ЗМІСТ

ВСТУП

Метою вивчення навчальної дисципліни «Функції скінченної варіації та інтеграл Рімана-Стілтьєса» є систематизація і поглиблення студентами знань з основних і спеціальних розділів математичного аналізу та набуття умінь їх практичного застосування.

Основними **завданнями** вивчення дисципліни «Функції скінченної варіації та інтеграл Рімана-Стілтьєса»:

- засвоєння основних означень, теорем про монотонні функції, функції зі скінченною варіацією та інтеграл Риммана-Стільтьєса;
- засвоєння теорем про зв'язок між монотонними функціями і функціями з обмеженою варіацією, між інтегралом Рімана і Рімана - Стілтьєса;
- засвєння умов існування інтеграла Рімана - Стілтьєса;
- володіння навичок використання здобутих знань для розв'язування задач з виявлення функцій зі скінченним зміненням, обчислення міри множини на прямій та обчислення інтеграла Рімана - Стілтьєса;
- набуття вміння наводити приклади до означень та теорем спеціального розділу математичного аналізу.

Згідно з вимогами освітньо-професійної програми студент повинен досягти таких результатів навчання:

знати:

- історичний розвиток математичних знань та парадигм, сучасні тенденції в математиці;
- аксіоми різних математичних структур, основи математичної логіки (правила виведення modus ponens та modus tollens);
- основні математичні методи аналізу, прогнозування та оцінки параметрів моделей, базові математичні способи інтерпретації числових даних;
- основні означення та твердження математичного та функціонального аналізу, алгебри, які використовуються в вивченому курсі;
- основні означення та властивості функцій зі скінченним зміненням, міри множини на прямій та інтеграла Рімана - Стілтьєса:
- зв'язок між монотонними функціями і функціями зі скінченним зміненням, інтегралом Рімана і інтегралом Рімана - Стілтьєса;
- умови існування інтеграла Рімана - Стілтьєса;

вміти:

- відтворювати необхідні базові знання з математичного аналізу, вільно володіти математичним апаратом даної дисципліни і застосовувати математичні методи для розв’язання відповідних задач;
- використовувати здобуті знання для розв'язування задач стосовно виявлення функцій зі скінченним зміненням, обчислення повної варіації функції обмеженої варіації, обчислення інтеграла Рімана - Стілтьєса, застосовуючи основні властивості зазначених об’єктів та твердження щодо них;
- наводити приклади до означень та теорем, які демонструють застосування того чи іншого факту або поняття до розв'язання конкретних задач, перевіряти умови виконання математичних тверджень, узагальнювати отримані результати;
- застосовувати методи математичного та функціонального аналізу.

Згідно з вимогами освітньо-професійної програми студенти повинні досягти таких **компетентностей**:

інтегральна компетентність:

• здатність розв'язувати складні спеціалізовані задачі та практичні проблеми у професійній діяльності або у процесі навчання, що передбачає застосування теорій та методів математики, статистики й комп'ютерних технологій і характеризується комплексністю та невизначеністю умов;

загальні компетентності:

• здатність до навчання, в тому числі, і самостійного; здатність до саморозвитку та самовдосконалення; розуміння предмету навчання та змісту професійної діяльності;

• здатність застосовувати професійні знання та вміння в професійній діяльності, проявляти творчий підхід, ініціативу;

• здатність використовувати математичні методи, інформаційні і комунікаційні технології;

• здатність застосовувати прийоми логічного мислення: аналіз, синтез, індукцію, дедукцію, узагальнення та конкретизацію та ін;

• здатність бути критичним і самокритичним, оцінювати та вдосконалювати власний і чужий досвід;

• здатність до пошуку, оброблення й аналізу інформації з різних джерел, необхідної для розв'язування наукових і професійних завдань;

• здатність спілкуватися державною мовою як усно, так і письмово;

• здатність спілкуватися з представниками інших професійних груп різного рівня (з експертами з інших галузей знань); здатність відповідально приймати рішення з урахуванням соціальних і етичних цінностей та правових норм; здатність усвідомлювати й враховувати соціокультурні розбіжності в професійній діяльності, проявляти толерантність до різних культур;

• здатність оцінювати та забезпечувати якість виконуваних робіт;

спеціальні компетентності:

• здатність розв'язувати проблеми різної складності та формулювати нові проблеми математичною мовою;

• здатність вести дискусії з фахівцями з галузі математика та статистика;

• здатність конструювати доведення та обґрунтування отриманих результатів у відповідності до обраного методу дослідження;

• здатність формулювати гіпотези та доводити або спростовувати їх;

• здатність викладення результатів дослідження у логічній послідовності, у тому числі відрізняти основні ідеї від деталей та технічних викладок;

• здатність проводити обчислення в рамках основних математичних моделей та застосовувати необхідні математичні методи;

• розуміння ролі та впливу математики на розвиток наукового та технологічного мислення;

• здатність пояснювати в математичних термінах результати, отримані під час розрахунків;

• готовність розв'язувати нові проблеми у нових галузях знань.

Міждисциплінарні зв'язки. Даний курс є спеціальним розділом математичного аналізу. Теоретичні знання і практичні навички, набуті при вивченні курсу, застосовуються при вивченні функціонального аналізу і теорії міри та інтеграла. Матеріали, що надаються при вивченні курсу, використовуються при виконанні курсових робіт та під час державної підсумкової атестації.

1 ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

1.1 Функції обмеженої варіації

При вивченні даного курсу будемо вважати, що функція $f(x)$ задана і скінченна на відрізку $D_f = [a,b]$.

1. Монотонні функції. Функція стрибків монотонної функції.

🗁**Означення 1.1**

$f(x)$ – *зростаюча* ($\nearrow$) на $X \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall x_1, x_2 \in X \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$,

$f(x)$ – *спадна* ($\searrow$) на $X \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall x_1, x_2 \in X \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$,

$f(x)$ – *неспадна (нестрого зростаюча)* на X

$$\overset{def}{\Leftrightarrow} \forall x_1, x_2 \in X \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2),$$

$f(x)$ – *незростаюча (нестрого спадна)* на X

$$\overset{def}{\Leftrightarrow} \forall x_1, x_2 \in X \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2),$$

$f(x)$ – *монотонна (строго)* на $X \overset{def}{\Leftrightarrow} f(x)$ – зростаюча або спадна на X,

$f(x)$ – *нестрого монотонна* на $X \overset{def}{\Leftrightarrow} f(x)$ – незростаюча або неспадна на X.

Приклад 1.1

1. $y = x^2$ *на* $x \in [0;+\infty]$ $\nearrow$ (рис. 1.1), оскільки

$$\left.\begin{matrix} x_1, x_2 \in [0,+\infty) \\ x_1 < x_2 \\ x_1 < x_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x_1 \cdot x_1 < x_2 \cdot x_2 \Rightarrow (x_1)^2 < (x_2)^2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

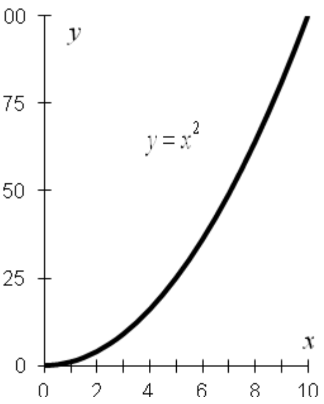


Рис. 1.1

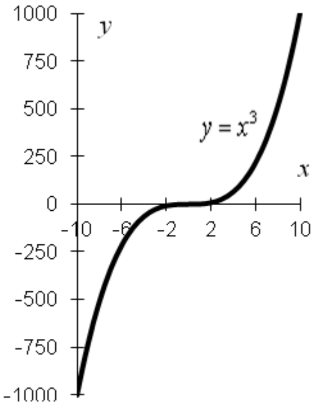


Рис. 1.2

2. $y = x^3$ на $\mathbb{R}$ ($\nearrow$) (рис. 1.2). (Довести самостійно ✍!)

Як правило, будемо розглядати зростаючі (неспадні) функції, оскільки будь-яка спадна (незростаюча) функція $f(x)$ може бути подана таким чином $f(x) = -(-f(x))$, де $(-f(x))$ – зростаюча (неспадна) функція.

Лема 1.1 Якщо $f(x)$ – монотонна (нестрого) на $[c;b]$, тоді

$$\left(\forall a \in (c,b) \quad \exists \lim_{x \to a+0} f(x) = f(a+0) \wedge \lim_{x \to a-0} f(x) = f(a-0)\right) \wedge$$
$$\wedge \exists \lim_{x \to c+0} f(x) \wedge \exists \lim_{x \to b-0} f(x).$$

Доведення. Нехай $f(x) - \nearrow$ (нестрого) на $[c;b]$. Доведемо, що $\exists f(a+0)$. Розглянемо допоміжну множину $A = \{f(x) : x \in (a;b)\}$. Оскільки

$$\left.\begin{matrix} a < x < b \\ f(x) - \nearrow \end{matrix}\right\} \Rightarrow f(a) < f(x) < f(b),$$

то множина A обмежена знизу числом $f(a) \Rightarrow \exists \gamma = \inf A$.

Довести: $\gamma = \inf A = \lim_{x \to a+0} f(x)$.

$$\left.\begin{matrix} \gamma = \inf A \overset{def}{\Rightarrow} \forall \varepsilon > 0 \; \exists 0 < \delta < b - a : \gamma \le f(a+\delta) < \gamma + \varepsilon \\ \left.\begin{matrix} \forall x \in [c,b) \quad a \le x < a + \delta \\ f(x) \nearrow \end{matrix}\right\} \Rightarrow f(a) \le f(x) < f(a+\delta) \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad f(a) \le \gamma \le f(x) \le f(a+\delta) < \gamma+\varepsilon \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall x \in [c,b) \quad a \le x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - \gamma| \le \varepsilon.$$

Висновок: $\lim_{x \to a+0} f(x) = \gamma$. ■

Наслідок 1.1

I. $f(x) \nearrow$ (нестрого) на $[c;b]$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1) \quad c < a_1 < x < b \Rightarrow f(c) \le f(a_1) \le f(a_1+0) \le f(x) \le f(b), \\ (2) \quad c < y < a_2 < b \Rightarrow f(c) \le f(y) \le f(a_2-0) \le f(a_2) \le f(b). \end{cases}$$

II. $f(x) \searrow$ (нестрого) на $[c;b]$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1) \quad c < a_1 < x < b \Rightarrow f(c) \ge f(a_1) \ge f(a_1+0) \ge f(x) \ge f(b), \\ (2) \quad c < y < a_2 < b \Rightarrow f(c) \ge f(y) \ge f(a_2-0) \ge f(a_2) \ge f(b). \end{cases}$$

Доведення.

$$\left.\begin{matrix} c < a_1 < x < b, \\ f(x) \nearrow \text{(нестрого)}, \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} f(c) \le f(a_1) \le f(x) \le f(b), \\ x \to a_1 + 0 - \text{граничний} \quad \text{перехід}, \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(c) \le f(a_1) \le f(a_1+0) \le f(x) \le f(b).$$

Обґрунтуємо останню нерівність. А саме, перевіримо виконання імплікації

$$c < a_1 < x < b \Rightarrow f(a_1+0) \le f(x).$$

Із доведення *леми 1.3* випливає

$$\left.\begin{matrix} \gamma = \inf A = f(a_1+0), \\ f(x) \in A, \end{matrix}\right\} \Rightarrow f(a_1+0) \le f(x). \; ■$$

Висновок із леми 1.1 Монотонна (нестрого) на відрізку функція може мати на цьому відрізку розриви лише першого роду.

🗀**Означення 1.2** Якщо функція $f(x)$ в точці c має розрив першого роду, то

правий її стрибок в точці c $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ значення виразу $f(c+0)-f(c)$,

лівий її стрибок в точці c $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ значення виразу $f(c)-f(c-0)$,

повний її стрибок в точці c $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ значення виразу $f(c+0)-f(c-0)$.

У крайніх точках множини визначення $D_f=[a,b]$ функція може мати лише односторонні стрибки. А саме: в точці a – правий стрибок, рівний $f(a+0)-f(a)$, а в точці b – лівий, рівний $f(b)-f(b-0)$.

У випадку, коли функція $f(x)$ неперервна в точці c, то $f(c+0)=f(c)=f(c-0)$, тому всі її стрибки дорівнюють нулю.

Лема 1.2 Якщо $f(x)-\nearrow$ (нестрого) на $[a,b]$, а $\{x_k\}_{k=1}^{n}\subset(a,b)$, тоді має місце нерівність

$$f(a+0)-f(a)+\sum_{k=1}^{n}\Big[f\big(x_k+0\big)-f\big(x_k-0\big)\Big]+f(b)-f(b-0)\le$$
$$\le f(b)-f(a). \qquad (1.1)$$

Доведення. Без обмеження загальності міркувань можна вважати, що точки розриву функції $\{x_k\}_{k=1}^{n}$ перенумеровані в порядку збільшення їх значень. Розглянемо допоміжні точки $\{y_k\}_{k=1}^{n+1}$ такі, що

$$a<y_1<x_1<y_2<x_2<\ldots<y_k<x_k<y_{k+1}<\ldots<y_n<x_n<y_{n+1}<b.$$

Тоді завдяки зростанню (нестрогому) функції і *наслідку 1.10* отримаємо:

$$\left.\begin{array}{lll}
a<y_1 & \Rightarrow & f(a+0)-f(a)\le f(y_1)-f(a),\\
y_1<x_1<y_2 & \Rightarrow & f(x_1+0)-f(x_1-0)\le f(y_2)-f(y_1),\\
y_2<x_2<y_3 & \Rightarrow & f(x_2+0)-f(x_2-0)\le f(y_3)-f(y_2),\\
\ldots & & \\
y_k<x_k<y_{k+1} & \Rightarrow & f(x_k+0)-f(x_k-0)\le f(y_{k+1})-f(y_k),\\
\ldots & & \\
y_n<x_n<y_{n+1} & \Rightarrow & f(x_n+0)-f(x_n-0)\le f(y_{n+1})-f(y_n),\\
y_{n+1}<b & \Rightarrow & f(b)-f(b-0)\le f(b)-f(y_{n+1}),
\end{array}\right\}(+)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(a+0)-f(a)+f(x_1+0)-f(x_1-0)+f(x_2+0)-f(x_2-0)+\ldots+$$
$$+f(x_k+0)-f(x_k-0)+\ldots+f(x_n+0)-f(x_n-0)+f(b)-f(b-0)\le$$
$$\le f(b)-f(a). \ \blacksquare$$

Наслідок 1.2 Якщо $f(x)-\nearrow$ (нестрого) на $[a,b]$, то множина її точок розриву, стрибки в яких не менші за σ, є скінченною.

Доведення. Із нерівності (1.1) випливає, що сума всіх стрибків зверху оцінюється різницею $f(b)-f(a)$, а знизу (за умовою) – значенням виразу $n\cdot\sigma$. Отже, отримаємо $n\cdot\sigma\le f(b)-f(a)$. Звідки випливає, що кількість n точок розриву функції, стрибки в яких неменші за σ, може бути лише скінченною. ■

Теорема 1.1 Якщо $f(x)-\nearrow$ (нестрого) на $[a,b]$, то множина її точок розриву не більше, ніж зчисленна. Крім того, має місце нерівність

$$f(a+0)-f(a)+\sum_k\left[f\left(x_k+0\right)-f\left(x_k-0\right)\right]+f(b)-f(b-0)\le$$
$$\le f(b)-f(a), \qquad (1.2)$$

де $\{x_k\}\subset(a,b)$ – усі точки розриву цієї функції.

Доведення. Через A_n позначимо множину точок розриву функції, стрибки в яких не менші за $1/n$ ($n\in\mathbb{N}$). За *наслідком 1.2* кожна із множин A_n ($n\in\mathbb{N}$) є скінченною. Множина A усіх точок розриву функції є об'єднанням множин A_n ($n\in\mathbb{N}$), тобто $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$. Таким чином, множина A, як зчисленне об'єднання скінченних множин, є не більш, ніж зчисленною. Першу частину теореми доведено.

Якщо функція має скінченну множину точок розриву, то нерівність (1.2) перетворюється на нерівність (1.1). Якщо ж ця множина зчисленна, то після здійснення в нерівності (1.1) граничного переходу при $n\to\infty$ отримаємо нерівність (1.2). ■

🗁**Означення 1.3** Нехай функцію $f(x)$ задано на $[a,b]$, тоді *функцією стрибків* цієї функції називають функцію $s(x)$, задану співвідношеннями:

$$s(a)=0,$$
$$s(x)=f(a+0)-f(a)+\sum_{x_k<x}\left[f\left(x_k+0\right)-f\left(x_k-0\right)\right]+f(x)-f(x-0),$$

де $\{x_k\}\subset(a,b)$ – точки розриву даної функції.

Теорема1.2 Різниця між неспадою функцією і функцією її стрибків є неспадна неперервна функція.

Доведення. Позначимо зазначену в теоремі функцію через $\varphi(x)$, тобто $\varphi(x)=f(x)-s(x)$. Нехай $a<x<y<b$, тоді

$$s(y)-s(x)=$$
$$=\left[f(a+0)-f(a)\right]+\sum_{x_k<y}\left[f\left(x_k+0\right)-f\left(x_k-0\right)\right]+\left[f(y)-f(y-0)\right]-$$
$$-\left[f(a+0)-f(a)\right]-\sum_{x_k<x}\left[f\left(x_k+0\right)-f\left(x_k-0\right)\right]-\left[f(x)-f(x-0)\right]=$$

$$=\sum_{x_k<x}\left[f\left(x_k+0\right)-f\left(x_k-0\right)\right]+\left[f(x+0)-f(x-0)\right]+$$
$$+\sum_{x<x_k<y}\left[f\left(x_k+0\right)-f\left(x_k-0\right)\right]+\left[f(y)-f(y-0)\right]-$$
$$-\sum_{x_k<x}\left[f\left(x_k+0\right)-f\left(x_k-0\right)\right]-\left[f(x)-f(x-0)\right]=$$
$$=\left[f(x+0)-f(x)\right]+\sum_{x<x_k<y}\left[f\left(x_k+0\right)-f\left(x_k-0\right)\right]+\left[f(y)-f(y-0)\right].$$

Оскільки $f(x)-\nearrow$ (нестрого) на $[x,y]$, то до отриманого виразу можна застосувати нерівність (1.2). Тоді

$$s(y)-s(x)=\left[f(x+0)-f(x)\right]+\sum_{x<x_k<y}\left[f\left(x_k+0\right)-f\left(x_k-0\right)\right]+\left[f(y)-f(y-0)\right]\le$$
$$\le f(y)-f(x).$$

Звідки

$$f(x)-s(x)\le f(y)-s(y),$$
$$\varphi(x)\le\varphi(y). \tag{1.3}$$

Нестроге монотонне зростання функції $\varphi(x)$ доведено.

Доведемо тепер неперервність функції $\varphi(x)$ в точці x. Для цього потрібно довести , що

$$\varphi(x-0)=\varphi(x)=\varphi(x+0).$$

Доведемо лише другу рівність, першу доводить аналогічно.

Здійснимо граничний перехід під знаком нерівності (1.3) при $y\to x+0$, одержимо

$$\varphi(x)\le\varphi(x+0). \tag{1.4}$$

Оскільки

$$s(y)-s(x)=$$
$$=\underbrace{\left[f(x+0)-f(x)\right]}_{\oplus}+\sum_{x<x_k<y}\underbrace{\left[f\left(x_k+0\right)-f\left(x_k-0\right)\right]}_{\oplus}+\underbrace{\left[f(y)-f(y-0)\right]}_{\oplus}\ge$$
$$\ge f(x+0)-f(x),$$

тобто

$$s(y)-s(x)\ge f(x+0)-f(x),$$

то, здійснюючи граничний перехід у останній нерівності при $y\to x+0$, отримаємо

$$s(x+0)-s(x)\ge f(x+0)-f(x),$$
$$\varphi(x)\ge\varphi(x+0). \tag{1.5}$$

Із нерівностей (1.4) і (1.5) матимемо: $\varphi(x)=\varphi(x+0)$.

Теорему повністю доведено. ■

Наведені вище твердження виконуються також і для незростаючої функції, за тією лише відмінністю, що праві частини нерівностей (1.1) і (1.2) будуть виражатися різницею $f(a)-f(b)$.

2. Відображення множин.

🗁**Означення 1.4** Нехай $A \subset X = D(f)$, тоді *образом множини A* при відображенні $f: X \to Y$ називається множина в Y вигляду $f(A) = \{f(x): x \in A\}$.

Наприклад,

$$\left.\begin{aligned} &f(x) = x^2, \\ &A = [-1;2], \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(A) = [0;4].$$

🗁**Означення 1.5** Нехай $B \subset Y$, тоді *прообразом множини B* при відображенні $f: X \to Y$ називається множина в X вигляду $f^{-1}(B) = \{x \in D(f): f(x) \in B\}$.

Наприклад,

1) $$\left.\begin{aligned} &f(x) = x^2, \\ &B = (0;2], \end{aligned}\right\} \Rightarrow f^{-1}(B) = \left[-\sqrt{2};0\right) \cup \left(0;\sqrt{2}\right];$$

2) Нехай $[x]$ – ціла частина дійсного числа x: найбільше ціле число, що не перевищує x, тоді

$$\left.\begin{aligned} &f(x) = [x], \\ &B = \{1\}, \end{aligned}\right\} \Rightarrow f^{-1}(B) = [1;2).$$

Теорема 1.3 *(властивості образа)***.** Нехай $f: X \to Y$, $A, A_1, A_2, \{A_k\}_k \subset X$.

