Вступ

1. Все зростаюче різноманіття і відповідальність задач по передачі і зберіганню інформації приводить до постійного ускладнення систем. Але чим складніші ці системи, тим вони менш надійні. Основними шляхами розв’язання цієї суперечності є:

- підвищення надійності елементів;
- побудова надійних систем (кібернетичних), що складаються з ненадійних елементів.
- Розробка систем контролю, сигналізації і пошуку відмов.
- Розробка методів обслуговування складних систем і введення структурної і інформаційної надмірності. Істотну роль при цьому виконує розробка нових математичних методів дослідження надійності систем.

Основними методами дослідження надійності систем є методи:

- теорії ймовірності;
- математичної статистики.

Широке застосування знаходять методи теорії інформації, теорії відновлення і масового обслуговування і методи статистичного моделювання.

Перспективним є застосування теорії марківських процесів, а також теорії старіючих елементів.

Разом з тим виникали нові напрями досліджень:

- пошук принципово нових способів підвищення надійності;
- прогнозування відмов і прогнозування надійності;
- аналіз фізико-хімічних процесів, впливають на надійність, встановлення кількісних зв'язків між характеристиками цих процесів і показниками надійності;
- вдосконалення методів розрахунку надійності виробів, що мають все більш складну структуру, з урахуванням все більшого числа діючих чинників (достовірність початкових даних, контроль і профілактика, умови роботи і обслуговування і т.д.).

Випробування на надійність удосконалювалися головним чином у напрямі проведення прискорених і не руйнуючих випробувань.

Разом з вдосконаленням натурних випробувань широке поширення набули математичне моделювання і поєднання натурних випробувань з моделюванням.

В результаті до 50-х років XX ст. сформувалися основи загальної теорії надійності і її часткових напрямів по окремих видах техніки.

Увесь час збільшується складність технічних пристроїв; зростає кількість функцій, які виконують технічні пристрої; підвищуються вимоги до якості виробів і умов їх роботи; збільшена роль автоматизації, яка спрощує можливість безперервного спостереження за станом пристрою. Вусі ці чинники визначили головні напрями в розвитку науки про надійність.

Технічні засоби і умови їх роботи стають все більш складними.

Кількість елементів в окремих видах пристроїв обчислюється сотнями тисяч. Якщо не вживати спеціальних заходів по забезпеченню надійності, то будь-який сучасний складний пристрій практично буде непрацездатним. Так, наприклад, в сучасних ЕОМ середньої продуктивності за 1 сек. відбувається близько 5 млн. і більше змін станів в результаті перемикань її двійкових елементів, число яких досягає декількох десятків тисяч. За 5 годин безперервної роботи ЕОМ, що вимагаються на рішення типової задачі, відбувається понад 1012-1014 змін станів машини. Вірогідність виникнення хоча б однієї відмови при цьому стає достатньо великою, а, отже, необхідні спеціальні заходи, що забезпечують працездатність ЕОМ.

Технічним засобам відводять все більш відповідальні функції на виробництві і у сфері управління.

Відмова технічного пристрою часто може привести до катастрофічних наслідків. Надійність в епоху науково-технічних революцій стала найважливішою проблемою.

Розділ 1

Тема 1 Теорія надійності. Оцінка надійності систем

План теми

1 Теоретична частина
2 Надійність виробу
3 Основні поняття
4 Характеристики безвідмовності
5 Зв'язок між функцією P(t) і інтенсивністю відмов λ(t)
6 Числові характеристики безвідмовності
7 Характеристика ремонтопридатності
8 Вірогідність виконання ремонту в заданий час
9 Густина вірогідності часу відновлення і інтенсивності відновлення
10 Числові характеристики ремонтопридатності
11 Характеристики готовності

1 Теоретична частина.

Надійність це наукова дисципліна, в якій розробляються і вивчаються методи забезпечення ефективності роботи об'єктів (виробів, пристроїв, систем і т.п.) в процесі експлуатації.

У теорію надійності вводяться показники надійності об'єктів, обґрунтовуються вимоги до надійності з урахуванням економічних і інших чинників, розробляються рекомендації по забезпеченню заданих вимог до надійності на етапах:

- проектування;
- виробництва;
- зберігання;
- експлуатації.

Кількісні показники надійності в теорії надійності вводять на основі побудови математичних моделей даних об'єктів. У теорії надійності використовуються різноманітні математичні методи; особливе місце займають методи теорії ймовірності і математичної статистики. Це пов'язано з тим, що події, що описують показники надійності (моменти появи відмов, тривалість ремонту і т.д.), часто є випадковими. Для розрахунку вірогідності безвідмовної роботи об'єкту протягом деякого часу використовуються аналітичні методи теорії випадкових процесів, теорії масового обслуговування.

Аналітичні методи розрахунку надійності поєднуються з методами моделювання на ПЕВМ.

2 Надійність виробу

Це властивість виробу зберігати значення встановлених параметрів функціонування в певних межах, відповідних заданим режимам і умовам експлуатації, технічного обслуговування, зберігання і транспортування.

Надійність – комплексна властивість, яка залежно від призначення виробу і умов його експлуатації може включати:

- безпека;
- довговічність;
- ремонтопридатність;
- зберігаємість.

окремо або певне поєднання цих властивостей як виробу в цілому, так і його частин.

Основне поняття, використовуване в теорії надійності, – поняття відмови, тобто втрати працездатності, що наступає або раптово, або поступово.

Працездатність – такий стан виробу, при якому він відповідає всім вимогам, що пред'являються до його основних параметрів.

До числа основних параметрів виробу відносяться: швидкодія, характеристика навантаження, стійкість, точність виконання виробничих операцій і т.д.

Разом з іншими показниками (маса, габарити, зручність обслуговування і ін.) вони складають комплекс показників якості виробу.

Показники якості можуть змінюватися з часом, що може привести до виникнення відмовного стану.

Показники надійності не можна протиставляти іншим показникам якості: без урахування надійності всі інші показники якості виробу втрачають своє значення, так само і показники надійності стають повноцінними показниками якості лише в поєднанні з іншими характеристиками виробу.

Поняття надійності виробу давно використовується в інженерній практиці. Будь-які технічні пристрої – машини, інструменти або пристосування – завжди виготовлялися з розрахунку на деякий достатній для практичних цілей період використовування.

Проте довгий час надійність не вимірювалася кількісно, що значно ускладнювало її об'єктивну оцінку.

Для оцінки надійності використовувалися такі поняття, як висока надійність, низька надійність і інші якісні визначення.

Встановлення кількісних показників надійності і способів їх вимірювання і розрахунку поклало початок науковим методам в дослідженні надійності

На перших етапах розвитку теорії надійності основна увага зосереджувалась на зборі і обробці статистичних даних про відмови виробів.

У оцінці надійності переважав характер констатації ступеня надійності на підставі цих статистичних даних.

Розвиток теорії надійності супроводжувався вдосконаленням методів статистичних досліджень:

- визначення законів розподілу напрацювання до відмови;
- розробка методів розрахунку випробувань виробів з урахуванням випадкового характеру відмов і т.п.

3 Основні поняття

Основні терміни надійності об'єктів встановлені ГОСТ 13377-75 (під об'єктом розуміють системи і їх елементи):

1. Надійність – властивість об'єкту виконувати задані функції, зберігаючи в часі значення встановлених експлуатаційних показників в заданих межах, відповідних заданим режимам і умовам використовування, технічного обслуговування, ремонтів, зберігання і транспортування.
2. Напрацювання – тривалість або об'єм роботи об'єкту.

3. Працездатність – стан об'єкту, при якому він здатний виконувати задані функції, зберігати значення заданих параметрів в межах, встановлених нормативно-технічною документацією.
4. Відмова – подія, що полягає в порушенні працездатності об'єкту.
5. Безвідмовність – властивість об'єкту безперервно зберігати працездатність протягом деякого часу або деякого напрацювання.
6. Ремонтопридатність – властивість об'єкту, що полягає у пристосованості до попередження і виявлення причин виникнення його відмов, пошкодженні і усуненню їх наслідків шляхом проведення ремонтів і технічного обслуговування.
7. Несправність – стан об'єкту, при якому він не відповідає хоча б одній з вимог, встановлених нормативно-технічною документацією.

Надалі ми розглянемо надійність систем (елементів) які можуть бути тільки в двох станах: працездатному і непрацездатному. Перший стан називають також справним, або безвідмовним, а другий – несправним або станом відмови.

4 Характеристики безвідмовності

Вірогідність безвідмовної роботи.

Ця характеристика є однією з поширених кількісних характеристик надійності виробу. Згідно ГОСТ 13377-75, вірогідність безвідмовної роботи P(t) – вірогідність того, що в межах заданого напрацювання відмова об'єкту не виникає.

Ця вірогідність для даного інтервалу (0,t) визначається формулою

$$P(0, t) = P(t) = P(T \geq t),$$

де T – випадкова величина – інтервал часу від початку роботи до першої відмови (тобто час безвідмовної роботи);

P(t) – скорочене позначення для P(0,t)

Вірогідність відмови виробу, тобто вірогідність протилежної події ($T<t$) визначається формулою

$$q(t)= 1 – P(t)= P(T<t)$$

Функція q(t) є функцією розподілу (інтегральний закон розподілу) випадкової величини T.

Види функцій P(t) і q(t) залежать внутрішніх властивостей об'єкту і умов його роботи. При цьому функція P(t) є не зростаючою функцією часу і P(t)> 0 при t > ∞. Графіки функції P(t) і q(t) показані нижче

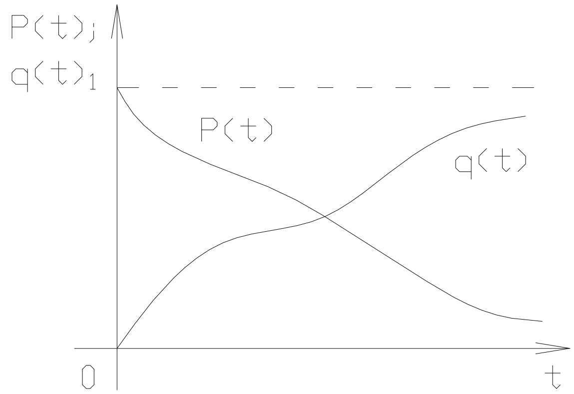

Рис. 1 Графіки функцій P(t) і q(t)

Функція P(t) даного об'єкту може бути знайдена за формулою для оцінки вірогідності події

$$P(t) \approx P\,(t) = \frac{n(t)}{N} \quad , \qquad (1)$$

де n(t) — число справних об'єктів до моменту t;

N – початкове число випробовуваних однорідних об'єктів.

