

ИЗГИБ ТОНКИХ ПЛАСТИНОК

8. Основные соотношения

8.1. Определения и гипотезы

Пластинкой является тело, ограниченное двумя плоскостями, расстояние между которыми h , называемое толщиной пластинки, мало по сравнению с размерами оснований. Плоскость, делящая толщину пластинки пополам, называется *срединной плоскостью*. Линия пересечения срединной плоскости с боковыми гранями образует *контур пластинки*.

Оси x и y располагают в срединной плоскости, ось z направляют вниз. Изгиб пластинки вызывается нагрузкой, приложенной к основаниям перпендикулярно к срединной плоскости.

Тонкой считают пластинку, для которой $\frac{1}{80} \leq \frac{h}{a} \leq \frac{1}{5}$ (a – характерный размер основания), а ожидаемые прогибы w составляют не более $\frac{1}{4}h$.

При $\frac{h}{a} > \frac{1}{5}$ пластинку относят к толстым плитам, а при $\frac{w}{h} > \frac{1}{4}$ – к гибким пластинкам (мембранам).

Тонкие пластинки рассчитывают по так называемой технической теории. Она базируется на следующих *гипотезах Кирхгофа*:

- *гипотеза прямой нормали*, в соответствии с которой нормаль к срединной плоскости остается прямой и нормальной к изогнутой срединной поверхности, длина ее не меняется;
- *гипотеза о нерастяжимости срединной плоскости*. На основании этой гипотезы считается, что срединная плоскость при изгибе не меняет своей формы и размеров;
- *гипотеза о ненадавливании слоев пластинки*: давление слоев пластинки друг на друга перпендикулярно срединной плоскости считается малым и им можно пренебречь.

В связи с тем, что расчет толстых плит существенно сложнее, считают, что по технической теории можно рассчитывать пластинки с отношением $\frac{h}{a}$ до $\frac{1}{3}$.

8.2. Перемещения и деформации

На основании первой гипотезы Кирхгофа перемещения w всех точек одной нормали вдоль оси z одинаковы и соответствуют перемещениям точки на срединной плоскости. Эти перемещения называются прогибами срединной плоскости.

По той же гипотезе линейные деформации вдоль оси z отсутствуют:

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Также отсутствуют угловые деформации в плоскостях, перпендикулярных срединной плоскости:

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0; \quad \gamma_{zy} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Отсюда получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial x}; \quad \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial y}.$$

Проинтегрируем эти соотношения по толщине пластинки:

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} + f_1(x, y); \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y} + f_2(x, y).$$

и учтем, что по второй гипотезе Кирхгофа перемещения на уровне срединной плоскости отсутствуют:

$$u_0 = 0; \quad v_0 = 0.$$

Тогда при $z = 0$

$$u_0 = 0 + f_1(x, y) = 0; \quad v_0 = 0 + f_2(x, y) = 0$$

и окончательно имеем:

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x}; \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (76)$$

С учетом (76) формулы Коши для задачи изгиба тонкой пластинки принимают такой вид:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \\ \gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

Остальные деформации, как уже указывалось, отсутствуют.

Таким образом, все перемещения и деформации выражены через одну функцию w прогиба срединной плоскости.

8.3. Напряжения и усилия

На основании третьей гипотезы Кирхгофа напряжения $\sigma_z = 0$. Преобразуем формулы закона Гука (24):

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y); \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x).$$

Домножим второе равенство на ν и сложим с первым:

$$\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y = \frac{1-\nu^2}{E}\sigma_x,$$

откуда

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y).$$

Аналогичные преобразования дают

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x).$$

Подставляя деформации ε_x и ε_y из (77) получаем

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \\ \sigma_y &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

Касательные напряжения τ_{xy} получим из четвертой формулы (31) закона Гука с учетом (30) и (77):

$$\tau_{xy} = -\frac{Ez}{1+\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (79)$$

На основании первой гипотезы Кирхгофа из пятой и шестой формул (31) получаем

$$\tau_{yz} = 0; \quad \tau_{zx} = 0.$$

Однако это противоречит условиям равновесия. Действительно, при отсутствии объемной нагрузки из первого уравнения Навье следует:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = -\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}.$$

Подставим сюда напряжения из (78), (79):

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) + \frac{Ez}{1+\nu} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}$$

и после преобразований получаем:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{Ez}{1-\nu^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

или с учетом обозначения оператора Лапласа

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{Ez}{1-\nu^2} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w.$$

Проинтегрируем это выражение по z :

$$\tau_{xz} = \frac{Ez^2}{2(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w + f(x, y)$$

При отсутствии на основаниях пластинки касательной нагрузки имеем:

$$\text{при } z = \pm \frac{h}{2} \quad \tau_{xz} = 0.$$

Тогда

$$\frac{E\left(\frac{h}{2}\right)^2}{2(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w + f(x, y) = 0$$

и

$$f(x, y) = -\frac{E}{1-\nu^2} \frac{h^2}{8} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w.$$

Теперь выражение для τ_{xz} принимает такой вид:

$$\tau_{xz} = -\frac{E}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w.$$

Аналогичные преобразования второго уравнения Навье дают:

$$\tau_{yz} = -\frac{E}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w.$$

Таким образом, при изгибе тонкой пластинки в ее сечениях возникают следующие напряжения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \\ \sigma_y &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \\ \tau_{xy} &= -\frac{Ez}{1+\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \\ \tau_{xz} &= -\frac{E}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w; \\ \tau_{yz} &= -\frac{E}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w \end{aligned} \right\} \quad (80)$$

Как уже указывалось, напряжения σ_z считаются нулевыми.

