; φ – кут нахилу характеристики до осі абсцис.

Вираз в останніх дужках φ характеризує фазову похибку установки Δ_φ як міру відхилення реальної фазової характеристики від лінійної.

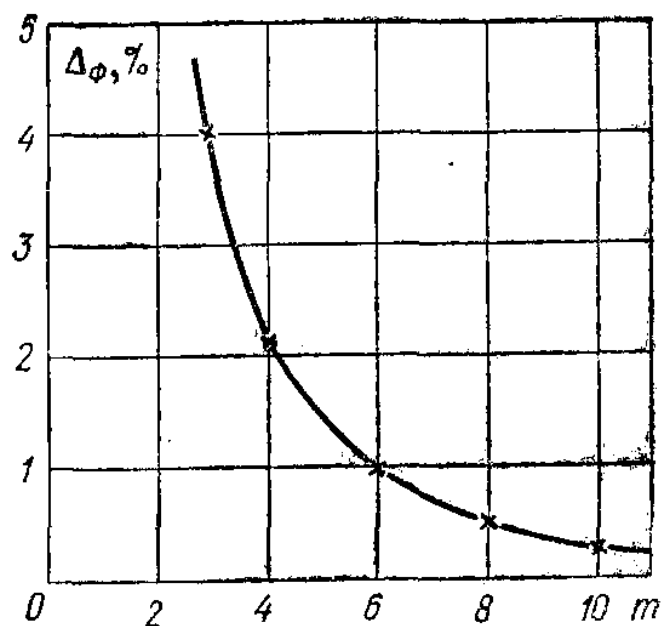


Рис.5.2 Графік залежності фазової погрішності від відношення частот m .

За результатами підрахунків будують графік залежності $\Delta_{\phi} = f(m)$, що дозволяє раціонально вибрати величину m (рис.5.2). Як видно, нижче 4 значення m вибирати не слід, оскільки при цьому різко зростає Δ_{ϕ} , вище 8 приймати m теж недоцільно, оскільки в цьому випадку спостерігається порівняно невелике зниження фазової похибки.

Вибираючи m , слід мати на увазі і останні похибки як самої апаратури, так і результатів вимірів.

5.4 Класифікація похибок виміру

В результаті спостережень фіксуються кількісні ознаки основних чинників. Реальний результат експерименту - завжди випадкова величина і відрізняється від дійсного значення. Це відхилення називається *похибкою спостереження*, яка також випадкова величина.

Розрізняють два поняття - похибка вимірювального приладу і похибка результату вимірів. *Похибка вимірювального приладу* залежить від недосконалості самого приладу. *Похибка результату вимірів* визначається не лише похибкою конкретного вимірювального приладу, але і впливом багаточисельних зовнішніх чинників і в значній мірі кваліфікацією оператора.

Поява похибок виміру викликається різними причинами, наприклад наближеністю рівнянь, покладених в основу побудови приладу, його зносом, неправильною установкою, змінами параметрів довкілля, недосвідченістю або психофізичним станом оператора і так далі. Всі ці причини прийнято називати *джерелами похибок*. Аналізуючи вплив перерахованих чинників на результат виміру, похибки можна розділити на три види - систематичні, випадкові і промахи.

Систематичні похибки ділять на групи унаслідок їх виникнення і характеру прояву.

Унаслідок виникнення розрізняють похибки установки, інструментальні, похибки методу і особисті. Похибками установки називають похибки, що виникають при відхиленні просторового положення приладу від нормального, а також при зміні зовнішніх умов (тиску, вологості, температури, зовнішніх електричних і магнітних полів). Інструментальними називають похибки, визначувані конструктивними, технологічними або схемними недоліками приладу або установки. До похибок методу, або теоретичним, відносять похибки, які викликаються, наприклад, недостатньою розробкою методу або побудовою методу на основі наближених закономірностей і формул. Особистими називають похибки, визначувані індивідуальними особливостями оператора і його психофізичним станом.

