Тема. Апроксимування експериментальних даних функціями двох змінних методом найменших квадратів. Побудова виробничої функції Коба-Дугласа.

§1. Апроксимування експериментальних даних функціями двох змінних методом найменших квадратів

Постановка задачі. Розглянемо сукупність точок на площині $\left\{\left(x_k, y_k z_k\right)\right\}_{k=1}^{n}$, де $z_k = f(x_k, y_k), k = \overline{1,n}$. Тут функція двох змінної $f(x, y)$ визначає експериментальні дані. Потрібно знайти емпіричну функцію

$$z = \tilde{f}\left(x, y, a_1, a_2, ..., a_m\right), \tag{1}$$

що апроксимує задану множину точок і визначається невідомими параметрами $a_1, a_2, ..., a_m$, при цьому їх кількість $m \ll n$. (Якщо $m = n$, то функція (1) є інтерполюючою) Відхилення в кожній точці визначається як

$$\varepsilon_k = \left|\tilde{f}\left(x_k, y_k, a_1, a_2, ..., a_m\right) - z_k\right| = \left|\tilde{f}\left(x_k, y_k, a_1, a_2, ..., a_m\right) - f(x_k, y_k)\right|,\ k = \overline{1,n}. \tag{2}$$

Формула $\varepsilon = \sum\limits_{k=1}^{n}\left(\varepsilon_k\right)^2$ задає *квадратичне відхилення*. А метод, що дозволяє знайти апроксимуючу функцію (1), яка відповідає мінімальному значенню квадратичного відхилення, є *методом найменших квадратів (МНК).*

Трипараметричне точкове квадратичне апроксимування функції двох змінної лінійною функцією

Розглянемо сукупність точок в просторі $\left\{\left(x_k, y_k, z_k\right)\right\}_{k=0}^{n}$, де $z_k = f(x_k, y_k), k = \overline{0,n}$. За емпіричну функцію оберемо лінійну функцію

$$z = P\left(x, y, a_0, a_1, a_2\right) = a_0 + a_1 x + a_2 y . \tag{1a}$$

Квадратичне відхилення визначається формулою

$$Q\left(a_0, a_1, a_2\right) = \sum_{k=0}^{n}\left(P\left(x_k, y_k, a_0, a_1, a_2\right) - z_k\right)^2 = \sum_{k=0}^{n}\left(a_0 + a_1 x_k + a_2 y_k - z_k\right)^2. \tag{4}$$

Потрібно знайти мінімум зазначеної функції.
Знайдемо критичну точку функції ТРЬОХ змінних Q:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial Q}{\partial a_0} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(a_0 + a_1 x_k + a_2 y_k - z_k\right)\cdot 1 = 0; \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial Q}{\partial a_1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(a_0 + a_1 x_k + a_2 y_k - z_k\right)\cdot x_k = 0; \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial Q}{\partial a_2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(a_0 + a_1 x_k + a_2 y_k - z_k\right)\cdot y_k = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Отриману систему можна переписати у вигляді

$$
\begin{cases}
a_0 \cdot (n+1) + a_1 \cdot \sum_{k=0}^{n} x_k + a_2 \cdot \sum_{k=0}^{n} y_k = \sum_{k=0}^{n} z_k; \\
a_0 \cdot \sum_{k=0}^{n} x_k + a_1 \cdot \sum_{k=0}^{n} \left(x_k\right)^2 + a_2 \cdot \sum_{k=0}^{n} x_k y_k = \sum_{k=0}^{n} x_k z_k; \\
a_0 \cdot \sum_{k=0}^{n} y_k + a_1 \cdot \sum_{k=0}^{n} x_k y_k + a_2 \cdot \sum_{k=0}^{n} \left(z_k\right)^2 = \sum_{k=0}^{n} y_k z_k.
\end{cases} \tag{6}
$$

Уведемо матриці

$$
M = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & y_0 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & y_n \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_m \end{pmatrix}. \tag{7}
$$

Система (6) може бути поданою у матричному вигляді в наступний спосіб:

$$
M^t M A = M^t Z, \tag{8}
$$

а її розв’язок –

$$
A = \left(M^t M\right)^{-1} M^t Z. \tag{9}
$$

Якщо точки попарно нерівні, то визначник добутку матриць, $M^t M$, не дорівнює нулю. Це означає існування єдиного розв’язку СЛАР (6). До того ж, унаслідок невід’ємності квадратичного відхилення, цей розв’язок може відповідати лише точці локального мінімуму функції Q.

