Тема 4.

Моделювання СЕЕС в умовах невизначеності цілей

(прийняття рішень в умовах багатокритеріального оцінювання)

ПЛАН

1. Постановка багатокритеріальної задачі
2. Проблеми, пов’язані із критеріями оцінки якості рішень у багатокритеріальній задачі
3. Поняття розв’язку багатокритеріальної задачі (паретовська множина, паретовський оптимум, множина ефективних розв’язків, повна множина альтернатив)
4. Процедура нормалізації критеріїв
5. Правила вибору рішення , прийнятного для ОПР. Форми завдання переваг ОПР

1. Постановка багатокритеріальної задачі

Задача (кейс):

Перед Правлінням об'єднаної територіальної громади (ТГ) стоїть завдання укласти договори оренди на користування земельними ресурсами сільськогосподарського призначення, що належать громаді. На аренду земельних ділянок подано відповідні заявки-пропозицій від потенційних орендарів. Виявилося, що існує необхідність у конкурсному відборі пропозицій для ефективного використання земельних ресурсів громади. Для оцінки якості та обгрунтування остаточного розподілу Правлінням вирішено встановити три критерії:

економічний ($F_1(x)$) – загальний обсяг надходжень до бюджету ТГ від варіанту оренди (тис. грн.);

екологічний ($F_2(x)$) – оцінка негативного впливу на земельні ділянки технологій сільгоспвиробництва – кількість забруднюючих речовин, що внесено на одиницю площі (ум.од/га);

соціальний ($F_3(x)$) – кількість робочих місць, якими буде забезпечена ТГ (осіб).

Економічним (господарсько-земельним) сектором Правління об'єднаної територіальної громади сформовано n=12 можливих варіантів (x_1 – x_{12}) загального розподілу ділянок між заявниками та розраховано відповідні їм значення критеріїв $F_1(x_i)$, $F_2(x_i), F_3(x_i)$, $i=\overline{1,3}$.

Завдання:

Рекомендувати Правлінню прийнятний варіант розподілу земельних ресурсів сільськогосподарського призначення між орендарями. Рекомендацію обгрунтувати.

1. Постановка багатокритеріальної задачі

Розглядається **задача багатокритеріального вибору**:

Задано:

- дискретну скінчену множину $X = \{x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_{10}\}$ як множину альтернатив - припустимих розв'язків, з яких необхідно здійснити вибір;

- на множині X визначена векторна цільова функція (ВЦФ) (1), яка містить, наприклад, два часткових критерія (2):

$$F(x) = (F_1(x), F_2(x)), \qquad (1)$$

$$F_k(x) \to extr,\ k = 1,2 \quad ,\ extr \in \{\max,\ \min\}. \qquad (2)$$

1. Постановка багатокритеріальної задачі

Для кожної альтернативи (припустимого розв'язку) x_i відомі значення часткових критеріїв $F_k(x_i), k = 1,2$ – розміщено у таблиці 1.

Таблиця 1 – Значення часткових критеріїв $F_k(x_i), k = 1,2$ для множини альтернатив X

x_i	$F(x)$	
	$F_1(x)$	$F_2(x)$
x_1	12	15
x_2	5	22
x_3	10	22
x_4	11	20
x_5	8	21
x_6	9	16
x_7	8	17
x_8	5	14
x_9	7	20
x_{10}	11	20

Необхідно з метою звуження множини альтернатив X виділити в ній паретовську множину $\tilde{X}$ та повну множину альтернатив X^0.

1. Постановка багатокритеріальної задачі

У випадку двох часткових критеріїв можна навести геометричну інтерпретацію множини досяжності (рис.1)

