Розділ 2
Тема1
Розрахунок надійності резервованих систем.
План теми

1 Класифікація методів резервування
2 Розрахунок надійності систем з постійним резервуванням
3 Розрахунок надійності систем при резервуванні заміщенням
4 Ненавантажений резерв
5 Полегшений резерв
6 Ковзаючий резерв
7 Облік надійностей перемикачів

1 Класифікація методів резервування

Резервування – метод підвищення надійності об'єкту введенням надлишковості.

Систему з надмірними елементами називають резервованою.

Резервування за способом включення резервних елементів ділиться на постійне і резервування заміщенням.

При постійному резервуванні (рис. 6) резервні з’єднані сполучені паралельно з основними (працюючими) елементами протягом всього періоду роботи системи.

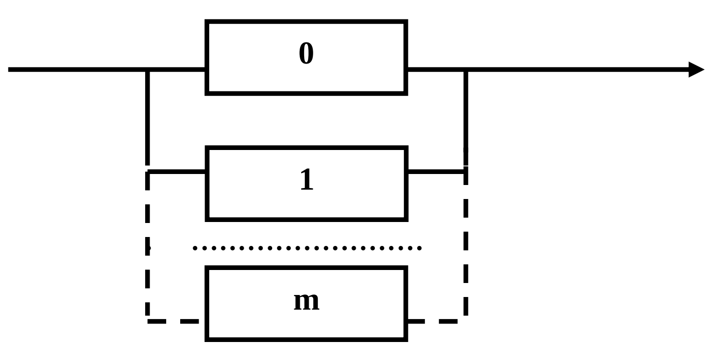

Рис. 6 Схема постійного резервування.

Всі елементи з’єднані постійно, перебудова схеми при відмовах не відбувається, елемент, що відмовив не відключається. Перевага методу полягає в його простоті і відсутності перерв в роботі, можливих при інших методах резервування.

Недоліком постійного резервування є підвищена витрата ресурсу резервних елементів, оскільки резервні елементи знаходяться в робочому навантаженому режимі (хоча навантаження на кожен елемент може бути менше). Постійне резервування доцільніше при резервуванні порівняно невеликих блоків, елементів.

При резервуванні заміщенням (рис. 7) відключається робочий елемент, що відмовив, і включається резервний елемент. Ця операція може виконуватися автоматично або уручну.

Резервні елементи до моменту включення знаходяться в полегшеному або ненавантаженому стані, що зберігає їх ресурс і підвищує загальну надійність системи.

Крім того, для заміни будь-якого їх однотипних основних (працюючих) елементів можна використовувати один або декілька резервних елементів. В цьому випадку резервування заміщенням називають резервуванням з ковзаючим резервом. Ковзаючий резерв дозволяє підвищувати надійність системи при меншому числі резервованих елементів в порівнянні з іншими видами резервування заміщенням.

Резервування заміщенням (особливо з ковзаючим резервом) вимагає додаткових пристроїв для контролю стану елементів, виключення елементів, що відмовили, і включення резервних. Цю групу пристроїв стисло називають перемикачами.

Перемикачі володіють деякою ненадійністю і тому при оцінці загальної надійності системи необхідно враховувати цей факт.

Резервування заміщенням дає найбільший ефект при резервуванні порівняно крупних функціональних блоків системи.

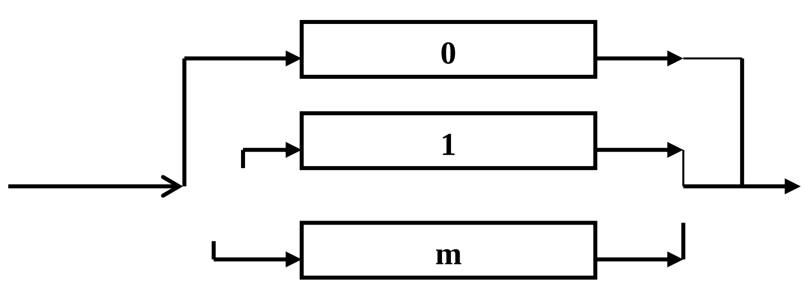

Рис. 7 Схема резервування заміщенням.

Залежно від використовування резервних елементів до моменту їх включення в роботу розрізняють 3 типи режимів резервування.

Навантажений (гарячий) резерв. Резервні елементи знаходяться в тому ж режимі, що і основний елемент, незалежно від моменту їх включення. Надійність резервного елемента співпадає з надійністю основного.