Эпюры распределения напряжений по толщине пластинки приведены на рис. 10. Заметим, что характер распределения нормальных и касательных напряжений в сечениях пластинки аналогичен их распределению в балке при поперечном изгибе.

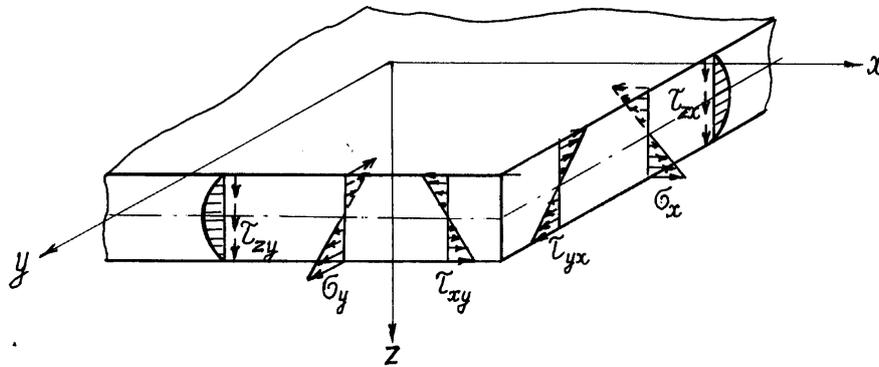


Рис. 10

Обратим внимание на то, что все напряжения, как и деформации, выражены через одну функцию прогибов $w(x, y)$.

Выделим элемент пластинки единичной длины вдоль осей x и y (рис. 11).

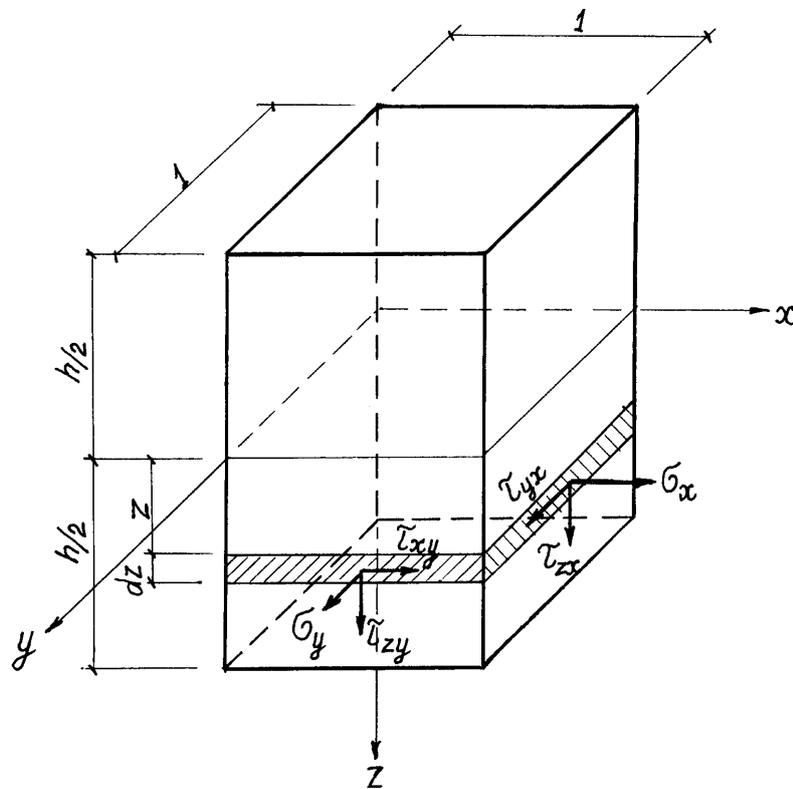


Рис. 11

В каждой точке на гранях этого элемента действуют нормальные и касательные напряжения. Равнодействующие этих напряжений на полоске высотой dz , выделенной на грани с нормалью x , сводятся к следующим элементарным усилиям:

$$\begin{aligned} dN_x &= \sigma_x \cdot dz; & dS_x &= \tau_{yx} dz; \\ dM_x &= \sigma_x \cdot z dz; & dQ_x &= \tau_{zx} dz; \\ dM_{yx} &= \tau_{yx} z dz. \end{aligned}$$

Подставляя в эти выражения напряжения из (80) и интегрируя по z , приходим к следующим соотношениям:

$$N_x = -\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z dz = 0;$$

$$S_x = -\frac{E}{1+\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z dz = 0;$$

$$\begin{aligned} M_x &= -\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z dz = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \\ &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \end{aligned}$$

$$Q_x = -\frac{E}{2(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) dz = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w = -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w;$$

$$M_{yx} = -\frac{E}{1+\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz = -(1-\nu) \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -(1-\nu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y};$$

Здесь введено обозначение

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad (81)$$

называемое *цилиндрической жесткостью пластинки*, отражающей упругие и геометрические характеристики пластинки.