Випробування повинні проводитися за однакових умов так, щоб відмови об'єктів були незалежними. Точність визначення вірогідності безвідмовної роботи будуть тим вище, чим більше число об'єктів N поставлене на випробування.

Задаючись різними значеннями t = ti можна експериментально визначити ряд точок функції P(t) і побудувати графік цієї функції.

Густина вірогідності безвідмовної роботи і інтенсивність відмов

Густиною вірогідності часу безвідмовної роботи називають похідну від функції q(t):

$$\frac{dq(t)}{dt} = f(t) = -\frac{dp(t)}{dt},$$

де f(t) густина вірогідності (диференціальний закон розподілу) є вірогідність того, що випадкова величина T потрапляє на ділянку

t < T < t + dt,

тобто відмова об'єкту відбудеться на цій ділянці.

Статистична функція f(t) може бути визначена як гістограма, що будується таким чином.

На випробування ставляться N однорідних об'єктів, і фіксується число відмов $\Delta n(t)$, що відбулися на елементарній ділянці часу $(t;\ t+\Delta t)$. Ордината гістограми $f^*(t)$ на кожній елементарній ділянці визначається за формулою

$$f^*(t) = \frac{\Delta n(t)}{N\Delta t} \qquad (2)$$

При достатньо великому N ця формула дає наближене значення функції f(t).

Знаючи густину f(t), достатньо просто знайти число об'єктів які можуть відмовити за певний інтервал часу.

На практиці часто користуються характеристикою надійності, так званою інтенсивністю відмов.

Згідно ГОСТ 13377-75 інтенсивність відмов є умовна густина вірогідності виникнення відмови не відновлюваного об'єкту, що визначається для даного моменту часу за умови, що для цього моменту відмова не виникла.

Інтенсивність відмов $\lambda(t)$ визначається відношенням

$$\lambda(t)=\frac{f(t)}{p(t)}. \qquad (3)$$

Беручи до уваги вираз (1) і (2), для інтенсивності відмов можна записати наближену формулу

$$\lambda(t) \approx \lambda^*(t) = \frac{\Delta n(t)}{n(t)\Delta t}, \qquad (4)$$

де n(t) – число працездатних об'єктів до даного моменту часу.

$\Delta n(t)$ – число відмов відбулися на елементарній ділянці.

Функція $\lambda(t)$ (рис. 2) є умовною густиною вірогідності виникнення відмови об'єкту у момент t, обчислюваної в припущенні його безвідмовної роботи донині.

Дійсно, з формули (3) виходить

$$f(t)dt = P(t)\lambda(t)dt$$

Ліва частина рівності – вірогідність відмови на ділянці $(t;\ t+dt)$, тоді криву частину можна розглядати як добуток вірогідності безвідмовної роботи до моменту t на умовну вірогідність виникнення відмови на ділянці $(t;\ t+\Delta t)$, обчислювану в припущенні, що відмова не відбулася до моменту t.

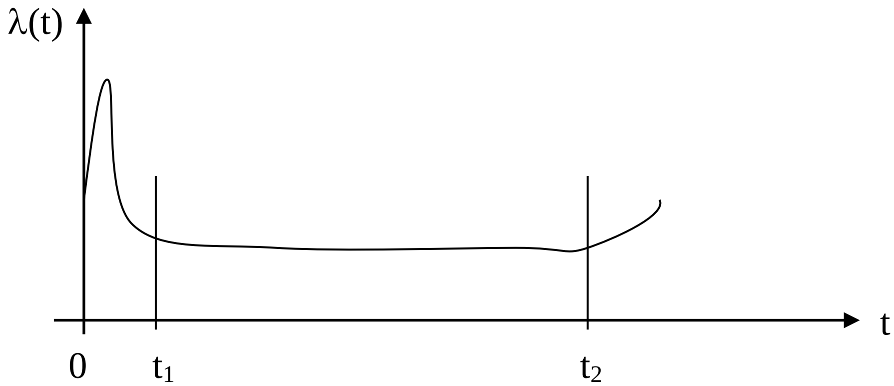

Рис. 2   Графік функції λ(t)

Безвідмовної роботи до моменту t на умовну вірогідність виникнення відмови на ділянці (t, t+dt), обчислювану в припущенні, що відмова не відбулася до моменту t.

Статистично інтенсивність відмов рівна відношенню числа відмов, що відбулися за одиницю часу, до числа об'єктів, що не відмовили до даного моменту.

5 Зв'язок між функцією P(t) і інтенсивністю відмов λ(t)

Знайдемо аналітичну залежність між функцією P(t) і інтенсивністю відмов λ(t). Ця залежність дозволить обчислити вірогідність безвідмовної роботи об'єкту через характеристику λ(t), котрую за деяких умов простіше знайти експериментально.

Беручи до уваги що f(t)=-P(t), формулу (3) запишемо у вигляді

$$\lambda(t) = -\frac{P'(t)}{P(t)} = \frac{d\ln P(t)}{dt}$$

Інтегруючи за умови, що P(t0)=1, одержимо

$$\ln P(t) = -\int_{t_0}^{t} \lambda(t)dt$$

Тоді

$$P(t_0, t) = e^{-\int_{t_0}^{t} \lambda(t)dt}$$

Для практично кожного окремого випадку $\lambda(t) = \lambda = const$ і $t(0) = 0$, формула (5) приймає вигляд

$$P(t) = e^{-\lambda t}$$

Формулу(6) називають експоненціальним законом надійності (безвідмовності).

На практиці цей закон зважаючи на його простоту знайшов широке застосування при розрахунку надійності елементів і деяких систем. Помітимо, що допущення $\lambda=const$ практично виправдане тільки для «стаціонарної» ділянки роботи об'єкту (t_1,t_2). На кінцевій $(0,t_1)$ і кінцевій $(t>t_2)$ ділянках інтенсивність відмов істотно змінюється в часі (рис. 2).

Для експоненціального закону вірогідність безвідмовної роботи не залежить від часу (t) попередньої безвідмовної роботи об'єкту, а залежить тільки від довжини заданого інтервалу τ :

$$P(t,t+\tau)=e^{-\lambda\tau} \qquad (7)$$

Дійсно, на підставі закону множення вірогідності $P(t+\tau)=P(t)P(t,t+\tau)$,
Звідки з урахуванням формули (6) можна одержати вираз (7).

Слід звернути увагу на те що умова $\lambda=const$ далеко не завжди виконується як для елементів, так і для системи.

Для різних елементів ці зміни різні і «стаціонарної» ділянки насправді може і не бути. Надалі покажемо, що для резервованих систем і систем з неодночасно працюючими елементами експоненціальний закон не зберігається навіть тоді, коли окремі елементи системи підкоряються експоненціальним законам надійності.

6 Числові характеристики безвідмовності

Розглянуті вище характеристики надійності є функціями часу. Для визначення їх на основі досвідчених даних з
достатньою точністю, потрібен великий об'єм випробувань. Набагато простіше знайти числові характеристики безвідмовності. Найважливішою з них є середній час безвідмовної роботи, тобто математичне очікування випадкової величини Т:

$$m_t = M[t] = \int_0^\infty tf(t)dt$$

Враховуючи що f(t)= - P(t), виразимо величину m_t через функцію P(t):

$$m_t = -\int_0^{\infty} tP'(t)dt \qquad (8)$$

Обчислюючи інтеграл (8) по частинах, одержимо

$$m_t = -tp(t)\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} P(t)dt$$

Перший член, рівний нулю, оскільки для випадкової величини з кінцевим математичним очікуванням вірогідність P(t) при t→∞ убуває швидше ніж росте. Тоді :

$$m_t = \int_0^{\infty} P(t)dt \qquad (9)$$

Ця формула показує, що середній час геометрично виражається площею, обмеженою осями координат і кривої P(t).

Наближене значення mt можна знайти по формулі для його оцінки mt :

$$m_t \approx m_t^* = \frac{\sum_{i=1}^{N} ti}{N}$$

де ti - час безвідмовної роботи i-го об'єкту; N - загальне число випробовуваних об'єктів.

Для експоненціального закону надійності формула (9) дає

$$m_t = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}dt = \frac{1}{\lambda}$$

Отже, для експоненціального закону надійності середній час безвідмовної роботи є величина, зворотна інтенсивності відмов.

Отже, для цього закону інтенсивності відмов можна знайти величину зворотну середньому часу безвідмовної роботи. Тоді функцію P(t) запишемо у вигляді

$$P(t) = e^{-\frac{t}{m_t}} \qquad (10)$$

Якщо час $t \langle\langle m_t \;\; или \;\; \frac{t}{m_t} \langle\langle 1$ то замість формули (10) можна користуватися наближеною формулою.

$$P(t) \approx 1 - \frac{t}{m_t}$$

При цьому помилка не перевершує $\frac{1}{2}\left(\frac{t}{m_t}\right)^2$.

Числовою характеристикою є дисперсія часу безвідмовної роботи

$$D_t = \sigma_t^2 = M\left[(T - m_t)^2\right] = M\left[T^2\right] - \left(M\left[T\right]^2\right) = \int_0^\infty t^2 f(t)dt - m_t^2 = 2\int_0^\infty tP(t)dt - m_t^2 \qquad (11)$$

Неважко переконатися, що для експоненціального закону надійності по формулі (11) можна одержати

$$D_t = \frac{1}{\lambda^2} \;;\; \sigma_t = \frac{1}{\lambda}$$

Отже, значення середнього часу безвідмовної роботи і його середнього квадратичного відхилення для експоненціального закону співпадають.

На підставі статистичних даних наближене значення дисперсії знайдемо по формулі її оцінки:

$$D_t \approx D_t^* = \frac{\sum_{i=1}^{N}(t - m_t)^2}{N - 1}$$

Дисперсія характеризує розкид (нестабільність) тривалості безвідмовної роботи об'єкту і служить додатковою числовою характеристикою безвідмовності.

7 Характеристика ремонтопридатності

Для оцінки надійності системи тривалого (багатократного) використовування характеристики безвідмовності є недостатніми. В цьому випадку системи після відмов відновлюються і продовжують функціонувати.

Час відновлення системи (сумарний час виявлення і усунення відмов) залежить від багатьох чинників (виду відмови, типу і числа елементів, що відмовили, і т.д.), що мають випадковий характер. Тому час відновлення розглядають як випадкову величину і ремонтопридатність системи характеризують вірогідними характеристиками, аналогічними характеристикам її безвідмовності: вірогідністю виконання ремонту в заданий час, інтенсивністю відновлення і числовими характеристиками - середнім часом і дисперсією часу відновлення.