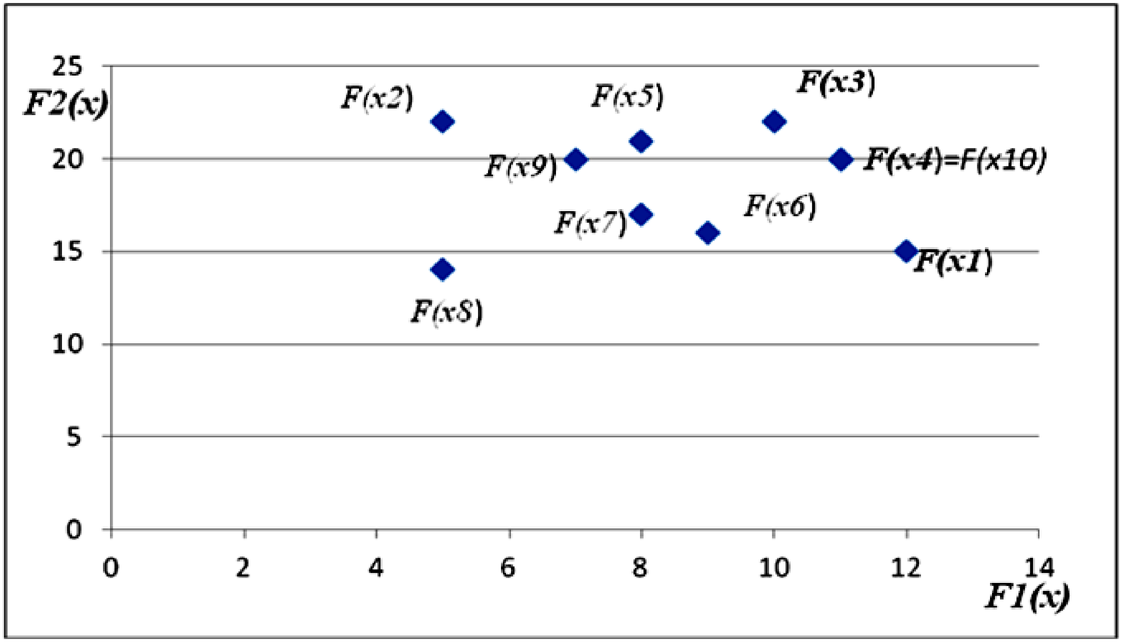


Рис. 1 – Множина досяжності ВЦФ (1)-(2) на множині альтернатив X, що задана табл. 1.

1. Постановка багатокритеріальної задачі

Зауваження:

у випадку скалярного критерію одного (2) розв'язком задачі (в цьому випадку оптимізаційної) вважається такий припустимий розв'язок $x^* \in X$,

на якому ЦФ $F(x)$ досягає екстремального значення,

тобто

$$F(x^*) = \underset{x \in X}{extr}\, F(x), \quad extr \in \{\max, \min\}.$$

Цей розв'язок прийнято називати *оптимальним розв'язком* задачі.

У випадку векторної цільової функції (ВЦФ), заданої виразами (1) - (2), такий підхід до визначення поняття розв'язку задачі **не є можливим**.

1. Постановка багатокритеріальної задачі

Це зумовлено тим, що серед припустимих розв’язків задачі можуть існувати такі, що є непорівнюваними. Тобто з двох припустимих розв’язків за одним критерієм кращим є перший, а за іншим – другий розв’язок.

Тому

у разі наявності ВЦФ під розв’язком **задачі** (надалі – **векторної** або **багатокритеріальної**) розуміється деяка множина альтернатив. До таких множин належать паретовська множина (позначають як $\widetilde{X}$) та повна множина альтернатив (X^0).