1. Якщо $A_1 \subset A_2$, то $f(A_1) \subset f(A_2)$.
2. Якщо $A = \bigcup\limits_k A_k$, то $f(A) = \bigcup\limits_k f(A_k)$.
3. Якщо $A = \bigcap\limits_k A_k$, то $f(A) \subseteq \bigcap\limits_k f(A_k)$. У випадку, коли $f: X \to f(X)$ – взаємно однозначне відображення, то $f(A) = \bigcap\limits_k f(A_k)$.

Доведення.

1. $$\left.\begin{aligned} &y \in f(A_1), \\ &A_1 \subset A_2, \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} &(\text{за def образу})\ \exists x \in A_1 : y = f(x), \\ &A_1 \subset A_2, \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ (за def включення множин)$(x \in A_2 : y = f(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ (за def образу)$y \in f(A_2)$.

Маємо: $y \in f(A_1) \Rightarrow y \in f(A_2)$. Це означає, що $f(A_1) \subset f(A_2)$.

2. $$\left.\begin{aligned} &y \in f(A), \\ &A = \bigcup_k A_k, \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} &(\text{за def образу})\ \exists x \in A : y = f(x), \\ &A = \bigcup_k A_k, \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow$ (за def об'єднання) $\exists k : \left(x \in A_k \wedge y = f(x)\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ (за def образу) $\exists k : y \in f(A_k) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ (за def об'єднання) $y \in \bigcup\limits_k f(A_k)$.

Маємо: $y \in f(A) \Rightarrow y \in \bigcup\limits_k f(A_k)$. Це означає, що

$$f(A) \subseteq \bigcup_k f(A_k).$$

Доведемо включення в інший бік.

$y \in \bigcup\limits_k f(A_k) \Leftrightarrow$ (за def об'єднання) $\exists k_0 : y \in f(A_k) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ (за def образу) $\exists k_0 \underline{\exists x_{k_0} \in A_k} : y = f(x_{k_0}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ (за def об'єднання) $x_{k_0} \in \bigcup\limits_k A_k = A \wedge y = f(x_{k_0}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ (за def образу) $y \in f(A)$.

Маємо: $y \in \bigcup\limits_k f(A_k) \Rightarrow y \in f(A)$. Це означає, що

$$\bigcup_k f(A_k) \subseteq f(A).$$

Два доведені включення відповідають означенню рівності множин.

3. $\left.\begin{array}{l} y \in f(A), \\ A = \bigcap\limits_k A_k, \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \text{(за def образу) } \exists x \in A : y = f(x), \\ A = \bigcap\limits_k A_k, \end{array}\right\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ (за def перетину) $\left(x \in A_k \wedge y = f(x)\right) \forall k \Rightarrow$

$\Rightarrow$ (за def образу) $y \in f(A_k) \forall k \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ (за def перетину) $y \in \bigcap\limits_k f(A_k)$.

Маємо: $y \in f(A) \Rightarrow y \in \bigcap\limits_k f(A_k)$. Це означає, що

$$f(A) \subseteq \bigcap_k f(A_k). \tag{1.6}$$

Обернути єдину імплікацію в ланцюгу перетворень висловлювань неможна, оскільки поява зворотної імплікації у вигляді

$$y \in f(A_k) \forall k \Rightarrow \text{(за def образу)} \forall k \underline{\exists x_k \in A_k} \wedge y = f(x_k)$$

не дозволить завершити доведення.

В загальному випадку рівність $f(A) = \bigcap\limits_k f(A_k)$ дійсно не виконується. Так, для функції $f(x) = x^2$ і множин $A_1 = [-1;2]$ і $A_2 = [-2;1]$ маємо:

$$\left.\begin{array}{ll} f(A_1) = f(A_2) = [0;4]; & f(A_1) \cap f(A_2) = [0;4]; \\ A_1 \cap A_2 = [-1;1]; & f(A_1 \cap A_2) = [0;1]; \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(A_1) \cap f(A_2) \neq f(A_1 \cap A_2).$$

Припустимо тепер, що відображення $f: X \to f(X)$ – взаємно однозначне, тоді воно має зворотне $g(y) = f^{-1}(y)$. Внаслідок цього, для кожної множини A_k можна визначити множину $B_k = f(A_k)$ так, що $A_k = g(B_k)$.

Із першої частини властивості 3 випливає, що

$$g\left(\bigcap_k B_k\right) \subseteq \bigcap_k g(B_k).$$

Застосування властивості 1 приводить до включення

$$f\left(g\left(\bigcap_k B_k\right)\right) \subseteq f\left(\bigcap_k g(B_k)\right).$$

Оскільки відображення $g(y)$ і $f(x)$ взаємно обернені, то $\bigcap_k B_k \subseteq f\left(\bigcap_k g(B_k)\right)$.

Із побудови множини B_k ипливає, що $\bigcap_k f(A_k) \subseteq f\left(\bigcap_k A_k\right)$, тобто

$$f(A) \supseteq \bigcap_k f(A_k). \tag{1.7}$$

Отже, для взаємно однозначного відображення із (1.6) і (1.7) отримаємо рівність $f(A) = \bigcap_k f(A_k)$. Теорему повністю доведено. ■

Як можна побачити із доведення останньої теореми, образ перетину не завжди дорівнює перетину образів. Рівність має місце лише у випадку, коли відображення є взаємно однозначним. Прикладом такого відображення може виступати строго монотонна, неперервна на відрізку $[a,b]$ функція, яка, як відомо із основного курсу математичного аналізу, є монотонною і неперервною на відрізку $[f(a); f(b)]$ у випадку зростаючої функції або на відрізку $[f(b); f(a)]$ у випадку спадної функції.

Теорема 1.4 *(властивості прообраза).* **(**✍ Доведення здійснити самостійно**!)** Нехай $f: X \to Y$, $B, B_1, B_2, \{B_k\}_k \subset Y$.

1. Якщо $B_1 \subset B_2$, то $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.
2. Якщо $B = \bigcup_k B_k$, то $f^{-1}(B) = \bigcup_k f^{-1}(B_k)$.
3. Якщо $B = \bigcap_k B_k$, то $f^{-1}(B) = \bigcap_k f^{-1}(B_k)$.

3. Множина на прямій лебеґової міри нуль.

🗁**Означення 1.6** Множина *A має лебеґову міру нуль,* якщо всі її точки можна покрити не більш ніж зчисленною кількістю інтервалів, з сумою довжин, меншою за ε, тобто

$$\mu A = 0 \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \{(\alpha_k, \beta_k)\}_{k \in I} : \bigcup_{k \in \Im} (\alpha_k, \beta_k) \supset A \wedge \sum_{k \in \Im} (\beta_k - \alpha_k) < \varepsilon.$$

Тут μ – міра Лебеґа. У випадку, коли $\Im = \{1, 2, ..., n\}$ – скінченна індексна множина, то сума довжин інтервалів дорівнює

$$\sum_{k\in\Im}(\beta_k - \alpha_k) = \sum_{k=1}^{n}(\beta_k - \alpha_k) < \varepsilon,$$

а у випадку, коли $\Im$ – зчисленна індексна множина, то сума $\sum\limits_{k\in\Im}(\beta_k - \alpha_k)$ не залежить від нумерації елементів множини $\Im$, тому можна вважати, що $\Im = \mathbb{N}$ і

$$\sum_{k\in\Im}(\beta_k - \alpha_k) = \lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}(\beta_k - \alpha_k) < \varepsilon.$$

Приклад 1.2 **1.** Будь-яка скінченна множина на числовій прямій має нульову міру Лебеґа.

Дійсно, нехай така множина утворюється із N дійсних чисел. Кожну точку множини покриємо інтервалом (α_k, β_k) довжини $\dfrac{\varepsilon}{2N} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{k}(\alpha_k, \beta_k) \le N \cdot \frac{\varepsilon}{2N} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

2. Доведемо, що будь-яка зчисленна множина має лебеґову міру нуль.

Оскільки множина є зчисленною, то перенумеруємо її елементи: $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$. Покриємо кожну точку r_n окремо інтервалом (α_n, β_n) довжини, меншої за $\dfrac{\varepsilon}{2^n}$ $(n \in \mathbb{N})$. Тоді

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}(\beta_k - \alpha_k) < \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon \cdot \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \varepsilon.$$

3. Розглянемо множину Кантора. Її будують в такий спосіб. Відрізок $[0;1]$ ділимо на три рівні частини й відкидаємо точки середнього інтервалу $\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{2}{3}\right)$. Ті відрізки, що залишилися, ділимо кожний на три рівні частини і із кожного відкидаємо середній інтервал, тобто відкидаємо точки інтервалів $\left(\dfrac{1}{9};\dfrac{2}{9}\right)$ і $\left(\dfrac{7}{9};\dfrac{8}{9}\right)$. Потім знову ті відрізки, що залишилися, ділимо на три частини й відкидаємо середні інтервали, тобто $\left(\dfrac{1}{27};\dfrac{2}{27}\right)$, $\left(\dfrac{7}{27};\dfrac{8}{27}\right)$, $\left(\dfrac{19}{27};\dfrac{20}{27}\right)$, $\left(\dfrac{25}{27};\dfrac{26}{27}\right)$. Процес продовжуємо до нескінченності. Об'єднання усіх відкинутих інтервалів задає *відкриту канторову* множину G:

$$G=\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{9};\frac{2}{9}\right)\cup\left(\frac{7}{9};\frac{8}{9}\right)\cup\left(\frac{1}{27};\frac{2}{27}\right)\cup\left(\frac{7}{27};\frac{8}{27}\right)\cup\left(\frac{19}{27};\frac{20}{27}\right)\cup$$
$$\cup\left(\frac{25}{27};\frac{26}{27}\right)\cup\ldots,$$

а множина F, що в результаті залишилася – *замкнену канторову множину:* $F=[0;1]\setminus G$ (рис. 1.3).

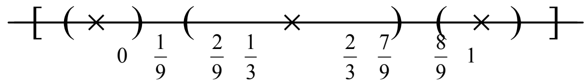


Рис. 1.3

Знайдемо міру канторової множини F. Для цього спочатку знайдемо міру множини G. Всі інтервали, що утворюють цю множину взаємно не перетинаються, вони називаються *доповняльними інтервалами* множини G. А міра цієї множини дорівнює

$$\mu G=\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{9}+4\cdot\frac{1}{27}+\ldots=\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2^2}{3^3}+\ldots=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{2}{3}}=1\,.$$

Оскільки $[0;1]\subset G$*, то* міра множини F дорівнює

$$\mu F=\mu[0;1]-\mu G=1-1=0\,.$$

Висновок: замкнена канторова множина F має лебеґову міру нуль.

Будемо говорити, що деяка властивість виконується *майже скрізь на множині* $M\subset\mathbb{R}$, якщо вона має місце у всіх точках M, окрім точок множини із M, що має лебеґову міру нуль.

4. Диференціювання монотонної функції.

🗁**Означення 1.7** Скінченне або нескінченне число λ – *похідне число функції* $f(x)$ *в т.* $x_0\in D_f$ $\overset{def}{\Leftrightarrow}$

$$\exists\{h_n\neq 0\}:\left(\{x_0+h_n\}\subset D_f\wedge\lim_n h_n=0\right)\Rightarrow\lim_n\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}=\lambda\,.$$

Позначення: $\lambda=Df(x_0)$.

Зауваження 1.1 Якщо число λ (скінченне або нескінченне) є похідною функції $f(x)$ в точці x_0, то із означення границі функції за Гейне

$$\exists f'(x_0)=\lambda=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\overset{def\ Г.}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{def\ Г.}{\Leftrightarrow}\forall\{h_n\neq 0\}:\left(\{x_0+h_n\}\subset D_f\wedge\lim_n h_n=0\right)\Rightarrow\lim_n\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}=\lambda$$

випливає, що усі похідні числа цієї функції в точці x_0 дорівнюють λ. Це пов’язано з тим, що у означенні похідної міститься квантор загальності щодо вибору послідовності $\{h_n\}$, що прямує до нуля, а у означенні похідного числа – квантор існування.

Приклад 1.3 Для функції Діріхле

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q},\\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$$

знайти усі похідні числа в кожні точці $x_0\in\mathbb{R}$.

Розв'язання. Нехай спочатку $x_0\in\mathbb{Q}$, тоді розглянемо $\{h_n\neq 0\}:\lim\limits_n h_n=0$:

1) $\{h_n\}\subset\mathbb{Q}\Rightarrow\lim\limits_n\dfrac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}=\lim\limits_n\dfrac{1-1}{h_n}=0$,

2) $\{h_n\}\subset\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\Rightarrow\lim\limits_n\dfrac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}=\lim\limits_n\dfrac{0-1}{h_n}=\pm\infty$,

3) якщо послідовність $h_n\to 0$, $\{h_n\}$ – довільна, то

а) вона може утворюватися із скінченної множини ірраціональних членів і зчисленної – раціональних, тоді це рівносильне випадку 1), і послідовність $\left\{\sigma_n=\dfrac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}\right\}$ збігається до 0,

б) послідовність $\{h_n\}$ може утворюватися із скінченної множини раціональних членів і зчисленної – ірраціональних, тоді це рівносильне випадку 2), і послідовність $\{\sigma_n\}$ прямує до $\pm\infty$,

в) послідовність $\{h_n\}$ може утворюватися із зчисленної множини раціональних членів і зчисленної ірраціональних, тоді із неї можна виділити дві підпослідовності $\{h_{k_n}\}\subset\mathbb{Q}$ і $\{h_{m_n}\}\subset\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, а відповідні їм послідовності $\{\sigma_{k_n}\}$ і $\{\sigma_{m_n}\}$ прямують до 0 і до $\pm\infty$ відповідно, тому послідовність $\{\sigma_n\}$ розбігається.

Висновок: функція Діріхле має 3 похідних числа в точці $x_0\in\mathbb{Q}$ – це $-\infty$, 0 і $+\infty$.

Тепер розглянемо випадок, коли $x_0\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Нехай $\{h_n\neq 0\}:\lim\limits_n h_n=0$. Тоді

1) $\{x_0+h_n\}\subset\mathbb{Q}\Rightarrow\lim\limits_n\dfrac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}=\lim\limits_n\dfrac{1-0}{h_n}=\pm\infty$,

2) $\{x_0+h_n\}\subset\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\Rightarrow\lim\limits_n\dfrac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}=\lim\limits_n\dfrac{0-0}{h_n}=0$,

3) загальний випадок розглядається аналогічно загальному випадку для $x_0\in\mathbb{Q}$.

Висновок: функція Діріхле має 3 похідних числа в точці $x_0\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ – це $-\infty$, 0 і $+\infty$.

Відповідь: функція Діріхле має 3 похідних числа в кожній точці $x_0\in\mathbb{R}$ – це $-\infty$, 0 і $+\infty$. ■

Теорема 1.5 *(про існування похідного числа)*. Якщо функція $f(x)$ задана на відрізку $[a,b]$, то в кожній точці цього відрізку вона має хоча б одне похідне число.

Доведення. Нехай $\{h_n \neq 0\}:\left(\{x_0+h_n\}\subset[a,b]\wedge \lim_n h_n=0\right)$, тоді розглянемо послідовність $\left\{\sigma_n=\dfrac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}\right\}$.

$\{\sigma_n\}$ – обмежена, $\Rightarrow$	$\{\sigma_n\}$ – необмежена, $\Rightarrow$
застосовуємо теорему Больцано – Вейєрштрасса: $\exists\left\{\sigma_{k_n}\right\}:\exists\lim_n \sigma_{k_n}=\lambda<\infty$.	застосовуємо аналог теореми Больцано – Вейєрштрасса: $\exists\left\{\sigma_{k_n}\right\}:\exists\lim_n \sigma_{k_n}=\infty$.
Висновок: $\exists\lambda$ – скінченне похідне число.	*Висновок:* $\exists$ нескінченне похідне число. ■

Теорема 1.6 *(критерій існування похідної)*. Нехай функція $f(x)$ задана на відрізку $[a,b]$, тоді

$\exists$ похідна функції $f(x)$ в точці $x_0\in[a,b]$	$\Leftrightarrow$	усі похідні числа функції $f(x)$ в точці x_0 скінченні й рівні між собою.

Доведення. *Необхідність* очевидна (див. зауваження 1.1).

Достатність. Нехай усі похідні числа функції $f(x)$ в точці $x_0\in[a,b]$ рівні між собою і дорівнюють λ. Для того, щоб довести існування похідної, потрібно довести існування границі $\exists f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, що за означенням за Гейне означатиме:

$$\forall\{h_n\neq 0\}:\left(\{x_0+h_n\}\subset[a,b]\wedge \lim_n h_n=0\right)\Rightarrow \lim_n\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}=f'(x_0).$$

Розглянемо послідовність $\left\{\sigma_n=\dfrac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}\right\}$. Оскільки усі похідні числа дорівнюють λ, то із означення похідного числа і виписаного означення границі за Гейне випливає, що потрібно довести:

$$\forall\{h_n\neq 0\}:\left(\{x_0+h_n\}\subset[a,b]\wedge \lim_n h_n=0\right)\Rightarrow \lim_n\sigma_n=\lambda.$$

Припустимо супротивне, що існує така послідовність $\{h_n\neq 0\}:\lim_n h_n=0$, що відповідна їй послідовність $\{\sigma_n\}$ не прямує до λ.

Нехай число λ – скінченне. Тоді поза межами деякого околу точки λ лежить нескінченна множина членів послідовності $\{\sigma_n\}$, яку ми перепишемо у вигляді підпослідовності $\left\{\sigma_{k_n}\right\}$.

$\left\{\sigma_{k_n}\right\}$ – обмежена, $\Rightarrow$	$\left\{\sigma_{k_n}\right\}$ – необмежена, $\Rightarrow$
застосовуємо теорему Больцано – Вейєрштрасса: $\exists\left\{\sigma_{s_{k_n}}\right\}:\exists\lim_n \sigma_{s_{k_n}}=\lambda_1<\infty$.	застосовуємо аналог теореми Больцано – Вейєрштрасса: $\exists\left\{\sigma_{s_{k_n}}\right\}:\exists\lim_n \sigma_{s_{k_n}}=\infty$.
Висновок: Знайдено інше похідне число $\lambda_1\neq\lambda$. $\not\to$	*Висновок:* $\exists$ нескінченне похідне число, а за припущенням усі похідні числа дорівнюють скінченному числу λ. $\not\to$

Отримані суперечності доводять теорему. ■

Твердження 1.1 Усі похідні числа зростаючої на відрізку $[a,b]$ функції $f(x)$ є невід'ємними.

Це твердження є очевидним наслідком визначень похідного числа і зростаючої функції. Дійсно, нехай

$$h_n\neq 0\}:\left(\{x_0+h_n\}\subset D_f\wedge\lim_n h_n=0\right)\Rightarrow\lim_n\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}=\lambda.$$

Тоді у випадку, коли $h_n>0$,

$$\left.\begin{matrix}x_0+h_n>x_0\\ f(x)-\nearrow\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}f(x_0+h_n)\geq f(x_0)\\ h_n>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\sigma_n=\frac{\overbrace{f(x_0+h_n)-f(x_0)}^{+}}{\underbrace{h_n}_{+}}\geq 0.$$

У випадку, коли $h_n<0$,

$$\left.\begin{matrix}x_0+h_n<x_0\\ f(x)-\nearrow\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}f(x_0+h_n)\leq f(x_0)\\ h_n<0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\sigma_n=\frac{\overbrace{f(x_0+h_n)-f(x_0)}^{-}}{\underbrace{h_n}_{-}}\geq 0.$$

Оскільки $\sigma_n\geq 0\ \forall n\in\mathbb{N}$, то $\lim_n\sigma_n=\lambda\geq 0$. ■

Твердження 1.2 Множина точок, в яких хоча б одне похідне число зростаючої на відрізку $[a,b]$ функції нескінченне, має лебеґову міру нуль. (Доведення за бажанням вивчити самостійно ✍!)

Твердження 1.3 Зростаюча на відрізку $[a,b]$ функція майже в усіх точках цього відрізку має скінченну похідну $f'(x)$.

(Доведення за бажанням вивчити самостійно ✍!)

Приклад 1.4 Наведемо приклад функції, яка:
1) нестрого зростає на відрізку $[0;1]$,
2) неперервна на відрізку $[0;1]$,
3) майже в усіх точках $[0;1]$ має похідну $f'(x)$, що дорівнює 0,
4) $f(0)=0,\ f(1)=1$,
5) $\int_0^1 f'(x)dx<f(1)-f(0)$.

Розв’язання. Задамо значення функції в точках доповняльних інтервалів відкритої канторової множини G:

1) $x\in\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)\Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}$,

2) $x\in\left(\frac{1}{9};\frac{2}{9}\right)\Rightarrow f(x)=\frac{1}{2^2}$ і $x\in\left(\frac{7}{9};\frac{8}{9}\right)\Rightarrow f(x)=\frac{3}{2^2}$,

3) $x\in\left(\frac{1}{27};\frac{2}{27}\right)\Rightarrow f(x)=\frac{1}{2^3}$, $x\in\left(\frac{7}{27};\frac{8}{27}\right)\Rightarrow f(x)=\frac{3}{2^3}$,

$x\in\left(\frac{19}{27};\frac{20}{27}\right)\Rightarrow f(x)=\frac{5}{2^3}$, $x\in\left(\frac{25}{27};\frac{26}{27}\right)\Rightarrow f(x)=\frac{7}{2^3}$ і т.д.