Аналогично для сечения с нормалью y получаем:

$$\begin{aligned} N_y &= 0; & S_y &= 0; \\ M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \\ Q_y &= -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w; \\ M_{xy} &= -(1-\nu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned}$$

Ввиду равенства $M_{xy} = M_{yx}$, обычно вводится новое обозначение:

$$H = M_{xy} = M_{yx}.$$

Таким образом, в сечениях тонкой пластинки, перпендикулярных срединной плоскости, при ее изгибе действуют следующие *погонные* (приходящиеся на единицу длины сечения) *усилия*:

– изгибающие моменты

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \\ M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

– поперечные силы

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w; \\ Q_y &= -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w; \end{aligned} \right\} \quad (83)$$

– крутящий момент

$$H = -(1-\nu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (84)$$

Нормальные N_x , N_y и сдвигающие S_x , S_y усилия при изгибе пластинки отсутствуют.

Все усилия выражены через функцию $w(x, y)$ прогибов срединной плоскости. Их положительные направления приведены на рис. 12.

Напомним, что индексы при усилиях соответствуют нормали к сечению, на котором действуют эти усилия. Например M_x – это погонный изгибающий момент в сечении с нормалью x .

Сравнивая между собой формулы напряжений (78), (79) и погонных усилий (82), (83), (84), с учетом обозначения (81) можно выразить напряжения через усилия:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{12M_x z}{h^3}; & \sigma_y &= \frac{12M_y z}{h^3}; \\ \tau_{xy} &= \frac{12Hz}{h^3}; \\ \tau_{zx} &= 6Q_x \frac{\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right)}{h^3}; & \tau_{zy} &= 6Q_y \frac{\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right)}{h^3}. \end{aligned} \right\} \quad (85)$$

Если иметь в виду, что величина $\frac{h^3}{12}$ представляет собой момент инерции прямоугольного сечения единичной ширины, формулы для нормальных напряжений σ_x , σ_y совпадают с формулами сопротивления материалов:

$$\sigma_x = \frac{M_x z}{I}; \quad \sigma_y = \frac{M_y z}{I}.$$

Аналогичное соответствие с формулами касательных напряжений в балке прямоугольного сечения имеет место для касательных напряжений τ_{zx} и τ_{zy} .

8.4. Дифференциальное уравнение изогнутой срединной поверхности

Полученные соотношения для деформаций, напряжений и усилий выражают их через функцию $w(x, y)$ прогибов срединной плоскости пластинки. В связи с этим решение задачи изгиба тонкой пластинки заключается в определении этой функции.

Рассмотрим равновесие элемента срединной плоскости (рис. 12), находящегося под действием перпендикулярной к ней нагрузки q и погонных усилий на границах элемента.

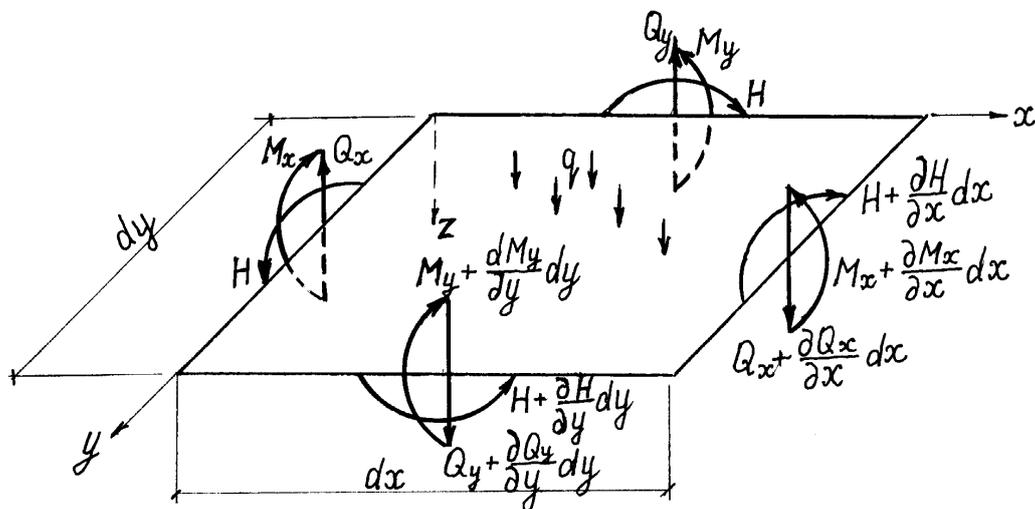


Рис. 12

Спроектируем силы на ось z :

$$\Sigma Z = \left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dy - Q dx dy + \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx -$$

$$- Q_y dy dx + q dx dy = 0.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные, после сокращения на $dx dy$ получаем:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -q. \quad (86)$$