Полегшений (теплий) резерв. Резервні елементи знаходяться в полегшеному режимі до моменту їх включення в роботу замість основного. Надійність резервного елемента в цьому стані вища за надійність основного.

Ненавантажений (холодний) резерв. Резервні елементи знаходяться у вимкненому стані до моменту їх включення в роботу замість основного елемента.

Зауважимо, що при методі постійного резервування резервні елементи знаходяться тільки в режимі навантаженого резерву. При резервуванні методом заміщення вони можуть бути в будь-якому з 3-х режимів.

Для підвищення надійності системи резервують або окремі її елементи, або блоки, що входять в систему, або систему в цілому.

Рівень резервування називають масштабом резервування.

Резервування системи в цілому називають загальним резервуванням (Рис. 8), а резервування системи по окремих ділянках – роздільним резервуванням.(Рис. 9).

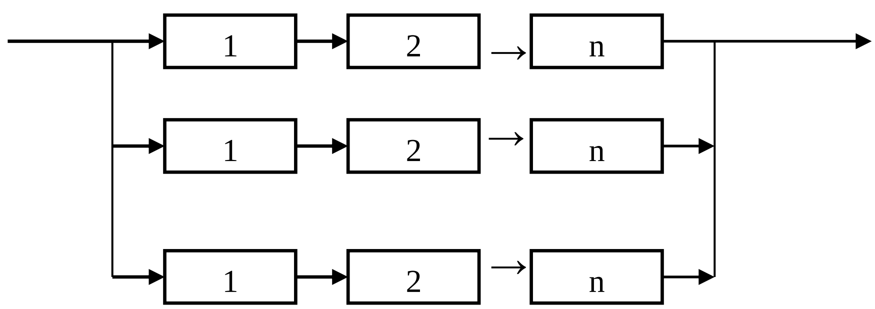

Рис. 8 Схема загального резервування.

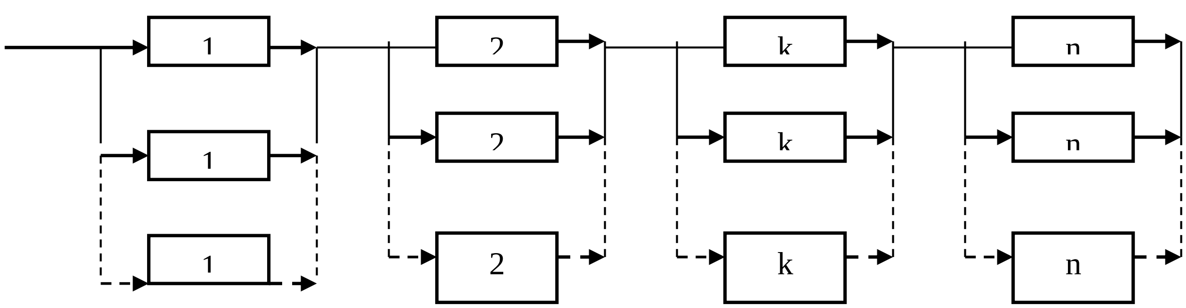

Рис. 9 Схема роздільного резервування.

У першому випадку для відмови системи необхідно і достатньо, щоб в кожному ланцюзі (послідовне з'єднання елементів) відмовив хоча б один елемент. У другому випадку відмова системи наступає при відмові якого-небудь основного і всіх резервуючих його елементів.

Надійність резервованих систем залежить від числа резервних елементів m, що припадають на один основний (працюючий) елемент. Це число називають кратністю резервування.

2 Розрахунок надійності систем з постійним резервуванням.

Хай система має один основний і m резервних елементів (рис. 6).

Позначимо $P_k(t)$ і $q_k(t)$ $(1 \le 0,1,2,...,m)$ відповідно вірогідність безвідмовної роботи і вірогідність відмови к-ого елемента.

По умові резервування відмова резервованої системи наступає тоді і тільки тоді, коли відмовить кожний з m+1 елементів. Для паралельного з'єднання незалежних елементів маємо

$$q_c(t) = q_0(t)q_1(t)...q_m(t) = \prod_{k=0}^{m} q_k(t), \qquad (27)$$

де $q_c(t)$ – вірогідність відмови резервної системи.