Зокрема, для n-ої групи 2^{n-1} доповняльних інтервалів функцію $f(x)$ задамо значеннями $\frac{1}{2^n},\frac{3}{2^n},\frac{5}{2^n},...,\frac{2^n-1}{2^n}$. У результаті функція вже визначена в усіх точках множини G.

Визначимо тепер функцію в точках замкненої канторової множини F:

$$f(0)=0,\ f(1)=1,$$

$$x_0\in(0;1)\setminus G\Rightarrow f(x_0)=\sup_{x\in G,x<x_0} f(x).$$

Схему графіка функції див. на рис. 1.4.

Із побудови функції випливає її нестроге зростання.

Доведемо неперервність функції на $[0;1]$. Припустимо супротивне: точка $x_0\in[0;1]$ є точкою розриву, тоді внаслідок зростання (нестрогого) функції цей розрив може бути лише першого роду, а один із інтервалів $\left(f(x_0-0);f(x_0)\right)$ або $\left(f(x_0);f(x_0+0)\right)$ вільний від значень функції. Позначимо такий інтервал (α,β).

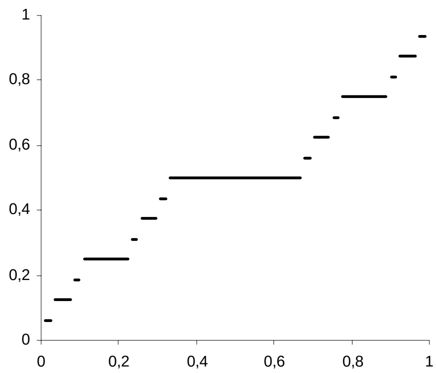


Рис. 1.4

Оскільки на множині G функція набуває всіх двійково-раціональних значень[1] із сегмента $[0;1]$, то поміж числами α і β можна знайти двійково-раціональне число, яке повинно бути значенням функції в точці із G. Це суперечить припущенню про відсутність усередині інтервалу (α,β) значень функції. Отже, функція є неперервною на $[0;1]$.

[1] Двійково-раціональним числом називають число, яке можна подати дробом вигляду $\frac{m}{2^k}$, $k=0,1,2,...$, $m\in\mathbb{Z}$. Нескладно довести, що множина двійково-раціональних чисел має ті самі властивості, що і множина раціональних чисел $\mathbb{Q}=\left\{\frac{m}{n}:\ n\in\mathbb{N},\ m\in\mathbb{Z}\right\}$.

Замкнена канторова множина F має лебеґову міру 0 (див. *приклад 1.17.4*). У точках множини $G=[0;1]\setminus F$ функція є *кусково-сталою*. На кожному доповняльному інтервалі вона набуває сталого значення, тому в кожній точці цього інтервалу похідна дорівнює 0. Отже,

$$f'(x) \overset{\substack{\text{майже}\\ \text{скрізь}}}{=} 0 .$$

За критерієм Лебеґа [3] функція $f'(x)$ є інтегрованою, оскільки обмежена і має множину точок розриву F лебеґової міри нуль. Отже, значення інтеграла Рімана від неї дорівнює 0, тобто

$$\int_0^1 f'(x)dx = 0,$$

а $f(1)-f(0)=1-0=1$, тому $\int_0^1 f'(x)dx < f(1)-f(0)$. ■

Зауважимо, що властивість 5 функції із наведеного прикладу не суперечить формулі Ньютона – Лейбніца, оскільки у припущеннях цієї формули вимагається неперервність підінтегральної функції.

Теорема 1.7 Для будь-якої наперед заданої множини $A\subset[a,b]$ лебеґової міри 0 можна побудувати зростаючу неперервну на $[a,b]$ функцію, яка в кожній точці цієї множини має нескінченну похідну.

Доведення проведемо конструктивне, тобто побудуємо таку функцію, що задовольняє теоремі.

Оскільки $\mu A = 0$, то

$\forall n\in\mathbb{N}\ \exists G_n \supset A$ – відкрита множина: $\mu G_n < \dfrac{1}{2^n}$.

Введемо допоміжні функції $\psi_n(x)=\mu\left(G_n\bigcap[a,x]\right)$ $(n\in\mathbb{N})$. Оскільки міра – це невід’ємна функція множини, тому введені функції невід’ємні. Якщо $a\le x_1 < x_2 \le b$, то

$$G_n\bigcap[a,x_1]\subset G_n\bigcap[a,x_2] \;\Rightarrow\; \mu\left(G_n\bigcap[a,x_1]\right)\le\mu\left(G_n\bigcap[a,x_2]\right) \;\Rightarrow\; \psi_n(x_1)\le\psi_n(x_2).$$

Тому кожна із функції $\psi_n(x)$ $(n\in\mathbb{N})$ зростає на $[a,b]$. Крім того, кожна із них є неперервною. Доведення цього факту можна здійснити за допомогою властивості неперервності міри, вивчення якої виходить за рамки даного курсу. Тому залишаємо доведення читачеві після вивчення курсу «Теорія міри та інтеграла».

Отже, кожна із функції $\psi_n(x)$ $(n\in\mathbb{N})$ невід’ємна, неперервна і зростаюча на $[a,b]$. Окрім того, із означення цих функцій і множин G_n випливає оцінка на $[a,b]$:

$$\psi_n(x) < \frac{1}{2^n}\ (n\in\mathbb{N}). \tag{1.8}$$

Введемо функцію $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\psi_n(x)$. Завдяки властивостям функцій $\psi_n(x)$ $(n\in\mathbb{N})$ маємо невід’ємність, зростання функції $f(x)$ на $[a,b]$. Доведемо неперервність цієї функції на відрізку. Із нерівності (1.8) випливає, що збіжний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ є мажорантою для ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(x)$ на $[a,b]$, тому за ознакою Вейєрштрасса ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(x)$ рівномірно збігається на $[a,b]$. Члени $\psi_n(x)$ $(n\in\mathbb{N})$ цього ряду неперервні на $[a,b]$ функції. Отже, за теоремою про неперервність суми функціонального ряду маємо неперервність функції $f(x)$ на $[a,b]$.

Знайдемо похідну функції $f(x)$ в точці $x_0\in A$. Зафіксуємо $n\in\mathbb{N}$. Для як завгодно малого за модулем h (для визначеності припустимо, що $h>0$) отримаємо $[x_0,x_0+h]\subset G_n$, тому

$$\psi_n(x_0+h)=\mu\left(G_n\bigcap[a,x_0+h]\right)=\mu\left(G_n\bigcap[a,x_0]\right)+\mu\left([x_0,x_0+h]\right)=\psi_n(x_0)+h,$$

тобто

$$\frac{\psi_n(x_0+h)-\psi_n(x_0)}{h}=1.$$

Для $h<0$ результат не зміниться.

Таким чином,

$$\forall N\in\mathbb{N}\ \exists h:\left([x_0,x_0+h]\subset G_n\vee[x_0+h,x_0]\subset G_n\right)\forall n\le N,$$

тоді

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\ge\sum_{n=1}^{N}\frac{\psi_n(x_0+h)-\psi_n(x_0)}{h}=N.$$

Це означає, що $f'(x)=\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=+\infty$. ■

5. Функції обмеженої варіації: означення та властивості.

Нехай функція $f(x)$ задана на сегменті $[a,b]$. Розглянемо розбиття R цього сегмента:

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_{k-1}<x_k<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$$

й утворимо суму $V=V(f,R)=\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|$.

🗀**Означення 1.8** *Повною варіацією* $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$ функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ називають

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)\overset{def}{=}\sup_R V(f,R).$$

Якщо $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)<+\infty$, то функцію $f(x)$ *називають функцією обмеженої варіації* на відрізку $[a,b]$.

Теорема 1.8 Нестрого монотонна на відрізку $[a,b]$ функція $f(x)$ має на цьому відрізку обмежену варіацію, а повна варіація такої функції дорівнює

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)=\left|f(b)-f(a)\right|.$$

Доведення. Без обмеження загальності міркувань можна вважати, що ця функція неспадна.

Розглянемо розбиття

$$R:\ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Оскільки $f(x) - \nearrow$ (нестрого) на $[a,b]$, то $f(x_k) \geq f(x_{k-1})$, $k = \overline{1,n}$. Отже,

$$V(f,R) = \sum_{k=1}^{n} \left| f(x_k) - f(x_{k-1}) \right| = f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) - f(x_1) +$$

$$+ f(x_3) - f(x_2) + \ldots + f(x_{k-1}) - f(x_{k-2}) + f(x_k) - f(x_{k-1}) + \ldots +$$

$$+ f(x_{n-1}) - f(x_{n-2}) + f(x_n) - f(x_{n-1}) = f(x_n) - f(x_0) = f(b) - f(a).$$

Тому $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \sup\limits_R V(f,R) = f(b) - f(a)$. ■

🗁**Означення 1.9** Функція $f(x)$, задана на сегменті $[a,b]$, *задовольняє умову Ліпшица, якщо*

$$\exists K > 0 : \forall x, y \in [a,b]\ \ | f(x) - f(y) | \leq K\,| x - y |.$$

При цьому число K називають *сталою Ліпшица.*

Теорема 1.9 Якщо функція $f(x)$ задовольняє умову Ліпшица на $[a,b]$, то вона на цьому відрізку має обмежену варіацію.

Доведення. Розглянемо розбиття відрізка $[a,b]$

$$R:\ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Тоді

$$V(f,R) = \sum_{k=1}^{n} \left| f(x_k) - f(x_{k-1}) \right| \leq K \sum_{k=1}^{n} \left| x_k - x_{k-1} \right| = K(b-a),$$

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \sup_R V(f,R) \leq K(b-a). \quad ■$$

Наслідок 1.3 Якщо функція $f(x)$ має на відрізку $[a,b]$ обмежену похідну, то вона на цьому відрізку має обмежену варіацію.

Доведення. За умовою функція на $[a,b]$ має обмежену похідну, тому

$$\exists K > 0 : \forall x \in [a,b]\ \left| f'(x) \right| \leq K.$$

Тоді $\forall x, y \in [a,b]$ на відрізку, що сполучає ці точки, функція диференційовна, а тому й неперервна. Внаслідок цього на такому відрізку можна застосовувати теорему Лагранжа [**5**, с. 245-246; **9**, с. 226-227]:

$$f(x) - f(y) = f'(\xi) \cdot (x - y),$$

де ξ лежить між x і y. Тому

$$\left| f(x) - f(y) \right| = \left| f'(\xi) \right| \cdot \left| x - y \right| \leq K \left| x - y \right|,$$

і функція задовольняє умову Ліпшица, тому за *теоремою 1.9* має обмежену варіацію на $[a,b]$. ■

Теорема 1.10 (*необхідна умова обмеженості варіації*)**.** Будь-яка функція обмеженої варіації є обмеженою. Тобто

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) < \infty \Rightarrow \exists \sup_{[a,b]} f(x).$$

Доведення. Розглянемо розбиття $R^*: \; a \le x \le b$, тоді

$$\left.\begin{array}{l} V(f,R^*) \le \sup\limits_R V(f,R) = \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) \\ V(f,R^*) = \left|f(x)-f(a)\right| + \left|f(b)-f(x)\right| \ge \left|f(x)-f(a)\right| \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|f(x)-f(a)\right| \le \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) \Rightarrow f(a) - \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) \le f(x) \le f(a) + \overset{b}{\underset{a}{V}}(f).$$

Оскільки отримана нерівність виконується при всіх $x \in [a,b]$, то функція $f(x)$ обмежена на $[a,b]$. ■

Приклад 1.5 Навести приклад обмеженої функції з необмеженою варіацією.

Розв'язання. Розглянемо функцію

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \cos\dfrac{\pi}{2x}, & 0 < x \le 1, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

на сегменті $[0,1]$. На цьому відрізку $\left|x \cdot \cos\dfrac{\pi}{2x}\right| = x \cdot \left|\cos\dfrac{\pi}{2x}\right| \le 1$, тому функція є обмеженою.

Розбиття відрізка $[0,1]$ оберемо спеціальним чином, а саме:

$$R_m^*: \;\; 0 < \frac{1}{2m} < \frac{1}{2m-1} < \ldots < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < 1.$$

Тоді

$$V(f,R_m^*) = \left|1\cdot\cos\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\cdot\cos\pi\right| + \left|\frac{1}{2}\cdot\cos\pi - \frac{1}{3}\cdot\cos\frac{3\pi}{2}\right| + \left|\frac{1}{3}\cdot\cos\frac{3\pi}{2} - \frac{1}{4}\cdot\cos 2\pi\right| +$$

$$+\left|\frac{1}{4}\cdot\cos 2\pi - \frac{1}{5}\cdot\cos\frac{5\pi}{2}\right| + \ldots + \left|\frac{1}{2m-1}\cdot\cos\frac{(2m-1)\pi}{2} - \frac{1}{2m}\cdot\cos m\pi\right| + \left|\frac{1}{2m}\cdot\cos m\pi\right| =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{m},$$

звідки

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \sup_R V(f,R) \ge \sup_m V(f,R_m^*) = \sup_m\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{m}\right) = \infty. \;\; ■$$

Теорема 1.11 *(арифметичні операції над функціями обмеженої варіації).*

I. Сума, різниця й добуток функцій скінченної варіації є функцією скінченної варіації. Тобто

$$\begin{cases} \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) < \infty, \\ \overset{b}{\underset{a}{V}}(g) < \infty, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overset{b}{\underset{a}{V}}(f \pm g) < \infty, \\ \overset{b}{\underset{a}{V}}(f \cdot g) < \infty. \end{cases}$$

II. Якщо $f(x)$ – функція скінченної варіації на $[a,b]$, причому $f(x) \geq c > 0$ всюди на $[a,b]$, то $\dfrac{1}{f(x)}$ також має скінченну варіацію на $[a,b]$. Тобто

$$\begin{cases} \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) < \infty, \\ f(x) \geq c \ \forall x \in [a,b], \end{cases} \Rightarrow \overset{b}{\underset{a}{V}}\left(\frac{1}{f}\right) < \infty .$$

III. Якщо $f(x)$ і $g(x)$ – функції скінченної варіації на $[a,b]$, причому $g(x) \geq \sigma > 0$ всюди на $[a,b]$, то частка $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ є функцією скінченної варіації. Тобто

$$\begin{cases} \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) < \infty \wedge \overset{b}{\underset{a}{V}}(g) < \infty, \\ g(x) \geq c \ \forall x \in [a,b], \end{cases} \Rightarrow \overset{b}{\underset{a}{V}}\left(\frac{f}{g}\right) < \infty .$$

Доведення. Розглянемо довільне розбиття відрізка $[a,b]$:

$$R:\ a = x_0 < x_1 < ... < x_{k-1} < x_k < ... < x_{n-1} < x_n = b .$$

I. Тоді для суми й різниці функцій обмеженої варіації

$$\sum_{i=1}^{n} \left| \left(f(x_i) \pm g(x_i) \right) - \left(f(x_{i-1}) \pm g(x_{i-1}) \right) \right| =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left| \left(f(x_i) - f(x_{i-1}) \right) \pm \left(g(x_i) - g(x_{i-1}) \right) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \left| f(x_i) - f(x_{i-1}) \right| + \sum_{i=1}^{n} \left| g(x_i) - g(x_{i-1}) \right| \leq \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) + \overset{b}{\underset{a}{V}}(g).$$

Для добутку функцій обмеженої варіації

$$\sum_{i=1}^{n} \left| f(x_i) g(x_i) - f(x_{i-1}) g(x_{i-1}) \right| =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left| f(x_i) \left(g(x_i) - g(x_{i-1}) \right) + \left(f(x_i) - f(x_{i-1}) \right) g(x_{i-1}) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \left| f(x_i) \right| \cdot \left| g(x_i) - g(x_{i-1}) \right| + \sum_{i=1}^{n} \left| f(x_i) - f(x_{i-1}) \right| \cdot \left| g(x_{i-1}) \right| \leq$$

$$\left\{ \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) < \infty \Rightarrow \exists \sup_{[a,b]} f(x); \quad \overset{b}{\underset{a}{V}}(g) < \infty \Rightarrow \exists \sup_{[a,b]} g(x) \right\}$$

$$\leq \sup_{x \in [a,b]} \left| f(x) \right| \cdot \overset{b}{\underset{a}{V}}(g) + \sup_{x \in [a,b]} \left| g(x) \right| \cdot \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) .$$

Переходимо до верхніх меж за всіма можливими розбиттями відрізка $[a,b]$, отримаємо:

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f \pm g) \le \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) + \overset{b}{\underset{a}{V}}(g),$$

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f \cdot g) \le \sup_{x\in[a,b]}\left|f(x)\right| \cdot \overset{b}{\underset{a}{V}}(g) + \sup_{x\in[a,b]}\left|g(x)\right| \cdot \overset{b}{\underset{a}{V}}(f). \quad \blacksquare$$

II. Для функції $\dfrac{1}{f(x)}$ матимемо:

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{1}{f(x_i)} - \frac{1}{f(x_{i-1})}\right| = \sum_{i=1}^{n}\frac{\left|f(x_i) - f(x_{i-1})\right|}{\left|f(x_i)\right| \cdot \left|f(x_{i-1})\right|} \le$$

$$\Big\| \left|f(x_i)\right| \ge c, \ \ \left|f(x_{i-1})\right| \ge c \Big\|$$

$$\le \frac{1}{c^2}\sum_{i=1}^{n}\left|f(x_i) - f(x_{i-1})\right| \le \frac{1}{c^2}\overset{b}{\underset{a}{V}}(f).$$

Переходимо до верхньої межі за різними розбиттями $[a,b]$:

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}\left(\frac{1}{f}\right) \le \frac{1}{c^2}\overset{b}{\underset{a}{V}}(f).$$

Властивість III є наслідком властивостей I і II. $\blacksquare$

Теорема 1.12 *(адитивність повної варіації)***.** Нехай на відрізку $[a,b]$ задано скінченну функцію $f(x)$ і $a<c<b$. Тоді

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \left(\overset{c}{\underset{a}{V}}(f) < \infty \wedge \overset{b}{\underset{c}{V}}(f) < \infty\right);$$

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \overset{c}{\underset{a}{V}}(f) + \overset{b}{\underset{c}{V}}(f). \tag{1.9}$$

Доведення. Нехай $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) < \infty$. Розіб’ємо кожен із відрізків $[a,c]$ і $[c,b]$ довільним чином точками

$$a = y_0 < y_1 < \ldots < y_m = c; \quad c = z_0 < z_1 < \ldots < z_n = b$$

і розглянемо суми

$$V_{[a,c]} = \sum_{k=1}^{m}\left|f(y_k) - f(y_{k-1})\right|, \qquad V_{[c,b]} = \sum_{k=1}^{n}\left|f(z_k) - f(z_{k-1})\right|.$$

Множина точок $R^* = \{y_k\} \bigcup \{z_k\}$ утворює розбиття відрізку $[a,b]$, якому відповідає сума $V_{[a,b]} = V(f,R^*) = V_{[a,c]} + V_{[c,b]}$. Тоді

$$\left.\begin{aligned} &V(f,R^*) \le \sup_R V(f,R) = \overset{b}{\underset{a}{V}}(f), \\ &V_{[a,c]} + V_{[c,b]} = V_{[a,b]} = V(f,R^*), \end{aligned}\right\} \Rightarrow V_{[a,c]} + V_{[c,b]} \le \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) \Rightarrow$$

{як наслідок довільності розбиттів відрізків $[a,c]$ і $[c,b]$ після переходу до точної верхньої межі}

$$\Rightarrow \overset{c}{\underset{a}{V}}(f)+\overset{b}{\underset{c}{V}}(f)\le \overset{b}{\underset{a}{V}}(f), \qquad (1.10)$$

крім того, $\overset{c}{\underset{a}{V}}(f)<\infty \wedge \overset{b}{\underset{c}{V}}(f)<\infty$.

Нехай тепер на кожному з відрізків $[a,c]$ і $[c,b]$ функція $f(x)$ має обмежену варіацію. Тоді розіб'ємо довільним чином сегмент $[a,b]$ точками

$$a=x_0<x_1<...<x_n=b,$$

поки що включимо точку c в число точок подрібнення. Якщо $c=x_m$, то сума $V^*_{[a,b]}$, що відповідає цьому розбиттю, має вигляд:

$$V^*_{[a,b]}=\sum_{k=1}^{m}\left|f(x_k)-f(x_{k-1})\right|+\sum_{k=m+1}^{n}\left|f(x_k)-f(x_{k-1})\right|=V_{[a,c]}+V_{[c,b]},$$

звідки

$$V^*_{[a,b]}\le \overset{c}{\underset{a}{V}}(f)+\overset{b}{\underset{c}{V}}(f).$$

Тепер розглянемо випадок, коли точка c не входить в число точок подрібнення і $x_{m-1}<c<x_m$:

$$V^{**}_{[a,b]}=\sum_{k=1}^{m-1}\left|f(x_k)-f(x_{k-1})\right|+\sum_{k=m+1}^{n}\left|f(x_k)-f(x_{k-1})\right|+\left|f(x_m)-f(x_{m-1})\right|.$$

При додаванні точки подрібнення c отримаємо

$$V^{**}_{[a,b]}\le \underline{\sum_{k=1}^{m-1}\left|f(x_k)-f(x_{k-1})\right|}+\underline{\underline{\sum_{k=m+1}^{n}\left|f(x_k)-f(x_{k-1})\right|}}+$$

$$+\underline{\left|f(x_m)-f(c)\right|}+\underline{\underline{\left|f(c)-f(x_{m-1})\right|}}=V_{[a,c]}+V_{[c,b]}=V^*_{[a,b]}\le \overset{c}{\underset{a}{V}}(f)+\overset{b}{\underset{c}{V}}(f).$$

Отже, для будь-яких розбиттів відрізка $[a,b]$ виконується нерівність $V_{[a,b]}\le \overset{c}{\underset{a}{V}}(f)+\overset{b}{\underset{c}{V}}(f)$, а тому і нерівність

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)\le \overset{c}{\underset{a}{V}}(f)+\overset{b}{\underset{a}{V}}(f), \qquad (1.11)$$

крім того, $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)<\infty$. Із нерівностей (1.54) і (1.55) випливає справедливість рівності (1.9).■

Із останньої теореми випливають наслідки.

