ТЕМА Наближене розв’язання інтегральних рівнянь

§1 Інтегральні рівняння Фредгольма другого роду. Основні поняття

Розглянемо інтегральне рівняння виду

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)\, y(s)\, ds - f(x) = 0, \qquad (1)$$

В ньому
невідома функція – це $y(x)$,
відомими є

- $\lambda = const \in \square$ – *параметр* інтегрального рівняння,
- функція $f(x)$, яку називають *вільним членом*,
- функція $K(x,s)$ – *ядро* інтегрального рівняння.

Таке рівняння називають інтегральним рівнянням другого роду. Воно є лінійним, оскільки невідома функція входить в нього лінійно.

Розрізняють ітераційні та не ітераційні методи наближеного розв’язання інтегральних рівнянь.

§2 Ітераційний метод розв'язання інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду: метод послідовних наближень

Ідея методу послідовних наближень (МПН).

Крок 0. За нульове наближення $y_0(x)$ можна обрати будь-яку функцію із простору розв'язків. Таким простором може бути $C_{[a;b]}$ або $L_2[a;b]$. Однак,як правило обирають

$$y_0(x) = f(x). \tag{2}$$

Крок 1. Перше наближення (перша ітерація):

$$y_1(x) = \lambda \int_a^b K(x,s)\, y_0(s)\, ds + f(x).$$

Крок 2. Друге наближення (друга ітерація):

$$y_2(x) = \lambda \int_a^b K(x,s)\, y_1(s)\, ds + f(x).$$

Крок n. n-е наближення (n-а ітерація):

$$y_n(x) = \lambda \int_a^b K(x,s)\, y_{n-1}(s)\, ds + f(x). \tag{3}$$

$$\ldots$$

Питання? Чи збігається послідовність наближених розв'язків до точного?
Відповідь на це питання не завжди позитивна!

МПН може бути застосований у наступних випадках.

Випадок 1 Розв'язок шукаємо у просторі $C_{[a;b]}$**.** Якщо функції $f(x)$ і $K(x,s)$ неперервні на відрізку $[a;b]$ або на квадраті $[a;b]\times[a;b]$ відповідно, тобто $f(x)\in C_{[a;b]}$ і $K(x,s)\in C_{[a;b]\times[a;b]}$,, тоді єдиний розв'язок рівняння (1) у просторі $C_{[a;b]}$ можна знайти методом послідовних наближень, а послідовність наближених розв'язків буде збігатися до точного розв'язку рівняння (1), якщо

$$|\lambda|<\frac{1}{M(b-a)}, \tag{4}$$

де

$$M=\max_{\substack{a\le x\le b\\ a\le s\le b}}|K(x,s)|. \tag{5}$$

Випадок 2 Розв'язок шукаємо у просторі $L_2[a;b]$**.** Якщо $f(x)\in L_2[a;b]$ і $K(x,s)\in L_2([a;b]\times[a;b])$, тоді єдиний розв'язок рівняння (1) у просторі $L_2[a;b]$ можна знайти методом послідовних наближень, якщо

$$|\lambda|<\frac{1}{B}, \tag{6}$$

де

$$B=\sqrt{\int_a^b\int_a^b K^2(x,s)\,dx\,ds}\,. \tag{7}$$

§3 Неітераційні методи розв’язання інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду

До таких методів відносять:

- метод найменших квадратів;
- метод колокацій;
- метод моментів.

Розглянемо інтегральне рівняння

$$R(y) \equiv y(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)\, y(s)\, ds - f(x) = 0, \tag{1a}$$

Всі зазначені методи беруть початок з вибору системи лінійно незалежних функцій

$$\left\{ u_j(x) \right\}_{j=0}^{n},$$

Функції системи називають *координатними функціями*.
Наближений розв’язок рівняння (1a) подається сумою

$$\overline{y}_n(x) = u_0(x) + \sum_{j=1}^{n} C_j u_j(x), \tag{8}$$

в якій коефіцієнти $\left\{ C_j \right\}_{j=1}^{n}$ підлягають визначенню.