Формула для вірогідності безвідмовної роботи резервованої системи має вигляд:

$$P_c(t) = 1 - q_c(t) = 1 - [1 - P_0(t)][1 - P_1(t)]...[1 - P_m(t)] = 1 - \prod_{k=0}^{m}[1 - P_k(t) \qquad (28)$$

Називатимемо елементи системи рівнонадійними, якщо для них

$$P_k(t) = P(t)\text{, k= 0,1,2,…,m.}$$

Для рівнонадійних елементів формули (27) і (28) спрощуються:

$$q_c(t) = q^{m+1}(t);$$

$$P_c(t) = 1 - [1 - P(t)]^{m+1}. \qquad (29)$$

За формулою (29) зручно знаходити число резервних елементів, якщо задані вірогідність відмови q(t) елемента і допустиме значення вірогідності відмови резервованої системи:

$$q^{m+1} \le Q^*,$$

тоді

$$m \ge \frac{\ln \frac{1}{Q^*}}{\ln \frac{1}{q}} - 1.$$

При експоненціальному законі надійність окремих елементів:

$$P_c(t) = e^{-\lambda_k t}.$$

Коли λ_k елементів достатньо малі,

$$q_k(t) = 1 - e^{-\lambda_k t} \approx \lambda_k t,$$

Тоді з формули (27) і (28) одержуємо:

$$q_c = \lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_m t^{m+1}; \qquad (30)$$

$$q_c \approx (\lambda t)^{m+1}. \qquad (31)$$

Наближені формули використовуються, коли задані інтенсивності відмов елементів. Вони показують, що для резервованої системи експоненціальний закон надійності не зберігається.

Середній час безвідмовної роботи резервованої системи визначається за формулою (9):

$$m_t = \int_0^\infty P_c(t) dt.$$

Для експоненціального закону надійності у разі рівнонадійних елементів

$$m_t = \int_0^\infty \left[1-\left(1-e^{-\lambda t}\right)^{m+1}\right]dt.$$

Вводячи змінну $x = 1 - e^{-\lambda t}$, інтеграл легко обчислити:

$$m_t = \frac{1}{\lambda}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{m+1}\right).$$

Одержані формули можна використовувати і у разі загального резервування системи. У формулах усюди під елементом до слід розуміти к-е послідовне з'єднання елементів, і функції, $q_k(t)$ і λ_k (k=0,1,2,…,m) слід розуміти як функції к-го ланцюга.

Так функція к-го ланцюга, що складається з n елементів, буде

$$P_k(t) = \prod_{l-1}^{n} P_{kl}(t),$$

де $P_{kl}(t)$ – функція l-го елемента к-го ланцюга.

Формула (28) для вірогідності безвідмовної роботи резервованої системи у разі загального резервування дає

$$P_{об}(t) = 1-\left[1-\prod_{i=1}^{n} P_{ol}(t)\right]\left[1-\prod_{e=1}^{n} P_{Il}(t)\right]\ldots\left[1-\prod_{l=1}^{n} P_{ml}(t)\right] = 1-\prod_{k=0}^{m}\left[1-\prod_{l=1}^{n} P_{kl}(t)\right]$$

При роздільному резервуванні системи (рис. 9) вірогідність безвідмовної роботи на підставі теореми множення вірогідності виражається формулою

$$P_{раз}(t) = \prod_{i=1}^{n}\left\{1-\prod_{k=0}^{m}\left[1-P_{lk}(t)\right]\right\},$$

де $P_{kl}(t)$ – функція к-го елемента l-ї резервованої групи.

Для рівнонадійних елементів системи $P_{kl}=P_{lk}=P$ одержані формули спрощуються:

$$P_{об}(t) = 1-\left[1-P^n(t)\right]^{m+1};$$

$$P_{раз}(t) = \left[1 - \left(1 - P(t)\right)^{m+1}\right]^{n} \qquad (32)$$

Задаючись конкретними значеннями, n і m можна знайти числові значення вірогідності безвідмовної роботи системи і виявити ефект того і іншого виду резервування.

На рис. 10 наведені графіки зміни вірогідності $P(t)$ системи із загальним і роздільним резервуванням залежно від числа n послідовних елементів ланцюга і m-кратності резервування при P=0,9