По *характеру прояву* систематичні похибки поділяють на постійні і змінні. Постійними називають похибки, що не міняють свого знаку і величини протягом всього процесу виміру, наприклад похибки від неправильного градуювання шкали, неточності підгонки плечей дільника напруги. У досвідчених операторів постійний знак і значення мають також особисті похибок. Змінні можна розділити на похибки прогресивні, періодичні і змінні по складному закону. Прогресивні - це похибки, які під час процесу безперервно або збільшуються, або зменшуються. Наприклад, похибки вимірювального моста з батарейним живленням, яка безперервно зростає у міру розрядки батарей живлення. Періодичні - це похибки, що періодично міняють свої значення і знак. Наприклад, похибка осцилографічного індикатора з круговою розгорткою, в якого центр відлікового пристрою не збігається з центром розгортки. Похибки, що змінюються по складному закону, - це похибки вимірювальних приладів, визначувані неточністю нанесення відміток на шкалі.

Випадковими називають похибки, поява яких викликана сукупною дією декількох впливаючих (дестабілізуючих) чинників. Їх функціональний зв'язок з джерелом похибок не можна виявити із-за їх невідомості і великої кількості.

Промахи найчастіше виникають як результат неправильної дії оператора (невірний відлік, помилки в запису, помилкове включення приладів). До промахів відносяться також грубі похибки, тобто похибки виміру, що істотно перевищують очікувану в даних випадках похибку. Промахи виявляють при обробці експериментальних даних.

Класифікація погрішностей не обмежується розглянутими видами. Так, залежно від характеру вимірюваної величини погрішності бувають статичними й динамічними, за способом здобуття результату вимірів розрізняють погрішності прямих і непрямих вимірів і так далі.

5.5 Методи виключення систематичних погрішностей

Систематичні погрішності вимірювальних установок проаналізовані в розділі 3. Детермінований характер такої погрішності дозволяє успішно виключати її з результату вимірів.

Для виключення систематичних погрішностей використовують схемні і конструктивні прийоми (зокрема, див. родіп 2), які реалізуються в процесі проектування і виготовлення вимірювальної апаратури, а також методичні прийоми, пов'язані з оптимальною організацією вимірювального експерименту і обробкою даних. Систематичні погрішності будь-якого вигляду представляють найбільшу небезпеку в тих випадках, коли про їх існування дослідник не підозрює або має обмежену інформацію. Аби виявити систематичну погрішність, рекомендується вимірювати еталонні значення вхідної величини і зіставляти результати з дійсними значеннями.

Для виключення впливу систематичних погрішностей на результат виміру застосовують методи поправок, заміщення і компенсації погрішностей по знаку.

Метод поправок базується на результатах попереднього експерименту, в якому досліджуються дії зовнішніх чинників (температури, тиску, вологості, магнітних і електричних полів і т. п.). За результатами цього

експерименту отримують поправочні формули, будують графіки або таблиці поправок, використовувані згодом при експлуатації приладів.

Метод заміщення застосовують при вимірі, наприклад, механічних величин за допомогою ємкісних і індуктивних датчиків. Для оцінки впливу ємкості на землю, ємкостей і індуктивностей дротів у вимірювальний ланцюг замість датчика включають зразкову ємкість або індуктивність.

Метод компенсації похибок по знаку полягає в такій постановці дослідів, при якій погрішність якого-небудь джерела входить в результат виміру один раз із знаком плюс, а інший - із знаком мінус. Наприклад, відомо, що при калібруванні термоамперметрів на постійному струмі виникає систематична похибка, визначувана ефектом Пельтьє. При проходженні струму I_X через підігрівач термопари - вона розвиває термо-е.д.с.

$$e_{t^{\circ}} = k_1 I_X^2 \pm k_2 I_X, \quad (5.20)$$

де k_1 і k_2 - постійні коефіцієнти, а знаки $\pm$ визначаються напрямом струму I_X у підігрівачі.