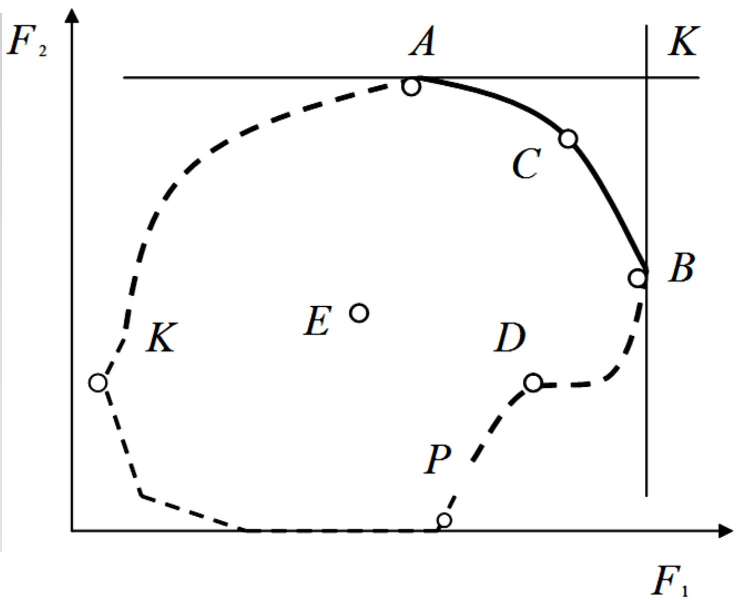


Рис.01. Графічне зображення критеріального простору БЗ

2. Проблеми, пов'язані із критеріями оцінки якості рішень у багатокритеріальній задачі

Критерії, що включено до ВЦФ можуть мати

1. Різний напрям оптимізації (градієнта)
2. Різні виміри: проблема вибору шкали

   Існують 3 види шкал:
   - відношень
   - інтервалів
   - порядкові
3. Різні одиниці та масштаби виміру

3. Поняття розв’язку багатокритеріальної задачі (паретовська множина, паретовський оптимум, множина ефективних розв’язків, повна множина альтернатив)

Означення 1.

Паретовською множиною (ПМ) (або *множиною Парето*, або *множиною ефективних розв’язків*) $\tilde{X}$, що визначена на множині припустимих розв’язків X ВЦФ (1) - (2), називають таку підмножину множини X, яка складається з паретовських оптимумів.

3. Поняття розв'язку багатокритеріальної задачі (паретовська множина, паретовський оптимум, множина ефективних розв'язків, повна множина альтернатив)

Нехай для визначеності будемо вважати, що $F_k(x) \to \max$, $k = 1, 2$

Означення 2 (формальне). Альтернатива (розв'язок) $\tilde{x} \in X$ називається *паретовським оптимумом* (ПО) (або *оптимальним за Парето*, або *недомінованим*), якщо не існує такого припустимого розв'язку $x \in X$, для якого виконуються нерівності

$$F_k(x) \geq F_k(\tilde{x}),\ k = 1, 2,$$

серед яких хоча б одна є строгою $F_{k_0}(x) > F_{k_0}(\tilde{x})$.

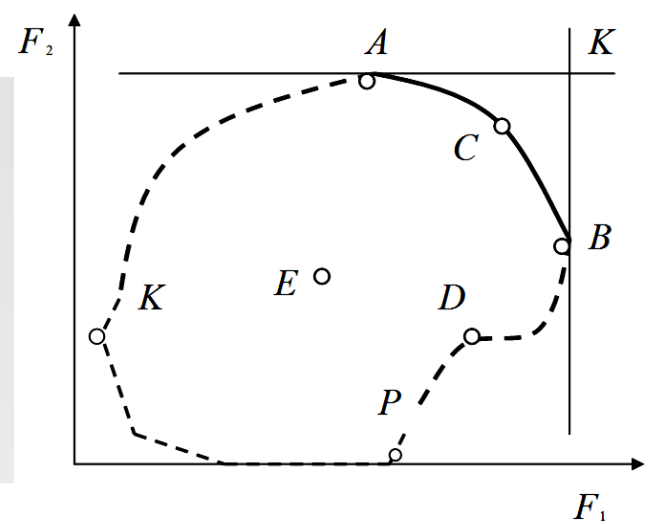


Рис. 01. Графічне зображення критеріального простору БЗ

3. Поняття розв'язку багатокритеріальної задачі (паретовська множина, паретовський оптимум, множина ефективних розв'язків, повна множина альтернатив)

Означення 3 (неформальне).

Паретовські оптимуми (розв'язки) - це векторно непорівняні розв'язки: якщо один розв'язок є кращим за одним з часткових критеріїв, то він є гіршим за іншим, і немає такого розв'язку, який би був краще одразу за всіма частковими критеріями.