Розглянемо нев'язку

$$R(\overline{y}_n)=W(x,C_1,C_2,...,C_n,\lambda)=\overline{y}_n(x)-\lambda\int_a^b K(x,s)\,\overline{y}_n(s)\,ds-f(x)=$$
$$=u_0(x)+\sum_{j=1}^{n}C_j u_j(x)-\lambda\int_a^b K(x,s)\left[u_0(s)+\sum_{j=1}^{n}C_j u_j(s)\right]ds-f(x). \qquad (9)$$

Уведемо позначення

$$\varphi_0(x,\lambda)=u_0(x)-\lambda\int_a^b K(x,s)\,u_0(s)\,ds-f(x);$$
$$\varphi_j(x,\lambda)=u_j(x)-\lambda\int_a^b K(x,s)\,u_j(s)\,ds,\quad j=\overline{1,n}.$$

Тоді нев'язку (9) можна переписати у вигляді

$$R(\overline{y}_n)=W(x,C_1,C_2,...,C_n,\lambda)=\varphi_0(x,\lambda)+\sum_{j=1}^{n}C_j\varphi_j(x,\lambda)\,. \qquad (10)$$

Метод найменших квадратів (інтегральний) передбачає мінімізацію квадратичного відхилення, що подається інтегралом

$$Q(C_1,C_2,...,C_n,\lambda)=\int_a^b W^2(x,C_1,C_2,...,C_n,\lambda)\,dx=\int_a^b\left[\varphi_0(x,\lambda)+\sum_{j=1}^n C_j\varphi_j(x,\lambda)\right]^2 dx\,. \qquad (11)$$

Шукана точка локального мінімуму функції n змінних $Q(C_1,C_2,...,C_n)$ може бути знайденою із системи рівнянь:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial Q}{\partial C_1}=\displaystyle\int_a^b W\dfrac{\partial W}{\partial C_1}\,dx=\int_a^b\left[\varphi_0(x,\lambda)+\sum_{j=1}^n C_j\varphi_j(x,\lambda)\right]\varphi_1(x,\lambda)\,dx=0;\\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial Q}{\partial C_2}=\displaystyle\int_a^b W\dfrac{\partial W}{\partial C_2}\,dx=\int_a^b\left[\varphi_0(x,\lambda)+\sum_{j=1}^n C_j\varphi_j(x,\lambda)\right]\varphi_2(x,\lambda)\,dx=0;\\ \ldots\\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial Q}{\partial C_n}=\displaystyle\int_a^b W\dfrac{\partial W}{\partial C_n}\,dx=\int_a^b\left[\varphi_0(x,\lambda)+\sum_{j=1}^n C_j\varphi_j(x,\lambda)\right]\varphi_n(x,\lambda)\,dx=0.\end{cases} \qquad (12)$$

Уведення позначень $\left(\varphi_k,\varphi_l\right)=\int_a^b\varphi_k(x,\lambda)\,\varphi_l(x,\lambda)\,dx$ приводить до системи

$$\begin{cases} C_1\cdot(\varphi_1,\varphi_1)+C_2\cdot(\varphi_1,\varphi_2)+\ldots+C_i\cdot(\varphi_1,\varphi_i)+\ldots+C_n\cdot(\varphi_1,\varphi_n)=-(\varphi_0,\varphi_1); \\ C_1\cdot(\varphi_2,\varphi_1)+C_2\cdot(\varphi_2,\varphi_2)+\ldots+C_i\cdot(\varphi_2,\varphi_i)+\ldots+C_n\cdot(\varphi_2,\varphi_n)=-(\varphi_0,\varphi_2); \\ C_1\cdot(\varphi_3,\varphi_1)+C_2\cdot(\varphi_3,\varphi_2)+\ldots+C_i\cdot(\varphi_3,\varphi_i)+\ldots+C_n\cdot(\varphi_3,\varphi_n)=-(\varphi_0,\varphi_3); \\ \ldots \\ C_1\cdot(\varphi_j,\varphi_1)+C_2\cdot(\varphi_j,\varphi_2)+\ldots+C_i\cdot(\varphi_j,\varphi_i)+\ldots+C_n\cdot(\varphi_j,\varphi_n)=-(\varphi_0,\varphi_j); \\ \ldots \\ C_1\cdot(\varphi_n,\varphi_1)+C_2\cdot(\varphi_n,\varphi_2)+\ldots+C_i\cdot(\varphi_n,\varphi_i)+\ldots+C_n\cdot(\varphi_n,\varphi_n)=-(\varphi_0,\varphi_n). \end{cases} \tag{13}$$

Наведене система є СЛАР. Головна матриця системи є симетричною. Якщо її визначник не дорівнює нулю, то система (13) має єдиний розв’язок.