8 Вірогідність виконання ремонту в заданий час

Вірогідність виконання ремонту в заданий час - вірогідність того, що відмова об'єкту буде усунена в перебігу заданого часу в певних умовах ремонту. Вона визначається як вірогідність того, що випадковий час відновлення $T_в$ буде менше заданого часу t:

$$P_в(t)=P(T_в< t)$$

Функція $P_в(t)$ є інтегральним законом розподілу часу відновлення. Цю функцію називають іноді функцією ремонту.

Вірогідність протилежної події ($T_в \geq t$)

$$q_в(t)=1-P_в(t)=P(T_в \geq t) \qquad (12)$$

називають вірогідністю невиконання ремонту в заданий час.

На підставі реальних умов виконання ремонту приймають початкові значення функцій

$$P_в(0)=0$$

та

$$q_в(0)=1$$

9 Густина вірогідності часу відновлення і інтенсивності відновлення

Густиною вірогідності часу відновлення системи називають похідну від функції $P_в(t)$:

$$f_в(t) = \frac{dP_в(t)}{dt} \tag{13}$$

Інтенсивністю відновлення називають відношення

$$\lambda_в(t) = \frac{f_в(t)}{q_в(t)} \tag{14}$$

Функція $\lambda_в(t)$ є густиною умовної вірогідності часу відновлення, обчислюваної в припущенні, що до моменту t, відлічуваного від початку відновлення, не була відновлена в стан працездатності. Дійсно з формули (14) виходить

$$f_в(t)\,dt = q_в(t)\,\lambda_в(t)\,dt \tag{15}$$

Ліва частина рівності є вірогідністю відновлення працездатності системи на ділянці (t,t+dt) . Ця вірогідність по теоремі множення рівна твору вірогідності того, що система до моменту t не відновлена, і умовної вірогідності відновлення системи на інтервалі (t,t+dt).

Рівність (15) з урахуванням виразів (12) і (13) можна записати у вигляді

$$\frac{dP_в(t)}{dt} - [1 - P_в(t)]\lambda_в(t) = 0 \tag{16}$$

Рішення рівняння (16) при початковій умові $P_в(0)=0$ дає формулу для вірогідності виконання ремонту через інтенсивність відновлення:

$$P_в(t) = 1 - e^{-\int_0^t \lambda_в dt}$$

При $\lambda_в(t) = \lambda_в = const$ одержуємо експоненціальний закон ремонтопридатності (рис. 3)

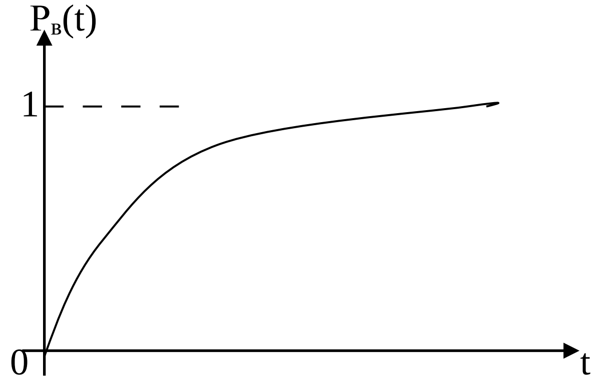

Рис. 3 Графік експоненціального закону ремонтопридатності

$$P_в(t)=1-e^{-\lambda_в t}$$

При експериментальному визначенні інтенсивності відновлення весь інтервал часу відновлення ділять на елементарні ділянки $\Delta t_i = t_i+1 - t_i$. Для кожної ділянки її значення визначають за формулою

$$\lambda_в^*(t_i) = \frac{\Delta n(t_i)}{[N - n(t_i)]}, \qquad (17)$$

де $\Delta n(t_i)$ – число систем, час відновлення (ремонту) яких знаходиться в інтервалі $\Delta ti = t_i+1 - t_i$;

$n(t_i)$ – загальне число систем, відремонтованих в інтервалі $(0, t_i)$; N – загальне число однорідних ремонтованих систем, що знаходяться під спостереженням.

Формула (17) отримується аналогічно формулі (4).

10 Числові характеристики ремонтопридатності

Згідно ГОСТ 13377-75 числовою характеристикою ремонтопридатності є середній час відновлення.

Додатковою числовою характеристикою ремонтопридатності може служити дисперсія часу відновлення.

Середній час відновлення визначається як математичне очікування випадкової величини Тв (час відновлення працездатності):

$$m_{t_в} = \int_0^\infty t f_в(t)dt.$$

При інтеграції зробимо ті ж припущення, як і при виведенні формули (9), тоді:

$$m_{t_в} = \int_0^\infty q_в(t)dt;$$

$$\sigma_{t_в}^2 = 2\int_0^\infty t q_в(t)dt - m_{t_в}^2 .$$

У разі експоненціального закону розподілу ремонтопридатності середній час відновлення:

$$m_{t_в} = \frac{1}{\lambda_в};$$

дисперсія часу відновлення:

$$\sigma^2_{t_в} = \lambda^2_в \;\; \sigma_t = \frac{1}{\lambda_в}.$$

Експериментальне визначення числових характеристик ремонтопридатності полягає в знаходженні відповідних статистичних оцінок. Так, оцінкою середнього часу відновлення є середнє арифметичне

$$m^*_{t_в} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \tau_i}{n},$$

де τ_i – час, витрачений на виявлення і усунення і-ї відмови системи; n – число всіх відмов системи за певний період її експлуатації.

Зауважимо, що величина $m^*_{t_в}$ істотно залежить від технічної кваліфікації і досвіду роботи обслуговуючого персоналу. Тому при її обчисленні слід обробити дані по ремонту значного числа однотипних систем різним персоналом.

11 Характеристики готовності

Багато систем управління повинні знаходитися у будь-який момент часу в стані працездатності. Кількісною характеристикою готовності є коефіцієнт готовності.

Згідно ГОСТ 13377-75 коефіцієнт готовності $P_г(t)$ – вірогідність того, що об'єкт виявиться працездатним в довільний момент часу, окрім планованих періодів, в перебігу яких використовування об'єкту за призначенням не передбачається.

Знайдемо значення коефіцієнта готовності для випадку експоненціальних законів безвідмовності і ремонтопридатності системи.

Вірогідність того, що система виявиться в стані працездатності у момент часу (t+dt), визначимо як суму вірогідності:

$$P_г=(t+dt)=P(H1)+P(H2), \quad (18)$$

де P(H1) – вірогідність того, що система працездатна у момент t і залишається працездатною на інтервалі (t, t+dt). Ця вірогідність з урахуванням того, що, виражається формулою $P(H1)=P`_{г(t)}(1-\lambda dt)$; вірогідність P(H2) є вірогідність того, що система не працездатна у момент t і буде відновлена протягом інтервалу часу (t, t+dt). Цю вірогідність запишемо формулою

$$P(H2)=[1-P_г(t)]\lambda_{в}dt.$$

Тоді з рівності (18) одержуємо диференціальне рівняння

$$\frac{dP_г(t)}{dt}+\left(\lambda+\lambda_в\right)P_г(t)=\lambda_в .$$

Вирішуючи це рівняння при початковій умові $P_г(0)=1$, одержимо формулу для значення коефіцієнта готовності в даний момент часу t:

$$Pг(t)=\frac{\lambda_в}{\lambda+\lambda_в}+\frac{\lambda}{\lambda+\lambda_в}e^{-(\lambda+\lambda_в)t} . \quad (19)$$

Виразимо інтенсивність λ і $\lambda_у$ через середні значення часу відмови і часу відновлення, тоді формула (19) прийме вигляд

$$P_г(t)=\frac{m_t}{m_t+m_{t_в}}+\frac{m_{t_в}}{m_t+m_{t_в}}e^{-\left(\frac{1}{m_t}+\frac{1}{m_{t_в}}\right)t} . \quad (20)$$

Стале значення коефіцієнта готовності одержимо з формули (19) і (20) при $t\to\infty$:

$$P_г=\frac{\lambda_в}{\lambda+\lambda_в}=\frac{m_{t_в}}{m_t+m_{t_в}} .$$

Отже, стале значення коефіцієнта готовності є середній відносний час перебування системи в працездатному стані.

З одержаних формул виходить, що значення коефіцієнта готовності може бути підвищене за рахунок збільшення середнього часу безвідмовної роботи і зменшення середнього часу відновлення системи.

Запитання для самопідготовки :

1 Як розраховується вірогідність безвідмовної роботи системи?
2 Що таке інтенсивність відмови та вірогідність безвідмовної роботи системи?
3 Перерахуйте характеристики безвідмовної роботи системи;
4 Дайте визначення ремонтопридатності та часу відновлення;
5 Перерахуйте числові характеристики ремонтопридатності системи;
6 Які характеристики готовності системи.

Тема 2

Методи розрахунку надійності (безвідмовності) систем

План теми

1 Особливості розрахунку систем з неодночасно працюючими елементами
2 Розрахунок системи з урахуванням режимів роботи елементів
3 Розрахунок надійності системи з урахуванням поступових відмов
4 Про розрахунок системи із залежними елементами

Розрахунок системи при відомих характеристиках безвідмовності її елементів.

Розглянемо систему, що є послідовним з'єднанням елементів.

У теорії надійності послідовним з'єднанням елементів називають таке, в якому відмова хоча б одного елемента рівносильна відмові з'єднання у цілому. Хай події А і $A_к$ (к=1,2,3…n) відповідно означають безвідмовну роботу послідовного з'єднання у цілому і безвідмовну роботу його к-го елемента протягом заданого інтервалу часу. Тоді подія А є добуток подій:

$$A=A_1A_2\ldots A_n.$$

Припустимо, що події $A_1,A_2\ldots A_n$ незалежні, тоді для вірогідності події А за теоремою множення вірогідності запишемо формулу:

$$P(A)=P_з(t)=\prod_{k=1}^{n} P_к(t), \qquad (21)$$

де $P_з(t)$ – вірогідність безвідмовної роботи послідовного з'єднання; $P_к(t)$ – вірогідність безвідмовної роботи к-го елемента.

Надалі незалежними елементами системи називатимемо такі, для яких відмови є незалежними подіями.

Тоді з формули (21) виходить: вірогідність безвідмовної роботи послідовного з'єднання незалежних елементів дорівнює добутку вірогідності безвідмовної роботи всіх його елементів.

На підставі формул (5) і (21) для інтенсивності відмов такого послідовного з'єднання можна одержати вираз:

$$\lambda_з(t)=\sum_{k=1}^{n}\lambda_к(t),$$

де $\lambda_з(t)$ – інтенсивність відмов послідовного з'єднання; $\lambda_{до}(t)$ – інтенсивність відмов к-го елемента.