§2. Побудова виробничої функції Коба-Дугласа.

Производственная функция представляет собой математическую модель, характеризующую зависимость объёма выпускаемой продукции от объёма трудовых и материальных затрат. Модель может быть построена как для отдельной фирмы и отрасли, так и для всей национальной экономики.

Производственная функция характеризует техническую зависимость между ресурсами и выпуском и описывает всю совокупность технологически эффективных способов. Каждый способ может быть описан своей производственной функцией.

В микроэкономике используется большое количество самых разнообразных функций производства, но чаще всего двухфакторные функции вида $Z = F(x, y)$, которые легче анализировать в силу возможности их графического представления.

Среди двухфакторынх функций наибольшую известность получила функция Кобба–Дугласа. Впервые она была предложена Кнутом Викселлем. В 1928 году функция проверена на статистических данных Чарльзом Коббом (Charles Cobb) и Полом Дугласом (Paul Douglas), а результаты проверки изложены в статье «Теория производства», в ней была предпринята попытка эмпирическим путём определить влияние затрачиваемого капитала и труда на объём выпускаемой продукции в обрабатывающей промышленности США. Общий вид функции:

$$q = ax^{\alpha}y^{\beta},$$

здесь a, α, β — положительные константы, причём a — технологический коэффициент, α — коэффициент эластичности по труду, β — коэффициент эластичности по капиталу; q — объём выпускаемой продукции; x, y — количество используемых ресурсов (обычно рассматривают труд и капитал).

Если сумма показателей степени $(\alpha + \beta)$ равна единице, то функция Кобба–Дугласа является линейно однородной, то есть она демонстрирует постоянную отдачу при изменении масштабов производства. Если сумма показателей степени больше единицы, функция отражает возрастающую отдачу, а если меньше единицы, — убывающую. Изокванта, соответствующая функции Кобба–Дугласа, будет выпуклой и «гладкой». Впервые производственная функция была рассчитана в 1920-х годах для обрабатывающей промышленности США и представляло собой равенство

$$q \sim x^{0,73} y^{0,27}.$$

Пусть известна исходная статистическая информация за ряд лет:
(q_i, x_i, y_i), $i = \overline{1, N}$. Требуется определить параметры производственной функции a, α, β так, чтобы она наилучшим образом описывала статистические данные.

Прологарифмируем левую и правую части функции Кобба–Дугласа:

$$\ln q = \ln a + \alpha \ln x + \beta \ln y,$$

Позначимо

$$A_0 = \ln a, \ A_1 = \alpha, \ A_2 = \beta,$$

$$Z_i = \ln q_i, \ X_i = \ln x_i, \ Y_i = \ln y_i.$$

Отримаємо сукупність точок в просторі $\left\{\left(X_i, Y_i, Z_i\right)\right\}_{i=0}^{N}$, де $Z_i = f(X_i, Y_i), i = \overline{0, N}$. За емпіричну функцію оберемо лінійну функцію

$$Z = P\left(X, Y, A_0, A_1, A_2\right) = A_0 + A_1 X + A_2 Y .$$

Після застосування МНК буде отримано точку мінімуму $\left(A_0, A_1, A_2\right)$ квадратичного відхилення, звідки можна знайти параметри функції Коба-Дугласа:

$$a = e^{A_0}, \ \alpha = A_1, \ \beta = A_2 .$$