Ті значення параметра λ, при яких $D(\lambda)=0$ дозволяють знайти наближені власні значення $\{\overline{\lambda}_k\}_{k=1}^{n}$ інтегрального рівняння. Якщо розглянути $f(x)=0,$ $,u_0(x)=0,$ $\lambda=\overline{\lambda}_k$, то система (13) перетворюється на однорідну, з якої можна знайти наближені власні функції рівняння (1).

Метод моментів наближеного розв'язання інтегрального рівняння (1а).
Першою відмінністю є вибір функції $u_0(x) = f(x)$. Це призводить до зміни вигляду наближеного розв'язку

$$\overline{y}_n(x) = f(x) + \sum_{j=1}^{n} C_j u_j(x), \tag{14}$$

а також нев'язки:

$$\begin{gathered} R(\overline{y}_n) = W(x, C_1, C_2, ..., C_n, \lambda) = \\ = \sum_{j=1}^{n} C_j \left[u_j(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)\, u_j(s)\, ds \right] - \lambda \int_a^b K(x,s)\ f(s)\, ds. \end{gathered} \tag{15}$$

По-друге, невідомі коефіцієнти знаходимо із умови ортогональності нев'язки до координатних функцій:

$$\begin{cases} \int_a^b W(x, C_1, C_2, ..., C_n, \lambda)\, u_1(x, \lambda)\, dx = 0; \\ \int_a^b W(x, C_1, C_2, ..., C_n, \lambda)\, u_2(x, \lambda)\, dx = 0; \\ \ldots \\ \int_a^b W(x, C_1, C_2, ..., C_n, \lambda)\, u_n(x, \lambda)\, dx = 0. \end{cases} \tag{16}$$

Підставляючи (15) до системи (16), перепишемо систему у вигляді:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} C_j \left[\int_a^b u_i(x)\, u_j(x)\, dx - \lambda \int_a^b dx \int_a^b K(x,s)\, u_i(x)\, u_j(s)\, ds \right] = \\ \qquad = \lambda \int_a^b dx \int_a^b K(x,s)\, u_i(x)\; f(s)\, ds, \;\; i = \overline{1,n}. \end{cases} \tag{17}$$

В позначеннях

$$a_{i,j} = \int_a^b u_i(x)\, u_j(x)\, dx; \;\; b_{i,j} = \int_a^b dx \int_a^b K(x,s)\, u_i(x)\, u_j(s)\, ds;$$

$$g_i = \int_a^b dx \int_a^b K(x,s)\, u_i(x)\; f(s)\, ds$$

система (17) набуде вигляду:

$$\left\{ \sum_{j=1}^{n} C_j \left[a_{i,j} - \lambda b_{i,j} \right] = \lambda g_i, \;\; i = \overline{1,n}\,. \right. \tag{18}$$

Щодо існування єдиного розв’язку системи (18), який визначатиме наближений розв’язок інтегрального рівняння(1а), от висновки аналогічні до тих, що виписано для МНК.

Метод колокацій наближеного розв’язання інтегрального рівняння (1а) початково передбачає розбиття відрізку $[a;b]$ на n рівних частин точками

$$x_k = a + \frac{b-a}{n}k,\ \ k = \overline{1,n}. \tag{19}$$

Тобто кількість точок, що обирається дорівнює кількості невідомих коефіцієнтів НА ВІДМІНУ ВІД ТОЧКОВОГО МНК для диференціальних рівнянь.
Сутність методу полягає в пошуку тих коефіцієнтів, за яких нев’язка дорівнює нулю в кожній із точок розбиття (19). Тобто система відносно невідомих коефіцієнтів набуде вигляду:

$$\left\{ W(x_k, C_1, C_2, ..., C_n, \lambda) = 0,\ \ k = \overline{1,n} \right. \tag{20}$$

або

$$\left\{ \sum_{j=1}^{n} C_j \varphi_j (x_k, \lambda) = -\varphi_0 (x_k, \lambda),\ \ k = \overline{1,n}. \right. \tag{21}$$

Щодо існування єдиного розв’язку системи (21), який визначатиме наближений розв’язок інтегрального рівняння(1а), от висновки аналогічні до тих, що виписано для МНК.
Питання про ***збіжність послідовності наближених розв’язків*** $\left\{ \overline{y}_n(x) \right\}$ ***інтегрального рівняння (1) до точного*** $y(x)$, *тобто* $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{y}_n(x) = y(x)$ *вимагає глибинних досліджень методами функціонального аналізу.*