Зауваження:

якщо такий розв'язок існує, то проблеми багатокритеріального вибору немає. У цьому випадку до множини припустимих розв'язків належить так звана «*ідеальна точка*» - розв'язок, на якому всі часткові критерії набувають найкращого значення:

$$F(x^{id}) = (F_1(x^{id}), F_2(x^{id})),\ \ F_k(x^{id}) = \underset{x \in X}{extr}\, F_k(x),\ \ k = 1,2.$$

3. Поняття розв'язку багатокритеріальної задачі (паретовська множина, паретовський оптимум, множина ефективних розв'язків, повна множина альтернатив)

Таблиця 2 – Виділення паретовської множини $\tilde{X}$ для множини альтернатив X (табл.1) за умови $F_k(x) \to \max,\ k = 1,2$

x_i	$F(x)$		ПМ $\tilde{X}$
	$F_1(x)$	$F_2(x)$	
x_1	12	15	+
x_2	5	22	– (домінує x_3)
x_3	10	22	+
x_4	11	20	+
x_5	8	21	– (домінує x_3)
x_6	9	16	– (домінує x_3, x_{10})
x_7	8	17	– (домінує x_3)
x_8	5	14	– (домінує x_7)
x_9	7	20	– (домінує x_{10})
x_{10}	11	20	+

3. Поняття розв'язку багатокритеріальної задачі (паретовська множина, паретовський оптимум, множина ефективних розв'язків, повна множина альтернатив)

Означення 4. Множина $F(X)=\{F(x)=(F_1(x),F_2(x)):\ x\in X\}$ називається *множиною досяжності* ВЦФ на множині альтернатив X в критеріальному просторі $(F_1(x),\ F_2(x))$.

Тобто *множина досяжності* ВЦФ є відображенням множини альтернатив X у критеріальний простір – простір значень часткових критеріїв.

3. Поняття розв'язку багатокритеріальної задачі (паретовська множина, паретовський оптимум,

У випадку двох часткових критеріїв можна навести геометричну інтерпретацію множини досяжності (рис.1)