Визначивши значення термо-е.д.с. $e'_{t^{\circ}}$ і $e''_{t^{\circ}}$, відповідні різним напрямам струму I_X , і узявши середньоарифметичне їх значення, знаходять дійсне значення $e_{t^{\circ}}$. Похибка, визначувана другим членом рівняння (5.20), повністю компенсуватиметься. Розглянутий метод відомий також під назвою методу двократного виміру.

Для виключення прогресивної похибки, що збільшується або зменшується пропорційно часу, застосовують метод, *симетричних спостережень*, який полягає в наступному. Беруть напіврізницю значень вимірюваної величини при першому і останньому вимірі, ділять її на число вимірів без одиниці і отримане число вносять як поправку в значення вимірюваної величини при визначенні результату другого виміру, подвоєне число - в результат третього виміру, потрійне - в результат четвертого і так далі. Цей метод зручний, наприклад, для вимірювальних пристроїв, що живляться безпосередньо від акумулятора.

Ефективним способом виключення періодичних інструментальних похибок або змінних по складному закону є складання поправочних таблиць або графіків на підставі результатів експериментального вивчення залежності свідчення приладу від зміни зовнішніх умов і інших причин (див. далі).

5.6 Методика оцінки випадкових похибок

Вимірюючи будь-яку фізичну величину, не можна визначити дійсне її значення (навіть при ідеальному виключенні систематичних похибок) із-за неминучої появи в деяких результатах виміру малих відхилень, що змінюються по знаку і абсолютному значенню випадковим чином. Ці малі відхилення, що викликаються дією багаточисельних зовнішніх чинників, вплив яких практично врахувати неможливо, в метрології називають *випадковими похибками*. Абсолютні значення і знак цих похибок підкоряються імовірнісним законам.

При обробці результатів виміру безперервних фізичних величин найчастіше використовують нормальний закон розподілу щільності вірогідності (закон Гауса), який записують у вигляді співвідношення

$$y = \left(\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \right) \exp \left[-\frac{\delta^2}{2\sigma^2} \right], \quad (5.21)$$

де δ – значення випадкової похибки; $\sigma = \sqrt{\sum \delta_i^2 / n}$ – середньоквадратичне відхилення декількох вимірів; n – число вимірів; y – щільність вірогідності для певного значення δ .

Як бачимо, y швидко убуває із збільшенням δ . Так, похибка $\delta > 4\sigma$ з'являється лише один раз на 15625 вимірів, тобто дуже великі похибки маловірогідні; похибка $\delta > 3\sigma$ з'являється один раз на 370 вимірів, а похибка $\delta > 2\sigma$ – один раз на 22 виміри.

У теоретичному рівнянні (5.21) значення δ , рівне різниці між результатом одного виміру і дійсним значенням вимірюваної величини x , невідомо, оскільки безпосередньо визначити дійсне значення x неможливо. З

цієї ж причини не можна підрахувати і σ . Тому для використання рівняння (5.21) потрібно прийняти якесь припущення про дійсне значення вимірюваної величини.

У літературі по теорії обробки результатів спостережень для усунення невизначеності значень δ і σ рекомендується за найбільш вірогідне значення вимірюваної величини x приймати таке її значення L , при якому сума квадратів абсолютних погрешностей мінімальна.

Нехай проведено n вимірів величини x і набуті значень $l_1, l_2, l_3, \dots, l_n$. Тоді вирази для окремих абсолютних погрешностей в припущенні, що систематичні погрешності виключені, запишуться так:

$$\delta_1 = l_1 - x; \delta_2 = l_2 - x; \dots; \delta_n = l_n - x \quad (5.22)$$

Склавши вирази для суми δ_i і прирівнявши до нуля його першу похідну по x , отримаємо вираз для L як найбільш вірогідного значення x :

$$L = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n l_i = x_{cp}. \quad (5.23)$$

Таким чином, найбільш вірогідним значенням вимірюваної величини буде середньоарифметичне декількох її вимірів. Тому термін «випадкова похибка», замінюють терміном «випадкове відхилення», під яким розуміють різницю:

$$\rho_i = l_i - x_{cp}. \quad (5.24)$$

При чималому числі вимірів середньоарифметичне прагне до дійсного значення вимірюваної величини, а випадкові відхилення ρ_i – до відповідних випадкових похибок δ_i .