Наслідок 1.4 Якщо функція на сегменті $[a,b]$ має обмежену варіацію, то вона має обмежену варіацію на будь-якому відрізку, що міститься у відрізку $[a,b]$.

Наслідок 1.5 Якщо функція на кожному зі скінченної кількості сегментів, що розбивають відрізок $[a,b]$, має обмежену варіацію, то вона має обмежену варіацію на усьому відрізку $[a,b]$.

Зокрема, якщо відрізок $[a,b]$ можна розбити на скінченну кількість частин, на кожній із яких функція нестрого монотонна, то ця функція має обмежену варіацію на $[a,b]$.

Останнє випливає з теореми про обмеженість варіації нестрого монотонної функції і властивості адитивності повної варіації.

6. Подання функції обмеженої варіації різницею неспадних функцій.

Теорема 1.13 Для того щоб функція $f(x)$ була функцією обмеженої варіації, необхідно й достатньо, щоб її можна було подати у вигляді різниці двох неспадних функцій.

Доведення. *Достатність* є наслідком теореми про обмеженість варіації несторого монотонної функції й теореми про арифметичні операції над функціями обмеженої варіації.

Необхідність. Розглянемо функцію

$$\pi(x) = \overset{x}{\underset{a}{V}}(f),\ a \le x \le b.$$

Якщо $a \le x_1 < x_2 \le b$, то, за *властивістю адитивності варіації*,

$$\overset{x_2}{\underset{a}{V}}(f) = \overset{x_1}{\underset{a}{V}}(f) + \underbrace{\overset{x_2}{\underset{x_1}{V}}(f)}_{\oplus} \ge \overset{x_1}{\underset{a}{V}}(f) \Rightarrow \pi(x_2) \ge \pi(x_1).$$

Звідки випливає неспадання функції $\pi(x)$ на $[a,b]$.

Розглянемо тепер іншу функцію

$$\nu(x) = \pi(x) - f(x). \tag{1.12}$$

Доведемо її неспадання. Нехай $a \le x_1 < x_2 \le b$, тоді в силу *властивості адитивності варіації*

$$\pi(x_2) = \overset{x_2}{\underset{a}{V}}(f) = \overset{x_1}{\underset{a}{V}}(f) + \overset{x_2}{\underset{x_1}{V}}(f) = \pi(x_1) + \overset{x_2}{\underset{x_1}{V}}(f) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nu(x_2) = \pi(x_2) - f(x_2) = \pi(x_1) + \overset{x_2}{\underset{x_1}{V}}(f) - f(x_2).$$

Звідки

$$\nu(x_2) - \nu(x_1) = \overset{x_2}{\underset{x_1}{V}}(f) - \left[f(x_2) - f(x_1)\right].$$

Розглянемо тривіальне розбиття відрізка $[x_1, x_2]$ двома його кінцями, тоді

$$V = \left|f(x_2) - f(x_1)\right| \le \sup_R V = \overset{x_2}{\underset{x_1}{V}}(f) \Rightarrow \left|f(x_2) - f(x_1)\right| \le \overset{x_2}{\underset{x_1}{V}}(f) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) \le \overset{x_2}{\underset{x_1}{V}}(f),$$

Тому $\nu(x_2) - \nu(x_1) \ge 0$. Отже, функція $\nu(x)$ не спадає на $[a,b]$.

Таким чином, функцію обмеженої варіації $f(x)$ подано у вигляді різниці двох неспадних на $[a,b]$ функцій:

$$f(x) = \pi(x) - \nu(x). \blacksquare$$

Завдяки властивостям множини точок розриву нестрого монотонних функцій і останній теоремі, одержимо наслідок.

Наслідок 1.6 Якщо функція $f(x)$ має обмежену варіацію на $[a,b]$, то майже скрізь на $[a,b]$ існує скінченна похідна $f'(x)$.

Завдяки властивостям множини точок розриву монотонних функція і останній теоремі одержимо

Наслідок 1.7 Множина точок розриву функції обмеженої варіації не більш, ніж зчисленна. Усі точки розриву такої функції першого роду, і в кожній із них існують границі:

$$f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0+0} f(x), \quad f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0} f(x).$$

7. Подання функції обмеженої варіації сумою функції її стрибків і неперервною функцією.

Розглянемо функцію $f(x)$ обмеженої варіації на відрізку $[a,b]$. Нехай не більш, ніж зчисленна множина $\{x_n : a \le x_n \le b\}$ охоплює усі точки розриву неспадних функцій $\pi(x)$ і $\nu(x)$, введених в *теоремі 1.13*. Розглянемо їх функції стрибків

$$s_\pi(a)=0,$$
$$s_\pi(x)=\pi(a+0)-\pi(a)+\sum_{x_k<x}\left[\pi(x_k+0)-\pi(x_k-0)\right]+\pi(x)-\pi(x-0);$$
$$s_\nu(a)=0,$$
$$s_\nu(x)=\nu(a+0)-\nu(a)+\sum_{x_k<x}\left[\nu(x_k+0)-\nu(x_k-0)\right]+\nu(x)-\nu(x-0).$$

Якщо точка розриву однієї з цих функцій є точкою неперервності іншої, то відповідний доданок в поданні функції її стрибків зникає.

Розглянемо функцію $s(x)=s_\pi(x)-s_\nu(x)$. Внаслідок рівності $f(x)=\pi(x)-\nu(x)$ матимемо

$$s(a)=0,$$
$$s(x)=f(a+0)-f(a)+\sum_{x_k<x}\left[f(x_k+0)-f(x_k-0)\right]+f(x)-f(x-0).$$

Таким чином, утворилася функція стрибків функції $f(x)$.

Як відомо з *теореми 1.41*, наступні функції $\pi(x)-s_\pi(x)$, $\nu(x)-s_\nu(x)$ є неперервними і неспадними на $[a,b]$. Тому функція

$$\varphi(x)=f(x)-s(x)=\pi(x)-s_\pi(x)-\left(\nu(x)-s_\nu(x)\right)$$

є неперервною на $[a,b]$. Отже доведена

Теорема 1.14 Будь-яка функція $f(x)$ обмеженої варіації на відрізку $[a,b]$ може бути подана у вигляді суми функції її стрибків $s(x)$ і неперервної функції обмеженої варіації $\varphi(x)=f(x)-s(x)$.

1.2 Інтеграл Рімана-Стілтьєса

1. Означення інтеграла Рімана-Стілтьєса. Інтеграл Стілтьєса (Th. J. Stieltjes[2]) є безпосереднім узагальненням звичайного інтеграла Рімана.

Дві обмежені функції $f(x)$ і $g(x)$ задані на проміжку $[a,b]$.

Розглянемо розбиття відрізка $[a,b]$ скінченною кількістю точок

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_{n-1} < x_n = b,$$

позначимо розбиття $R = \{x_k\}$,

$d = \max\limits_{k=\overline{1,n}} \left(x_k - x_{k-1} \right)$ – діаметр розбиття,

$\alpha_k \in [x_{k-1}, x_k]$ $\quad k = \overline{1,n}$, $P = \{\alpha_k\}$ – проміжні точки.

Розглянемо $\sigma = \sigma(f, g, R, P) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\alpha_k) \cdot \left[g\left(x_k\right) - g\left(x_{k-1}\right) \right]$ – інтегральну суму Стілтьєса.

🗀**Означення 1.10** *(на мові границь)***.** <u>Якщо</u> для функції $f(x)$, що задана на відрізку $[a,b]$, для будь-якого розбиття R відрізка $[a,b]$ і для будь якого набору проміжних точок P відрізків розбиття, <u>існує скінченна границя I інтегральних сум</u> $\sigma = \sigma(f, g, R, P)$ при діаметрі розбиття d, що прямує до нуля, тобто $I = \lim\limits_{d \to 0} \sigma(f, R)$, <u>яка не залежить від вибору розбиття R і набору проміжних точок P</u>, то функція $f(x)$ називається <u>*інтегровною за Стілтьєсом*</u> по функції $g(x)$ на відрізку $[a,b]$, а значення границі – <u>*інтегралом Рімана-Стілтьєса*</u>, що позначається $I = \int\limits_a^b f(x)dg(x)$ або $I = (S)\int\limits_a^b f(x)dg(x)$.

🗀**Означення 1.11** *(на мові $\varepsilon - \delta$)***.** Якщо

$$\exists I \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \;\; R = \{x_k\} \; \forall P = \{\alpha_k\} : \quad d < \delta \Rightarrow \left| I - \sigma \right| < \varepsilon,$$

то число I називають границею інтегральних сум і позначається $I = \lim\limits_{d \to 0} \sigma$. Якщо таке число I існує, то функцію $f(x)$ називають *інтегровною за Стілтьєсом* за функцією $g(x)$на відрізку $[a,b]$, а знач*ення границі I – інтегралом Рімана-Стілтьєса.*

Застосовують позначення: $I = (S)\int\limits_a^b f(x)dg(x)$ або $I = \int\limits_a^b f(x)dg(x)$. Символ «$(S)$» пишуть або опускають у залежності від необхідності поставити наголос на те, що йдеться саме про інтеграл Стілтьєса.

---

[2] **Томас Іоанес Стілтьєс** (нідерл. Thomas Joannes Stieltjes, 29.12.1856, — 31.12.1894) — нідерландський математик. Запропонував у 1894 р. узагальнення визначеного інтеграла (Інтеграл Рімана-Стілтьеса). Член-кореспондент Петербурзької Академії наук (1894).

Очевидно, що єдина відміна цього означення від означення звичайного інтеграла Рімана полягає в тому, що $f(\alpha_k)$ множиться не на приріст Δx_k незалежної змінної, а на приріст $\Delta g(x_k) = g(x_k) - g(x_{k-1})$ іншої функції. Таким чином, інтеграл Рімана є частинним випадком інтеграла Стілтьєса, коли за функцію $g(x)$ взято саму незалежну змінну x, тобто $g(x) = x$.

2. Властивості інтеграла Стілтьєса.

Властивості лінійності:

$$1^{00}\ \int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]dg(x) = \int_a^b f_1(x)dg(x) \pm \int_a^b f_2(x)dg(x)$$

$$2^{00}\int_a^b [f(x)d[g_1(x) \pm g_2(x)] = \int_a^b f(x)dg_1(x) \pm \int_a^b f(x)dg_2(x);$$

$$3^{00}\int_a^b \alpha f(x)d[\beta g(x)] = \alpha\beta \cdot \int_a^b f(x)dg(x) \quad (\alpha, \beta = const).$$

При цьому із існування інтегралів у правій частині випливає існування інтеграла у лівій частині.

Доведемо, наприклад, властивість 2^{00}:

$$\sigma(f, g_1 \pm g_2, R, P) = \sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k) \cdot \Big[g_1(x_k) \pm g_2(x_k) - \big(g_1(x_{k-1}) \pm g_2(x_{k-1})\big)\Big] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k) \cdot \big[g_1(x_k) - g_1(x_{k-1})\big] \pm \sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k) \cdot \big[g_2(x_k) - g_2(x_{k-1})\big] =$$

$$= \sigma(f, g_1, R, P) \pm \sigma(f, g_2, R, P).$$

Здійснимо граничний перехід:

$$\begin{array}{ccccccc}
\underbrace{\lim_{d\to0}\sigma(f,g_1\pm g_2,R,P)} & = & \underbrace{\lim_{d\to0}\big[\sigma(f,g_1,R,P)\pm\sigma(f,g_2,R,P)\big]} & = & \underbrace{\lim_{d\to0}\sigma(f,g_1,R,P)} & \pm & \underbrace{\lim_{d\to0}\sigma(f,g_2,R,P)}\\
\| & & & & \| & & \|\\
\exists & \Leftarrow & \exists & \Leftarrow & (\exists & \wedge & \exists)\\
\| & & & & \| & & \|\\
\int_a^b [f(x)d[g_1(x)\pm g_2(x)] & & = & & \int_a^b f(x)dg_1(x) & \pm & \int_a^b f(x)dg_2(x).
\end{array}$$

Властивість адитивності:

$$4^{00}\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^c f(x)dg(x) + \int_c^b f(x)dg(x),$$

у припущенні, що $a < c < b$ і існують всі три інтеграли.

Для доведення цієї формули достатньо включити точку c в число точок розбиття проміжку $[a,b]$, при утворенні суми Стілтьєса для інтеграла $\int_a^b f\,dg$.

Зауважимо, що з існування інтеграла $\int_a^b f\,dg$ випливає існування обох інтегралів $\int_a^c f\,dg$ і $\int_c^b fdg \int_c^b f\,dg$. Але, важливо відмітити, що з існування обох інтегралів $\int_a^c f\,dg$ і $\int_c^b f\,dg$, взагалі кажучи, не випливає існування інтеграла $\int_a^b f\,dg$. Щоб упевнитися в цьому, достатньо розглянути приклад. Нехай на проміжку $[-1,1]$ функції $f(x)$ і $g(x)$ задані наступними рівностями:

$$f(x)=\begin{cases}0 \text{ при } -1\le x\le 0,\\ 1 \text{ при } 0<x\le 1;\end{cases}\quad g(x)=\begin{cases}0 \text{ при } -1\le x<0,\\ 1 \text{ при } 0\le x\le 1.\end{cases}$$

Тоді

$$\sigma_{[-1;0]}=\sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k)\cdot\left[g\left(x_k\right)-g\left(x_{k-1}\right)\right]=\sum_{k=1}^{n} 0\cdot\left[g\left(x_k\right)-g\left(x_{k-1}\right)\right]=0,$$

$$\sigma_{[0;1]}=\sum_{m=1}^{n} f(\alpha'_m)\cdot\left[g\left(x_m\right)-g\left(x_{m-1}\right)\right]=\sum_{m=1}^{n} f(\alpha'_m)\cdot\left[1-1\right]=0.$$

Після граничного переходу отримаємо

$$\int_{-1}^{0} f(x)dg(x)=0,\quad \int_{0}^{1} f(x)dg(x)=0,$$

Тобто, обидва ці інтеграли існують.

У той же час інтеграла $\int_{-1}^{1} f(x)dg(x)$ не існує. Дійсно, розіб’ємо проміжок $[-1,1]$ так, щоб точка 0 не потрапила до складу точок розбиття, і $x_{k_0-1}<0<x_{k_0}$. Утворимо суму:

$$\sigma_{[-1;1]}=\sum_{k=1}^{k_0-1} f(\alpha_k)\cdot\left[g\left(x_k\right)-g\left(x_{k-1}\right)\right]+f(\alpha_{k_0})\cdot\left[g\left(x_{k_0}\right)-g\left(x_{k_0-1}\right)\right]+$$

$$+\sum_{k=k_0+1}^{n} f(\alpha_k)\cdot\left[g\left(x_k\right)-g\left(x_{k-1}\right)\right]=\sum_{k=1}^{k_0-1} 0\cdot\left[g\left(x_k\right)-g\left(x_{k-1}\right)\right]+f(\alpha_{k_0})\cdot\left[1-0\right]+$$

$$+\sum_{k=k_0+1}^{n} f(\alpha_k)\cdot\left[1-1\right]=f(\alpha_{k_0}).$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Якщо } \alpha_{k_0}\le 0, \text{ то } \sigma_{[-1;1]}=f(\alpha_{k_0})=0,\\ \text{якщо } \alpha_{k_0}>0, \text{ то } \sigma_{[-1;1]}=f(\alpha_{k_0})=1,\end{array}\right\}\Rightarrow \text{ границі } \lim_{d\to 0}\sigma \text{ не існує.}$$

3. Інтегрування частинами. . Для інтегралів Стілтьєса має місце формула

$$\int_a^b f(x)dg(x)=f(x)g(x)\Big|_a^b-\int_a^b g(x)df(x), \tag{1.13}$$

Причому з існування одного з цих інтегралів випливає існування іншого. Ця формула має назву *формули інтегрування частинами.*

Доведення. Нехай існує інтеграл $\int_a^b g\,df$. Розглянемо розбиття $R=\{x_k\}$ сегмента [*a, b*], оберемо на відрізках розбиття довільні проміжні точки $P=\{\alpha_k\}$ таким чином, що

$$a=x_0\le\alpha_1\le x_1\le\ldots\le x_{k-1}\le\alpha_k\le x_k\le\alpha_{k+1}\le x_{k+1}\le\ldots\le x_{n-1}\le\alpha_n\le x_n=b.$$

Суму Стілтьєса для інтеграла $\int_a^b f\,dg$

$$\sigma=\sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k)\left[g(x_k)-g(x_{k-1})\right]$$

можна подати у вигляді

$$\sigma=\sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k)g(x_k)-\sum_{k=0}^{n-1} f(\alpha_{k+1})g(x_k)=$$

$$=-\left\{g(a)f(\alpha_1)+\sum_{k=1}^{n-1} g(x_k)\left[f(\alpha_{k+1})-f(\alpha_k)\right]-g(b)f(\alpha_n)\right\}.$$

Якщо додати й відняти справа вираз $f(x)g(x)\Big|_a^b=f(b)g(b)-f(a)g(a)$ та позначити $\alpha_0=a$, $\alpha_{n+1}=b$, то сума σ матиме вигляд:

$$\sigma=f(x)g(x)\Big|_a^b-$$

$$-\left\{g(a)\left[f(\alpha_1)-f(a)\right]+\sum_{k=1}^{n-1} g(x_k)\left[f(\alpha_{k+1})-f(\alpha_k)\right]+g(b)\left[f(b)-f(\alpha_n)\right]\right\}=$$

$$=f(x)g(x)\Big|_a^b-\sum_{k=0}^{n} g(x_k)\left[f(\alpha_{k+1})-f(\alpha_k)\right].$$

Зменшуване в правій частині являє собою стілтьєсову суму для інтеграла $\int_a^b g df$ (існування якого припущено!). Вона відповідає розбиттю відрізка [*a,b*] точками

$$a=\alpha_0\le\alpha_1\le\ldots\le\alpha_k\le\alpha_{k+1}\le\ldots\le\alpha_n\le\alpha_{n+1}=b,$$

якщо в якості проміжних точок із відрізків $\left[\alpha_k,\alpha_{k+1}\right]$ $\left(i=0,\ldots,n\right)$ обрати x_k. Якщо $d=\max\left(x_k-x_{k-1}\right)$, то тепер довжини всіх частинних проміжків не перевищать $2d$.

При $d\to 0$ зазначена сума прямує до $\int_a^b g\,df$. Із цього випливає, що існує границя і для σ, яка не залежить від вибору розбиття $R=\{x_k\}$ і набору проміжних точок $P=\{\alpha_k\}$ (в силу довільності їх вибору). Значення границі $\lim\limits_{d\to 0}\sigma$ дорівнюватиме інтеграла $\int_a^b f\,dg$ і

$$\begin{array}{ccc} \lim\limits_{d\leftrightarrow 0}\sigma & = & f(x)g(x)\Big|_a^b - \lim\limits_{d\leftrightarrow 0}\sum\limits_{k=0}^{n} g(x_k)\left[f(\alpha_{k+1}) - f(\alpha_k)\right] \\ \| & & \| \\ \int\limits_a^b f(x)dg(x) = f(x)g(x)\Big|_a^b - & & \int\limits_a^b g(x)df(x). \end{array}$$

■

4. Теорема про існування інтеграла Рімана-Стілтьєса.

Розіб'ємо $[a,b]$ на частини точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_{n-1} < x_n = b,$$

введемо позначення

$$m_k = \inf_{[x_{k-1},x_k]} f(x); \qquad M_k = \sup_{[x_{k-1},x_k]} f(x)$$

і розглянемо *інтегральні суми Дарбу-Стілтьєса*

$$\underline{S} = \sum_{k=1}^{n} m_k\left[g(x_k) - g(x_{k-1})\right], \quad \overline{S} = \sum_{k=1}^{n} M_k\left[g(x_k) - g(x_{k-1})\right].$$

Лема 1.3. Нехай функція $g(x)$ не спадає на $[a,b]$. Тоді для сум Дарбу-Стілтьєса має місце нерівність

$$\underline{S} \le \sigma \le \overline{S} \quad \forall P = \{\alpha_k\}.$$

Ця лема є простим наслідком означення й того факту, що завдяки неспаданню функції $g(x)$ кожна з різниць $g(x_k) - g(x_{k-1})$ невід'ємна.

Лема 1.4. Нехай функція $g(x)$ не спадає на $[a,b]$. Тоді додавання до точок розбиття додаткових точок призводить до того, що нижня сума Дарбу-Стілтьєса може лише збільшитися, а верхня – лише зменшитися.

Доведення. Без обмеження загальності міркувань можна розглянути лише одну додаткову точку розбиття.