Отже, інтенсивність відмов послідовного з'єднання незалежних елементів рівна сумі інтенсивностей відмов всіх його елементів.

Розглянемо характеристики безвідмовності параллельного з'єднання.

Паралельним з'єднанням елементів називають таке з'єднання, відмова якого відбувається тільки тоді, коли відмовляють всі його елементи.

Хай події В і $В_к$ (к=1,2…n) відповідно означають відмову паралельного з'єднання в целом і відмову його к-го елемента протягом заданого інтервалу часу. Тоді подія В є добуток подій:

$В=В_1В_2…В_n$

Виходячи з того, що події $В_1$, $В_2…В_n$ незалежні, знайдемо вірогідність відмови паралельного з'єднання за теоремою множення вірогідностей:

$$P(B)=q_з(t)=\prod_{k=1}^{n}q_k(t),$$

де qз(t) – вірогідність відмови паралельного з'єднання;

qк(t) – вірогідність відмови к-го елемента.

Отже, вірогідність відмови паралельного з'єднання незалежних елементів рівна твору вірогідності відмов всіх його елементів.

Формулу для вірогідності безвідмовної роботи такого паралельного з'єднання одержимо, визначаючи вірогідність протилежної події:

$$P_з(t)=1-q_з(t)=1-\prod_{k=1}^{n}q_k(t)=1-\prod_{k=1}^{n}\left[1-P_k\ (t)\right]$$

де $P_к(t)$ – вірогідність безвідмовної роботи го елемента.

З цієї формули виходить, що вірогідність безвідмовної роботи паралельного з'єднання незалежних елементів підвищується із збільшенням числа елементів цього з'єднання. Тому паралельне з'єднання елементів часто використовується в так званих резервованих системах для підвищення надійності.

1 Особливості розрахунку систем з неодночасно працюючими елементами

У деяких системах в різні інтервали часу на заданому інтервалі $(t,t+\tau)$ працює лише частина елементів системи. В цьому випадку для безвідмовної роботи послідовного з'єднання необхідно, щоб всі його елементи безвідмовно працювали протягом відповідних інтервалів часу.

Формула для вірогідності безвідмовної роботи послідовного з'єднання незалежних елементів протягом заданого інтервалу часу $(t,t+\tau)$ приймає вигляд.

$$P_c(t,t+\tau)=\prod_{k=1}^{n}P_k(t_k,t_k+\tau_k)\,, \qquad (22)$$

де $P_k(t_k,t_k+\tau_k)$ – вірогідність безвідмовної роботи цього елемента $(t_k;t_k+\tau_k)$.

Час τ_k відлічується з моменту включення го елемента.

Передбачається, що в момент t_k включення $k-$го елемента $P_k(t_k)=1$, залежність (22) можна виразити на підставі формули (5) через інтенсивності відмов окремих елементів:

$$P_c(t,t+\tau)=\exp\left[-\sum_{k-1}^{n}\int_{t_k}^{t_k+\tau_k}\lambda_k(t-t_k dt\right]. \qquad (23)$$

У разі експоненціального закону надійності кожного елемента, тобто при формула (23) прийме вигляд.

$$P_c(t,t+\tau)=\exp(-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\tau_k),$$

звідки витікає, що закон надійності системи не є експоненціальним.

При обчисленні вірогідності безвідмовної роботи системи з неодночасно працюючими елементами зручно заздалегідь побудувати графік часу роботи її елементів. Такий графік показаний на рис. 4 для системи з 3-х елементів.

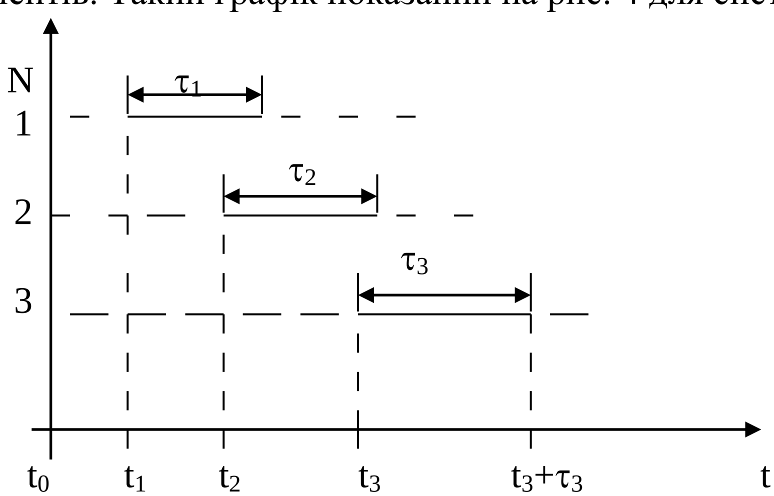

Рис. 4 Графік часу роботи елементів (N – номер елемента).

Вірогідність роботи цієї системи протягом заданого інтервалу $(t_1, t_1+\tau)$ записується за формулою (23):

$$P_c(t_1, t_1+\tau) = \exp\left[-\int_{t_1}^{t_1+\tau_1} \lambda_1(t-t_1)dt - \int_{t_2}^{t_2+\tau_2} \lambda_2(t-t_2)dt - \int_{t_3}^{t_3+\tau_3} \lambda_3(t-t_3)dt\right].$$

2 Розрахунок системи з урахуванням режимів роботи елементів

Такий розрахунок виконується на останньому етапі проектування, коли основна конструктивна розробка системи вирішена, і можна вибрати режим роботи елементів і визначити умови їх застосування. Інтенсивність відмов елементів в значній мірі залежить від умов і режимів роботи.

Тому розрахунок характеристики безвідмовності системи можна істотно уточнити, якщо замість табличних средньогрупових інтенсивностей відмов використовувати значення інтенсивностей відмов елементів з урахуванням режимів і умов їх застосування. При перерахунку інтенсивностей відмов для різних умов використовуються поправочні коефіцієнти або розрахункові графіки.

Поправочний коефіцієнт – це число, що показує, в скільки разів середнє значення інтенсивності відмов елементів, працюючого в умовах його застосування, більше значення інтенсивності відмов цього елемента в лабораторних умовах.

Слід зауважити, що метод поправочних коефіцієнтів є досить грубим, і не враховує конкретні режими роботи елементів.

Точнішим методом є метод розрахункових графіків, заснований на використовуванні залежностей інтенсивності відмов від конкретних параметрів режимів роботи (температури, вібрації, вогкості і т.д.). У літературі такі залежності приведені в основному для елементів електричних схем.

Для розрахунку необхідно знати режими роботи кожного елемента (групи однорідних елементів), число елементів кожного типу з однаковими режимами, інтенсивності відмов елементів різних типів або відповідних режимам роботи.

3 Розрахунок надійності системи з урахуванням поступових відмов

При розрахунку характеристик безвідмовності систем розрізняють відмови 2-х видів: раптові і поступові.

Раптові відмови характеризуються миттєвою (різкою) зміною параметрів, що впливають на працездатність (наприклад, обрив ланцюга, що передає сигнал).

Поступові відмови виникають при поступовій зміні параметрів, наприклад, в результаті зносу і старіння.

Стан відмови наступає при виході параметра за встановлені межі. При розрахунку надійності поступові відмови можна врахувати, якщо відомий закон розподілу часу безвідмовної роботи для елементів пов'язаних з поступовими змінами параметрів. Цей розподіл достатньо добре описується нормальним законом, оскільки тут дотримуються умови центральної граничної теореми (вплив безлічі випадкових чинників і серед них немає переважаючого).

Для нормального закону розподілу часу безвідмовної роботи густина вірогідності:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_t} e^{-\frac{(t-m_t)^2}{2\sigma_t^2}}$$

Вірогідність безвідмовної роботи системи (елементу) протягом заданого інтервалу часу логічно записати як вірогідність попадання випадкової величини на задану ділянку. Для нормального закону розподілу часу безвідмовної роботи ця вірогідність виражається формулою:

$$Pn(t) = P(T \geq t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_t} \int_t^{\infty} e^{-\frac{(t-m_t)^2}{2\sigma_t^2}} dt = 0{,}5 - \phi\left(\frac{t-m_t}{\sigma_t}\right), \qquad (24)$$

де функція ϕ (x)- інтеграл вірогідностей;

m_t і σ_t - математичне очікування (середній час) і середнє квадратне відхилення часу безвідмовної роботи системи.

Зауважимо, що на практиці дотримується умова $m_t \geq \sigma_t$ і формула (24) не суперечить рівності

$P_n(0)=1$

Інтенсивність поступових відмов виражається формулою:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{Pn(t)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_t} \frac{e^{-\frac{(t-m_t)^2}{2\sigma_t^2}}}{0{,}5 - \phi\left(\frac{t-m_t}{\sigma_t}\right)}$$

Вірогідність безвідмовної роботи послідовного з'єднання з n незалежних елементів з урахуванням тільки поступових відмов буде:

$$P_c n(t) = \prod_{k=1}^{n}\left[0{,}5 - \phi\left(\frac{t-m_k}{\sigma_k}\right)\right]_k,$$

де m_k і σ_k,- математичне очікування і середнє квадратичне відхилення часу без відмовної роботи к-го елементу.

Загальна вірогідність безвідмовної роботи послідовних з'єднань з урахуванням незалежних раптових і поступових відмов по теоремі множення вірогідності записується у вигляді:

$$Рз(t) = Рз_{рн}(t)Рз_{п}(t), \tag{25}$$

де $Р_{Зрн}$ (t) і $Р_{Зн}(t)$, - вірогідність безвідмовної роботи з'єднання тільки при раптових і лише при поступових відмовах.

Якщо вірогідність $Р_{Зрн}$ (t) і $Р_{Зн}(t)$ визначаються відповідно виразами (6) і (24), то формула (25) прийме вигляд:

$$Pc(t) = e^{-t\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda k}\prod_{k=1}^{n}\left[0{,}5 - \phi\left(\frac{t-m_k}{\sigma_k}\right)\right]_k, \tag{26}$$

де λ_k - інтенсивність раптових відмов к-го елементу; m_k і σ_k - математичне очікування і середнє квадратичне відхилення часу безвідмовної роботи к-го елементу при поступових відмовах.

Як ілюстрація на рис. 5 представлені графіки функцій, $Р_З(t)$, $Р_{Зрн}(t)$ і $Р_{Зн}(t)$, розраховані по формулі (26) при $n=10$ і, $m_k = 10000\ год$ і $\sigma_k = 1000\ год$, $\lambda = 10^{-5}\frac{1}{2}$.

