

Підготовка до контрольної роботи «Послідовності»

Основні формули, що використовуються при обчисленні границь послідовностей:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \begin{cases} 0, |a| < 1 \\ +\infty, a > 1, \\ \text{не існує}, a \leq -1. \end{cases}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0, \alpha > 0.$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0, a = \text{const.}$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a^n} = 0, |a| > 1.$$

$$5) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

$$6) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1, a = \text{const.}$$

$$7) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c}{x_n} = \left(\frac{c}{0} \right) = \infty, c - \text{const}, \text{ якщо } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

$$8) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c}{x_n} = \left(\frac{c}{\infty} \right) = 0, c - \text{const}, \text{ якщо } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty.$$

$$9) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e, e = 2,718281\dots$$

10) $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \alpha_n)^{\frac{1}{\alpha_n}} = e$, де α_n – нескінченно мала послідовність.

Послідовність $\{x_n\}$ називають **обмеженою**, якщо $\exists M > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \quad |x_n| \leq M$. (існує таке додатне число M , що для будь-якого номера n модуль n -го члена послідовності не перевищує M).

Послідовність називають **необмеженою**, якщо $\forall M > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : |x_{n_0}| > M$ (для будь-якого додатного числа M існує такий номер n_0 , що модуль члена послідовності з цим номером більший M).

Типові завдання контрольної роботи

. I. Дослідити послідовність на обмеженість

$$1. x_n = \frac{8n}{2n-1}.$$

Розв'язання.

$$|x_n| = \frac{8n}{2n-1} = \frac{4 \cdot (2n-1) + 4}{2n-1} = 4 + \frac{4}{2n-1} \leq 4 + 4 = 8.$$

$|x_n| \leq 8 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, тому послідовність є обмеженою.

$$2. x_n = (-1)^n n^2.$$

Розв'язання. Доведемо, що послідовність $\{x_n\}$ є необмеженою. Для цього покажемо, що для будь-якого додатного числа M існує такий номер n_0 , що модуль члена послідовності з цим номером більший M . $|x_n| = n^2 > M \Rightarrow n > \sqrt{M}$. Виберемо у якості n_0 будь-який номер, що перевищує \sqrt{M} , наприклад, $n_0 = [\sqrt{M}] + 1$. Тоді $|x_{n_0}| > M$, послідовність необмежена.

$$3. x_n = \sqrt{n^2 + 8} - \sqrt{n^2 + 3}.$$

Розв'язання. Оскільки $x_n > 0$, то отримуємо:

$$\begin{aligned} |x_n| &= x_n = \sqrt{n^2 + 8} - \sqrt{n^2 + 3} = \\ &= \frac{(\sqrt{n^2 + 8} - \sqrt{n^2 + 3})(\sqrt{n^2 + 8} + \sqrt{n^2 + 3})}{\sqrt{n^2 + 8} + \sqrt{n^2 + 3}} = \end{aligned}$$

$$= \frac{5}{\sqrt{n^2 + 8} + \sqrt{n^2 + 3}} < \frac{5}{\sqrt{n^2} + \sqrt{n^2}} = \frac{5}{2n} \leq \frac{5}{2}.$$

Отже, згідно з означенням послідовність обмежена.

4. $x_n = \frac{n^3}{4n+1}$.

Розв'язання. Оскільки $x_n > 0$, то $|x_n| = x_n = \frac{n^3}{4n+1}$.

Покажемо, що $4n+1 < n^2$, $n > 4$. З останньої нерівності випливає, що $n^2 - 4n - 1 > 0$. Дійсно, $n^2 - 4n - 1 = (n-2)^2 - 5 > 0$ при $n > 4$. Отже, $4n+1 < n^2$, звідси $\frac{n^3}{4n+1} > \frac{n^3}{n^2} = n$. Для довільного як завгодно великого $M > 0$ завжди можна вибрати номер $n_0 > M$, тоді $|x_{n_0}| = \frac{n_0^3}{4n_0+1} > n_0 > M$, послідовність необмежена.

5. $x_n = \arcsin \frac{n}{2n+3}$.

Розв'язання. Оскільки $\frac{n}{2n+3} > 0$, то

$|x_n| = x_n = \arcsin \frac{n}{2n+3} \leq \frac{\pi}{2} \forall n \in \mathbb{N}$, тому послідовність є обмеженою.