Тепер для визначення точності n вимірів обчислюють оцінку S значення σ по відомій формулі Бесселя:

$$S = \sqrt{\sum_{i=1}^n \rho_i^2 / (n-1)}. \quad (5.25)$$

Зрештою серії вимірів має бути отримане число, що визначає значення вимірюваної величини, і вказана міра його достовірності, тобто має бути

отриманий результат виміру. Але в цій серії з n спостережень середньоарифметичне x_{cp} - лінійна функція результатів окремих спостережень $l_1, l_2, \dots, l_n$. Якщо ж провести нову серію з n спостережень, то із-за впливу випадкових причин значення U відрізнятимуться від отриманих в першій серії. Отже, і нове значення x_{cp} буде іншим. Таким чином, число x_{cp} , отримане в одній серії спостережень, є випадковим наближенням до дійсного значення x . Тому аби мати уявлення про можливі відхилення x_{cp} від дійсного значення x , потрібно визначити його середньо квадратичного відхилення.

Оскільки результати окремих вимірів є взаємозалежними випадковими величинами, та використання теореми про дисперсію D лінійної функції таких величин дозволяє записати:

$$D(x) = \sum_{i=1}^n D(x_i) / n^2. \quad (5.26)$$

Рівноточність декількох вимірів передбачає рівність всіх окремих $D(x_i) = \sigma^2 \approx S^2$. Отже,

$$D(x_{cp}) = n\sigma^2 / n^2 = \sigma^2 / n \approx S^2 / n = \left[\sum_{i=1}^n \rho_i^2 / n(n-1) \right], \quad (5.27)$$

а тоді оцінка Δ^o середньоквадратичної погрішності x_{cp} , тобто результату виміру:

$$\Delta^o = \sqrt{D(x_{cp})} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \approx \frac{S}{\sqrt{n}} = \left[\sum_{i=1}^n \rho_i^2 / n(n-1) \right]^{1/2}. \quad (5.28)$$

По визначених таким чином значеннях x_{cp} и Δ^o можна записати і кінцевий результат виміру формою, рекомендованою ГОСТ 8.011-72: $L; \Delta$; від Δ_n до Δ_v ; P_d , де L - результат виміру в одиницях вимірюваної величини x , рівний x_{cp} ; Δ , Δ_n , Δ_v - відповідно похибка виміру, нижня і верхня її межі (межі довірчого інтервалу); P_d - встановлена вірогідність, з якою похибка виміру знаходиться в межах цих інтервалів (довірча вірогідність):

$$P_d = P [(x_{cp} - \Delta_n) < x < (x_{cp} + \Delta_v)]. \quad (5.29)$$

Величини Δ_n і Δ_v найчастіше мають однакові значення, і залежно від встановленої P_d їх приймають рівними Δ^o , $2\Delta^o$ або $3\Delta^o$. Результати окремих

спостережень, що виходять за межі довірчого інтервалу, відносять до промахів.

Всі перераховані співвідношення справедливі лише стосовно рівноточних вимірів. Проте часто доводиться визначати значення вимірюваної величини по декількох результатах вимірів різної точності, наприклад виконаних за допомогою різних приладів. Тоді за найбільш вірогідне значення вимірюваної величини слід приймати середньозважене:

$$L_{cp} = \frac{L_1 p_1 + L_2 p_2 + \dots + L_i p_i}{p_1 + p_2 + \dots + p_i}, \quad (5.30)$$

де L_i - окремі виміри; p_i - їх ваги, що є мірою довіри до кожного результату виміру.

Вибирати значення p_i можна різними способами. Найчастіше критерієм служить значення середньоквадратичного відхилення. В цьому випадку ваги p_i встановлюють обернено пропорційно до квадратів відхилень. Можна за критерій прийняти чутливість приладу або методу. Наприклад, якщо чутливість одного приладу удвічі вища іншого, то вазі результату виміру першим приладом p_1 надається удвічі більше значення, чим p_2 .