Нехай $R = \{x_k\}$ – розбиття, x' – додаткова точка, $\Big\}\Rightarrow$ нове розбиття $R'\colon \{x_k\} \bigcup \{x'\} = \{x_i'\}$.

Позначимо через k_0 той номер відрізка розбиття, в який потрапила додаткова точка x', тобто $x_{k_0-1} < x' < x_{k_0}$ (див. рис. 1.5), тоді, зважаючи на невід'ємність кожної з різниць $g(x_k) - g(x_{k-1})$, матимемо:

$$\underline{S}' = \underline{S}(f,g,R') = \sum_{i=1}^{n} m_k \cdot [g(x_i') - g(x_{i-1}')] = \sum_{k<k_0} m_k \cdot [g(x_k) - g(x_{k-1})] +$$

$$+ m_{k_0}' \cdot [g(x') - g(x_{k_0-1})] + m_{k_0}'' \cdot [g(x_{k_0}) - g(x')] + \sum_{k>k_0} m_k \cdot [g(x_k) - g(x_{k-1})],$$

$$m'_{k_0} = \inf_{[x_{k_0-1}, x']} f(x) \geq \inf_{[x_{k_0-1}, x_{k_0}]} f(x) = m_{k_0},$$

$$m''_{k_0} = \inf_{[x', x_{k_0}]} f(x) \geq \inf_{[x_{k_0-1}, x_{k_0}]} f(x) = m_{k_0},$$

$$\underline{S}' \geq \sum_{k \neq k_0} m_k \cdot [g(x_k) - g(x_{k-1})] +$$

$$\underbrace{+m_{k_0} \cdot [g(x') - g(x_{k_0-1})] + m_{k_0} \cdot [g(x_{k_0}) - g(x')]}_{=m_{k_0} \cdot [g(x_{k_0}) - g(x_{k_0-1})]} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot [g(x_k) - g(x_{k-1})] = \underline{S}.$$

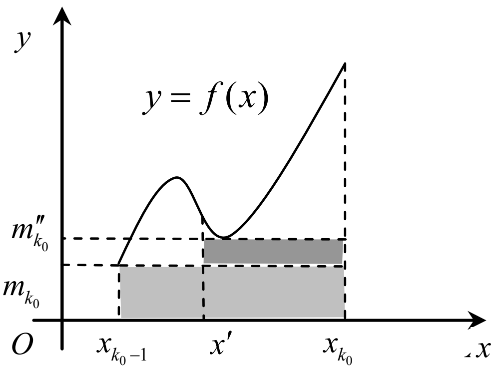


Рис. 1.5.

Для верхньої суми доведення аналогічне. ■

Лема 1.5 Нехай функція $g(x)$ не спадає на $[a,b]$. Тоді будь-яка нижня інтегральна сума Дарбу-Стілтьєса не більша за верхню суму, навіть для різних розбиттів, а саме: $\underline{S}_1 \leq \overline{S_2}$, для $R_1 = \{x_k^{(1)}\}, \quad R_2 = \{x_i^{(2)}\}$.

Доведення. Введемо до розгляду розбиття $R_3 = R_1 \bigcup R_2$ і інтегральні суми Дарбу-Стілтьєса $\underline{S}_3$ *і* $\overline{S}_3$, що йому відповідають. Розбиття R_3 є подрібненням як розбиття R_1, так і розбиття R_2, тому, згідно з *лемами 1.3 та 1.4*, маємо $\underline{S}_1 \leq \underline{S}_3 \leq \overline{S}_3 \leq \overline{S_2}$. ■

Теорема 1.15

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \text{ – неперервна на } [a,b], \\ \overset{b}{\underset{a}{V}}(g) < \infty, \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \exists (S)\int_a^b f(x)dg(x).$$

Доведення. Обмежимося розглядом функції $g(x) \neq const$.

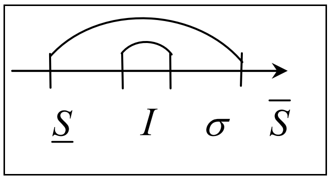
I. Припустимо спочатку, що функція $g(x)$ не спадає на $[a,b]$. Розіб'ємо $[a,b]$ на частини точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{k-1} < x_k < ... < x_{n-1} < x_n = b.$$

Із *леми 1.5* випливає, що множина $\{\underline{S} = \underline{S}(f,g,R)\}_R$ обмежена зверху будь-якою фіксованою верхньою сумою Дарбу-Стілтьєса, тому $\exists \sup_R \{\underline{S}(f,g,R\} = I$.

Таким чином, при будь якому способі розбиття буде $\underline{S} < I < \overline{S}$. Отже,

$$\left.\begin{array}{l} \underline{S} \leq \mathrm{I} \leq \overline{S} \quad \forall P, \\ \underline{S} \leq \sigma \leq \overline{S} \quad \forall P \\ \text{(за лемою 1.5)} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad |\mathrm{I} - \sigma| < \overline{S} - \underline{S} \ \forall P.$$



Далі маємо: $f(x)$ – неперервна на $[a,b]$ $\Rightarrow$ рівномірно неперервна на $[a,b]$ (теорема Кантора [**5**, с.192; **9**, с. 179])

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall R = \{x_k\}_{k=1}^n : \ d < \delta \Rightarrow M_k - m_k < \frac{\varepsilon}{g(b) - g(a)} \forall k = \overline{1,n}.$$

Тоді

$$\forall P=\{\alpha_k\}\ \forall R=\{x_k\}\ \left|\mathrm{I}-\sigma\right|<\overline{S}-\underline{S}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)[g(x_k)-g(x_{k-1})]<\sum_{k=1}^{n}\frac{\varepsilon}{g(b)-g(a)}[g(x_k)-g(x_{k-1})]=$$

$$=\frac{\varepsilon}{g(b)-g(a)}[g(x_1)-g(x_0)+g(x_2)-g(x_1)+g(x_3)-g(x_2)+\ldots+$$

$$+g(x_{k-1})-g(x_{k-2})+g(x_k)-g(x_{k-1})+\ldots+g(x_{n-1})-g(x_{n-2})+g(x_n)-g(x_{n-1})]=$$

$$=\frac{\varepsilon}{g(b)-g(a)}[g(x_n)-g(x_0)]=\frac{\varepsilon}{g(b)-g(a)}[g(b)-g(a)]=\varepsilon.$$

Іншими словами, $\lim\limits_{d\to 0}\sigma=\mathrm{I}$, отже, I і є інтегралом Стілтьєса $\int\limits_a^b f(x)dg_1(x)$.

II. У загальному випадку, якщо функція $g(x)$ має обмежену варіацію, її можна подати у вигляді різниці двох неспадних обмежених функцій, однак не однозначно. Нехай існують два подання функції $g(x)$ в зазначеному вигляді: $g(x)=\overline{g}_1(x)-\overline{g}_2(x)$ і $g(x)=g_1(x)-g_2(x)$. За доведеним вище, кожен із інтегралів $\int\limits_a^b f(x)\,dg_i(x)$ і $\int\limits_a^b f(x)\,d\overline{g}_i(x)$ $(i=1,2)$ існує.

Тоді, застосовуючи *властивість лінійності інтеграла Стільтьєса* 2^{00}, отримаємо:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dg(x)=\int\limits_a^b f(x)\,dg_1(x)-\int\limits_a^b f(x)\,dg_2(x)=\int\limits_a^b f(x)\,d\overline{g}_1(x)-\int\limits_a^b f(x)\,d\overline{g}_2(x).$$

Оскільки інтеграл є границею відповідних інтегральних сум, то кожен із інтегралів у цій рівності обчислюється однозначно. Отже, інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dg(x)$ існує, а його значення не залежить від подання функції $g(x)$ різницею двох неспадних функцій.

Теорему доведено. ■

Із доведеної теореми й формули інтегрування частинами випливає

Наслідок 1.8 Будь-яка функція зі скінченною варіацією інтегровна за будь-якою неперервною функцією.

5. Теореми про обчислення інтеграла Рімана-Стілтьєса.

Теорема 1.16 *(про зв'язок між інтегралом Рімана і Стілтьєса)*.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)\ \text{– неперервна на } [a,b];\\ \forall x\in[a;b]\setminus\{c_k\}_{k=1}^{m}\ \exists\, g'(x);\\ g'(x)\ \text{– інтегровна за Ріманом}\\ \text{на } [a,b],\ g(x)\ \text{– неперервна на}\\ [a,b] \end{array}\right\}\Rightarrow\ \boxed{(S)\int\limits_a^b f(x)dg(x)\ =(R)\int\limits_a^b f(x)g'(x)dx}$$

Доведення. Обґрунтуємо існування кожного з інтегралів рівності, яку доводимо.

Оскільки $g'(x)$ – інтегровна за Ріманом на $[a,b]$, тоді $g'(x)$ – обмежена на $[a;b]\setminus\{c_k\}_{k=1}^m$ (*за твердженням 1.3*). Без обмеження загальності міркувань можна вважати, що $a<c_1<c_2<...<c_m<b$. На кожному з відрізків $[a,c_1]$, $[c_1,c_2]$,..., $[c_m,b]$, аналогічно доведенню *наслідка 1.3*, можна довести обмеженість варіації функції $g(x)$[3]. Тоді *із властивості адитивності варіації* 1.14) прийдемо до висновку про обмеженість варіації функції $g(x)$ на всьому відрізку $[a,b]$.

Отже,

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \text{ – неперервна на } [a,b], \\ \overset{b}{\underset{a}{V}}(g)<\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \exists(S)\int_a^b f(x)dg(x) \ (\textit{теорема 1.15}).$$

Доведемо існування інтеграла Рімана за критерієм Лебеґа інтегровності функції:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \text{ – неперервна на } [a,b], \\ g'(x) \text{ – інтегровна за Ріманом на } [a,b] \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \exists(R)\int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

Тепер переходимо до доведення рівності інтегралів.

З цією метою розіб'ємо $[a,b]$ на частини точками

$$a=x_0<x_1<x_2<...<x_{k-1}<x_k<...<x_{n-1}<x_n=b,$$

в число яких включимо точки $\{c_k\}_{k=1}^m$, де функція $g'(x)$ не визначена. Оскільки функція $g(x)$ неперервна на $[x_{k-1};x_k]$ і диференційовна на $(x_{k-1};x_k)$, то до кожної різниці $g(x_k)-g(x_{k-1})$ $(k=\overline{1,n})$ застосуємо формулу Лагранжа (див. [**5**, с. 245-246; **9**, с. 226-227]):

$$\exists\alpha_k\in(x_k,x_{k-1}): \quad g(x_k)-g(x_{k-1})=g'(\alpha_k)\cdot(x_k-x_{k-1}).$$

Утворимо інтегральну суму Стілтьєса, обираючи за проміжні точки ті, що знайдено при застосуванні формули Лагранжа:

$$\sigma_{(S)}=\sum_{k=1}^n f(\alpha_k)\left[g(x_k)-g(x_{k-1})\right]=\sum_{k=1}^n f(\alpha_k)g'(\alpha_k)\cdot(x_k-x_{k-1})=\sigma_{(R)}.$$

Отримано рівність між інтегральними сумами Стілтьєса і Рімана, тому після граничного переходу при $d\to0$ буде мати місце рівність між інтегралами. ■

Теорема 1.17 Нехай $f(x)$ – неперервна на $[a,b]$, а $g(x)$ стала на кожному з інтервалів (a,c_1), (c_1,c_2),..., (c_m,b), де

$$a<c_1<c_2<...<c_m<b.$$

Тоді

---

[3] Значення функції $g'(x)$ на кінцях зазначених відрізків не будуть впливати на висновки при доведенні, оскільки при застосуванні теореми Лагранжа потрібна диференційовність лише на інтервалі, а не на відрізку, на якому цю теорему застосовують. При доведенні важливим буде факт неперервності функції $g(x)$ на кожному з цих відрізків, її диференційовність, а також обмеженість функції $g'(x)$ на множинах внутрішніх точок відрізків.

$$\begin{aligned}(S)\int_a^b f(x)dg(x) &= f(a)\left[g(a+0)-g(a)\right]+\\ &+\sum_{k=1}^{m} f(c_k)\left[g\left(c_k+0\right)-g\left(c_k-0\right)\right]+f(b)\left[g(b)-g(b-0)\right]\end{aligned} \tag{1.14}$$

Доведення. Кусково-стала функція $g(x)$ має обмежену варіацію на відрізку $[a,b]$, а тому й на будь-якій частині цього відрізка. Функція $f(x)$ – неперервна на $[a,b]$. Отже, інтеграл Стілтьєса існує як на усьому відрізку, так і на кожній його частині. Тому застосуємо *властивість адитивності*, позначивши $c_0=a,\ c_{m+1}=b$:

$$\int_a^b f(x)dg(x)=\sum_{k=1}^{m+1}\int_{c_{k-1}}^{c_k} f(x)dg(x).$$

Обчислимо інтеграл $\int\limits_{c_{k-1}}^{c_k} f(x)\,dg(x)\ \ (k=\overline{1,n})$. Нехай $\left\{x_i^{(k)}\right\}_{i=0}^{n_k}$ – розбиття відрізка $[c_{k-1},c_k]$, тоді

$$\begin{aligned}\sigma_k &= \sum_{i=1}^{n_k} f\left(\alpha_i^{(k)}\right)\left[g\left(x_i^{(k)}\right)-g\left(x_{i-1}^{(k)}\right)\right]=f\left(\alpha_0^{(k)}\right)\left[g\left(x_1^{(k)}\right)-g\big(\underbrace{x_0^{(k)}}_{=c_{k-1}}\big)\right]+\\ &+\sum_{i=1}^{n_k} f\left(\alpha_i^{(k)}\right)\underbrace{\left[g\left(x_i^{(k)}\right)-g\left(x_{i-1}^{(k)}\right)\right]}_{=0}+f\left(\alpha_n^{(k)}\right)\left[g\big(\underbrace{x_n^{(k)}}_{=c_k}\big)-g\left(x_{n-1}^{(k)}\right)\right]=\\ &=f\left(\alpha_0^{(k)}\right)\left[g\left(x_1^{(k)}\right)-g\left(c_{k-1}\right)\right]+f\left(\alpha_n^{(k)}\right)\left[g\left(c_k\right)-g\left(x_{n-1}^{(k)}\right)\right];\end{aligned}$$

$$\underset{\substack{\parallel\\ \int_{c_{k-1}}^{c_k} f(x)dg(x)}}{\lim_{d\to 0}\sigma_k} = f\left(c_{k-1}\right)\left[g\left(c_{k-1}+0\right)-g\left(c_{k-1}\right)\right]+f\left(c_k\right)\left[g\left(c_k\right)-g\left(c_k-0\right)\right].$$

Тепер обчислимо інтеграл вздовж відрізка $[a,b]$:

$$\int_a^b f(x)dg(x)=\sum_{k=1}^{m+1}\int_{c_{k-1}}^{c_k} f(x)dg(x)=$$

$$\begin{aligned}&=\sum_{k=1}^{m+1}\left\{f\left(c_{k-1}\right)\left[g\left(c_{k-1}+0\right)-g\left(c_{k-1}\right)\right]+f\left(c_k\right)\left[g\left(c_k\right)-g\left(c_k-0\right)\right]\right\}=\\ &=f\left(c_0\right)\left[g\left(c_0+0\right)-g\left(c_0\right)\right]+f\left(c_1\right)\left[g\left(c_1\right)-g\left(c_1-0\right)\right]+\\ &+f\left(c_1\right)\left[g\left(c_1+0\right)-g\left(c_1\right)\right]+f\left(c_2\right)\left[g\left(c_2\right)-g\left(c_2-0\right)\right]+\ldots+\\ &+f\left(c_{k-2}\right)\left[g\left(c_{k-2}+0\right)-g\left(c_{k-2}\right)\right]+f\left(c_{k-1}\right)\left[g\left(c_{k-1}\right)-g\left(c_{k-1}-0\right)\right]+\\ &+f\left(c_{k-1}\right)\left[g\left(c_{k-1}+0\right)-g\left(c_{k-1}\right)\right]+f\left(c_k\right)\left[g\left(c_k\right)-g\left(c_k-0\right)\right]+\ldots+\end{aligned}$$

$$+f\left(c_{n-2}\right)\left[g\left(c_{n-2}+0\right)-g\left(c_{n-2}\right)\right]+f\left(c_{n-1}\right)\left[g\left(c_{n-1}\right)-g\left(c_{n-1}-0\right)\right]+$$
$$+f\left(c_{n-1}\right)\left[g\left(c_{n-1}+0\right)-g\left(c_{n-1}\right)\right]+f\left(c_{n}\right)\left[g\left(c_{n}\right)-g\left(c_{n}-0\right)\right]=$$
$$=f\left(c_{0}\right)\left[g\left(c_{0}+0\right)-g\left(c_{0}\right)\right]+f\left(c_{1}\right)\left[g\left(c_{1}+0\right)-g\left(c_{1}-0\right)\right]+\ldots+$$
$$+f\left(c_{k}\right)\left[g\left(c_{k}+0\right)-g\left(c_{k}-0\right)\right]+\ldots+f\left(c_{n}\right)\left[g\left(c_{n}+0\right)-g\left(c_{n}-0\right)\right].$$

Згадуючи позначення $c_0=a, c_{m+1}=b$, приходимо до рівності (1.14). ■

Теорема 1.18 Нехай

1) $f(x)$ – неперервна на $[a,b]$,

2) похідна $g'(x)$ існує в усіх точках $[a,b]$, окрім скінченної множини точок $\{c_k\}_{k=1}^{m}$; функція $g'(x)$ інтегровна за Ріманом на $[a,b]$;

3) функція $g(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, окрім скінченної множини точок[4], в яких вона має розрив першого роду.

Тоді має місце формула

$$\begin{gathered}(S)\int_a^b f(x)dg(x)=(R)\int_a^b f(x)g'(x)dx\ +f(a)\left[g(a+0)-g(a)\right]+\\ +\sum_{k=1}^{m}f(c_k)\left[g\left(c_k+0\right)-g\left(c_k-0\right)\right]+f(b)\left[g(b)-g(b-0)\right]\end{gathered}\qquad(1.15)$$

Доведення. При доведенні *теореми 1.16* показано, як із другої умови теореми отримати висновок про обмеженість варіації функції $g(x)$ на відрізку $[a,b]$. Згідно з *теоремою 1.14*, подамо функцію обмеженої варіації $g(x)$ сумою функції її стрибків $s_g(x)$ і неперервної на $[a,b]$ функції $\varphi(x)=g(x)-s_g(x)$. Тоді $s_g(x)$ – кусково-стала на $[a,b]$ і згідно з (1.14)

$$(S)\int_a^b f(x)ds_g(x)=f(a)\left[g(a+0)-g(a)\right]+\sum_{k=1}^{m}f(c_k)\left[g\left(c_k+0\right)-g\left(c_k-0\right)\right]+$$
$$+f(b)\left[g(b)-g(b-0)\right].$$

Оскільки кусково-стала на відрізку $[a,b]$ функція $s_g(x)$ має інтегровну похідну, то неперервна на цьому відрізку функція $\varphi(x)$ має інтегровну за Ріманом на $[a,b]$ похідну $\varphi'(x)$, причому рівність $\varphi'(x)=g'(x)$ виконується в усіх точках $[a,b]$ за винятком скінченної множини точок. Застосовуючи *теорему 1.16* про зв'язок між інтегралами Рімана і Стілтьєса та *зауваження 1.5*, отримаємо

[4] Очевидно, що у всіх тих точках, у яких функція $g(x)$ має розрив, похідна $g'(x)$ не існує. Отже, ці точки будуть належати множині $\{c_k\}_{k=1}^{m}$. Але в деяких із точок c_k $(k=\overline{1,m})$, у яких похідна не існує, функція $g(x)$ може бути неперервною. В таких точках стрибок $g\left(c_k+0\right)-g\left(c_k-0\right)$ матиме нульове значення, і відповідний доданок формули (1.15) дорівнює нулю.

$$(S)\int_a^b f(x)d\varphi(x)=(R)\int_a^b f(x)\varphi'(x)dx=(R)\int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

Унаслідок *властивості лінійності інтеграла Стілтьєса* маємо:

$$(S)\int_a^b f(x)dg(x)=(S)\int_a^b f(x)d\left(s_g(x)+\varphi(x)\right)=(S)\int_a^b f(x)ds_g(x)+(S)\int_a^b f(x)d\varphi(x).$$

Згадуючи означення функції стрибків і формулу (1.14), отримаємо формулу (1.15). ■

6. Деякі відомості із функціонального аналізу. Застосування інтеграла Стілтьєса у функціональному аналізі

Важливим об’єктом дослідження функціонального аналізу є лінійні неперервні функціонали, що задані на лінійних нормованих просторах, зокрема, на просторі $C[a,b]$ неперервних на відрізку $[a,b]$ функцій. Саме для таких функціоналів і застосовується інтеграл Стілтьєса.

Випишемо основні означення [**6**], потрібні для розуміння теореми Рісса, яку наведено нижче.

Нехай X лінійний простір, P – числове поле. *Нормою* в X називають функцію $p: X\to\mathbb{R}$ із такими властивостями:

а) $p(x)\ge 0$ для всіх $x\in X$, причому $p(x)=0$ тільки при $x=0$;

б) $p(x+y)\le p(x)+p(y)$, для всіх $x,y\in X$;

в) $p(\lambda x)=|\lambda|\,p(x)$, яке б не було число $\lambda\in P$ і елемент $x\in X$.