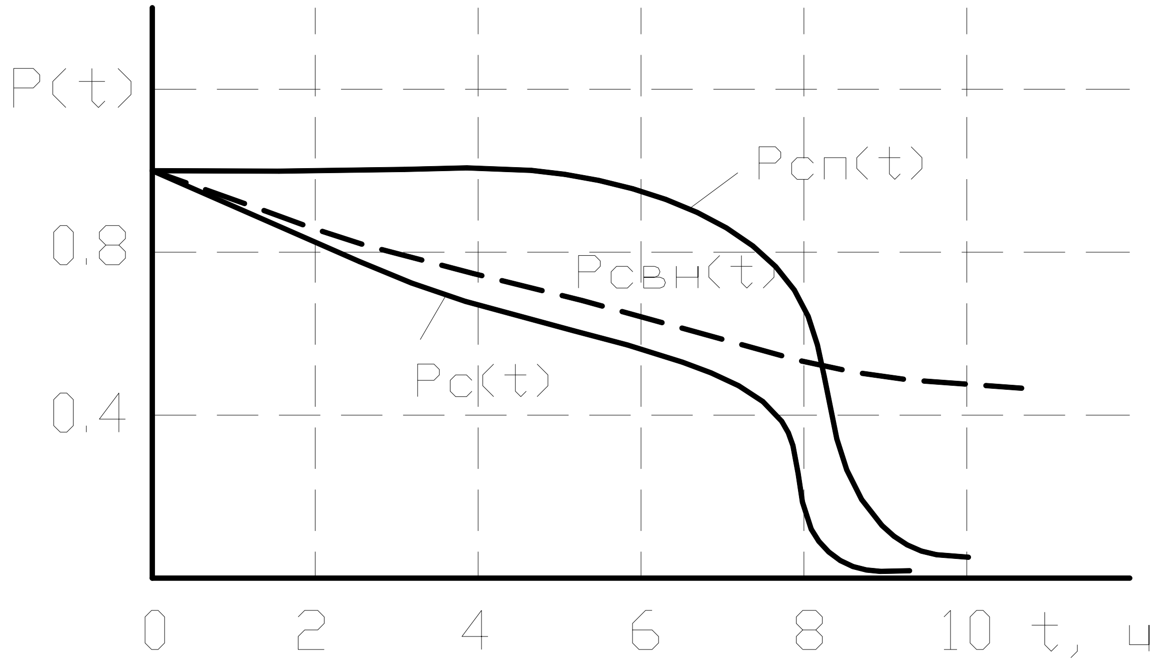

Рис 5. Графіки вірогідності безвідмовної роботи.

З аналізу графіків виходить, що в період нормальної експлуатації (t=7000ч) функція $P_{Зн}(t)$ практично не змінюється і приблизно рівна одиниці.

Тут переважають раптові відмови. На ділянці t>7000ч протікає процес старіння елементів, переважають поступові відмови і функції $P_{Зн}(t)$ і $P_З(t)$ швидко наближаються до нуля.

Основну трудність обліку поступових відмов складає визначення параметрів m_k і σ_k (k=1, 2…., n) закону розподілу часу безвідмовної роботи елементів системи.

4 Про розрахунок системи із залежними елементами

Дотепер розглядалися методи розрахунку характеристик безвідмовності системи, що складається з незалежних елементів. Проте в загальному випадку відмови елементів є залежними подіями, оскільки відмова одного з них може змінити режим роботи інших елементів і вплинути на їх надійність. Отже, при розрахунку надійності необхідно враховувати статистичну залежність між відмовами елементів системи. Розглянемо простий випадок, коли система складається з 2-х статистично залежних паралельно сполучених елементів.

Вірогідність безвідмовної роботи за час t такої системи:

$$P(t) = P_1(t) + P_2(t) + P_3(t) \ ,$$

де $P_1(t)$ - вірогідність того, що за час t обидва елементи справні; $P_2(t)$ - вірогідність того, що за час t перший елемент відмовив, а другий справний; $P_3(t)$ - вірогідність того, що за час t другий елемент відмовив, а перший справний.

Вірогідність $P_1(t)$ рівна добутку вірогідності безвідмовної роботи елементів кожного окремо:

$$P_1(t) = P_1(t)P_2(t)$$

При експоненційних законах надійності елементів вірогідності

$$P_1(t) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}$$

Вірогідність визначимо по формулі повної вірогідності

$$P_2(t) = \int_0^t P_{21}\left(\frac{t}{\tau}\right) f_1(\tau) d\tau$$

де $f_1(\tau)$ - густина вірогідності відмов першого елементу;

$P_{21}\left(\frac{t}{\tau}\right)$ - умовна вірогідність безвідмовної роботи за час t другого елементу за умови відмови першого елементу в момент τ .

Аналогічно записується вірогідність $P_3(t)$. При експоненційних законах надійності

$$f_1(\tau) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau}$$

$$P_{21}\left(\frac{t}{\tau}\right) = e^{-\lambda_2 \tau} e^{-\lambda_{21}(t-\tau)},$$

де λ_{21} - інтенсивність відмов другого елементу за умови відмови першого елементу.

Інтегруючи, одержимо:

$$P_2(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{21}} \left[e^{-\lambda_{21} t} - e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}\right]$$

Аналогічно знаходимо вірогідність:

$$P_3(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_{12}} \left[e^{-\lambda_{12} t} - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) t} \right]$$

де λ_{12} - інтенсивність відмов першого елементу за умови відмови другого елементу.

Можна записати формулу для вірогідності безвідмовної роботи і для складної системи із залежними елементами, якщо відома умовна вірогідність відмови одних елементів за умови відмови інших. Проте справа не в записі формул і обчисленнях по них. Основна трудність полягає у тому, що умовна вірогідність невідома, а їх експериментальне визначення пов'язано з величезним об'ємом випробувань. Тому такий підхід до розрахунку складних систем із залежними елементами практично не доцільний.

Практично доцільно розчленувати систему за фізичними міркуваннями на незалежні частини. Надійність кожної частини оцінити на підставі дослідних даних. Далі система в цілому розраховується як така, що складається з незалежних елементів (частин).

Запитання для самопідготовки :

1 Які особливості розрахунку систем с неодночасно працюючими елементами?
2 Як враховуються режими роботи елементів при визначенні надійності системи?
3 Що таке поступові відмови?
4 Як розраховується надійність системи з залежними елементами?
5 Які особливості розрахунку надійності систем з урахуванням поступових відмов?

Розділ 2
Тема1
Розрахунок надійності резервованих систем.
План теми

1 Класифікація методів резервування
2 Розрахунок надійності систем з постійним резервуванням

3 Розрахунок надійності систем при резервуванні заміщенням
4 Ненавантажений резерв
5 Полегшений резерв
6 Ковзаючий резерв
7 Облік надійностей перемикачів

1 Класифікація методів резервування

Резервування – метод підвищення надійності об'єкту введенням надлишковості.

Систему з надмірними елементами називають резервованою.

Резервування за способом включення резервних елементів ділиться на постійне і резервування заміщенням.

При постійному резервуванні (рис. 6) резервні з'єднані сполучені паралельно з основними (працюючими) елементами протягом всього періоду роботи системи.

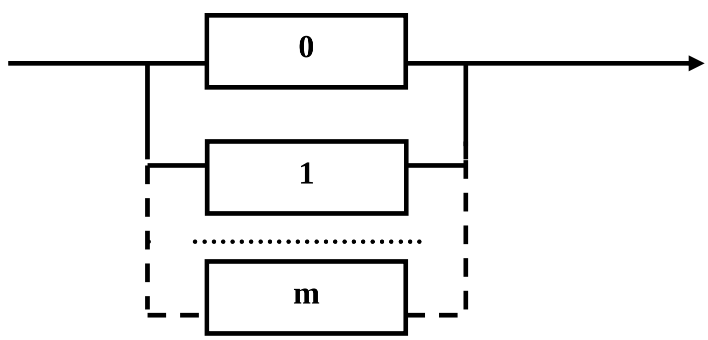

Рис. 6   Схема постійного резервування.

Всі елементи з'єднані постійно, перебудова схеми при відмовах не відбувається, елемент, що відмовив не відключається. Перевага методу полягає в його простоті і відсутності перерв в роботі, можливих при інших методах резервування.

Недоліком постійного резервування є підвищена витрата ресурсу резервних елементів, оскільки резервні елементи знаходяться в робочому навантаженому режимі (хоча навантаження на кожен елемент може бути менше). Постійне резервування доцільніше при резервуванні порівняно невеликих блоків, елементів.

При резервуванні заміщенням (рис. 7) відключається робочий елемент, що відмовив, і включається резервний елемент. Ця операція може виконуватися автоматично або уручну.

Резервні елементи до моменту включення знаходяться в полегшеному або ненавантаженому стані, що зберігає їх ресурс і підвищує загальну надійність системи.

Крім того, для заміни будь-якого їх однотипних основних (працюючих) елементів можна використовувати один або декілька резервних елементів. В цьому випадку резервування заміщенням називають резервуванням з ковзаючим резервом. Ковзаючий резерв дозволяє підвищувати надійність системи при меншому числі резервованих елементів в порівнянні з іншими видами резервування заміщенням.

Резервування заміщенням (особливо з ковзаючим резервом) вимагає додаткових пристроїв для контролю стану елементів, виключення елементів, що відмовили, і включення резервних. Цю групу пристроїв стисло називають перемикачами.

Перемикачі володіють деякою ненадійністю і тому при оцінці загальної надійності системи необхідно враховувати цей факт.

Резервування заміщенням дає найбільший ефект при резервуванні порівняно крупних функціональних блоків системи.

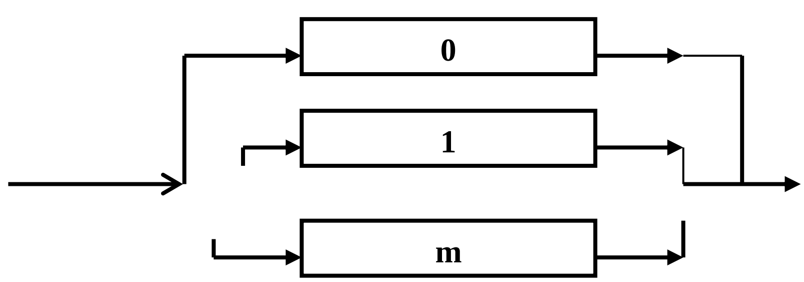

Рис. 7 Схема резервування заміщенням**.**

Залежно від використовування резервних елементів до моменту їх включення в роботу розрізняють 3 типи режимів резервування.