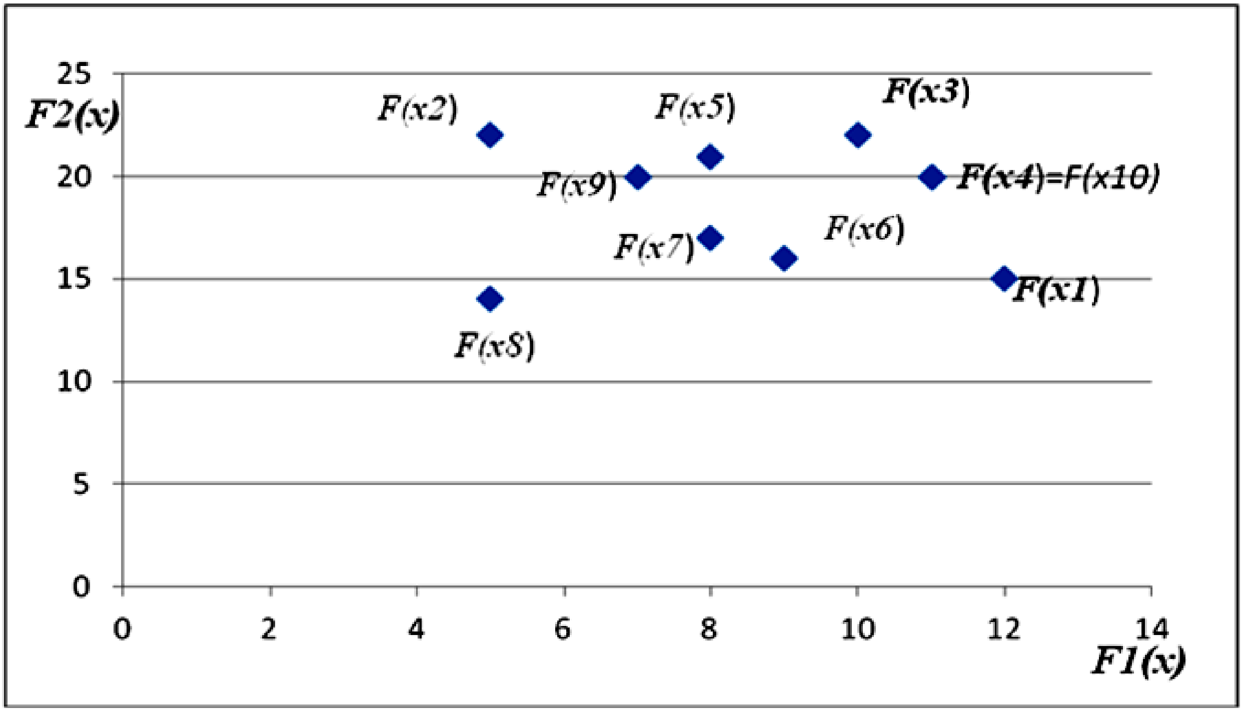


Рис. 1 – Множина досяжності ВЦФ (1)-(2) на множині альтернатив X, що задана табл. 1.

Паретовська множина $\tilde{X} = \{x_1, x_3, x_4, x_{10}\} \subset X$.

3. Поняття розв’язку багатокритеріальної задачі (паретовська множина, паретовський оптимум, множина ефективних розв’язків, повна множина альтернатив)

Означення 5. Образ паретовської множини у критеріальному просторі $F(\widetilde{X})$ називають *паретовською границею множини досяжності* у критеріальному просторі.

3. Поняття розв'язку багатокритеріальної задачі (паретовська множина, паретовський оптимум, множина ефективних розв'язків, повна множина альтернатив)

Означення 6. Підмножина $X^0 \subseteq \tilde{X}$ називається ***повною множиною альтернатив*** (ПМА), якщо при виконанні рівності

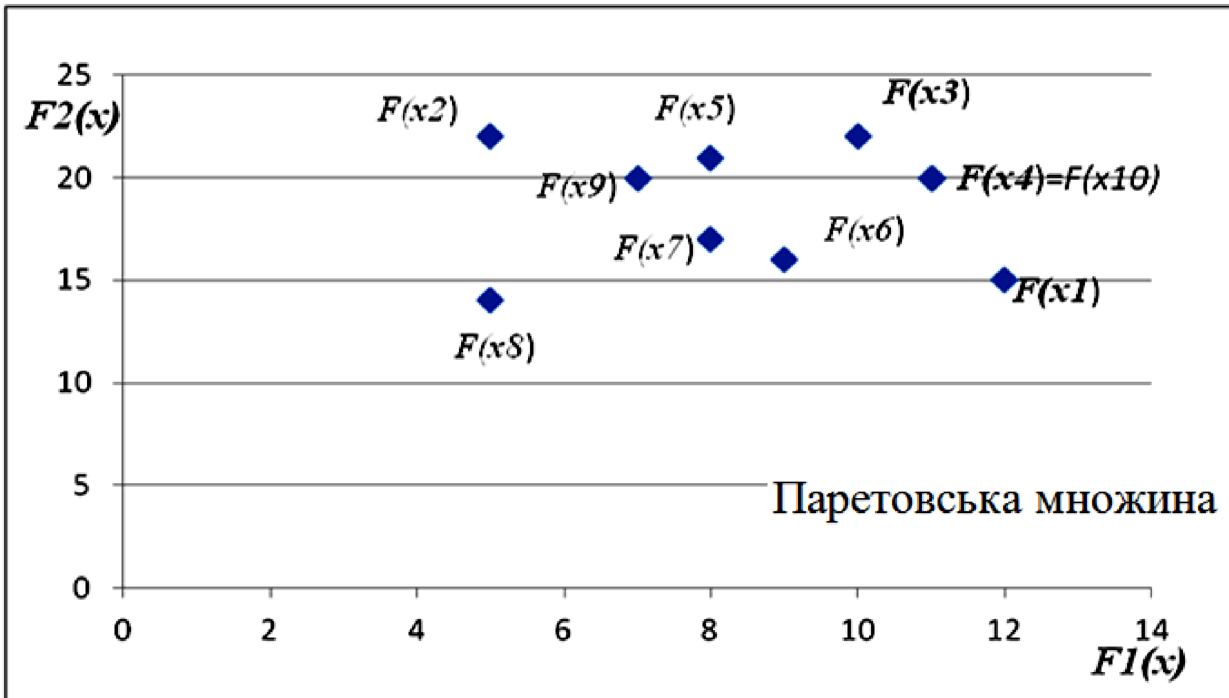
$$F\left(X^0\right) = F\left(\tilde{X}\right),$$

де $F\left(X^*\right) = \left\{F(x) = \left(F_1(x), F_2(x), \ldots, F_N(x)\right):\ x \in X^*\right\}$, її потужність $\left|X^0\right|$ мінімальна, тобто $\left|X^0\right| = \min\limits_{X^* \subseteq X} \left|X^*\right|$.