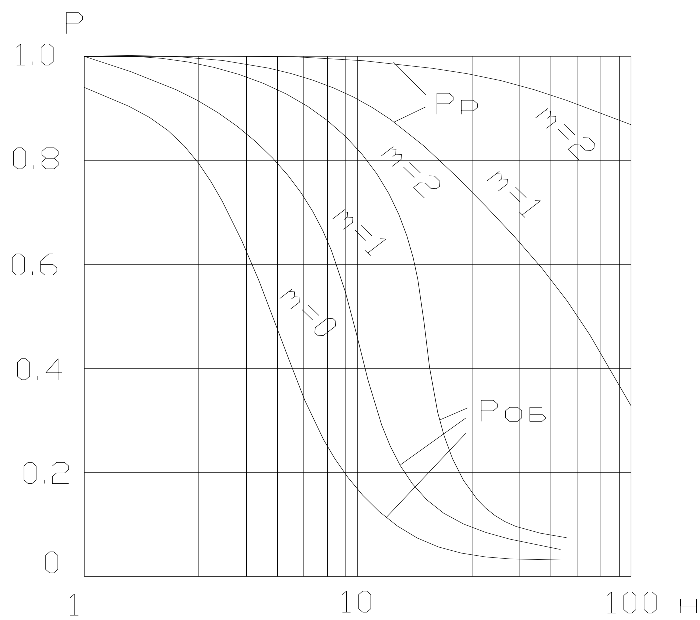

Рис.10 Графіки вірогідності безвідмовної роботи системи при роздільному і загальному резервуванні.

З графіків видно, що роздільне резервування є ефективнішим, ніж загальне і ефективність зростає із збільшенням числа n резервованих елементів і кратності резервування m.

При розгляді надійності резервованої системи, що складається з одного основного і m резервних елементів, передбачалося, що ця система працездатна, якщо не відмовив хоча б один з m+1 елементів.

У деяких резервованих системах характер роботи такий, що безвідмовна робота можлива тільки у разі, коли число елементів, що не відмовили, буде не менше ніж r з m+1.

Вірогідність безвідмовної роботи P_r такої резервованої системи з m+1 незалежних елементів знаходиться як вірогідність того, що деяка подія A в m+1 незалежних дослідах відбудеться не менше ніж r раз. Для рівнонадійних елементів

$$P_r = \sum_{k=r}^{m+1} C_{m+1}^{r} P^k q^{m+1-k}.$$

3 Розрахунок надійності систем при резервуванні заміщенням

При резервуванні заміщенням робота резервних елементів можлива в будь-якому з 3-х режимів: навантаженому, полегшеному і ненавантаженому.

У разі навантаженого резерву характеристики надійності резервованої системи визначаються по формулах для надійності при постійному резервуванні, але з урахуванням надійності перемикачів.

При навантаженому резерві загальна надійність системи з резервуванням заміщенням через відмови перемикачів буде нижчим, ніж при постійно включеному резерві. Тому спосіб резервування заміщенням доцільний тільки при полегшеному і ненавантаженому резервах.

4 Ненавантажений резерв

Розглянемо надійність системи, резервованої заміщенням, при ненавантаженому резерві. При цьому припустимо, що резервний елемент справний до моменту включення і його вірогідність безвідмовної роботи в робочому стані не залежить від часу перебування в неробочому стані.

Крім того, приймемо, що перемикач абсолютно надійний і заміна елемента, що відмовив, резервним відбувається миттєво.

Хай резервована система має один основний елемент і m резервних. Основний елемент, пропрацювавши випадковий час T_0, відмовляє і замінюється першим резервним елементом, що працює випадковий час T_1 і т.д. Останній резервний елемент, пропрацювавши випадковий час, відмовляє, а з ним відмовляє і вся резервна система.

Отже, тривалість безвідмовної роботи резервованої системи:

$$T = \sum_{k=0}^{m} T_k \, . \qquad (33)$$

Випадкові величини T_k (k=0,1,…,m) незалежні, і вірогідність відмови $q_c(t)$ системи є законом розподілу суми m+1 незалежних випадкових величин.

Середній час безвідмовної роботи резервованої системи знайдемо за формулою для математичного очікування суми випадкових величин

$$m_t = \sum_{k=0}^{m} M[T_k] = \sum_{k=0}^{m} m_k \ ,$$

де m_k – середній час безвідмовної роботи к-го елемента.

У разі експоненціального закону надійності елементів для визначення характеристик безвідмовності резервованої системи зручно використовувати теоретико-вірогідностну схему, відому під назвою «процесу загибелі». При цьому передбачається, що потік відмов підкоряється двом умовам.