Далее запишем сумму моментов сил относительно оси Oy :

$$\begin{aligned} \Sigma M_{Oy} = & \left(M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx \right) dy - M_x dx dy - \left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} \right) dy dx - \\ & - \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx \frac{dx}{2} + Q_y dx \frac{dx}{2} + \left(H + \frac{\partial H}{\partial y} dy \right) dx - H dy dx - \\ & q dx dy \frac{dx}{2} = 0. \end{aligned}$$

Раскрывая скобки, приводим подобные и отбрасываем слагаемые третьего порядка малости (содержащие произведения трех дифференциалов). Оставшиеся слагаемые сокращаем на произведение $dx dy$:

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} = Q_x. \quad (87)$$

Аналогичное соотношение получаем из уравнения моментов относительно оси Ox :

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial x} = Q_y. \quad (88)$$

Продифференцируем (87) по x , (88) по y и подставим производные поперечных сил в (86):

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} = -q.$$

Подставим сюда выражения изгибающих и крутящего моментов из (82), (84):

$$-D \left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + (1-\nu) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + (1-\nu) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right] = -q.$$

После приведения подобных получаем:

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = q$$

или

$$D \nabla^4 w - q = 0. \quad (89)$$

Это дифференциальное уравнение изогнутой срединной плоскости называют также *уравнением Софи Жермен*. Функция прогибов $w(x, y)$ получается интегрированием этого уравнения с учетом условий на контуре пластинки – граничных условий.

8.5. Граничные условия

Как известно, различают два типа граничных условий: *геометрические* и *статические*. В геометрических условиях задаются величины линейных и угловых перемещений, в данном случае прогибов и углов поворота нормали к срединной плоскости. Статические условия задают величины усилий. При изгибе пластинки – это изгибающие и крутящий моменты, а также поперечные силы.

Уравнение Софи Жермен является дифференциальным уравнением четвертого порядка. Поскольку прогибы являются функцией двух переменных, при интегрировании для прямоугольной пластинки появляется необходимость учета восьми граничных условий – по два на каждом краю.

Рассмотрим прямоугольную пластинку (рис. 13) с различными закреплениями краев и покажем какой вид для них имеют граничные условия.

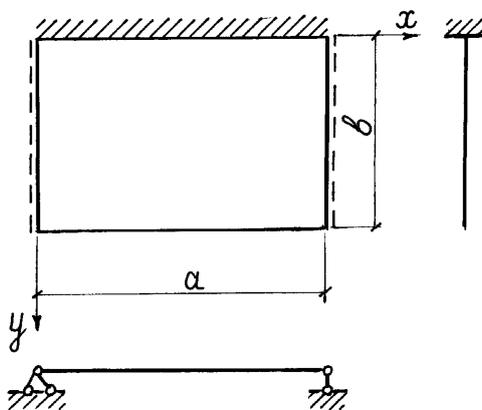


Рис. 13

На *защемленном краю* отсутствуют прогибы и углы поворота нормали к срединной плоскости в направлении, перпендикулярном к краю. На рис. 13 защемлен край $y = 0$. Для него

$$w = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

На *свободно (шарнирно) опертом краю* (на рис. 13 при $x = 0$ и $x = a$) отсутствуют прогибы и изгибающие моменты в направлениях, перпендикулярных к краю:

$$w = 0; \quad M_x = 0.$$

Выражая моменты через функцию прогибов, получаем:

$$w = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

Учитывая, что вдоль рассматриваемых краев прогибы не зависят от координаты y , окончательно имеем:

$$w = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0.$$

Для *свободного края* (на рис. 13 при $y = b$) отсутствуют все погонные усилия:

$$M_y = 0; \quad Q_y = 0; \quad H = 0.$$

Таким образом, имеем избыток граничных условий: три, вместо необходимых двух.

Чтобы избежать этого, рассмотрим действие крутящих моментов на свободном краю (рис. 14, а). На участке длиной dx равнодействующую крутящего момента Hdx заменим парой сил $\frac{Hdx}{dx} = H$ (рис. 14, б). На

соседнем участке dx эта пара будет иметь величину $H + \frac{\partial H}{\partial x}$.

