Підготовка до контрольної роботи з математичного аналізу

Контрольна робота складається з 3 завдань.

Завдання №1. Довести рівність.

Для доведення рівностей використовується метод математичної індукції. Алгоритм цього методу складається з 3 етапів.

1. Перевіряємо істинність рівності при $n=1$.

2. Допускаємо істинність рівності при довільному $n=k$.

3. Доводимо, що з істинності рівності при довільному $n=k$ випливає її істинність при наступному значенні $n=k+1$.

Приклад. Довести рівність $\left(1-\frac{2}{2\cdot 3}\right)\left(1-\frac{2}{3\cdot 4}\right)\ldots\left(1-\frac{2}{(n+1)(n+2)}\right)=\frac{n+3}{3(n+1)}$.

Доведення. 1. Перевіряємо істинність рівності при $n=1$. Підставивши $n=1$ у ліву частину рівності, отримуємо: $1-\frac{2}{2\cdot 3}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$. При $n=1$ права частина $\frac{1+3}{3(1+1)}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$. Отже, ліва частина рівності дорівнює її правій частині, при $n=1$ рівність істинна.

2. Нехай рівність вірна при $n=k$, тобто

$$\left(1-\frac{2}{2\cdot 3}\right)\left(1-\frac{2}{3\cdot 4}\right)\ldots\left(1-\frac{2}{(k+1)(k+2)}\right)=\frac{k+3}{3(k+1)}.$$

3. Доведемо, що звідси випливає істинність рівності при $n=k+1$, тобто

$$\left(1-\frac{2}{2\cdot 3}\right)\left(1-\frac{2}{3\cdot 4}\right)\ldots\left(1-\frac{2}{(k+1)(k+2)}\right)\left(1-\frac{2}{(k+2)(k+3)}\right)=\frac{k+4}{3(k+2)}.$$

При $n=k+1$ отримуємо:

$$\left(1-\frac{2}{2\cdot 3}\right)\left(1-\frac{2}{3\cdot 4}\right)\ldots\left(1-\frac{2}{(k+1)(k+2)}\right)\left(1-\frac{2}{(k+2)(k+3)}\right)=\frac{k+3}{3(k+1)}\cdot\left(1-\frac{2}{(k+2)(k+3)}\right)=$$

$$=\frac{k+3}{3(k+1)}\cdot\frac{(k+2)(k+3)-2}{(k+2)(k+3)}=\frac{k+3}{3(k+1)}\cdot\frac{k^2+5k+4}{(k+2)(k+3)}=\frac{k+3}{3(k+1)}\cdot\frac{(k+1)(k+4)}{(k+2)(k+3)}=\frac{k+4}{3(k+2)}.$$

Отже, з істинності рівності при довільному $n=k$ випливає її істинність при наступному значенні $n=k+1$. Згідно з методом математичної індукції рівність істинна $\forall n\in\mathbb{N}$.

Завдання № 2. Довести рівність множин.

Для доведення рівності множин використовуються наступні основні формули.

1. $A \cup B = B \cup A$.
2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$.
3. $(A \subset B) \Rightarrow (A \cup B = B)$.
4. $A \cup A = A$.
5. $A \cup \varnothing = A$.
7. $A \cap B = B \cap A$.
8. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$.
9. $(A \subset B) \Rightarrow (A \cap B = A)$.
10. $A \cap \varnothing = \varnothing$.
11. $A \cap A = A$.
12. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
13. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
14. $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

15. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

16. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Приклад. Довести рівність множин: $(B \setminus A) \cup (C \setminus A) = (B \cup C) \setminus A$.

Доведення. Для доведення рівності потрібно, використовуючи основні формули, перетворити ліву частину рівності до правої або праву частину рівності до лівої. Можна також показати, що обидві частини рівності дорівнюють одній і тій же множині. У даному прикладі перетворимо праву частину рівності до лівої.

$$(B \cup C) \setminus A = (B \cup C) \cap \overline{A} = (B \cap \overline{A}) \cup (C \cap \overline{A}) = (B \setminus A) \cup (C \setminus A).$$

Тут ми використали формули (14) та (12).

Завдання № 3. Знайти $\inf f(x)$ та $\sup f(x)$ для заданої функції $f(x)$.

Якщо числова множина має вигляд $E = [a;b]$, $E = (a;b)$, $E = (a;b]$, $E = [a;b)$, де $a < b$, то $\inf E = a$, $\sup E = b$. Якщо у інтервалі $(a;b)$ $a = -\infty$ ($b = +\infty$), то маємо $\inf E = -\infty$ ($\sup E = +\infty$).

Алгоритм знаходження точної нижньої межі та точної верхньої межі функції ($\inf f(x)$ та $\sup f(x)$) складається з двох етапів.

1. Знаходимо множину $E(f)$ значень функції $f(x)$. Для цього використовуємо властивості функцій або їх графіки.
2. Знаходимо $\inf f(x) = \inf E(f)$ та $\sup f(x) = \sup E(f)$.

Приклад 1. Знайти $\inf f(x)$ та $\sup f(x)$, якщо задана функція $f(x) = 2\cos^4 x + 3$.

Розв'язання. $-1 \le \cos x \le 1$, $0 \le \cos^4 x \le 1$, $0 \le 2\cos^4 x \le 2$, $3 \le 2\cos^4 x + 3 \le 5$. Отже, $E(f) = [3; 5]$.

$\inf f(x) = 3$, $\sup f(x) = 5$.

Приклад 2. Знайти $\inf f(x)$ та $\sup f(x)$, якщо $f(x) = \dfrac{1}{2x^2 + 12x + 20}$.

Розв'язання. $f(x) = \dfrac{1}{2x^2 + 12x + 20} = \dfrac{1}{2\left(x^2 + 6x + 10\right)} = \dfrac{1}{2\left(x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 + 1\right)} = \dfrac{1}{2\left((x+3)^2 + 1\right)}$.

Очевидно, що найменшого значення знаменник досягає при $x = -3$, тоді він дорівнює 2. Якщо $x \to +\infty$ або $x \to -\infty$ знаменник прямує до $+\infty$, отже, $f(x) \to 0$. При цьому для всіх значень x $f(x) > 0$.

Маємо: $f(-3) = \dfrac{1}{2}$. Отже, $E(f) = \left(0; \dfrac{1}{2}\right]$, тому $\inf f(x) = 0$, $\sup f(x) = \dfrac{1}{2}$.

Приклад 3. Знайти $\inf f(x)$ та $\sup f(x)$, якщо $f(x)=\begin{cases} 2, x<0; \\ e^{-x}+1, x\ge 0. \end{cases}$.

Розв'язання. При $x<0$ $\min f(x)=\max f(x)=2$. При $x\ge 0$ $e^{-x}+1$ спадає від 2 до 1, при цьому значення 1 функція наближається до 1 , але не досягає цього значення. Отже, $E(f)=(1;2]$, $\inf f(x)=1$, $\sup f(x)=2$.

У деяких варіантах зустрічаються гіперболічні функції, Згадаємо, що $f(x)=\mathrm{sh}\, x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$, $f(x)=c\mathrm{h}\, x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$.