ТЕМА. Розв’язання крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь методом найменших квадратів

Розглянемо крайову задачу для звичайного диференціального рівняння другого порядку

$$L(y) \equiv y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \tag{1}$$

$$\Gamma_a(y) \equiv \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A, \quad \Gamma_b(y) \equiv \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B, \tag{2}$$

де функції $p(x), q(x), f(x)$ – неперервні на $[a;b]$, $|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0,\ |\beta_0| + |\beta_1| \neq 0$.

Розглянемо систему лінійно незалежних функцій

$$\left\{u_j(x)\right\}_{j=0}^{n},$$

яка утворюється з таких функцій, що

- $u_0(x)$ задовольняє ті самі крайові умови (2), що і невідома функція $y(x)$,
- $u_1(x), u_2(x), ..., u_n(x)$ – однорідні крайові умови.

Тобто

$$\Gamma_a(u_0) = A,\ \Gamma_b(u_0) = B, \tag{3}$$

$$\Gamma_a(u_j) = 0,\ \Gamma_b(u_j) = 0 \text{ при } j = \overline{1,n}. \tag{4}$$

Для прикладу, якщо крайова умова має вигляд

$$y(a) = A, \quad y(b) = B,$$

то за потрібну систему можна обрати

$$u_0(x) = A + \frac{B-A}{b-a}(x-a), \; u_j(x) = (x-a)^j (x-b) \quad j = \overline{1,n}$$

або

$$u_0(x) = A + (B-A)\sin\frac{\pi(x-a)}{2(b-a)}, \; u_j(x) = \sin\frac{\pi j(x-a)}{2(b-a)} \quad j = \overline{1,n}$$

залежно від вигляду функцій $p(x), q(x), f(x)$ і передбачуваного вигляду розв'язку даної крайової задачі.

Наближений розв'язок крайової задачі (1), (2) подається сумою

$$\bar{y}(x) = u_0(x) + \sum_{j=1}^{n} C_j u_j(x), \tag{5}$$

в якій коефіцієнти $\left\{C_j\right\}_{j=1}^{n}$ підлягають визначенню.

Розглянемо нев'язку

$$R(x, C_1, C_2, ..., C_n) = L(\bar{y}) - f(x) = L(u_0) - f(x) + \sum_{j=1}^{n} C_j L(u_j). \tag{6}$$

Дана нев'язка у всіх точках $x \in [a;b]$ за абсолютним значенням повинна бути близькою до 0.

Інтегральний МНК передбачає мінімізацію квадратичного відхилення, що подається інтегралом

$$Q(C_1, C_2, ..., C_n) = \int_a^b R^2(x, C_1, C_2, ..., C_n)\, dx. \tag{7}$$

Шукана точка локального мінімуму функції n змінних $Q(C_1, C_2, ..., C_n)$ може бути знайденою із системи рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial C_1} = \int_a^b R\frac{\partial R}{\partial C_1}\, dx = 0; \\ \frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial C_2} = \int_a^b R\frac{\partial R}{\partial C_2}\, dx = 0; \\ ... \\ \frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial C_n} = \int_a^b R\frac{\partial R}{\partial C_n}\, dx = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Наведене система є СЛАР, яка має єдиний розв'язок.

Точковий МНК початково передбачає розбиття відрізку $[a;b]$ на m рівних частин точками

$$x_k = a + \frac{b-a}{m}k,\ \ k = \overline{1,m}\,, \tag{9}$$

де $m > n$. Випадок $m = n$ відповідає методу колокацій.

Квадратичне відхилення у цьому випадку визначається сумою, що утворюється із значень квадратів нев'язки в точках розбиття. А саме:

$$Q(C_1, C_2, ..., C_n) = \sum_{k=1}^{m} R^2(x_k, C_1, C_2, ..., C_n)\,.$$

Саме воно й підлягає мінімізації. Точку мінімуму шукає мого описаним вище методом.