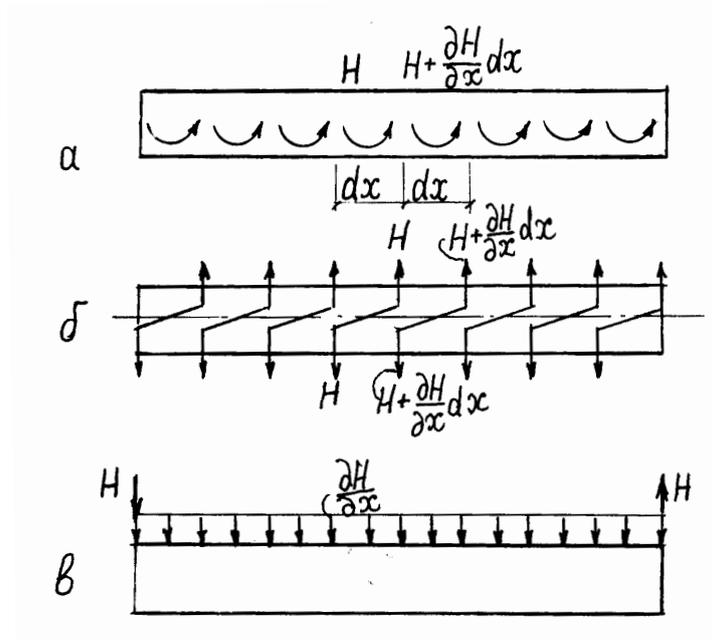


Рис. 14

При таком представлении действие крутящих моментов заменяется распределенной нагрузкой интенсивностью $\frac{\partial H}{\partial x}$ и угловыми сосредоточенными силами H . Суммируя эту нагрузку с поперечной силой Q_y , получаем некоторую приведенную поперечную силу

$$Q_{y \text{ прив.}} = Q_y + \frac{\partial H}{\partial x}$$

или с учетом (83), (84):

$$Q_{y \text{ прив.}} = -D \left[\frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w + (1-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right] = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right].$$

Теперь на свободном краю вместо трех условий можно записать два:

$$M_y = 0; \quad Q_{y \text{ прив.}} = 0.$$

Выразив их через функцию прогибов, получаем

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0;$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Какая пластинка называется тонкой?
2. На каких гипотезах основывается техническая теория изгиба пластинок?
3. Какие деформации отсутствуют при изгибе тонкой пластинки?
4. Из каких условий находятся выражения для напряжений τ_{yz} и τ_{zx} ?
5. Какие напряжения отсутствуют при изгибе тонкой пластинки?
6. Что такое погонные усилия?
7. Какие усилия при изгибе тонкой пластинки обращаются в ноль? Назовите остальные усилия.
8. Какой вид имеет дифференциальное уравнение изогнутой срединной поверхности пластинки?
9. Как получают решение задачи изгиба пластинки?
10. Какие виды условий рассматриваются на контуре пластинки?
11. Какие граничные условия выполняются на защемленном, шарнирно опертом и свободном краях пластинки?

9. Решение задач изгиба прямоугольных пластинок

9.1. Решение Навье

Это решение получено для задачи изгиба прямоугольной пластинки, шарнирно опертой по всему контуру (рис. 15). Поперечная нагрузка $q(x, y)$ предполагается изменяющейся по любому закону.

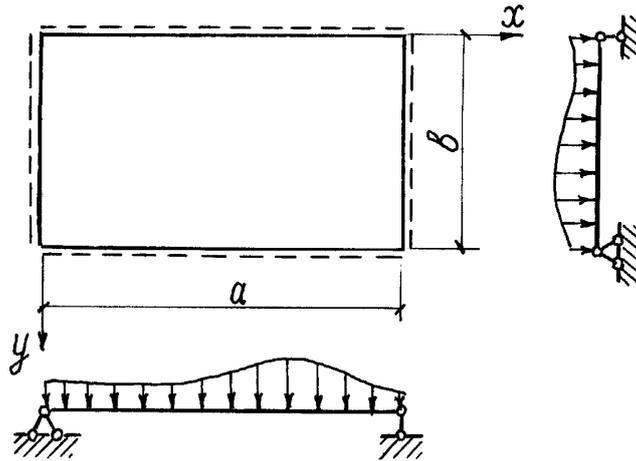


Рис. 15

Функцию прогибов $w(x, y)$ будем искать в виде двойного тригонометрического ряда

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (90)$$

$$m = 1, 2, \dots, \quad n = 1, 2, \dots$$

Задача заключается в определении коэффициентов A_{mn} ряда (90).

Проверим выполнение граничных условий. При шарнирном опирании имеем:

$$\text{при } x=0 \text{ и } x=a \quad w=0 \text{ и } \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0;$$

$$\text{при } y=0 \text{ и } y=b \quad w=0 \text{ и } \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

$$\text{При } x=0 \quad \sin \frac{m\pi x}{a} = \sin 0 = 0 \quad \text{и при } x=a \quad \sin \frac{m\pi x}{a} = \sin m\pi = 0.$$

Аналогично, при $y=0$ и $y=b$ получаем $\sin \frac{n\pi y}{b} = 0$. Таким образом,

прогибы на гранях пластинки отсутствуют.