Навантажений (гарячий) резерв. Резервні елементи знаходяться в тому ж режимі, що і основний елемент, незалежно від моменту їх включення. Надійність резервного елемента співпадає з надійністю основного.

Полегшений (теплий) резерв. Резервні елементи знаходяться в полегшеному режимі до моменту їх включення в роботу замість основного. Надійність резервного елемента в цьому стані вища за надійність основного.

Ненавантажений (холодний) резерв. Резервні елементи знаходяться у вимкненому стані до моменту їх включення в роботу замість основного елемента.

Зауважимо, що при методі постійного резервування резервні елементи знаходяться тільки в режимі навантаженого резерву. При резервуванні методом заміщення вони можуть бути в будь-якому з 3-х режимів.

Для підвищення надійності системи резервують або окремі її елементи, або блоки, що входять в систему, або систему в цілому.

Рівень резервування називають масштабом резервування.

Резервування системи в цілому називають загальним резервуванням (Рис. 8), а резервування системи по окремих ділянках – роздільним резервуванням.(Рис. 9).

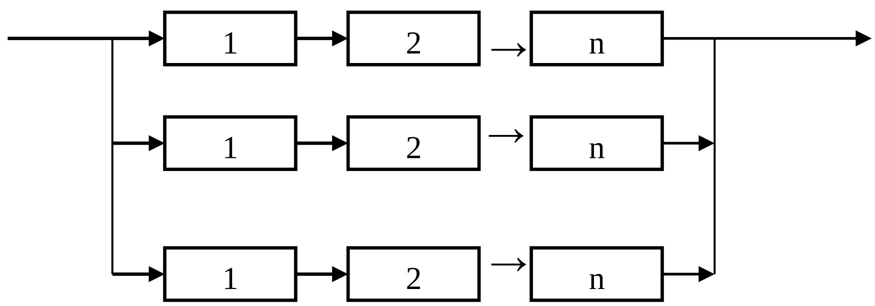

Рис. 8 Схема загального резервування.

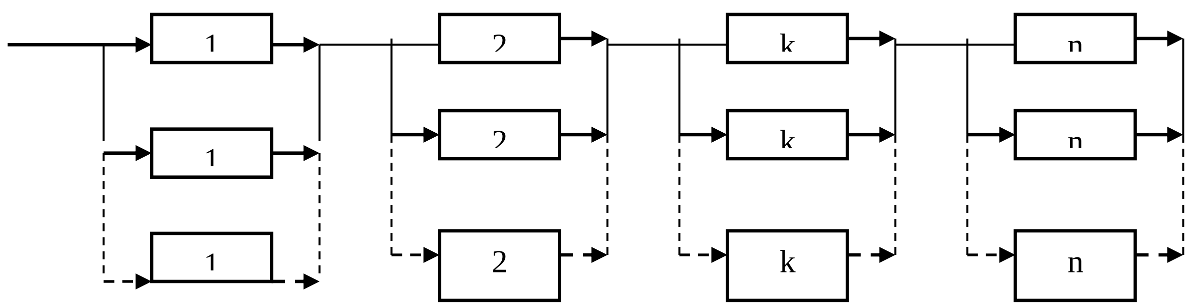

Рис. 9 Схема роздільного резервування.

У першому випадку для відмови системи необхідно і достатньо, щоб в кожному ланцюзі (послідовне з'єднання елементів) відмовив хоча б один елемент. У другому випадку відмова системи наступає при відмові якого-небудь основного і всіх резервуючих його елементів.

Надійність резервованих систем залежить від числа резервних елементів m, що припадають на один основний (працюючий) елемент. Це число називають кратністю резервування.

2 Розрахунок надійності систем з постійним резервуванням.

Хай система має один основний і m резервних елементів (рис. 6).

Позначимо $P_k(t)$ і $q_k(t)$ $(1 \le 0,1,2,...,m)$ відповідно вірогідність безвідмовної роботи і вірогідність відмови к-ого елемента.

По умові резервування відмова резервованої системи наступає тоді і тільки тоді, коли відмовить кожний з m+1 елементів. Для паралельного з'єднання незалежних елементів маємо

$$q_c(t) = q_0(t)q_1(t)...q_m(t) = \prod_{k=0}^{m} q_k(t), \qquad (27)$$

де $q_c(t)$ – вірогідність відмови резервної системи.

Формула для вірогідності безвідмовної роботи резервованої системи має вигляд:

$$P_c(t) = 1 - q_c(t) = 1 - [1 - P_0(t)][1 - P_1(t)]...[1 - P_m(t)] = 1 - \prod_{k=0}^{m}[1 - P_k(t) \qquad (28)$$

Називатимемо елементи системи рівнонадійними, якщо для них

$$P_k(t) = P(t) \text{, k= 0,1,2,…,m.}$$

Для рівнонадійних елементів формули (27) і (28) спрощуються:

$$q_c(t) = q^{m+1}(t);$$

$$P_c(t) = 1 - [1 - P\ (t)]^{m+1}. \qquad (29)$$

За формулою (29) зручно знаходити число резервних елементів, якщо задані вірогідність відмови q(t) елемента і допустиме значення вірогідності відмови резервованої системи:

$$q^{m+1} \le Q^*,$$

тоді
$$m \geq \frac{\ln \frac{1}{Q^*}}{\ln \frac{1}{q}} - 1.$$

При експоненціальному законі надійність окремих елементів:

$$P_c(t) = e^{-\lambda_k t}.$$

Коли λ_k елементів достатньо малі,

$$q_k(t) = 1 - e^{-\lambda_k t} \approx \lambda_k t,$$

Тоді з формули (27) і (28) одержуємо:

$$q_c = \lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_m t^{m+1}; \qquad (30)$$

$$q_c \approx (\lambda t)^{m+1}. \qquad (31)$$

Наближені формули використовуються, коли задані інтенсивності відмов елементів. Вони показують, що для резервованої системи експоненціальний закон надійності не зберігається.

Середній час безвідмовної роботи резервованої системи визначається за формулою (9):

$$m_t = \int_0^{\infty} P_c(t) dt.$$

Для експоненціального закону надійності у разі рівнонадійних елементів

$$m_t = \int_0^{\infty} \left[1 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^{m+1}\right] dt.$$

Вводячи змінну $x = 1 - e^{-\lambda t}$, інтеграл легко обчислити:

$$m_t = \frac{1}{\lambda}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{m+1}\right).$$

Одержані формули можна використовувати і у разі загального резервування системи. У формулах усюди під елементом до слід розуміти к-е послідовне з'єднання елементів, і функції, $q_k(t)$ і λ_k (k=0,1,2,…,m) слід розуміти як функції к-го ланцюга.

Так функція к-го ланцюга, що складається з n елементів, буде

$$P_k(t) = \prod_{l-1}^{n} P_{kl}(t),$$

де $P_{kl}(t)$ – функція l-го елемента к-го ланцюга.

Формула (28) для вірогідності безвідмовної роботи резервованої системи у разі загального резервування дає

$$P_{об}(t) = 1 - \left[1 - \prod_{i=1}^{n} P_{ol}(t)\right]\left[1 - \prod_{e=1}^{n} P_{Il}(t)\right]\dots\left[1 - \prod_{l=1}^{n} P_{ml}(t)\right] = 1 - \prod_{k=0}^{m}\left[1 - \prod_{l=1}^{n} P_{kl}(t)\right]$$

При роздільному резервуванні системи (рис. 9) вірогідність безвідмовної роботи на підставі теореми множення вірогідності виражається формулою

$$P_{раз}(t) = \prod_{i=1}^{n}\left\{1 - \prod_{k=0}^{m}\left[1 - P_{lk}(t)\right]\right\},$$

де $P_{kl}(t)$ – функція к-го елемента l-ї резервованої групи.

Для рівнонадійних елементів системи $P_{kl}=P_{lk}=P$ одержані формули спрощуються:

$$P_{об}(t) = 1 - \left[1 - P^n(t)\right]^{m+1};$$
$$P_{раз}(t) = \left[1 - \left(1 - P(t)\right)^{m+1}\right]^n \quad (32)$$

Задаючись конкретними значеннями, n і m можна знайти числові значення вірогідності безвідмовної роботи системи і виявити ефект того і іншого виду резервування.

На рис. 10 наведені графіки зміни вірогідності $P(t)$ системи із загальним і роздільним резервуванням залежно від числа n послідовних елементів ланцюга і m-кратності резервування при P=0,9

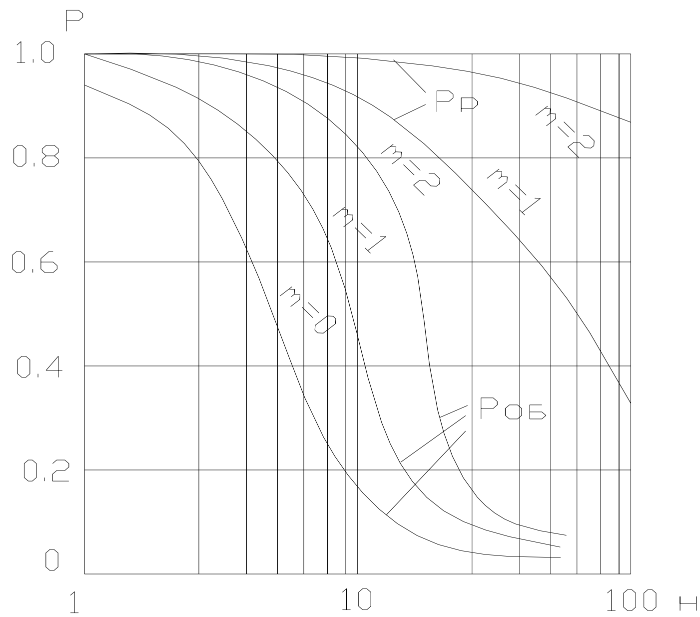

Рис.10 Графіки вірогідності безвідмовної роботи системи при роздільному і загальному резервуванні.

З графіків видно, що роздільне резервування є ефективнішим, ніж загальне і ефективність зростає із збільшенням числа n резервованих елементів і кратності резервування m.

При розгляді надійності резервованої системи, що складається з одного основного і m резервних елементів, передбачалося, що ця система працездатна, якщо не відмовив хоча б один з m+1 елементів.

У деяких резервованих системах характер роботи такий, що безвідмовна робота можлива тільки у разі, коли число елементів, що не відмовили, буде не менше ніж r з m+1.