1. Якщо до моменту t відбулося k відмов, то незалежно від моментів їх виникнення вірогідність того, що на нескінченно малій ділянці $(t_1 t + \Delta t)$ відбудеться одна відмова, рівна $\lambda_k \Delta t$, а вірогідність того, що відмова не відбудеться, рівна $1 - \lambda_k \Delta t + 0(\Delta t)$

2. В момент, коли відбувається (m+ 1) – й відмова, наступає відмова системи і ніяких змін в ній надалі не відбувається. Отже складемо для опису такого процесу систему диференціальних рівнянь. Вважатимемо, що процес у момент t знаходиться в стані k, якщо до цього моменту відбулося k відмов елементів системи. Позначимо P(t) – вірогідність того, що в момент t процес знаходиться в стані k.

Очевидно, $P_{m+1}=q_c(t)$ означає вірогідність того, що система відмовить до моменту t. За формулою повної вірогідності можна записати:

$$P_k(t+\Delta t) = P_{k-1}(t)\lambda_{k-1}\Delta t + P_k(t)\times(1-\lambda_k \Delta t) + 0(\Delta t)\,.$$

Початкові умови такі:

$$P_0(0)=1, P_k(0)=0 \ \text{при}\, \kappa \geq 1,$$

тобто до моменту t = 0 система була працездатна.

Переходячи до межі при $\Delta t \to 0$ одержимо систему диференціальних рівнянь:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda_0 P_0(t)\\
&\frac{dP_k(t)}{dt} = \lambda_{k-1}P_{k-1}(t) - \lambda_k P_k(t)\\
&k = 1,2,...,m;\\
&\frac{dP_{m+1(t)}}{dt} = \lambda_m P_m(t)
\end{aligned}\right\}$$

Вирішуючи цю систему рівнянь можна одержати точні і наближені формули для вірогідності відмови даної резервованої системи. На практиці зручно користуватися наближеними формулами. Так у разі високонадійних елементів резервованої системи (величини $\lambda_k t$ малі) застосовна наближена формула.

$$q_c(t) \approx \frac{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_m}{(m+1)!} t^{m+1} . \qquad (34)$$

Для рівно-надійних елементів має вигляд

$$q_c(t) \approx \frac{(\lambda t t)^{m+1}}{(m+1)!} . \qquad (35)$$

Порівнюючи формули (30), (31) і (34), (35) можна переконатися в тому, який виграш дає резервування заміщенням з використанням ненавантаженого резерву.

Якщо резервована система складається з великого числа малонадійних елементів (тобто $\lambda_k t$ кінцеві, а m велике), можна використовувати наближену формулу

$$q_c(t) \approx \frac{\lambda_0 \lambda 1_1 \ldots \lambda_m}{(m+1)!} t^{m+1} e^{-\sum_{k=0}^{m} \frac{\lambda_k}{m+1} t} .$$

Характеристики надійності резервованої системи можна обчислити і для випадку нормального закону розподілу часу безвідмовної роботи елементів.

Оскільки час T безвідмовної роботи системи рівний сумі (33) незалежних нормальних величин T, то закон розподілу часу T буде також нормальним з середнім значенням

$$m_t = \sum_{k=0}^{m} m_k$$

і дисперсією

$$\sigma_t^2 = \sum_{k=0}^{m} \sigma_k^2$$

Тоді вірогідність відмови резервованої системи

$$q(t) = \frac{1}{\sigma_t \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{(x-m_t)^2}{2\sigma_t^2}} dx = \frac{1}{2} + \phi(\frac{t-m_t}{\sigma_t}) ,$$

де Ф (x) – інтеграл вірогідності.

5 Полегшений резерв

Ненавантажений резерв дає значний виграш в надійності. Проте не завжди він може бути використаний, оскільки від моменту включення елемента до моменту його працездатного стану протікає перехідний процес. Якщо умови експлуатації такі, що вплив цього процесу на роботу системи істотний, то часто використовують полегшений резерв.

В цьому випадку вплив перехідного процесу знижується і система може безперервно працювати в режимі, близькому до нормального робочого, а надійність резервного елемента в неробочому стані вища його надійності в робочому стані.

При цьому для визначення характеристики надійності не можна скористатися схемою процесу загибелі, оскільки сумарна інтенсивність відмов, залежить не тільки від числа відмов, що відбулися до даного моменту, але і від того, які елементи відмовили.

Проте достатньо ефективні наближені формули для вірогідності відмови резервованої системи з одним основним і m резервованими елементами в режимі полегшеного резерву можна одержати, якщо для елементів і в робітнику і в неробочому стані справедливий експоненціальний закон надійності, а вірогідність безвідмовної роботи елемента в робочому стані не залежить від часу його перебування в неробочому стані.