Тобто ПМА - це така мінімальна за потужністю підмножина паретовської множини, образ якої в критеріальному просторі збігається із паретовською границею множини досяжності.

3. Поняття розв’язку багатокритеріальної задачі (паретовська множина, паретовський оптимум, множина ефективних розв’язків, повна множина альтернатив)

Для задачі, що розглядається, як ПМА можна обрати множини $X^0 = \{x_1, x_3, x_4\} \subset \tilde{X}$ або $X^0 = \{x_1, x_3, x_{10}\} \subset \tilde{X}$, так як їх образи збігаються з образом паретовської множини $F(\tilde{X})$.



Паретовська множина $\tilde{X} = \{x_1, x_3, x_4, x_{10}\} \subset X$.

4. Процедура нормалізації критеріїв

Необхідність нормування часткових критеріїв зумовлена тим, що

1) задача, що вирішується, вимагає пошуку різноспрямованих цілей (максимізації або мінімізації показників, які відображають ступінь досягнення цілей). Тобто, часткові критерії $F_k(x),\ k=\overline{1,3}$ можуть мати різний градієнт (напрям);

2) часткові критерії $F_k(x),\ k=\overline{1,3}$ можуть мати різні одиниці виміру (грошові одиниці, одиниці виміру ваги, довжини, об'єму, рейтингові оцінки тощо).

Тому метою операції **нормування**, тобто приведення значень часткових критеріїв $F_k(x),\ k=\overline{1,3}$ до виду $F_k^{н}(x),\ k=\overline{1,3}$, є

1) приведення всіх часткових критеріїв до одного виду екстремуму (максимуму або мінімуму);

2) приведення всіх часткових критеріїв до однієї одиниці вимірювання або до безвимірної величини.

4. Процедура нормалізації критеріїв

Основні способи нормування часткових критеріїв

Методи нормалізації	Формули нормалізації
Зміна градієнту	$F_к^н(x)=C-F_k(x)$ або $F_к^н(x)=1/F_k(x)$, де C – достатньо велике додатнє число (зокрема, $C=\max\limits_x F_k(x)$ або $C=1+\max\limits_x F_k(x)$)
Зведення до безвимірної величини (загальний вид)	$F_к^н(x)=F_k(x)/\rho(F_k(x))$, де ρ- деяка функція, наприклад, $\rho(F_k(x))=max\ F_k(x)$
Зведення до однієї розмірності	$F_к^н(x)=F_k(x)/\lambda_k$, де λ_k – деяка вагова функція
Природна нормалізація	$F_к^н(x)=(F_k(x)-minF_к(x))/(maxF_k(x)-minF_к(x))$
Нормалізація порівняння	$F_к^н(x)=F_k(x)/maxF_k(x)$
Нормалізація усереднення	$F_к^н(x)=F_k(x)/\sum\limits_{k=1}^{K}F_k(x)$

5. Правила вибору рішення , прийнятного для ОПР. Форми завдання переваг ОПР

Для вибору одного з множини непорівнянних розв'язків (паретовської множини) застосуємо такі вирішальні правила.

Вирішальне правило зваженої суми

$$f_1(x_i)=\sum_{k=1}^{3}\lambda_k F_k^{н}(x_i)\to extr,$$

де $0\le\lambda_k\le 1,\ k=\overline{1,3};\ \sum_{k=1}^{3}\lambda_k=1$ – коефіцієнти важливості часткових критеріїв $F_k(x)$.

Вирішальні правила виду MINMAX і MAXMIN:

$$f_2(x_i)=\min_{k=1,2,3}\lambda_k F_k^{н}(x_i)\to\max,\qquad f_3(x_i)=\max_{k=1,2,3}\lambda_k F_k^{н}(x_i)\to\min,$$

де $0\le\lambda_k\le 1,\ k=\overline{1,3};\ \sum_{k=1}^{3}\lambda_k=1$ – коефіцієнти важливості часткових критеріїв.