Лінійний простір X, у якому задано деяку норму, називають *нормованим простором*. Норму елемента $x\in X$ будемо позначати символом $\|x\|$ (тобто $p(x)=\|x\|$).

Одним із прикладів нормованого простору [**6**] є простір неперервних на відрізку $[a,b]$ функцій. Цей простір позначають $C[a,b]$. Норму елементу-функції $f(x)\in C[a,b]$ із цього простору визначають формулою:

$$\|f\|=\max_{x\in[a,b]}|f(x)|.$$

Нехай X и Y – два нормовані простори. *Оператором* A*,* що діє із X в Y, називають відображення $y=Ax$, $x\in X$ $y\in Y$. Сукупність D_A усіх тих елементів $x\in X$, для яких відображення A є визначеним, називають множиною визначення оператора A.

Нехай множина визначення D_A оператора A є *многовидом*, тобто разом із будь-якою парою своїх елементів $x_1,x_2\in D_A$ множина D_A містить і довільну їх лінійну комбінацію, тобто

$$\forall\alpha,\beta\in P\ \ \alpha x_1+\beta x_2\in D_A.$$

Оператор A називають *лінійним*, якщо він задовольняє умову

$$A(\alpha x_1+\beta x_2)=\alpha A(x_1)+\beta A(x_2)$$

для всіх α,β із числового поля P і всіх $x_1,x_2\in D_A$.

Оператор $A: X \to Y$ називають *неперервним*, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 \in D_A \ \|x_1 - x_2\|_X < \delta \Rightarrow \|Ax_1 - Ax_2\|_Y < \varepsilon .$$

Оператор, що діє із X в $Y = P$, називають *функціоналом*. Функціонал є частинним випадком оператора.

Лінійний функціонал $\Phi: X \to \mathbb{R}$, заданий на нормованому просторі X, називають *обмеженим*, якщо

$$\exists C > 0 : \forall f \in X \ |\Phi(f)| \le C \cdot \|f\|.$$

Зазначимо, що неперервність лінійного функціонала еквівалентна його обмеженості [**6**, с. 255].

Нормою лінійного обмеженого функціонала називають число, яке позначають $\|\Phi\|$, і яке дорівнює

$$\|\Phi\| = \inf\left\{C > 0 : |\Phi(f)| \le C \cdot \|f\| \ \ \forall f \in X\right\}.$$

Наступну теорему наведемо без доведення. Доведення вивчають в курсі функціонального аналізу [**6**, с.223 – 224; **7**, с.423 – 427].

Теорема 1.19 (*Ф. Рісс*) [6]**.** Для будь-якого лінійного неперервного функціонала $\Phi(f)$, заданого на $C[a,b]$, існує така функція $g(x)$ обмеженої варіації на $[a,b]$, що для кожної функції $f(x) \in C[a,b]$ буде мати місце подання

$$\Phi(f) = (S)\int_a^b f(x)dg(x).$$

Причому норму такого функціонала обчислюють за формулою:

$$\|\Phi\| = \mathop{V}_a^b(g).$$

7. Застосування інтеграла Стілтьєса у фізиці

Припустимо, що вздовж відрізка $[a;b]$ осі абсцис розподілено маси. Деякі з них зосереджені в окремих точках («важких» точках), а деякі розподілені неперервно. Побудуємо функцію $g(x)$ за правилом: у точках $x > a$ значення функції $g(x)$ дорівнює сумі всіх мас, розподілених на відрізку $[a;x]$; $g(a) = 0$. Зрозуміло, що функція $g(x)$ зростає на відрізку $[a;b]$.

Приклад 1.33 [**11**]. Побудувати функцію $g(x)$ для такого розподілу мас: одиничні маси в точках $x = 1,\ 2$ і 3 та неперервно розподілені маси щільності 2 вздовж проміжку $[1;3]$.

Розв'язання. За означенням $g(1) = 0$.

Якщо $x \in (1;2)$, то $g(x) = 1 + \int_1^x 2dt = 1 + 2(x-1) = 2x - 1$.

Якщо $x = 2$, то $g(2) = 1 + \int_1^2 2dt + 1 = 1 + 2 + 1 = 4$.

Якщо $x \in (2;3)$, то $g(x) = g(2) + \int\limits_2^x 2dt = 4 + 2(x-2) = 2x$.

Якщо $x = 3$, то $g(3) = g(2) + \int\limits_2^3 2dt + 1 = 4 + 2 + 1 = 7$.

Отже,

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x = 1; \\ 2x-1, & 1 < x < 2; \\ 4, & x = 2; \\ 2x, & 2 < x < 3; \\ 7, & x = 3; \end{cases} = \begin{cases} 0, & x = 1; \\ 2x-1, & 1 < x < 2; \\ 2x, & 2 \le x < 3; \\ 7, & x = 3. \end{cases} \blacksquare$$

Приклад 1.34 [**11**]. Побудувати функцію $g(x)$ для такого розподілу мас: маси величини 2 в точках $x = 2$ і 4 та неперервно розподілені маси щільності $2x$ вздовж проміжку $[0;5]$.

Розв'язання. Аналогічно попередньому прикладу одержимо:

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x = 0; \\ \int\limits_0^x 2t\,dt = t^2\Big|_0^x = x^2, & 0 < x < 2; \\ \int\limits_0^2 2t\,dt + 2 = t^2\Big|_0^2 + 2 = 6, & x = 2; \\ g(2) + \int\limits_2^x 2t\,dt = 6 + t^2\Big|_2^x = x^2 + 2, & 2 < x < 4; \\ g(2) + \int\limits_2^4 2t\,dt + 2 = 6 + 12 + 2 = 20, & x = 4; \\ g(4) + \int\limits_4^x 2t\,dt = 4 + x^2, & 4 < x \le 5 \end{cases} = \begin{cases} x^2, & 0 \le x < 2; \\ x^2 + 2, & 2 \le x < 4; \\ x^2 + 4, & 4 \le x \le 5. \end{cases} \blacksquare$$

Тепер поставимо задачу знайти статичний момент мас, розподілених зазначеним чином, відносно початку координат. Розіб'ємо відрізок $[a;b]$ на частини точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Розглянемо деякий відрізок розбиття $[x_{k-1}; x_k]$, де $k = \overline{1,n}$. Маса, розподілена вздовж цього відрізка, дорівнює $\Delta g(x_k) = g(x_k) - g(x_{k-1})$. Наближено можна вважати, що ця маса є зосередженою у фіксованій точці такого відрізка, наприклад, у правій точці (тобто в точці x_k), а статичний момент маси $\Delta g(x_k)$ відносно початку координат дорівнює $x_k \cdot \Delta g(x_k)$. Тоді шуканий статичний момент наближено можна подати формулою

$$M \approx \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot g(x_k).$$

Здійснюючи граничний перехід при діаметрі розбиття d, що прямує до нуля, отримаємо:

$$M = \int_a^b x\, dg(x). \qquad (1.16)$$

Приклад. 1.35 Обчислити статичні моменти мас, розподілених так, як зазначено в прикладах 1.33 та 1.34.

Розв'язання. Обчислення статичних моментів будемо здійснювати за формулою (1.16). Для інтеграла в правій частині (1.16), що відповідає прикладу 1.33 маємо:

1) $f(x) = x -$ неперервна на відрізку $[1;3]$;
2) $g(x)$ має похідну в усіх точках $[1;3]$, окрім точок $x = 1,\ 2$ і 3;
   $g'(x) -$ інтегровна на $[1;3]$;
3) $g(x) -$ неперервна в усіх точках $[1;3]$, окрім точок $x = 1,\ 2$ і 3, в яких ця функція має розриви першого роду.

Отже, виконуються припущення *теореми 1.18*. Для обчислень застосовуємо далі формулу (1.15):

$$\forall x \in (1;2) \cup (2;3) \ \ g'(x) = 2;$$

стрибки функції $g(x)$ в усіх точках $x = 1,\ 2$ і 3 дорівнюють 1;

$$M = (S)\int_1^3 x\, dg(x) = (R)\int_1^3 x \cdot 2\, dx + f(1)\cdot 1 + f(2)\cdot 1 + f(3)\cdot 1 = x^2\Big|_1^3 + 1 + 2 + 3 = 14.$$

Аналогічно для розподілу мас прикладу 1.34:

$$f(x) = x; \quad \forall x \in [0;2) \cup (2;4) \cup (4;5] \ \ g'(x) = 2x;$$

стрибки функції $g(x)$ в усіх точках $x = 2$ і 4 дорівнюють 2;

$$M = (S)\int_0^5 x\, dg(x) = (R)\int_0^5 x \cdot 2x\, dx + f(2)\cdot 2 + f(4)\cdot 2 = \frac{2x^3}{3}\Bigg|_0^5 + 4 + 8 = 95\frac{1}{3}. \ \blacksquare$$

2 ПРАКТИКУМ ІЗ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

2.1 Функції обмеженої варіації.

1. Множина точок розриву монотонної функції.

Приклад 2.1 Побудувати монотонну функцію на відрізку $[0;1]$, що має 3 точки розриву: $x=\dfrac{1}{4}$, $x=\dfrac{1}{2}$, $x=\dfrac{3}{4}$.

Розв'язання. Розглянемо функцію

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x<\dfrac{1}{4};\\ x+\dfrac{1}{4}, & \dfrac{1}{4}\le x<\dfrac{1}{2};\\ x+\dfrac{1}{2}, & \dfrac{1}{2}\le x<\dfrac{3}{4};\\ x+\dfrac{3}{4}, & \dfrac{3}{4}\le x\le 1.\end{cases}$$

Графік функції зображено на рис.3.23.

Доведемо зростання функції.

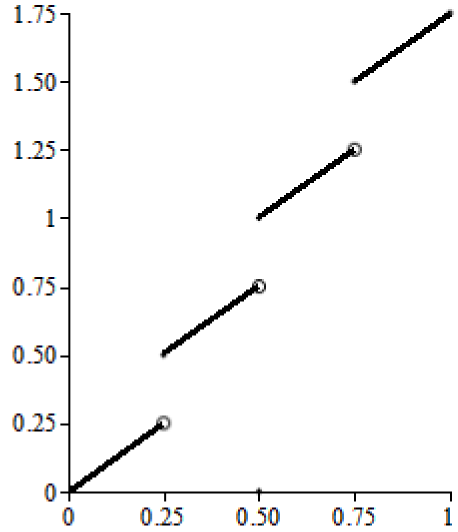


Рис. 2.1

Нехай $x_1<x_2$. Розглянемо $f(x_2)-f(x_1)$. Якщо x_1 і x_2 належать одному із проміжків $\left[0;\dfrac{1}{4}\right)$ або $\left[\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{2}\right)$, або $\left[\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{4}\right)$, або $\left[\dfrac{3}{4};1\right]$, то $f(x_2)-f(x_1)=x_2-x_1>0$. Якщо x_1 і x_2 належать різним проміжкам, то $f(x_2)-f(x_1)=x_2-x_1+C$, де C може приймати значення $\dfrac{1}{4}$, $\dfrac{1}{2}$ або $\dfrac{3}{4}$ в залежності від того, якій саме парі проміжків належать точки x_1 і x_2. У будь-якому із зазначених випадків $f(x_2)-f(x_1)>0$. Отже, функція $f(x)$ зростає на $[0;1]$.■

Приклад 2.2 Побудувати монотонну функцію на відрізку $[0;1]$, що має n точок розриву.

Розв'язання. Розіб'ємо відрізок $[0,1]$ на $n+1$ рівних частин точками $\left\{\dfrac{k}{n+1}\right\}_{k=1}^{n}$. Оберемо ці точки як точки розриву функції. Шуканою є функція вигляду

$$f(x)=x+\frac{k}{n+1}, \text{ якщо } \frac{k}{n+1}\le x<\frac{k+1}{n+1},\ k=0,1,2,...,n;\quad f(1)=1+\frac{n}{n+1}.$$

Доведення монотонності здійснюється аналогічно прикладу 3.193. ■

Приклад 2.3. Побудувати монотонну функцію на відрізку $[0;1]$, що має зчисленну множину точок розриву.

Розв'язання. Оберемо точки $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ як точки розриву. Шукана функція має вигляд

$$f(x)=\frac{x}{2^n},\ \text{якщо}\ \frac{1}{2^n}<x\le\frac{1}{2^{n-1}},\ n\in\mathbb{N};\quad f(0)=0.$$

Оскільки $\lim\limits_{x\to+0}f(x)=0=f(0)$, то в точці $x=0$ немає розриву. Графік функції зображено на рис. 2.2.

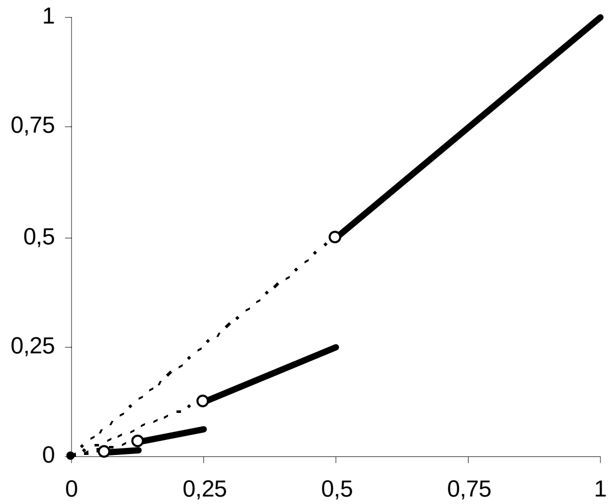


Рис. 2.2

Доведемо зростання функції. Нехай $x_1<x_2$. Якщо x_1 і x_2 належать одному з проміжків $\left(\frac{1}{2^n};\frac{1}{2^{n-1}}\right]$ $(n\in\mathbb{N})$, то $f(x_2)-f(x_1)=\frac{x_2-x_1}{2^n}>0$. Якщо x_1 і x_2 належать різним проміжкам, то меншому аргументу буде відповідати таке значення функції, знаменник якого має більший показник степеня двійки, тобто $f(x_2)-f(x_1)=\frac{x_2}{2^{k-1}}-\frac{x_1}{2^{k+m-1}}$, де $k,m\in\mathbb{N}$. Тут $x_2>x_1\ge0\wedge2^{k-1}<2^{k+m-1}$ $(k,m\in\mathbb{N})$, тому $f(x_2)-f(x_1)>0$. У будь-якому із зазначених випадків $f(x_2)-f(x_1)>0$. Крім того, помітимо, що $f(0)=0$, а $f(x)>0\forall x>0$. Отже, функція $f(x)$ зростає на $[0;1]$.■

2. Відображення множин.

Приклад 2.4 При дії відображення $f:X\to Y$ знайти образи множин $A_i\subset X, i=\overline{1,4}$ і прообрази $B_j\subset X$, $j=\overline{1,4}$ якщо

а) $f(x)=\sin x$, $X=\mathbb{R}, Y=[-1;1]$,

$A_1=[-1;1], A_2=[-2;2], A_3=\left[\frac{3\pi}{4};\frac{5\pi}{6}\right], A_4=\left[\frac{\pi}{6};\pi\right]$,

$B_1 = \{0\}, B_2 = \left\{\frac{1}{2}\right\}, B_3 = [-1;1), B_4 = \left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$;

б) $f(x) = [x],\ X = \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}$, тут $[x]$ – ціла частина дійсного числа x: найбільше ціле число, що не перевищує x,
$A_1 = [-1;5], A_2 = [-2;2), A_3 = (0;+\infty), A_4 = \{7{,}1\}$,
$B_1 = \{5\}, B_2 = \left\{\frac{1}{2}\right\}, B_3 = \{-3;1;2\}, B_4 = [-1;1]$.

Розв'язання. **а)** Графік функції $f(x) = \sin x$ зображено на рис. 2.3. На відрізку $A_1 = [-1;1]$ функція зростає, тому найменше значення вона приймає при $x = -1$, яке дорівнює $f(1) = -\sin 1$, а найбільше – при $x = 1$, при чому $f(1) = \sin 1$. Тому

$$f(A_1) = [-\sin 1; \sin 1].$$

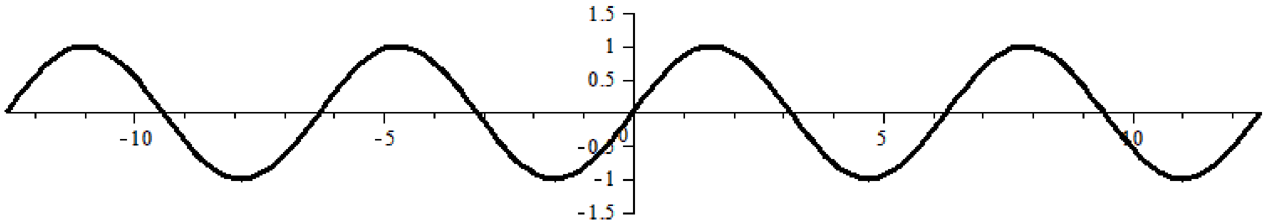


Рис. 2.3

На частині $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ відрізка $A_2 = [-2;2]$ функція набуває усі значення із множини $Y = [-1;1]$, тому $f(A_2) = [-1;1]$.

На відрізку $A_3 = \left[\frac{3\pi}{4};\frac{5\pi}{6}\right]$ функція $f(x) = \sin x$ спадає, тому найменше значення приймає при $x = \frac{5\pi}{6}$, тобто $f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$, а найбільше – при $x = \frac{3\pi}{4}$, тобто $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Тому

$$f(A_3) = \left[\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right].$$

На частині $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ відрізка $A_4 = \left[\frac{\pi}{6};\pi\right]$ функція набуває значення із множини $[0;1]$, а на частині $\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right)$ значення функції лежить всередині цієї множини, а саме: $f\left(\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right)\right) = \left[\frac{1}{2};1\right) \subset [0;1]$. Тому $f(A_4) = [0;1]$.

Тепер знайдемо прообраз множини $B_1 = \{0\}$. Для цього розв'яжемо рівняння

$$\sin x = 0,\ \ x = \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Отже, $f^{-1}(B_1) = \{\pi n, n \in \mathbb{Z}\}$.

Для множини $B_2 = \left\{\frac{1}{2}\right\}$ аналогічно:

$$\sin x = \frac{1}{2}, \quad x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Звідки $f^{-1}(B_2) = \left\{(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}\right\}$.

Щоб знайти прообраз множини $B_3 = [-1;1)$, помітимо, що функція $f(x) = \sin x$ приймає значення на відрізку $[-1;1]$, тому розв’яжемо лише нерівність

$$\sin x \neq 1,\ \ x \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Тому $f^{-1}(B_3) = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}\right\}$.

Для отримання прообразу множини $B_4 = \left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ розв’яжемо нерівність

$$-\frac{1}{2} \leq \sin x \leq \frac{1}{2},$$

$$-\frac{\pi}{6} + \pi n \leq x \leq \frac{\pi}{6} + \pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}.$$

Звідки $f^{-1}(B_4) = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{\pi}{6} + \pi n\right]$.

б) Графік функції $f(x) = [x]$ зображено на рис. 2.4. В точках відрізка $A_1 = [-1;5]$ функція приймає значення із скінченної множини $\{-1;0;1;2;3;4;5\}$, яка і є образом даного відрізка, тобто

$$f(A_1) = \{-1;0;1;2;3;4;5\}.$$

Аналогічно, для $A_2 = [-2;2)$ маємо $f(A_2) = \{-2;-1;0;1\}$.

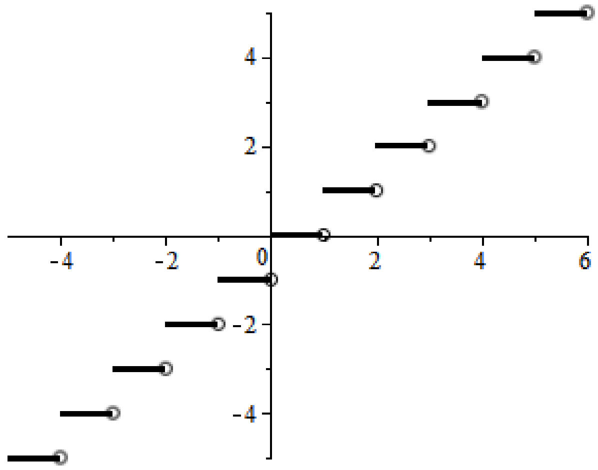


Рис. 2.4

Зверніть увагу на відмінності в прообразах, пов’язані з включенням або виключенням правих межових точок множин A_1 і A_2!

Очевидно, що для $A_3 = (0;+\infty)$ отримаємо $f(A_3) = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Оскільки ціла частина $[7,1] = 7$, то $f(A_4) = \{7\}$.

Зважаючи на те, що ціла частина чисел, що лежать на півінтервалі $[5;6)$ дорівнює 5, приходимо до висновку: $f^{-1}(B_1)=[5;6)$ для $B_1=\{5\}$.

Оскільки ціла частина дійсного числа є цілим числом, то $f^{-1}(B_2)=\varnothing$ для $B_2=\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Ціла частина дійсних чисел x приймає значення із множини $B_3=\{-3;1;2\}$ для $x\in[-3;-2)\bigcup[1;3)$, тому $f^{-1}(B_3)=[-3;-2)\bigcup[1;3)$.

Ціла частина дійсних чисел приймає тільки цілі значення, тому для $B_4=[-1;1]$ одержимо:

$$f^{-1}(B_4)=f^{-1}([-1;1])=f^{-1}(\{-1;0;1\})=[-1;2). \quad \blacksquare$$

3. Похідні числа.