Так, наближена формула для вірогідності відмови такої системи, аналогічна формулі (34), має вид

$$q_c(t) \approx \frac{\lambda_0(\lambda_1 + \lambda_1{}^0)(\lambda_2 + 2\lambda_2{}^0)\ldots(\lambda_m + m\lambda_m{}^0)}{(m+1)!} t^{m+1}, \qquad (36)$$

де $\lambda_\kappa(\kappa = 0,1,\ldots,m)$ – інтенсивність відмов к-го елемента в робочому режимі;

$\lambda_l^0(l = 1,2,\ldots.,m)$ - інтенсивність відмов l-го елемента в полегшеному режимі.

Ця формула дозволяє також визначити оптимальний порядок розташування резервних елементів, при якому вірогідність відмови резервованої системи є якнайменшою.

Можна показати, що оптимальний порядок задовольняє умові

$$\frac{\lambda_1^0}{\lambda_1} \ge \frac{\lambda_2^o}{\lambda_2} \ge \ldots \ge \frac{\lambda_m^0}{\lambda_m}$$

У разі рівно-надійних елементів формула (36) приймає вигляд

$$q_c(t) \approx \frac{\lambda(\lambda + \lambda^0)(\lambda + 2\lambda^0)\ldots(\lambda + m\lambda^0)}{(m+1)!} t^{m+1}, \qquad (37)$$

де λ і λ^0 – інтенсивність відмов елемента в робочому і полегшеному режимах.

6 Ковзаючий резерв

При ковзаючому резерві резервована система містить групи резервних елементів: основну групу з однакових елементів і групу резервних елементів (Рис. 11)

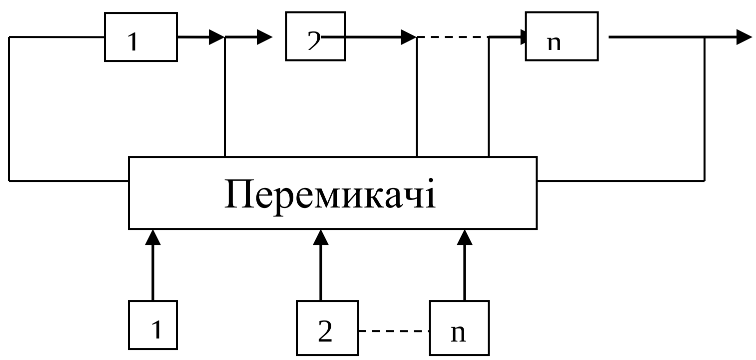

Рис. 11   Схема ковзаю чого резерву.

При відмові будь-якого елементу з основної групи він замінюється черговим з групи резервних елементів. Відмова резервованої системи в цілому наступає тоді, коли у момент відмови основного елементу резервних працездатних елементів немає (або використані раніше, або відмовили в резерві).

Для визначення характеристик надійності надійності системи при ковзаючому резервуванні розглянемо випадок навантаженого резерву з абсолютно надійними перемикачами.

Хай n-число основних елементів, а m-число резервних.

Резервована система буде працездатна в перебігу інтервалу (0, t) тоді і тільки тоді, коли за цей час відбудеться не більш m відмов елементів. Вірогідності такого стану резервованої системи з рівно-надійних елементів визначається на підставі біноміального розширення формулою:

$$P_c(t) = \sum_{k=0}^{m} c_{m+n}^{k} q^k(t) p^{n+m-k}(t)$$

де P(t) і q(t) - вірогідність безвідмовної роботи і вірогідність відмови елементу.

Середній час безвідмовної роботи резервованої системи з ковзаючим резервом:

$$m_t = \sum_{k=1}^{m+1} m_k$$

де m_k - середній час роботи резервованої системи від k-1 до к-го відмови. Інтенсивність к-го відмови системи, що складається з рівно-надійних елементів з інтенсивністю відмов λ, буде

$$\lambda_{k+1} = \lambda(n+m-k)$$

Тоді у разі експоненціального закону надійності середній час безвідмовної роботи резервованої системи.

$$m_t = \sum_{k=o}^{m} \frac{1}{\lambda_{k+1}} = \frac{1}{\lambda(n+m)} + \frac{1}{\lambda(n+m-1)} + \ldots + \frac{1}{\lambda_m}$$

У не навантаженому резерві характеристики безвідмовності резервованої системи мають в загальному випадку складні вирази.

Тут обмежимося розглядом цих характеристик при експоненціальному законі надійності рівно-надійних елементів системи. У такому разі розподіли моментів часу відмов підкоряється закону Пуассона з параметрами. Робота резервованої системи закінчується у момент (m+1) -ої відмови.