Запишем вторые производные прогибов:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b};$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

Эти производные, как и прогибы, содержат множители $\sin \frac{m\pi x}{a}$ и $\sin \frac{n\pi y}{b}$, следовательно при $x=0$, $x=a$ и при $y=0$, $y=b$ также обращаются в ноль. Таким образом, функция (90) удовлетворяет всем граничным условиям и может быть принята для решения задачи.

Для определения коэффициентов A_{mn} возьмем четвертые производные функции прогибов:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b};$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b};$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

и подставим их в уравнение Софи Жермен (89). После преобразований получаем:

$$D\pi^4 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = q(x, y) \quad (91)$$

Представим нагрузку $q(x, y)$ также в виде двойного тригонометрического ряда по синусам:

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

Коэффициенты этого ряда в прямоугольной области $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$ определяются по формуле

$$C_{mn} = \frac{4}{ab} \iint_{00}^{ab} q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy.$$

С учетом этого уравнение (91) принимает такой вид:

$$\begin{aligned}
& D\pi^4 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = \\
& = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.
\end{aligned}$$

Равенство двух рядов выполняется, если равны их соответствующие члены, т.е.:

$$D\pi^4 A_{mn} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 = C_{mn}.$$

Отсюда находим:

$$A_{mn} = \frac{C_{mn}}{D\pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}$$

или, с учетом выражения для C_{mn} , имеем:

$$A_{mn} = \frac{4}{D\pi^4 ab \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \iint_{00}^{ab} q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy. \quad (92)$$

Рассмотрим случай изгиба пластинки под действием равномерно распределенной по всей поверхности нагрузки $q(x, y) = q = const$.

Тогда

$$\iint_{00}^{ab} q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy = q_0 \int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} dx \int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b} dy = 4q \frac{ab}{mn \cdot \pi^2}$$

и

$$A_{mn} = \frac{16q}{D\pi^6 mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}.$$

Таким образом, функция прогибов (90) принимает вид:

$$w(x, y) = \frac{16q}{D\pi^6} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}. \quad (93)$$

Максимальный прогиб в центре пластинки (при $x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{b}{2}$)

составляет

$$w_{max} = \frac{16q}{D\pi^6} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2}}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2},$$

или, с учетом $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$,

$$w_{max} = \frac{192q}{\pi^6 Eh^3} (1-\nu^2) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2}}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}.$$

Для практического использования это выражение удобно представить в таком виде:

$$w_{max} = \alpha qa^4 / Eh^3,$$

где

$$\alpha = \frac{192}{\pi^6} (1-\nu^2) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2}}{mn \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right)^2}$$

– коэффициент, зависящий от соотношения сторон пластинки $\frac{a}{b}$. Значения

этого коэффициента приводятся в справочниках.

Ряд, входящий в выражение для α , быстро сходится. Так, при удержании первых четырех ненулевых членов ряда для квадратной пластинки ($\frac{a}{b} = 1$) и $\nu = 0,3$ получаем:

$$\alpha = \frac{192}{\pi^6} (1-0,3^2) \left[\frac{\sin \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2}}{1 \cdot 1 (1^2 + 1^2)^2} + \frac{\sin \frac{\pi}{2} \sin \frac{3\pi}{2}}{1 \cdot 3 (1^2 + 3^2)^2} + \dots \right]$$

$$\left. \begin{aligned} & + \frac{\sin \frac{3\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2}}{3 \cdot 1(3^2 + 1^2)^2} + \frac{\sin \frac{3\pi}{2} \sin \frac{3\pi}{2}}{3 \cdot 3(3^2 + 3^2)^2} \end{aligned} \right] = 0,0443,$$

что совпадает с точным значением.

При подстановке функции прогибов (93) в выражения (82) получаем изгибающие моменты:

$$M_x = \frac{16qa^2}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m^2 + \nu n^2 \frac{a^2}{b^2}}{mn \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b};$$

$$M_y = \frac{16qa^2}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2}}{mn \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

Максимальные изгибающие моменты достигают наибольшего значения в центре пластинки:

$$M_{x_{max}} = \frac{16qa^2}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m^2 + \nu n^2 \frac{a^2}{b^2}}{mn \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2};$$

$$M_{y_{max}} = \frac{16qa^2}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \frac{a^2}{b^2} + \nu m^2}{mn \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2}.$$

Аналогично прогибам, представим полученные выражения в таком виде:

$$M_{x_{max}} = \beta qa^2;$$

$$M_{y_{max}} = \beta_1 qa^2.$$

Ряды в коэффициентах β и β_1 сходятся медленнее, чем в прогибах. Так, для квадратной пластинки при сохранении первых четырех ненулевых

членов ряда получаем $\beta = 0,0469$. Это значение отличается от точного ($\beta = 0,0479$) уже на 2,1 %.