Приклад 2.5 Знайти похідні числа функцій в точках множини їх визначення. Якщо задана точка, то знайти похідне число в цій точці.

а) $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{при} \quad x\in[0;1), \\ -x+3 & \text{при} \quad x\in[1;2], \end{cases}$; **б)** $f(x)=\operatorname{sgn} x$;

в) $f(x)=\{x\}$; **г)** $f(x)=\{\sin\pi x\},\ x=-\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}$.

(тут $[t]$ – ціла частина дійсного числа t; $\{t\}=t-[t]$ – дробова частина числа t).

Розв'язання. а) Графік функції зображено на рис. 2.5. Її похідна при $x\in[0;1)$ дорівнює $f'(x)=2x$, а при $x\in(1;2]$ вона дорівнює $f'(x)=-1$. Тоді всі похідні числа в цих точках співпадають із значеннями своїх похідних.

Нехай $x=1$.

1) У випадку $\{h_n>0\}$ і $h_n\to 0$

$$\lim_n \frac{f(1+h_n)-f(1)}{h_n}=\lim_n \frac{\left(3-(1+h_n)\right)-2}{h_n}=$$

$$=\lim_n \frac{-h_n}{h_n}=-1.$$

2) У випадку $\{h_n<0\}$ і $h_n\to 0$

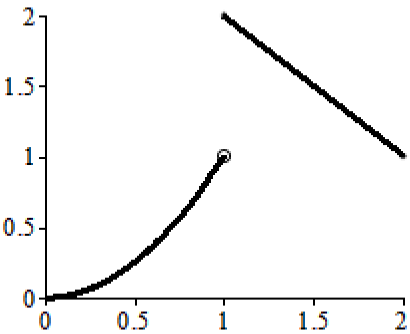


Рис. 2.5

$$\lim_n \frac{f(1+h_n)-f(1)}{h_n}=\lim_n \frac{\left(1+h_n\right)^2-2}{h_n}=\left[\frac{-1}{-0}\right]=+\infty.$$

3) у випадку, коли $\{h_n\}$ є довільною послідовністю, яка прямує до нуля ($h_n\to 0$), то вона

– може містити скінченну кількість від'ємних членів, тоді це рівносильне випадку 1;

– може містити скінченну кількість додатних членів, тоді це зводиться до випадку 2;

– містить нескінченну кількість як додатних, так і від’ємних членів, тоді її можна розбити на дві підпослідовності, одна із яких утворюється із додатних членів, а друга – із від’ємних. Для першої потрапляємо у випадок 1, а для другої – у випадок 2. Оскільки відповідні підпослідовності послідовності $\left\{\sigma_n = \dfrac{f(0+h_n)-f(0)}{h_n}\right\}$ мають дві різні граничні точки -1 і $+\infty$, то послідовність $\{\sigma_n\}$ є розбіжною.

Висновок: в точці $x=1$ функція має два похідні числа: -1 і $+\infty$.

б) Якщо $x \neq 0$, то такий x належить проміжку, на якому функція $f(x)=\operatorname{sgn} x$ є сталою, тому в цій точці $f'(x)=0$. Тому усі похідні числа в точці $x \neq 0$ співпадають із значенням похідної, тобто дорівнюють 0.

Якщо $x=0$, то

1) у випадку $\{h_n > 0\}$ і $h_n \to 0$

$$\lim_n \frac{f(0+h_n)-f(0)}{h_n} = \lim_n \frac{\operatorname{sgn} h_n - \operatorname{sgn} 0}{h_n} = \lim_n \frac{1-0}{h_n} = +\infty,$$

2) у випадку $\{h_n < 0\}$ і $h_n \to 0$

$$\lim_n \frac{f(0+h_n)-f(0)}{h_n} = \lim_n \frac{\operatorname{sgn} h_n - \operatorname{sgn} 0}{h_n} = \lim_n \frac{-1-0}{h_n} = +\infty;$$

3) Випадок, коли $\{h_n\}$ є довільною послідовністю, яка прямує до нуля, є майже аналогічним загальному випадку прикладу 2.5 а). Розгляньте цей випадок самостійно ✍!

Висновок: в точці $x=0$ функція має одне похідне число: $+\infty$.

в) Оскільки $f(x)=\{x\}=x-[x]$, то при $x \notin \mathbb{Z}$ $f'(x)=1$. Тоді усі похідні числа дорівнюють 1.

Якщо $x=k\in\mathbb{Z}$, то

1) у випадку $\{h_n > 0\}$ і $h_n \to 0$

$$\lim_n \frac{f(k+h_n)-f(k)}{h_n} = \lim_n \frac{\{k+h_n\}-0}{h_n} = \lim_n \frac{k+h_n-\overbrace{[k+h_n]}^{=k}}{h_n} = \lim_n \frac{h_n}{h_n} = 1;$$

2) у випадку $\{h_n < 0\}$ і $h_n \to 0$

$$\lim_n \frac{f(k+h_n)-f(k)}{h_n} = \lim_n \frac{k+h_n-\overbrace{[k+h_n]}^{=k-1}}{h_n} = \lim_n \frac{h_n+1}{h_n} = \left[\frac{+1}{-0}\right] = -\infty;$$

3) Випадок, коли $\{h_n\}$ є довільною послідовністю, яка прямує до нуля, є аналогічним загальному випадку прикладу 2.5 а).

Висновок: в точках $x=k\in\mathbb{Z}$ функція має два похідні числа: 1 і $-\infty$.

г) Графік функції $f(x)=\{\sin \pi x\}$ зображено на рис. 2.14.

Точка $x=-\dfrac{1}{2}$ не є точкою розриву функції, і в достатньо малому околі цієї точки функція задається формулою $f(x)=\sin x+1$. Отже, в цій точці функція диференційовна, а її похідні числа дорівнюють похідній

$$f'\left(-\frac{1}{2}\right)=\pi\cos\pi x\Big|_{x=-\frac{1}{2}}=0 .$$

Той самий висновок можна отримати із геометричного змісту похідної (див. рис. 2.14): дотична до графіку в цій точці паралельна осі абсцис, тому має кутовий коефіцієнт, що дорівнює 0, йому і дорівнює значення похідної.

Нехай $x=0$, тоді в цій точці функція має розрив першого роду.

1) У випадку $\{h_n>0\}$ і $h_n\to 0$

$$\lim_n\frac{f(0+h_n)-f(0)}{h_n}=\lim_n\frac{\sin\pi h_n-\overbrace{[\sin\pi h_n]}^{=0}-0}{h_n}=\lim_n\frac{\sin\pi h_n}{h_n}=\pi .$$

2) У випадку $\{h_n<0\}$ і $h_n\to 0$

$$\lim_n\frac{f(0+h_n)-f(0)}{h_n}=\lim_n\frac{\sin\pi h_n-\overbrace{[\sin\pi h_n]}^{=-1}-0}{h_n}=\lim_n\frac{\sin\pi h_n-(-1)}{h_n}=\left[\frac{1}{-0}\right]=-\infty .$$

3) Загальний випадок аналогічний прикладу 2.5 а).

<u>Висновок</u>: в точці $x=0$ функція має два похідні числа: π і $+\infty$.

Нехай $x=\dfrac{1}{2}$, тоді в цій точці функція має усувний розрив.

1) У випадку $\{h_n>0\}$ і $h_n\to 0$

$$\lim_n\frac{f\left(\frac{1}{2}+h_n\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{h_n}=\lim_n\frac{\sin\pi\left(\frac{1}{2}+h_n\right)-\overbrace{\left[\sin\pi\left(\frac{1}{2}+h_n\right)\right]}^{=0}-0}{h_n}=$$

$$=\lim_n\frac{\cos\pi h_n}{h_n}=\left[\frac{1}{+0}\right]=+\infty.$$

2) У випадку $\{h_n<0\}$ і $h_n\to 0$

$$\lim_n\frac{f\left(\frac{1}{2}+h_n\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{h_n}=\lim_n\frac{\sin\pi\left(\frac{1}{2}+h_n\right)-\overbrace{\left[\sin\pi\left(\frac{1}{2}+h_n\right)\right]}^{=0}-0}{h_n}=$$

$$=\lim_n\frac{\cos\pi h_n}{h_n}=\left[\frac{1}{-0}\right]=-\infty.$$

3) Загальний випадок аналогічний прикладу 2.5 а).

<u>Висновок</u>: в точці $x=\dfrac{1}{2}$ функція має два похідні числа: $-\infty$ і $+\infty$. ■

Зауважимо, що в точках розриву І роду або усувних можна спостерігати наступне. Якщо односторонній стрибок в точці дорівнює нулю, то одне із похідних чисел дорівнює відповідній односторонній похідній. Якщо односторонній стрибок додатній (від'ємний), то одне із похідних чисел дорівнює $+\infty$ $(-\infty)$.

4. Дослідження функцій на обмеженість варіації

Приклад 2.6 Довести, що функція

$$f(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x=0,\\ x^2\cos\dfrac{\pi}{x}, \text{ при } x\neq 0\end{cases}$$

має обмежену варіацію на відрізку $[0;1]$.

Розв'язання. Обчислимо похідну цієї функції в кожній точці відрізка $[0;1]$. Нехай спочатку $x\in(0;1]$, тоді

$$f'(x)=2x\cdot\cos\frac{\pi}{x}+\pi\sin\frac{\pi}{x}.$$

В точці $x=0$:

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2\cos\dfrac{\pi}{\Delta x}-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\underbrace{\Delta x}_{\text{н.м.ф.}}\cdot\underbrace{\cos\frac{\pi}{\Delta x}}_{\text{обм.}}=0.$$

Тоді

$$f'(x)=\begin{cases}2x\cdot\cos\dfrac{\pi}{x}+\pi\sin\dfrac{\pi}{x}, \text{ при } x\neq 0,\\ 0, \text{ при } x=0.\end{cases}$$

На $(0;1]$ похідна обмежена:

$$|f'(x)|=\left|2x\cos\frac{\pi}{x}+\pi\sin\frac{\pi}{x}\right|\le\left|2x\cos\frac{\pi}{x}\right|+\left|\pi\sin\frac{\pi}{x}\right|\le 2+\pi,$$

в точці $x=0$

$$\left|f'(0)\right|=0\le 2+\pi.$$

Отже, $\forall x\in[0,1]$ $|f'(x)|\le 2+\pi$, тому похідна обмежена на $[0;1]$, звідки випливає обмеженість її варіації (*наслідок 1.12*). ■

Приклад 2.7 Довести, що функція

$$f(x)=\begin{cases}0, \quad \text{при} \quad x=0,\\ \dfrac{1}{x}, \quad \text{при} \quad x\neq 0\end{cases}$$

має необмежену варіацію на відрізку $[0;1]$.

Розв'язання. Задана функція є необмеженою, оскільки вона є нескінченно великою в точці $x=0$: $\lim\limits_{x\to+0}\frac{1}{x}=+\infty$. Будь-яка необмежена функція має необмежену варіацію (*необхідна умова обмеженості варіації*). ■

Приклад 2.8 Знайти варіацію функції $f(x)=\operatorname{sgn}x$ на відрізку $[-1,1]$.

Розв'язання. На цьому відрізку функція зростає нестрого, тому

$$\mathop{V}_{-1}^{1}(f)=f(1)-f(-1)=1-(-1)=2. \ ■$$

5. Обчислення повних варіацій функцій обмеженої варіації.

Приклад 2.9 Знайти варіацію функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$:

а) $f(x)=\operatorname{sgn}x$, $[a;b]=[-1;1]$;

б) $f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{при} \quad x\in[0;1),\\ 5, & \text{при} \quad x=1,\\ -x+3, & \text{при} \quad x\in(1;2],\end{cases}$ $\quad [a;b]=[0;2]$.

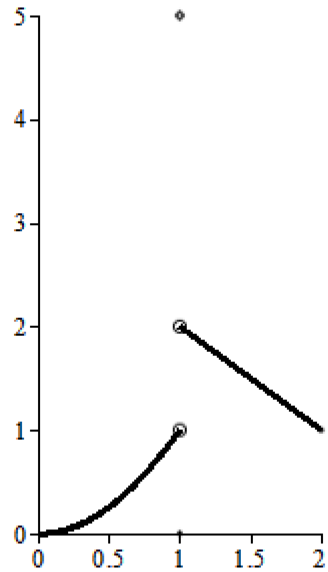


Рис. 2.6

Розв'язання. **а)** На відрізку $[-1;1]$ функція $f(x)=\operatorname{sgn}x$ зростає нестрого, тому

$$\mathop{V}_{-1}^{1}(f)=f(1)-f(-1)=1-(-1)=2.$$

б) Графік функції зображено на рис. 3.25. Розіб'ємо відрізок $[0;2]$ на два відрізки $[0;1]$ і $[1;2]$. На відрізку $[0;1]$ функція зростає, а на відрізку $[1;2]$ – спадає, тому

$$\mathop{V}_{0}^{1}f=f(1)-f(0)=5-0=5,$$

$$\mathop{V}_{1}^{2}(f)=f(1)-f(2)=5-1=4,$$

звідки в силу адитивності повної варіації

$$\mathop{V}_{0}^{2}(f)=\mathop{V}_{0}^{1}(f)+\mathop{V}_{1}^{2}(f)=5+4=9. \ ■$$

Приклад 2.10 Нехай функція $f(x)$ на півінтервалі $[a;b)$ зростає, а в точці b набуває значення $f(b)$ й границя $\exists f(b-0)=\lim\limits_{x\to b-0}f(x)$ скінченна. Довести, що

$$\mathop{V}_{a}^{b}(f)=\left[f(b-0)-f(a)\right]+\left|f(b)-f(b-0)\right|.$$

Доведення. Розіб'ємо відрізок $[a;\ b]$ точками $a=x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$. Тоді

$$V=\sum_{i=1}^{n}\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_{i-1}\right)\right|=f\left(x_1\right)-f\left(x_0\right)+f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)+\ldots+$$
$$+f\left(x_{n-1}\right)-f\left(x_{n-2}\right)+\left|f\left(x_n\right)-f\left(x_{n-1}\right)\right|=f\left(x_{n-1}\right)-f\left(x_0\right)+$$
$$+\left|f\left(x_n\right)-f\left(x_{n-1}\right)\right|=f\left(x_{n-1}\right)-f\left(a\right)+\left|f\left(b\right)-f\left(x_{n-1}\right)\right|;$$
$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)=\sup_R V=\lim_{x_{n-1}\to b-0}f\left(x_{n-1}\right)-f\left(a\right)+\left|f\left(b\right)-\lim_{x_{n-1}\to b-0}f\left(x_{n-1}\right)\right|=$$
$$=\left[f(b-0)-f(a)\right]+\left|f(b)-f(b-0)\right|.\ \blacksquare$$

Приклад 2.11 Нехай функція $f(x)$ на інтервалі $(a;b)$ монотонна, а в точках a і b набуває значення $f(a)$ і $f(b)$, а також $\exists f(a+0)=\lim\limits_{x\to a+0}f(x)$ і $\exists f(b-0)=\lim\limits_{x\to b-0}f(x)$ скінченні. Довести, що

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)=\left|f(a+0)-f(a)\right|+\left|f(b-0)-f(a+0)\right|+\left|f(b)-f(b-0)\right|.$$

Доведення. Розіб'ємо відрізок $[a;b]$ на два відрізки $[a;c]$ і $[c;b]$ $(a<c<b)$, тоді $\overset{b}{\underset{a}{V}}\left(f\right)=\overset{c}{\underset{a}{V}}\left(f\right)+\overset{b}{\underset{c}{V}}\left(f\right)$. На кожному з двох нових відрізків функція задовольняє умови, аналогічним попередньому прикладу, тому

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}\left(f\right)=\overset{c}{\underset{a}{V}}\left(f\right)+\overset{b}{\underset{c}{V}}\left(f\right)=\left|f(a+0)-f(a)\right|+\left|f(c)-f(a+0)\right|+$$
$$+\left|f(b-0)-f(c)\right|+\left|f(b)-f(b-0)\right|.$$

Внаслідок монотонності функції обидва модулі в сумі $\left|f(c)-f(a+0)\right|+\left|f(b-0)-f(c)\right|$ відкриваються з однаковими знаками, тому ця сума дорівнює $\left|f(b-0)-f(a+0)\right|$. Звідки і отримаємо потрібну формулу. $\blacksquare$

Приклад 2.12 Нехай функція $f(x)$ монотонна на кожному із інтервалів $(c_0,c_1),(c_1,c_2),\ldots,(c_{m-1},c_m)$, де

$$a=c_0<c_1<c_2<\ldots<c_{m-1}<c_m=b$$

і $\left\{c_k\right\}_{k=1}^{m}$ – точки розриву першого роду функції $f(x)$. Тоді

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}\left(f\right)=\sum_{k=1}^{m}\Big[\left|f\left(c_{k-1}+0\right)-f\left(c_{k-1}\right)\right|+\left|f\left(c_k-0\right)-f\left(c_{k-1}+0\right)\right|+\left|f\left(c_k\right)-f\left(c_k-0\right)\right|\Big]. \tag{2.1}$$

Якщо на зазначених інтервалах функція стала , то

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}\left(f\right)=\left|f\left(c_0+0\right)-f\left(c_0\right)\right|+\sum_{k=1}^{m-1}\Big[\left|f\left(c_k+0\right)-f\left(c_k\right)\right|+\left|f\left(c_k\right)-f\left(c_k-0\right)\right|\Big]+$$
$$+\left|f\left(c_m\right)-f\left(c_m-0\right)\right|. \tag{2.2}$$

Розв'язання. Виписані формули є наслідками попереднього прикладу. **(**✍Виведення здійснити самостійно**!)** $\blacksquare$

Приклад 2.13 [8]. Обчислити варіацію функції

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x=0,\\ 1-x, & \text{при } 0<x<1,\\ 5, & \text{при } x=1\end{cases}$$

на відрізку $[0;1]$.

Розв'язання. Графік функції зображено на рис. 2.7. Застосуємо формулу (2.1):

$$a=c_0=0, b=c_1=1,$$

$$\overset{1}{\underset{0}{V}}(f)=\left|f(c_0+0)-f(c_0)\right|+\left|f(c_1-0)-f(c_0+0)\right|+$$
$$+\left|f(c_1)-f(c_1-0)\right|=|1-0|+|0-1|+|5-0|=7.\ \blacksquare$$

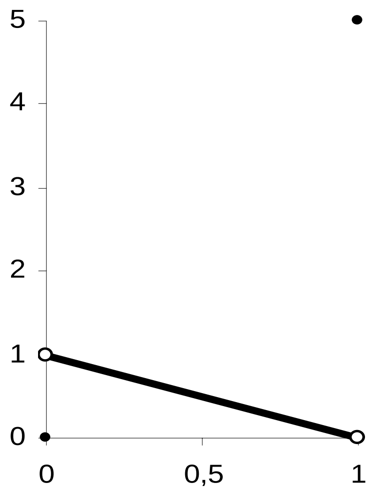


Рис.2.7

Приклад 2.14 Обчислити варіацію функції

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{при } x\in[0;1),\\ 5, & \text{при } x=1,\\ x+3, & \text{при } x\in(1;2]\end{cases}$$

на відрізку $[0;2]$.

Розв'язання. Графік функції зображено на рис. 2.8. За формулою (2.1)

$$a=c_0=0, c_1=1, b=c_2=2;$$

$$\overset{2}{\underset{0}{V}}(f)=\left|f(c_0+0)-f(c_0)\right|+$$
$$+\left|f(c_1-0)-f(c_0+0)\right|+\left|f(c_1)-f(c_1-0)\right|+$$
$$+\left|f(c_1+0)-f(c_1)\right|+\left|f(c_2-0)-f(c_1+0)\right|+$$
$$+\left|f(c_2)-f(c_2-0)\right|=0+1+4+1+1+0=7.\ \blacksquare$$

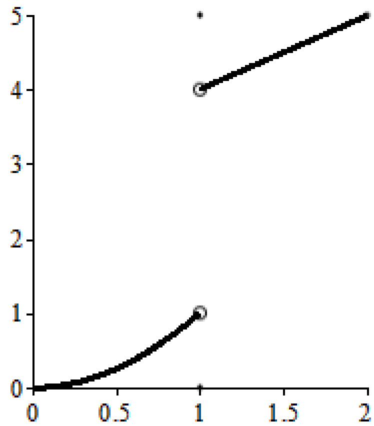


Рис. 2.8

Приклад 2.15 Знайти варіацію функції

$$f(x)=\begin{cases}1, \text{якщо} & x\neq 1,2,3,\\ 5, \text{якщо} & x=1,2,3\end{cases}$$

на відрізку $[0;4]$.

Розв'язання. Застосуємо формулу (2.2):

$$\overset{4}{\underset{0}{V}}(f)=\left|f(1)-f(1-0)\right|+\left|f(1+0)-f(1)\right|+\left|f(2-0)-f(2)\right|+$$
$$+\left|f(2)-f(2+0)\right|+\left|f(3-0)-f(3)\right|+\left|f(3)-f(3+0)\right|=$$
$$=4+4+4+4+4+4=24.\ \blacksquare$$

Приклад 2.16 Знайти варіацію функцій

$$f(x)=\left[x^2\right] \text{ і } g(x)=\left\{x^2\right\}$$

на відрізку $\left[-\sqrt{2};\sqrt{5}\right]$ (тут $[t]$ – ціла частина дійсного числа t; $\{t\}=t-[t]$ – дробова частина числа t).