Вірогідність безвідмовної роботи P_r такої резервованої системи з m+1 незалежних елементів знаходиться як вірогідність того, що деяка подія A в m+1 незалежних дослідах відбудеться не менше ніж r раз. Для рівнонадійних елементів

$$P_r = \sum_{k=r}^{m+1} C_{m+1}^{r} P^{k} q^{m+1-k}.$$

3 Розрахунок надійності систем при резервуванні заміщенням

При резервуванні заміщенням робота резервних елементів можлива в будь-якому з 3-х режимів: навантаженому, полегшеному і ненавантаженому.

У разі навантаженого резерву характеристики надійності резервованої системи визначаються по формулах для надійності при постійному резервуванні, але з урахуванням надійності перемикачів.

При навантаженому резерві загальна надійність системи з резервуванням заміщенням через відмови перемикачів буде нижчим, ніж при постійно включеному резерві. Тому спосіб резервування заміщенням доцільний тільки при полегшеному і ненавантаженому резервах.

4 Ненавантажений резерв

Розглянемо надійність системи, резервованої заміщенням, при ненавантаженому резерві. При цьому припустимо, що резервний елемент справний до моменту включення і його вірогідність безвідмовної роботи в робочому стані не залежить від часу перебування в неробочому стані.

Крім того, приймемо, що перемикач абсолютно надійний і заміна елемента, що відмовив, резервним відбувається миттєво.

Хай резервована система має один основний елемент і m резервних. Основний елемент, пропрацювавши випадковий час T_0, відмовляє і замінюється першим резервним елементом, що працює випадковий час T_1 і т.д. Останній резервний елемент, пропрацювавши випадковий час, відмовляє, а з ним відмовляє і вся резервна система.

Отже, тривалість безвідмовної роботи резервованої системи:

$$T = \sum_{k=0}^{m} T_k \,. \tag{33}$$

Випадкові величини T_k (k=0,1,…,m) незалежні, і вірогідність відмови $q_c(t)$ системи є законом розподілу суми m+1 незалежних випадкових величин.

Середній час безвідмовної роботи резервованої системи знайдемо за формулою для математичного очікування суми випадкових величин

$$m_t = \sum_{k=0}^{m} M[T_k] = \sum_{k=0}^{m} m_k \;,$$

де m_k – середній час безвідмовної роботи к-го елемента.

У разі експоненціального закону надійності елементів для визначення характеристик безвідмовності резервованої системи зручно використовувати теоретико-вірогідностну схему, відому під назвою «процесу загибелі». При цьому передбачається, що потік відмов підкоряється двом умовам.

1. Якщо до моменту t відбулося k відмов, то незалежно від моментів їх виникнення вірогідність того, що на нескінченно малій ділянці $(t_1 t+\Delta t)$ відбудеться одна відмова, рівна $\lambda_k \Delta t$, а вірогідність того, що відмова не відбудеться, рівна $1-\lambda_k \Delta t+0(\Delta t)$

2. В момент, коли відбувається (m+ 1) – й відмова, наступає відмова системи і ніяких змін в ній надалі не відбувається. Отже складемо для опису такого процесу систему диференціальних рівнянь. Вважатимемо, що процес у момент t знаходиться в стані k, якщо до цього моменту відбулося k відмов елементів системи. Позначимо P(t) – вірогідність того, що в момент t процес знаходиться в стані k.

Очевидно, $P_{m+1}=q_c(t)$ означає вірогідність того, що система відмовить до моменту t. За формулою повної вірогідності можна записати:

$$P_k(t+\Delta t)=P_{k-1}(t)\lambda_{k-1}\Delta t+P_k(t)\times(1-\lambda_k \Delta t)+0(\Delta t)\,.$$

Початкові умови такі:

$$P_0(0)=1, P_k(0)=0 \text{ при } \kappa \geq 1,$$

тобто до моменту t = 0 система була працездатна.

Переходячи до межі при $\Delta t \to 0$ одержимо систему диференціальних рівнянь:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dP_0(t)}{dt}=-\lambda_0 P_0(t)\\
&\frac{dP_k(t)}{dt}=\lambda_{k-1}P_{k-1}(t)-\lambda_k P_k(t)\\
&k=1,2,...,m;\\
&\frac{dP_{m+1(t)}}{dt}=\lambda_m P_m(t)
\end{aligned}\right\}$$

Вирішуючи цю систему рівнянь можна одержати точні і наближені формули для вірогідності відмови даної резервованої системи. На практиці зручно користуватися наближеними формулами. Так у разі високонадійних елементів резервованої системи (величини $\lambda_k t$ малі) застосовна наближена формула.

$$q_c(t)\approx \frac{\lambda_0\lambda_1\lambda_2...\lambda_m}{(m+1)!}t^{m+1}\,. \qquad (34)$$

Для рівно-надійних елементів має вигляд

$$q_c(t)\approx \frac{(\lambda tt)^{m+1}}{(m+1)!}\,. \qquad (35)$$

Порівнюючи формули (30), (31) і (34), (35) можна переконатися в тому, який виграш дає резервування заміщенням з використанням ненавантаженого резерву.

Якщо резервована система складається з великого числа малонадійних елементів (тобто $\lambda_k t$ кінцеві, а m велике), можна використовувати наближену формулу

$$q_c(t) \approx \frac{\lambda_0 \lambda 1_1 ... \lambda_m}{(m+1)!} t^{m+1} e^{-\sum_{k=0}^{m} \frac{\lambda_k}{m+1} t}.$$

Характеристики надійності резервованої системи можна обчислити і для випадку нормального закону розподілу часу безвідмовної роботи елементів.

Оскільки час T безвідмовної роботи системи рівний сумі (33) незалежних нормальних величин T, то закон розподілу часу T буде також нормальним з середнім значенням

$$m_t = \sum_{k=0}^{m} m_k$$

і дисперсією

$$\sigma_t^2 = \sum_{k=0}^{m} \sigma_k^2$$

Тоді вірогідність відмови резервованої системи

$$q(t) = \frac{1}{\sigma_t \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{(x-m_t)^2}{2\sigma_t^2}} dx = \frac{1}{2} + \phi(\frac{t-m_t}{\sigma_t}),$$

де Ф (x) – інтеграл вірогідності.

5 Полегшений резерв

Ненавантажений резерв дає значний виграш в надійності. Проте не завжди він може бути використаний, оскільки від моменту включення елемента до моменту його працездатного стану протікає перехідний процес. Якщо умови експлуатації такі, що вплив цього процесу на роботу системи істотний, то часто використовують полегшений резерв.

В цьому випадку вплив перехідного процесу знижується і система може безперервно працювати в режимі, близькому до нормального робочого, а надійність резервного елемента в неробочому стані вища його надійності в робочому стані.

При цьому для визначення характеристики надійності не можна скористатися схемою процесу загибелі, оскільки сумарна інтенсивність відмов, залежить не тільки від числа відмов, що відбулися до даного моменту, але і від того, які елементи відмовили.
Проте достатньо ефективні наближені формули для вірогідності відмови резервованої системи з одним основним і m резервованими елементами в режимі полегшеного резерву можна одержати, якщо для елементів і в робітнику і в неробочому стані справедливий експоненціальний закон надійності, а вірогідність безвідмовної роботи елемента в робочому стані не залежить від часу його перебування в неробочому стані.

Так, наближена формула для вірогідності відмови такої системи, аналогічна формулі (34), має вид

$$q_c(t) \approx \frac{\lambda_0(\lambda_1 + \lambda_1{}^0)(\lambda_2 + 2\lambda_2{}^0)...(\lambda_m + m\lambda_m{}^0)}{(m+1)!} t^{m+1}, \qquad (36)$$

де $\lambda_\kappa (\kappa = 0,1,..., m)$ – інтенсивність відмов к-го елемента в робочому режимі;
$\lambda_l^0 (l = 1,2,...., m)$ - інтенсивність відмов l-го елемента в полегшеному режимі.

Ця формула дозволяє також визначити оптимальний порядок розташування резервних елементів, при якому вірогідність відмови резервованої системи є якнайменшою.

Можна показати, що оптимальний порядок задовольняє умові

$$\frac{\lambda_1^0}{\lambda_1} \geq \frac{\lambda_2^o}{\lambda_2} \geq ... \geq \frac{\lambda_m^0}{\lambda_m}$$

У разі рівно-надійних елементів формула (36) приймає вигляд

$$q_c(t) \approx \frac{\lambda(\lambda + \lambda^0)(\lambda + 2\lambda^0)...(\lambda + m\lambda^0)}{(m+1)!} t^{m+1}, \qquad (37)$$

де λ і λ^0 – інтенсивність відмов елемента в робочому і полегшеному режимах.

6 Ковзаючий резерв

При ковзаючому резерві резервована система містить групи резервних елементів: основну групу з однакових елементів і групу резервних елементів (Рис. 11)

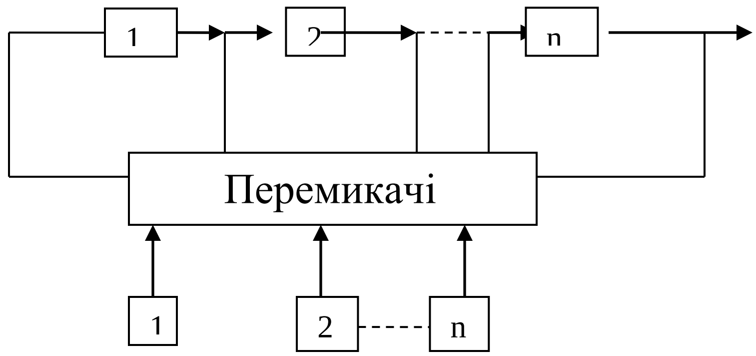

Рис. 11   Схема ковзаю чого резерву.

При відмові будь-якого елементу з основної групи він замінюється черговим з групи резервних елементів. Відмова резервованої системи в цілому наступає тоді, коли у момент відмови основного елементу резервних працездатних елементів немає (або використані раніше, або відмовили в резерві).

Для визначення характеристик надійності надійності системи при ковзаючому резервуванні розглянемо випадок навантаженого резерву з абсолютно надійними перемикачами.

Хай n-число основних елементів, а m-число резервних.

Резервована система буде працездатна в перебігу інтервалу (0, t) тоді і тільки тоді, коли за цей час відбудеться не більш m відмов елементів. Вірогідності такого стану резервованої системи з рівно-надійних елементів визначається на підставі біноміального розширення формулою:

$$P_c(t) = \sum_{k=0}^{m} c_{m+n}^{k} q^{k}(t) p^{n+m-k}(t)$$

де P(t) і q(t) - вірогідність безвідмовної роботи і вірогідність відмови елементу.