Для характеристик безвідмовності системи маємо наступні формули:
Вірогідність безвідмовної роботи

$$P_c(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(n\lambda t)^k}{k!} e^{-n\lambda t}$$

Вірогідність відмови

$$q_c(t) = 1 - \sum_{k=0}^{m} \frac{(nt\lambda)^k}{k!} e^{-nt\lambda}$$

Середній час безвідмовної роботи

$$m_t = \frac{m+1}{n\lambda}$$

7 Облік надійності перемикачів

Приведені вище формули для характеристик безвідмовності резервованих систем одержані в припущенні абсолютної надійності перемикачів. Для оцінки загальної надійності резервованих систем з перемикачами необхідно враховувати їх реальну надійність.

Розглянемо прості випадки визначення характеристик безвідмовності резервованих систем з урахуванням відмов перемикачів при наступних допущеннях: перемикач відмовляє тільки у момент включення, і вірогідність цієї відмови не залежить ні від номера резервного елементу, що включається, ні від часу роботи попередніх елементів; для кожного резервного елементу є свій перемикач, і він спрацьовує в не залежності від стані резервного елементу; якщо не спрацьовує даний перемикач, то в дію вступає наступний.

Хай резервована система складається з m+1 рівно-надійних перемикачів.

Позначимо подію, що полягає у тому, що за час роботи резервованої системи спрацювало рівно до перемикачів і m(k=0,1,2,…,m).

Вірогідність події обчислюється по формулі біноміального розподілу

$$P(H_k) = c_m^k q_n^{m-k} p_n^k \quad (38)$$

де p_n, q_n - вірогідність безвідмовної роботи і вірогідність відмови перемикання.

Якщо спрацювало до перемикачів, то відмова резервованої системи (подія А) відбувається коли відмовляє k+1 елементів (один основний і до резервних).

Умовна вірогідність такої події $P\left(\frac{A}{H_k}\right)$ рівна вірогідності відмови резервованої системи, стан з одного основного і до резервних елементів з абсолютно надійними перемикачами:

$$P\left(\frac{A}{H_k}\right) = q_{ck}(t)$$

Тоді вірогідність відмови $q_{cn}(t)$ даної системи з урахуванням відмов перемикачів знайдемо по формулі повної вірогідності

$$q_{cn}(t) = \sum_{k=0}^{m} P(H_k) P(A/H_k) = \sum_{k=0}^{m} P(H_k) q_{ck}(t)$$

Вірогідність $q_{ck}(t)$ визначаємо по формулі (31), (34) і (35), прийнявши в них m=k.

Так, у разі навантаженого резерву ця формула для вірогідності відмови даної резервованої системи з урахуванням виразів (31) і формули (38) прийме вигляд

$$q_{cn} = \sum_{k=0}^{m} c_m^k q_n^{m-k} p_n^k q^{k+1} = q(p_n q + q_n)^m$$

де $q = \lambda t$

Оскільки $(P_n q + q_n) < 1$, то вірогідність відмови резервованої системи прагне до нуля із зростанням номера m. Отже, збільшуючи кратність резервування, можна добитися скільки завгодно високої надійності системи.

8 **Розрахунок надійності системи з відновлюваним резервом**

Резервування заміщенням дає можливість відновлювати елементи, що відмовили, при цьому надійність системи з відновлюваним резервом значно підвищується.

Характеристики надійності резервованої системи з відновленням у разі експоненціальних законів надійності і ремонтопридатності зручно визначати, використовуючи схему так званого процесу загибелі і розмноження. Розрізняють 2 рішення задачі визначення характеристик надійності в сталому процесі і починаючи з моменту включення системи.

Якщо процес у момент часу t знаходиться в змозі До, то за нескінченно малий час Δt він з вірогідністю $\lambda_k \Delta t + 0(\Delta t)$ перейде в стан (k+1), з $1 - (\lambda_k + M_k)\Delta t + 0(\Delta t)$ вірогідність залишається в змозі до.

З наявного стану 0 він може перейти в стан 1 з вірогідністю $\lambda_0 \Delta t$ і залишитися в стані 0 з вірогідністю $1 - \lambda_0 \Delta t + 0(\Delta t)$. Якщо число станів кінцеве і рівне n, то із стану n процес може перейти в стан (n-1) з вірогідністю $\mu_n \Delta t$ і залишитися в колишньому стані з вірогідністю . $1 - M_n \Delta t + 0(\Delta t)$

Такий процес називають процесом загибелі і розмноження.