При найденной функции прогибов поперечные силы принимают следующий вид:

$$Q_x = \frac{16qa^2}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{n \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right)};$$

$$Q_y = \frac{16qa^2}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{m \left(m^2 \frac{b^2}{a^2} + n^2 \right)}.$$

Наибольшие значения поперечных сил достигаются в серединах сторон пластинки. Так, Q_x принимает наибольшее значение при $x = 0$, $y = \frac{b}{2}$:

$$Q_{xmax} = \frac{16qa}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right)}$$

или $Q_{xmax} = \gamma qa$.

Q_y принимает наибольшее значение при $x = \frac{a}{2}$; $b = 0$:

$$Q_{ymax} = \frac{16qa}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi}{2}}{m \left(m^2 \frac{a^2}{b^2} + n^2 \right)}$$

или $Q_{ymax} = \gamma_1 qa$.

Ряды в коэффициентах γ , γ_1 сходятся еще медленнее, чем в β , β_1 . В частности, для квадратной пластинки при удержании первых четырех ненулевых членов ряда получаем $\gamma = 0,283$, что отличается от точного значения $\gamma = 0,338$ уже на 16,3 %.

Следует отметить, что более общим является решение Леви, которое предполагает наличие шарнирного опирания лишь на двух противоположных краях пластинки, а остальные могут иметь произвольные закрепления. Это решение в нашем курсе не рассматривается.

9.2. Метод Ритца-Тимошенко

Метод основан на теореме Лагранжа, в соответствии с которой из всех возможных распределений перемещений упругого тела истинными являются такие, которые сообщают полной потенциальной энергии системы минимальное значение, т.е.:

$$U_n = U + W = \min. \quad (94)$$

Здесь U – работа упругой деформации тела. Для случая изгиба тонкой пластинки она имеет вид:

$$U = -\frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dx dy dz. \quad (95)$$

Работа внешних сил, действующих на пластинку, при отсутствии объемной нагрузки

$$W = \int_S q w dx dy. \quad (96)$$

Примем функцию прогибов пластинки в виде ряда

$$w_n = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} \varphi_{ik}, \quad (97)$$

Где $\varphi_{ik} = \varphi_{ik}(x, y)$ – некоторые заданные функции, a_{ik} – коэффициенты, подлежащие определению.

После подстановки функции (97) выражение (94) является квадратичной функцией параметров a_{ik} , а работа внешних сил – их линейной функцией.

Минимуму полной потенциальной энергии системы соответствует условие равенства нулю ее производных по параметрам a_{ik} ;

$$\frac{\partial U}{\partial a_{ik}} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (98)$$

Таким образом, получаем систему n^2 линейных уравнений для определения параметров a_{ik} .

Заметим, что уравнения (98) выражают как условия равновесия, так и статические граничные условия. В связи с этим при задании функций φ_{ik} , входящих в выражение прогибов (97), обязательно удовлетворять лишь кинематические граничные условия.

Подставляя найденные из (98) параметры a_{ik} в (97) получаем искомую функцию прогибов пластинки.

Полученное решение является приближенным. Сходимость ряда (97) к точному решению можно повысить, принимая функции φ_{ik} удовлетворяющими как статическим, так и кинематическим граничным условиям, а также увеличивая число членов ряда.

9.3. Метод Бубнова-Галеркина

Метод основан на свойстве ортогональных функций. Ортогональными на отрезке $a \leq x \leq b$ называются функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, для которых выполняется условие

$$\int_a^b \varphi_1(x) \varphi_2(x) dx = 0.$$

Если одна из функций, например $\varphi_2(x)$, тождественно равна нулю, то она будет ортогональна к любой функции $\varphi_1(x)$. Например, функция

$$\varphi(x) = EIy^{IV} - q,$$

являющаяся левой частью дифференциального уравнения изогнутой оси балки, тождественно равна нулю при всех значениях x , поэтому

$$\int_l (EIy^{IV} - q) \varphi_i(x) dx = 0.$$

Если функцию прогибов $y(x)$ заменить приближенно рядом

$$y_n = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i,$$

то выражение $Ely^{IV} - q$ уже не будет тождественно равно нулю, следовательно не будет ортогонально любой функции. Тогда потребуем, чтобы оно было ортогонально, по крайней мере, к каждой из функций φ_i , составляющих ряд y_n , т.е. чтобы выполнялись условия

$$\int_l (Ely^{IV} - q) \varphi_i dx = 0,$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

Таким образом, получим систему n линейных уравнений для определения n коэффициентов a_i , входящих в ряд.

Приведенные рассуждения применимы и к функциям двух переменных.

Рассмотрим функцию прогибов в виде ряда (97).

Потребуем, чтобы левая часть дифференциального уравнения изогнутой срединной поверхности

$$D\nabla^4 w - q = 0 \tag{99}$$

была ортогональна каждой из функций $\varphi_{ik}(x, y)$ ряда (97). Эти условия для прямоугольной области $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$ приводят к следующей системе уравнений:

$$\iint_{00}^{ab} (D\nabla^4 w - q) \varphi_{ik} dx dy = 0, \tag{100}$$

$$i = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, n.$$

Решение системы дает значения коэффициентов a_{ik} и, тем самым, функцию прогибов.