Середній час безвідмовної роботи резервованої системи з ковзаючим резервом:

$$\boldsymbol{m_t = \sum_{k=1}^{m+1} m_k}$$

де m_k - середній час роботи резервованої системи від k-1 до к-го відмови.

Інтенсивність к-го відмови системи, що складається з рівно-надійних елементів з інтенсивністю відмов λ, буде

$$\lambda_{k+1} = \lambda(n+m-k)$$

Тоді у разі експоненціального закону надійності середній час безвідмовної роботи резервованої системи.

$$m_t = \sum_{k=o}^{m} \frac{1}{\lambda_{k+1}} = \frac{1}{\lambda(n+m)} + \frac{1}{\lambda(n+m-1)} + ... + \frac{1}{\lambda_m}$$

У не навантаженому резерві характеристики безвідмовності резервованої системи мають в загальному випадку складні вирази.

Тут обмежимося розглядом цих характеристик при експоненціальному законі надійності рівно-надійних елементів системи. У такому разі розподіли моментів часу відмов підкоряється закону Пуассона з параметрами. Робота резервованої системи закінчується у момент (m+1) -ої відмови.

Для характеристик безвідмовності системи маємо наступні формули:
Вірогідність безвідмовної роботи

$$P_c(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(n\lambda t)^k}{k!} e^{-n\lambda t}$$

Вірогідність відмови

$$q_c(t) = 1 - \sum_{k=0}^{m} \frac{(nt\lambda)^k}{k!} e^{-nt\lambda}$$

Середній час безвідмовної роботи

$$m_t = \frac{m+1}{n\lambda}$$

7 Облік надійності перемикачів

Приведені вище формули для характеристик безвідмовності резервованих систем одержані в припущенні абсолютної надійності перемикачів. Для оцінки загальної надійності резервованих систем з перемикачами необхідно враховувати їх реальну надійність.

Розглянемо прості випадки визначення характеристик безвідмовності резервованих систем з урахуванням відмов перемикачів при наступних допущеннях: перемикач відмовляє тільки у момент включення, і вірогідність цієї відмови не залежить ні від номера резервного елементу, що включається, ні від часу роботи попередніх елементів; для кожного резервного елементу є свій перемикач, і він спрацьовує в не залежності від стані резервного елементу; якщо не спрацьовує даний перемикач, то в дію вступає наступний.

Хай резервована система складається з m+1 рівно-надійних перемикачів.

Позначимо подію, що полягає у тому, що за час роботи резервованої системи спрацювало рівно до перемикачів і m(k=0,1,2,…,m).

Вірогідність події обчислюється по формулі біноміального розподілу

$$P(H_k) = c_m^k q_n^{m-k} p_n^k (38)$$

де p_n, q_n - вірогідність безвідмовної роботи і вірогідність відмови перемикання.

Якщо спрацювало до перемикачів, то відмова резервованої системи (подія А) відбувається коли відмовляє k+1 елементів (один основний і до резервних).

Умовна вірогідність такої події $P\left(\frac{A}{H_k}\right)$ рівна вірогідності відмови резервованої системи, стан з одного основного і до резервних елементів з абсолютно надійними перемикачами:

$$P\left(\frac{A}{H_k}\right) = q_{ck}(t)$$

Тоді вірогідність відмови $q_{cn}(t)$ даної системи з урахуванням відмов перемикачів знайдемо по формулі повної вірогідності

$$q_{cn}(t) = \sum_{k=0}^{m} P(H_k) P(A/H_k) = \sum_{k=0}^{m} P(H_k) q_{ck}(t)$$

Вірогідність $q_{ck}(t)$ визначаємо по формулі (31), (34) і (35), прийнявши в них m=k.

Так, у разі навантаженого резерву ця формула для вірогідності відмови даної резервованої системи з урахуванням виразів (31) і формули (38) прийме вигляд

$$q_{cn} = \sum_{k=0}^{m} c_m^k q_n^{m-k} p_n^k q^{k+1} = q(p_n q + q_n)^m$$

де $q = \lambda t$

Оскільки $(P_n q + q_n) < 1$, то вірогідність відмови резервованої системи прагне до нуля із зростанням номера m. Отже, збільшуючи кратність резервування, можна добитися скільки завгодно високої надійності системи.

8 **Розрахунок надійності системи з відновлюваним резервом**

Резервування заміщенням дає можливість відновлювати елементи, що відмовили, при цьому надійність системи з відновлюваним резервом значно підвищується.

Характеристики надійності резервованої системи з відновленням у разі експоненціальних законів надійності і ремонтопридатності зручно визначати, використовуючи схему так званого процесу загибелі і розмноження. Розрізняють 2 рішення задачі визначення характеристик надійності в сталому процесі і починаючи з моменту включення системи.

Якщо процес у момент часу t знаходиться в змозі До, то за нескінченно малий час Δt він з вірогідністю $\lambda_k \Delta t + 0(\Delta t)$ перейде в стан (k+1), з $1-(\lambda_k + M_k)\Delta t + 0(\Delta t)$ вірогідність залишається в змозі до.

З наявного стану 0 він може перейти в стан 1 з вірогідністю $\lambda_0 \Delta t$ і залишитися в стані 0 з вірогідністю $1-\lambda_0 \Delta t + 0(\Delta t)$. Якщо число станів кінцеве і рівне n, то із стану n процес може перейти в стан (n-1) з вірогідністю $\mu_n \Delta t$ і залишитися в колишньому стані з вірогідністю . $1 - M_n \Delta t + 0(\Delta t)$

Такий процес називають процесом загибелі і розмноження.

Позначимо $P_к(t)$ вірогідність того, що у момент часу t процес знаходиться в змозі до.

Сталий процес при $t \to \infty$ описується системою рівнянь алгебри

$$\left.\begin{aligned} 0 &= -\lambda_0 p_0 + \mu_1 p_1 \\ 0 &= \lambda_{k-1} p_{k-1} - (\lambda_k + \mu_k) p_k + \mu_{k+1} p_{k+1} \\ 0 &= \lambda_{n-1} p_{n-1} - \mu_n p_n \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

де $P_k = \lim_{t \to \infty} P_k(t)$

$$\sum_{k=0}^{n} P_k(t) = 1 \tag{40}$$

Система (39) легко розв'язується.

Введемо позначення

$$\pi_k = \mu_k p_k - \lambda_{k-1} p_{k-1}$$

Систему рівнянь (39) з обліком запишемо у вигляді
K=1,2,…,n-1; $\pi_0 = 0; \pi_k - \pi_{k-1} = 0; \pi_n = 0$
Звідси, $\mu_k \neq 0$ то

$$P_k = \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} P_{k-1} \qquad (41)$$

Рекуррентна формула (41) дає

$$P_k = \frac{\lambda_0 \lambda_1 ... \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 ... \mu_k} P_0 = \theta_k P_0 \qquad (42)$$

де

$$\theta = \frac{\lambda_0 \lambda_1 ... \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 ... \mu_k} \qquad (43)$$

Величина P_0 визначається з рівності (40) з урахуванням формули (42)

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_0 \lambda_1 ... \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 ... \mu_k}}$$

або обліком рівності (43)

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{s=0}^{n} \theta_s}$$

Тоді (44)

$$P_k = \frac{\theta_k}{\sum_{s=0}^{n} \theta_s}, \theta = 1_0$$

Під станом до системи розумітимемо такий її стан, коли число елементів системи, що відмовили, рівне до.

Тоді, якщо для кожного стану до системи загальна інтенсивність відмов λ_k і загальна інтенсивність відновлення μ_k залежить не від безлічі елементів, що відмовили, а тільки від їх числа, система описується процесом загибелі і розмноження і одержані вище результати можна використовувати для розрахунку її характеристик надійності.

Розглянемо, наприклад, резервовану систему з ковзаючим резервом, що складається з l основних елементів і m резервних равнонадійних. Число станів системи k=0,1,2,…,m, m+1; при $k \geq m+1$ роботи системи припиняється, наступає її відмова.

Хай загальна інтенсивність відмов $\lambda_k = l\lambda$ (λ - інтенсивність відмов окремих елементів) а загальна інтенсивність відновлення $\mu_k = \mu$, тобто не залежить від числа елементів, що відмовили. Тоді по формулі (44) знайдемо вірогідність того, що система матиме рівно до елементів, що відмовили

$$P_k = \frac{\left(\frac{l\lambda}{\mu}\right)^k}{\sum_{s=0}^{m+1}\left(\frac{l\lambda}{\mu}\right)^s}$$

Дана система знаходитиметься в працездатному стані якщо число елементів, що відмовили, не перевершить число резервних, в сталому режимі вірогідність працездатного стану системи у будь-який момент часу, тобто сталої коефіцієнт готовності системи, визначається формулою

$$P_r = \sum_{k=0}^{m} P_k \frac{\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{l\lambda}{\mu}\right)^k}{\sum_{s=0}^{m+1}\left(\frac{l\lambda}{\mu}\right)^{s^0}}$$

Вірогідність безвідмовної роботи системи в перебігу заданого інтервалу часу може бути знайдена з рішення задачі в несталому режимі. Ряд окремих випадків такого рішення приведений в літературі (Гнеденко б. У. і ін. Математичні методи в теорії надійності. Наука 1965 сторінка 524)

У результаті помітимо, що резервування дозволяє з малонадійних елементів проектувати надійні системи, проте при підвищенні надійності системи резервуванням погіршуються деякі інші її властивості, наприклад збільшується маса, вартість і ускладнюються умови експлуатації.

Резервування не є єдиним способом збільшення надійності систем.

Надійність можна підвищити, наприклад шляхом зниження інтенсивності відмов системи за рахунок застосування найнадійніших елементів, вибору оптимальних режимів і простих конструктивних рішень. Ці заходи дають особливо високий ефект для систем тривалого користування.

Раціональний рівень надійності системи можна вибрати тільки на основі оцінки її загальної ефективності.

Запитання для самопідготовки :

1 Перерахуйте методи резервування систем;
2 Які особливості схеми резервування заміщення?
3 Як виконується розрахунок систем з постійним резервуванням?
4 У яких випадках використовується облегшений резерв?
5 За рахунок чого збільшується надійність резервірованих систем?

Рекомендована література

1. Козлов Б. А., Ушаков И. А., Справочник по расчету надежности, М., 1974.
2. Сотсков Б. С., Основы теории и расчета надежности элементов и устройств автоматики и вычислительной техники, М., 1970.
3. Бруевич Н. Г., количетвенные оценки надежности изделий, в сб. Основные вопросы теории и практики надежности, М., 1971.
4. Гермейер, Введення в теорію досліджень операцій, М.: Наука, 1974, с.384.