ІІ. Знайти наступні границі.

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5\sqrt[4]{16n^8 + 3n^2 - 2n + 1} + 6n^2 - n + 1}{4n^2 + 3}.$$

Розв'язання. Старший степінь чисельника $n^{\frac{8}{4}} = n^2$, старший степінь знаменника також n^2 . Отже, границя дорівнює відношенню коефіцієнтів при старших степенях чисельника та знаменника:

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5\sqrt[4]{16n^8 + 3n^2 - 2n + 1} + 6n^2 - n + 1}{4n^2 + 3} = \\ & = \frac{5\sqrt[4]{16} + 6}{4} = \frac{16}{4} = 4. \end{aligned}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{n^2 + 2} - \sqrt{n^2 + 1} \right).$$

Розв'язання.

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{n^2 + 2} - \sqrt{n^2 + 1} \right) = \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(\sqrt{n^2 + 2} - \sqrt{n^2 + 1} \right) \left(\sqrt{n^2 + 2} + \sqrt{n^2 + 1} \right)}{\sqrt{n^2 + 2} + \sqrt{n^2 + 1}} = \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + 2} + \sqrt{n^2 + 1}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\dots+n}{2n^2+9}.$$

Розв'язання. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\dots+n}{2n^2+9} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{2n^2+9} = \frac{1/2}{2} = \frac{1}{4}.$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}}{\frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \dots + \frac{1}{5^n}}.$$

Розв'язання.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}}{\frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \dots + \frac{1}{5^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{\frac{1}{5} \left(1 - \frac{1}{5^n}\right)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{5}} = \frac{5}{2}.$$

Тут ми використали формулу суми n членів

$$\text{геометричної прогресії } b_1 + b_1q + b_1q^2 + \dots + b_1q^{n-1} = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q},$$

а також формулу 1) з основних формул ($\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{5^n} = 0$).

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 4^n}{2^n + 3^n}.$$

Розв'язання. Поділимо чисельник та знаменник дробу на степінь з найбільшою основою, тобто на 4^n . Отимуємо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 4^n}{2^n + 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n + 1}{\left(\frac{2}{4}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n} = \left(\frac{1}{0}\right) = \infty.$$

6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n \cdot n! + (n+2)!}{3 \cdot (n+1)!}.$

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n \cdot n! + (n+2)!}{3 \cdot (n+1)!} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot (2n + (n+1)(n+2))}{3n! \cdot (n+1)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 5n + 2}{3n + 3} = \infty, \end{aligned}$$

оскільки старший степінь чисельника більший, ніж старший степінь знаменника.

7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n+1}{5n-2} \right)^{3n+2}.$

Розв'язання. Маємо невизначеність виду $(1)^\infty$, тому використовуємо формулу 10). Для цього дріб у дужках приведемо до вигляду $1 + \alpha_n$, де α_n – нескінченно мала послідовність. Для цього до дробу у основі степеня додамо та віднімемо 1:

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n+1}{5n-2} \right)^{3n+2} &= (1)^\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \left(\frac{5n+1}{5n-2} - 1 \right) \right)^{3n+2} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{5n-2} \right)^{\frac{5n-2}{3} \cdot \frac{3}{5n-2} \cdot (3n+2)} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3(3n+2)}{5n-2}} = \\
&= e^{\frac{9}{5}}.
\end{aligned}$$

Приклади для самостійного розв'язання.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + 5\sqrt{25n^2 + 3n + 2}}{9n + 4}$. (Відповідь: $\frac{28}{9}$).
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt[4]{n^5} - 2n^3 + 5n^2 - 4\sqrt{n} + 1}{n^5 + 5}$. (Відповідь: 0).
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 5n + 4}{n^2 - 3n + 7} \right)^{2n}$. (Відповідь: e^{16}).
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^n}{3^n}$. (Відповідь: $\frac{3}{2}$).
5. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})$. (Відповідь: 0).
6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! - 3 \cdot n!}{2n^2 \cdot n!}$. (Відповідь: $\frac{1}{2}$).
7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^6 + 4n^5 - 1}{n \cdot \sqrt[3]{n^{12} + 3n^2 + 1} + 8n^3 + 3n + 2}$. (Відповідь: ∞).