Метод Бубнова-Галеркина позволяет более просто, чем в методе Ритца-Тимошенко получить значения коэффициентов ряда (97). Трудности здесь связаны с подбором функций φ_{ik} , так как они должны удовлетворять не только кинематическим, но и статическим граничным условиям.

Методу Бубнова-Галеркина можно дать энергетическую интерпретацию. Левая часть дифференциального уравнения (99) представляет собой проекцию на ось z внутренних и внешних сил, действующих на бесконечно малый элемент срединной поверхности пластинки. Функции φ_{ik} , входящие в ряд w , можно рассматривать как возможные перемещения срединной поверхности. Тогда условия (100) выражают принцип возможных перемещений.

В этом смысле методы Ритца-Тимошенко и Бубнова-Галеркина равноценны и приводят к одинаковым результатам, если функции φ_{ik} выбраны удовлетворяющими всем граничным условиям.

9.4. Метод конечных разностей

Суть метода конечных разностей изложена в п. 7.4. С учетом приведенных в этом параграфе выражений производных дифференциальное уравнение (89) для т. 0 сетки прямоугольно пластинки (рис. 16) принимает такой вид:

$$20w_0 - 8(w_1 + w_2 + w_3 + w_4) + 2(w_6 + w_8 + w_{10} + w_{12}) + w_5 + w_7 + w_9 + w_{11} = \frac{q_0 h^4}{D}. \quad (101)$$

Как и в случае плоской задачи, эти уравнения составляются для всех внутренних точек сетки. Входящие в них значения прогибов для точек на контуре и за контуром находятся из граничных условий. Так, для точек на защемленном (т. l) и шарнирно опертом (т. b) контурах (рис. 16) прогибы отсутствуют:

$$w_b = 0; \quad w_l = 0.$$

Условие отсутствия поворота нормали на защемленном краю пластинки приводит к соотношению

$$w_k = w_n,$$

а условие отсутствия изгибающих моментов на шарнирно опертом краю дает:

$$w_a = -w_c.$$

Для свободного края граничные условия в конечных разностях приводят к более сложным соотношениям.

После подстановки граничных условий решение системы уравнений (101) дает значения прогибов во внутренних точках сетки.

Значения погонных усилий вычисляются по формулам (82), (83), (84) через конечные разности. Например, изгибающие моменты в точке 0 (рис. 16) принимают такой вид:

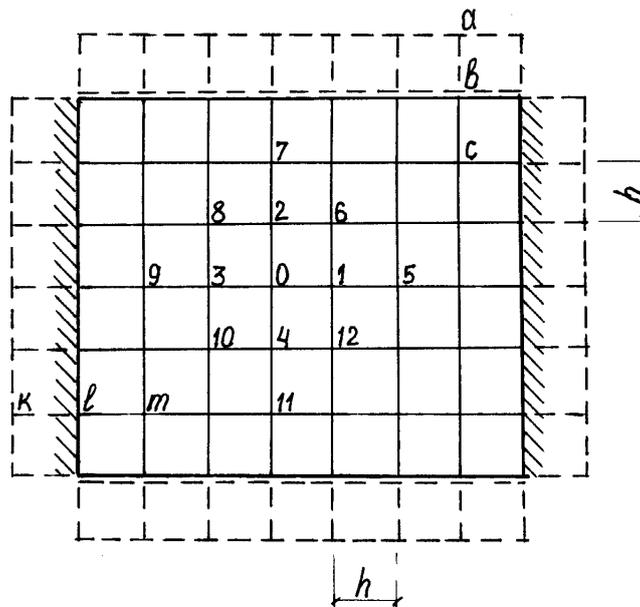


Рис. 16

$$(M_x)_0 = -\frac{D}{h^2} [w_1 - 2w_0 + w_3 + \nu(w_3 - 2w_0 + w_5)];$$

$$(M_y)_0 = -\frac{D}{h^2} [w_3 - 2w_0 + w_5 + \nu(w_1 - 2w_0 + w_3)].$$

Вопросы для самоконтроля

1. Для какой пластинки применимо решение Навье?
2. В каком виде представляется функция прогибов в решении Навье?
3. На чем основывается метод Ритца-Тимошенко?
4. В чем суть теоремы Лагранжа?
5. В каком виде представляется функция прогибов в методе Ритца-Тимошенко?
6. Как можно повысить точность в методе Ритца-Тимошенко?
7. На чем основывается метод Бубнова-Галеркина?
8. Какие функции называются ортогональными?
9. Как представляется функция прогибов в методе Бубнова-Галеркина?
10. Каким условиям должны удовлетворять функции ряда для w в методе Бубнова-Галеркина?
11. Каким образом можно дать методу Бубнова-Галеркина энергетическую интерпретацию?
12. В каком случае методы Ритца-Тимошенко и Бубнова-Галеркина приводят к одинаковому результату?
13. В чем суть метода конечных разностей?
14. Какой вид имеют граничные условия в методе конечных разностей?