5.7 Обчислення погрішності непрямих вимірів

Як зазначалось, за найбільш вірогідне значення вимірюваної величини слід приймати середньоарифметичне з результатів декількох вимірів. Тому найбільш достовірним результат непрямих вимірів вийде, якщо в залежність, вимірювану величину, що зв'язує побічно, з величинами, вимірюваними прямим методом, підставити середньоарифметичні значення, отримані при прямих вимірах. Отже, погрішність непрямого виміру визначається похибками результатів кожного прямого виміру.

Нехай побічно вимірювана величина y пов'язана з величинами $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, вимірюваними прямим способом, деякою функціональною залежністю:

$$y = F(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n). \quad (5.31)$$

Похибка виміру завжди істотно менше самої вимірюваної величини. Отже, функцію F можна з високою мірою точності представити розкладанням в околиці точки з координатами $x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}$ у ряд Тейлора, в якому враховані лише члени першого ступеня:

$$y = F(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}) + \sum_{i=1}^n \left(\partial F / \partial x_i \right) dx_i, \quad (5.32)$$

де x_{0i} - середньоарифметичні значення прямо вимірюваних величин. Дисперсію суми випадкових величин x_i записують співвідношенням:

$$D \left[\sum_{i=1}^n k_i x_i \right] = \sum_{i=1}^n k_i^2 D(x_i) + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_i k_j k_{ij}, \quad (5.33)$$

де k_i, k_j - не випадкові числа; $D(x_i)$ - дисперсія величини x_i ; k_{ij} - кореляційний момент величин x_i, x_j .

Тепер, користуючись співвідношенням (5.33), можна записати формулу для оцінки Δ_y^0 випадковій погрішності побічно вимірюваної величини y :

$$\Delta_y^0 = \left[\sum_{i=1}^n \left(\partial F / \partial x_i \right)^2 D(x_i) + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\partial F / \partial x_i \right) \left(\partial F / \partial x_j \right) k_{ij} \right]^{1/2} \approx \left[\sum_{i=1}^n \left(\partial F / \partial x_i \right)^2 \Delta_{xi}^0{}^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\partial F / \partial x_i \right) \left(\partial F / \partial x_j \right) r_{ij} \Delta_{xi}^0 \Delta_{xj}^0 \right]^{1/2}, \quad (5.34)$$

де r_{ij} - коефіцієнт кореляції величин x_i, x_j , $\partial F / \partial$ - так звані коефіцієнти впливу.

Якщо прямо вимірювані величини x_i, x_j не корельовані, то формула (5.34) декілька спрощується:

$$\Delta_y^0 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left[\left(\partial F / \partial x_i \right) \Delta_{xi}^0 \right]^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n A_i^2}. \quad (5.35)$$

Доданки $A_i = (\partial F / \partial x_i) \Delta_{xi}^0$ часто називають частковими похибками побічно вимірюваної величини y .

Формули (5.34), (5.35) застосовують для визначення випадкової погрішності непрямого "виміру в припущенні, що систематичні похибки

усунені або враховані раніше тим або іншим способом. За наявності в результатах прямо вимірюваних величин x_i систематичних похибок Δ_{xic} загальну систематичну похибку непрямого виміру Δ_{yc} обчислюють за формулою:

$$\Delta_{yc} = \sum_{i=1}^n \left(\partial y / \partial x_i \right) \Delta_{xic} \quad (5.36)$$

або для відносної похибки:

$$\gamma_{yc} = \Delta_{yc} / y = \sum_{i=1}^n \left(\partial y / \partial x_i \right) \Delta_{xic} / F(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (5.37)$$

Отримання робочої формули відповідно до (5.37) інколи пов'язано з громіздкими перетвореннями. Їх можна істотно спростити для випадків, коли функція, що зв'язує y і x , логарифмується. Якщо ж вихідна функція нелогарифмуєма безпосередньо, слід або перетворити її до вигляду, зручного для логарифмування, або вивести робочу формулу (5.37).