Позначимо $P_к(t)$ вірогідність того, що у момент часу t процес знаходиться в змозі до.

Сталий процес при $t \to \infty$ описується системою рівнянь алгебри

$$\left.\begin{aligned} 0 &= -\lambda_0 p_0 + \mu_1 p_1 \\ 0 &= \lambda_{k-1} p_{k-1} - (\lambda_k + \mu_k) p_k + \mu_{k+1} p_{k+1} \\ 0 &= \lambda_{n-1} p_{n-1} - \mu_n p_n \end{aligned}\right\} \qquad (39)$$

де $P_k = \lim_{t \to \infty} P_k(t)$

$$\sum_{k=0}^{n} P_k(t) = 1 \tag{40}$$

Система (39) легко розв'язується.

Введемо позначення

$$\pi_k = \mu_k p_k - \lambda_{k-1} p_{k-1}$$

Систему рівнянь (39) з обліком запишемо у вигляді
K=1,2,…,n-1; $\pi_0 = 0; \pi_k - \pi_{k-1} = 0; \pi_n = 0$
Звідси, $\mu_k \neq 0$ то

$$P_k = \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} P_{k-1} \tag{41}$$

Рекуррентна формула (41) дає

$$P_k = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_k} P_0 = \theta_k P_0 \tag{42}$$

де

$$\theta = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_k} \tag{43}$$

Величина P_0 визначається з рівності (40) з урахуванням формули (42)

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_k}}$$

або обліком рівності (43)

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{s=0}^{n} \theta_s}$$

Тоді (44)

$$P_k = \frac{\theta_k}{\sum_{s=0}^{n} \theta_s}, \theta = 1_0$$

Під станом до системи розумітимемо такий її стан, коли число елементів системи, що відмовили, рівне до.

Тоді, якщо для кожного стану до системи загальна інтенсивність відмов λ_k і загальна інтенсивність відновлення μ_k залежить не від безлічі елементів, що відмовили, а тільки від їх числа, система описується процесом загибелі і розмноження і одержані вище результати можна використовувати для розрахунку її характеристик надійності.

Розглянемо, наприклад, резервовану систему з ковзаючим резервом, що складається з l основних елементів і m резервних равнонадійних. Число станів системи k=0,1,2,…,m, m+1; при $k \geq m+1$ роботи системи припиняється, наступає її відмова.

Хай загальна інтенсивність відмов $\lambda_k = l\lambda$ (λ - інтенсивність відмов окремих елементів) а загальна інтенсивність відновлення $\mu_k = \mu$, тобто не залежить від числа елементів, що відмовили. Тоді по формулі (44) знайдемо вірогідність того, що система матиме рівно до елементів, що відмовили

$$P_k = \frac{\left(\frac{l\lambda}{\mu}\right)^k}{\sum_{s=0}^{m+1} \left(\frac{l\lambda}{\mu}\right)^s}$$

Дана система знаходитиметься в працездатному стані якщо число елементів, що відмовили, не перевершить число резервних, в сталому режимі вірогідність працездатного стану системи у будь-який момент часу, тобто сталої коефіцієнт готовності системи, визначається формулою

$$P_r = \sum_{k=0}^{m} P_k \frac{\sum_{k=0}^{m} \left(\frac{l\lambda}{\mu}\right)^k}{\sum_{s=0}^{m+1} \left(\frac{l\lambda}{\mu}\right)^{s^0}}$$

Вірогідність безвідмовної роботи системи в перебігу заданого інтервалу часу може бути знайдена з рішення задачі в несталому режимі. Ряд окремих випадків такого рішення приведений в літературі (Гнеденко б. У. і ін. Математичні методи в теорії надійності. Наука 1965 сторінка 524)

У результаті помітимо, що резервування дозволяє з малонадійних елементів проектувати надійні системи, проте при підвищенні надійності системи резервуванням погіршуються деякі інші її властивості, наприклад збільшується маса, вартість і ускладнюються умови експлуатації.

Резервування не є єдиним способом збільшення надійності систем.

Надійність можна підвищити, наприклад шляхом зниження інтенсивності відмов системи за рахунок застосування найнадійніших елементів, вибору оптимальних режимів і простих конструктивних рішень. Ці заходи дають особливо високий ефект для систем тривалого користування.

Раціональний рівень надійності системи можна вибрати тільки на основі оцінки її загальної ефективності.