Вирішальне правило виду «відстань до ідеальної точки»

$$f_4(x_i)=(\lambda_1(F_1^{н}(x_i)-c_1)^2+\lambda_2(F_2^{н}(x_i)-c_2)^2+\lambda_3(F_3^{н}(x_i)-c_3)^2)^{1/2}\to\min,$$

де $c=(c_1,\ c_2,\ c_3)$ – «ідеальна точка» – точка, у якій всі критерії досягають найкращого значення.

Мультиплікативне вирішальне правило

$$f_5(x_i)=(F_1^{н}(x_i))^{\lambda_1}(F_2^{н}(x_i))^{\lambda_2}(F_3^{н}(x_i))^{\lambda_3}\to extr,$$

де $0\le\lambda_k\le 1,\ k=\overline{1,3};\ \sum_{k=1}^{3}\lambda_k=1$ – коефіцієнти важливості часткових критеріїв.

5. Правила вибору рішення , прийнятного для ОПР. Форми завдання переваг ОПР

Приклад розрахунків для розв’язання задачи про обгрунтування рішень щодо оренди земельних ділянок в Об’єднанній територіальній громаді

x_i	$F(x)$			$F^*(x)$			*Вирішальні правила*									
	$F_1(x)$	$F_2(x)$	$F_3(x)$	$F_1^*(x)$	$F_2^*(x)$	$F_3^*(x)$	$f_1(x_i)$	$\lambda_1 F_1^*$	$\lambda_2 F_2^*$	$\lambda_3 F_3^*$	$f_2(x_i)$	$(F_1^*(x)-1)^2$	$(F_2^*(x)-1)^2$	$(F_3^*(x)-1)^2$	$f_4(x_i)$	$f_5(x_i)$
x_1	473	27	77	0,95	0,52	0,79	0,785	0,439	0,156	0,191	0,156	0,002	0,232	0,043	0,081	2,746
x_2	208	29	94	0,42	0,48	0,97	0,570	0,193	0,145	0,233	0,145	0,337	0,268	0,001	0,236	2,467
x_3	320	88	53	0,65	0,16	0,55	0,476	0,297	0,048	0,131	0,048	0,126	0,707	0,206	0,319	2,258
x_4	434	14	3	0,88	1,00	0,03	0,710	0,403	0,300	0,007	0,007	0,016	0,000	0,939	0,233	2,375
x_5	410	64	66	0,83	0,22	0,68	0,609	0,380	0,066	0,163	0,066	0,030	0,610	0,102	0,221	2,462
x_6	299	67	29	0,60	0,21	0,30	0,412	0,277	0,063	0,072	0,063	0,158	0,626	0,491	0,378	2,166
x_7	402	25	46	0,81	0,56	0,47	0,655	0,373	0,168	0,114	0,114	0,036	0,194	0,276	0,141	2,584
x_8	370	27	5	0,75	0,52	0,05	0,511	0,343	0,156	0,012	0,012	0,065	0,232	0,900	0,315	2,186
x_9	426	21	97	0,86	0,67	1,00	0,835	0,395	0,200	0,240	0,200	0,020	0,111	0,000	0,042	2,818
x_{10}	210	79	87	0,42	0,18	0,90	0,463	0,195	0,053	0,215	0,053	0,332	0,677	0,011	0,359	2,243
x_{11}	444	34	52	0,90	0,41	0,54	0,664	0,412	0,124	0,129	0,124	0,011	0,346	0,215	0,161	2,578
x_{12}	496	50	85	1	0,28	0,88	0,754	0,460	0,084	0,210	0,084	0,000	0,518	0,015	0,159	2,651
	max	min	max				0,835				0,200				0,042	2,818
max	496	88	97													
min	208	14	3	λ_1	λ_2	λ_3										

Значення вагових коефіцієнтів λк	0,46	0,3	0,24

Висновок

З такими приорітетами щодо часткових критеріїв за всима вирішальними правилами рекомендується до вибору варіант оренди x9