Розв'язання. Усі можливі точки розриву знаходимо, розв'язуючи рівняння $x^2=n,\ n\in\mathbb{Z}$ в межах заданого відрізка $\left[-\sqrt{2};\sqrt{5}\right]$:

$$x^2=n,\quad n=0,1,2,3,4;$$
$$x=\pm\sqrt{n},\quad n=0,1,2,3,4;$$
$$x=-\sqrt{2},-1,0,1,\sqrt{2},\sqrt{3},2,\sqrt{5}.$$

Графік функції $f(x)$ зображено на рис. 2.9. Точка $x=0$ є точкою неперервності цієї функції.

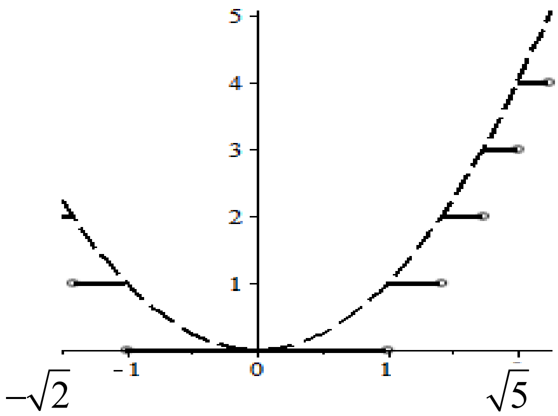


Рис. 2.9

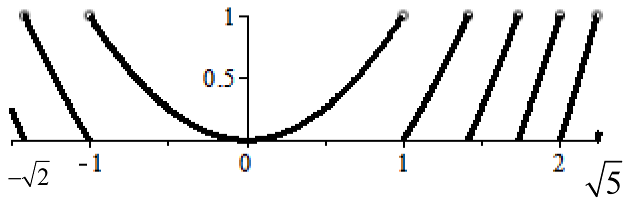


Рис. 2.10

Розіб'ємо відрізок $\left[-\sqrt{2};\sqrt{5}\right]$ на два відрізки $\left[-\sqrt{2};0\right]$ і $\left[0,\sqrt{5}\right]$, на кожному з яких функція $f(x)$ монотонна, тому

$$\mathop{V}_{-\sqrt{2}}^{0}(f)=2-0=2;\quad \mathop{V}_{0}^{\sqrt{5}}(f)=5-0=5;$$
$$\mathop{V}_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{5}}(f)=\mathop{V}_{-\sqrt{2}}^{0}(f)+\mathop{V}_{0}^{\sqrt{5}}(f)=2+5=7.$$

Графік функції $g(x)$ зображено на рис. 2.10. Для обчислення варіації цієї функції застосуємо формулу (2.1):

$$\mathop{V}_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{5}}(g)=\left|g\left(-\sqrt{2}+0\right)-g\left(-\sqrt{2}\right)\right|+\left|g(-1-0)-g\left(-\sqrt{2}+0\right)\right|+\underbrace{\left|g(-1-0)-g(-1)\right|}_{=0}+$$
$$+\left|g(-1+0)-g(-1)\right|+\left|g(0)-g(-1+0)\right|+\left|g(1-0)-g(0)\right|+\left|g(1)-g(1-0)\right|+$$
$$+\underbrace{\left|g(1+0)-g(1)\right|}_{=0}+\left|g\left(\sqrt{2}-0\right)-g(1)\right|+\left|g\left(\sqrt{2}\right)-g\left(\sqrt{2}-0\right)\right|+$$
$$+\left|g\left(\sqrt{3}-0\right)-g\left(\sqrt{2}\right)\right|+\left|g\left(\sqrt{3}\right)-g\left(\sqrt{3}-0\right)\right|+\left|g(2-0)-g\left(\sqrt{3}\right)\right|+\left|g(2)-g(2-0)\right|+$$
$$+\left|g\left(\sqrt{5}-0\right)-g(2)\right|+\left|g\left(\sqrt{5}\right)-g\left(\sqrt{5}-0\right)\right|=14.\ \blacksquare$$

Приклад 2.17 Знайти варіацію функцій $f(x)=[\ln x]$ і $g(x)=\{\ln x\}$ на відрізку $[0{,}1;10]$ (тут $[t]$ – ціла частина дійсного числа t, а $\{t\}=t-[t]$ – дробова частина числа t).

Розв'язання. Спочатку знайдемо значення функції $\ln x$ на кінцях відрізка:

$$\ln 0{,}1=-\ln 10\approx -2{,}3;\ \ln 10\approx 2{,}3.$$

Можливі точки розриву в межах заданого відрізка знаходимо для цілих n, що змінюються від цілої частини $[-2{,}3]=-3$ до $[2{,}3]=2$:

$$\ln x=n,\quad n=-3;-2;-1;0;1;2;$$

$$x=\frac{1}{e^2};\frac{1}{e};0;e;e^2\in[0{,}1;10];\quad x=\frac{1}{e^3}\notin[0{,}1;10].$$

Графіки функцій зображено на рис. 2.11 і рис. 2.12.

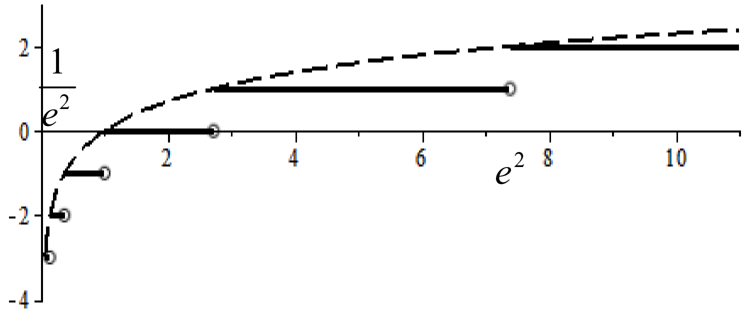


Рис. 2.11

Функція $f(x)$ зростає на відрізку $[0{,}1;10]$, тому

$$\overset{10}{\underset{0{,}1}{V}}(f)=[\ln 10]-[\ln 0{,}1]=2-(-3)=5.$$

Зважаючи на те, що

$$\{\ln 0{,}1\}=\{-\ln 10\}=-\ln 10-[-\ln 10]=-\ln 10+3,$$
$$\{\ln 10\}=\ln 10-[\ln 10]=\ln 10-2,$$

за формулою (2.1) отримаємо

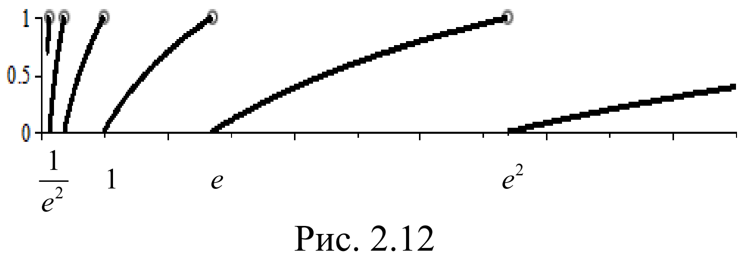


Рис. 2.12

$$\overset{10}{\underset{0{,}1}{V}}(g)=\underbrace{\left|g(0{,}1+0)-g(0{,}1)\right|}_{=0}+\left|g\left(\frac{1}{e^2}-0\right)-g(0{,}1)\right|+\left|g\left(\frac{1}{e^2}\right)-g\left(\frac{1}{e^2}-0\right)\right|+$$
$$+\left|g\left(\frac{1}{e}-0\right)-g\left(\frac{1}{e^2}\right)\right|+\left|g\left(\frac{1}{e}\right)-g\left(\frac{1}{e}-0\right)\right|+\left|g(1-0)-g\left(\frac{1}{e}\right)\right|+\left|g(1)-g(1-0)\right|+$$
$$+\left|g(e-0)-g(1)\right|+\left|g(e)-g(e-0)\right|+\left|g(e^2-0)-g(e)\right|+\left|g(e^2)-g(e^2-0)\right|+$$
$$+\left|g(10)-g(e^2)\right|=\left|1-(3-\ln 10)\right|+9+\left|(\ln 10-2)-0\right|=2\ln 10+5.\quad\blacksquare$$

Приклад 2.18 Знайти варіацію функцій

$$f(x)=\left[\sin\pi x\right] \text{ і } g(x)=\left\{\sin\pi x\right\}$$

на відрізку $[-1;5]$ (тут $[t]$ – ціла частина дійсного числа t, а $\{t\}=t-[t]$ – дробова частина числа t).

Розв’язання. Можливі точки розриву в межах заданого відрізка:

$$\sin\pi x=n,\quad n=-1,0,1,$$

$$\sin\pi x=-1,\qquad \sin\pi x=0,\qquad \sin\pi x=1,$$

$$x=-\frac{1}{2}+2k,\qquad x=m,\qquad x=\frac{1}{2}+2l,$$

$$k\in\mathbb{Z},\qquad m\in\mathbb{Z},\qquad l\in\mathbb{Z};$$

$$x=-1,-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2,\frac{5}{2},3,\frac{7}{2},4,\frac{9}{2},5.$$

Графіки функцій зображено на рис. 2.13 і рис. 2.14.

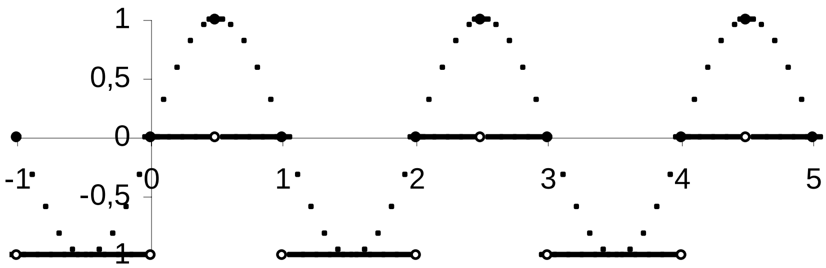


Рис. 2.13

Застосовуємо формулу (2.2):

$$\mathop{V}_{-1}^{5}(f)=\left|f(-1+0)-f(-1)\right|+\left|f(0)-f(0-0)\right|+\left|f\left(\frac{1}{2}\right)-f\left(\frac{1}{2}-0\right)\right|+\left|f\left(\frac{1}{2}+0\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right|+$$

$$+\left|f(1+0)-f(1)\right|+\left|f(2)-f(2-0)\right|+\left|f\left(\frac{5}{2}\right)-f\left(\frac{5}{2}-0\right)\right|+\left|f\left(\frac{5}{2}+0\right)-f\left(\frac{5}{2}\right)\right|+$$

$$+\left|f(3+0)-f(3)\right|+\left|f(4)-f(4-0)\right|+\left|f\left(\frac{9}{2}\right)-f\left(\frac{9}{2}-0\right)\right|+\left|f\left(\frac{9}{2}+0\right)-f\left(\frac{9}{2}\right)\right|=12.$$

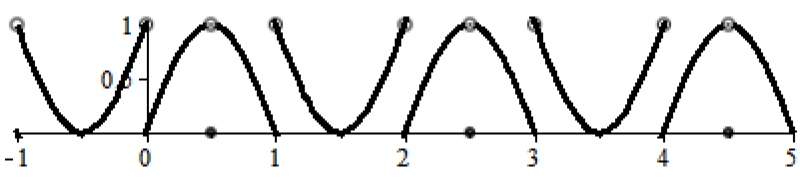


Рис. 2.14

А тепер – формулу (2.1):

$$\mathop{V}_{-1}^{5}(g)=\left|g(-1+0)-g(-1)\right|+\left|g\left(-\frac{1}{2}\right)-g\left(-1+0\right)\right|+\left|g\left(0-0\right)-g\left(-\frac{1}{2}\right)\right|+\left|g\left(0\right)-g\left(0-0\right)\right|+$$

$$+\left|g\left(\frac{1}{2}-0\right)-g\left(0\right)\right|+\left|g\left(\frac{1}{2}\right)-g\left(\frac{1}{2}-0\right)\right|+\left|g\left(\frac{1}{2}+0\right)-g\left(\frac{1}{2}\right)\right|+\left|g\left(1\right)-g\left(\frac{1}{2}+0\right)\right|+$$

$$+\left|g\left(\frac{1}{2}-0\right)-g(0)\right|+\left|g\left(\frac{1}{2}\right)-g\left(\frac{1}{2}-0\right)\right|+\left|g\left(\frac{1}{2}+0\right)-g\left(\frac{1}{2}\right)\right|+\left|g(1)-g\left(\frac{1}{2}+0\right)\right|+$$

$$+\left|g(1)-g(1+0)\right|+\left|g\left(\frac{3}{2}\right)-g(1+0)\right|+\left|g(2-0)-g\left(\frac{3}{2}\right)\right|+\left|g(2)-g(2-0)\right|+$$

$$+\left|g\left(\frac{5}{2}-0\right)-g(2)\right|+\left|g\left(\frac{5}{2}\right)-g\left(\frac{5}{2}-0\right)\right|+\left|g\left(\frac{5}{2}+0\right)-g\left(\frac{5}{2}\right)\right|+\left|g(3)-g\left(\frac{5}{2}+0\right)\right|+$$

$$+\left|g(3+0)-g(3)\right|+\left|g\left(\frac{7}{2}\right)-g(3+0)\right|+\left|g(4-0)-g\left(\frac{7}{2}\right)\right|+\left|g(4)-g(4-0)\right|+$$

$$+\left|g\left(\frac{9}{2}-0\right)-g(4)\right|+\left|g\left(\frac{9}{2}\right)-g\left(\frac{9}{2}-0\right)\right|+\left|g\left(\frac{9}{2}+0\right)-g\left(\frac{9}{2}\right)\right|+\left|g(5)-g\left(\frac{9}{2}+0\right)\right|=24. \blacksquare$$

Приклад 2.19 [**8**]. Довести, що характеристична функція $\chi_E(x)$ множини $E\subset[a,b]$, тобто функція вигляду

$$\chi_E(x)=\begin{cases}1, & \text{при } x\in E,\\ 0, & \text{при } x\notin E,\end{cases}$$

має обмежену варіацію на $[a;b]$ тоді й тільки тоді, коли множина E має лише скінченну кількість межових точок.

Доведення. У випадку, коли E має лише скінченне число межових точок, то $\chi_E(x)$ має обмежену варіацію на $[a;b]$. Дійсно, кожна межова точка множини E може стати точкою розриву її характеристичної функції. Якщо в такій точці розрив I роду, то модуль стрибка дорівнює 1, якщо в точці усувний розрив, то сума модулів правого й лівого стрибків дорівнює 2. Отже,

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(\chi_E)\le 2K,$$

де K – кількість межових точок множини.

У випадку, коли E має нескінченну множину межових точок, то $\chi_E(x)$ має необмежену варіацію на відрізку $[a;b]$. Дійсно, оберемо довільне натуральне число N і з множини всіх межових точок, що лежать всередині (a,b), розглянемо N точок, розташовуючи їх у порядку зростання:

$$a<x_1<x_2<...<x_N<b.$$

Навколо цих точок побудуємо околи, що попарно не перетинаються, $V(x_1),V(x_2),...,V(x_N)$ і в кожному із цих околів візьмемо по дві точки $\zeta_i\in E,\ \eta_i\notin E$. Тоді

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(\chi_E)\ge\sum_{i=1}^{N}\left|\chi_E(\eta_i)-\chi_E(\zeta_i)\right|=N.$$

Отже, варіація функції $\chi_E(x)$ на відрізку $[a;b]$ більша за будь-яке натуральне число N; таким чином, вона дорівнює нескінченності. ■

Приклад 2.20 [**8**]. **а)** Навести приклад, що показує хибність твердження: «Якщо $\left|f\left(x\right)\right|$ має обмежену варіацію на $[a;b]$, то і $f\left(x\right)$ має обмежену варіацію на цьому відрізку».

б) Довести, що для неперервної на відрізку $[a;b]$ функції наведене в пункті а) твердження вірне.

Розв'язання. а) Розглянемо функцію

$$f\left(x\right)=\begin{cases}-1, & \text{при} \quad x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\\ 1, & \text{при} \quad x\in\mathbb{Q}.\end{cases}$$

Тоді $\left|f\left(x\right)\right|=1\ \forall x$, тому $\left|f\left(x\right)\right|$ має обмежену варіацію на $[a,b]$ ($\overset{b}{\underset{a}{V}}(|f|)=0$), тоді як $f\left(x\right)$ – функція необмеженої варіації на тому ж відрізку. Обґрунтування цього здійснюється аналогічно попередньому прикладу. Дійсно, оберемо довільне натуральне число N і розглянемо N раціональних чисел, розташовуючи їх у порядку зростання:

$$a<x_1<x_2<...<x_N<b.$$

Навколо цих точок побудуємо околи, що попарно не перетинаються $V\left(x_1\right),V\left(x_2\right),...,V\left(x_N\right)$ і в кожному із цих околів візьмемо по два ірраціональних числа таких, що $\zeta_i<x_i<\eta_i$. Тоді

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)\geq\sum_{i=1}^{N}\left(\left|f\left(x_i\right)-f\left(\zeta_i\right)\right|+\left|f\left(\eta_i\right)-f\left(x_i\right)\right|\right)=4N.$$

Отже, варіація функції $f\left(x\right)$ на відрізку $[a;b]$ більша за будь-яке число $4N$; таким чином, вона дорівнює нескінченності.

б) Розглянемо довільне розбиття відрізка $[a;b]$

$$R:\ a=x_0<x_1<x_2<...<x_n<x_n=b.$$

Позначимо $V(f,R)=\sum\limits_{k=1}^{n}\left|f(x_k)-f(x_{k-1})\right|$, $V\left(|f|,R\right)=\sum\limits_{k=1}^{n}\left\|f(x_k)\right|-\left|f(x_{k-1})\right\|$.

На тих відрізках розбиття $\left[x_{k-1};x_k\right]$, на кінцях яких функція $f\left(x\right)$ не змінює знак (тобто $f(x_k)\cdot f(x_{k-1})\geq 0$), модулі приростів функцій $f\left(x\right)$ і $\left|f\left(x\right)\right|$ однакові, тобто

$$\left|f(x_k)-f(x_{k-1})\right|=\left\|f(x_k)\right|-\left|f(x_{k-1})\right\|.$$

Нехай на кінцях деякого відрізка $\left[x_{k_0-1};x_{k_0}\right]$ функція $f\left(x\right)$ змінює знак (тобто $f(x_{k_0})\cdot f(x_{k_0-1})<0$). Тоді, за першою теоремою Больцано-Коші про проходження неперервної функції через нуль при зміні знака [**5**, с. 183-184; **9**, с.168], існує точка $\xi_{k_0}\in\left(x_{k_0-1};x_{k_0}\right)$, в якій $f\left(\xi_{k_0}\right)=0$. Порівняємо модулі приростів функцій $f\left(x\right)$ і $\left|f\left(x\right)\right|$:

$$\left|f(x_{k_0})-f(x_{k_0-1})\right|\leq\left|f(x_{k_0})-f(\xi_{k_0})\right|+\left|f(\xi_{k_0})-f(x_{k_0-1})\right|=$$

$$/\,f(x_{k_0})\cdot f(\xi_{k_0})\geq 0\ \text{ і }\ f(\xi_{k_0})\cdot f(x_{k_0-1})\geq 0\,/$$

$$=\left\| f(x_{k_0})\right| - \left| f(\xi_{k_0})\right\| + \left\| f(\xi_{k_0})\right| - \left| f(x_{k_0-1})\right\|.$$

Додаючи до розбиття R ті точки ξ_k із відрізків $\left[x_{k-1};x_k\right]$, для яких $f(x_k)\cdot f(x_{k-1})<0$ і $f\left(\xi_k\right)=0$, і не додаючи жодної точки з відрізків, для яких $f(x_k)\cdot f(x_{k-1})\ge 0$, отримаємо нове розбиття R'. Для розбиттів R та R' сума модулів приростів функцій $f\left(x\right)$ і $\left|f\left(x\right)\right|$ відповідно будуть такими, що $V(f,R)\le V\left(\left|f\right|,R'\right)$. Оскільки $\sup\limits_R V\left(\left|f\right|,R\right)=\overset{b}{\underset{a}{V}}\left(\left|f\right|\right)<\infty$, то $V\left(\left|f\right|,R'\right)\le \overset{b}{\underset{a}{V}}\left(\left|f\right|\right)$. Отже, нерівність $V(f,R)\le \overset{b}{\underset{a}{V}}\left(\left|f\right|\right)$ виконується для довільного розбиття R. Звідси

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)\le \overset{b}{\underset{a}{V}}\left(\left|f\right|\right).$$

Таким чином, функція $f\left(x\right)$ на відрізку $[a;b]$ має обмежену варіацію. ■

Приклад 2.21 [**8**]. Довести, що якщо функція $f\left(x\right)$ має обмежену варіацію на $[a;b]$, то її абсолютна величина $\left|f\left(x\right)\right|$ також має обмежену варіацію на цьому відрізку.

Доведення. Це випливає з нерівності $\left|\alpha-\beta\right|\ge \left\|\alpha\right|-\left|\beta\right\|\ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Розглянемо розбиття $a=x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$ відрізка $[a;b]$, тоді

$$\sum_{k=1}^{n}\left\|f\left(x_k\right)\right|-\left|f\left(x_{k-1}\right)\right\|\le \sum_{k=1}^{n}\left|f\left(x_k\right)-f\left(x_{k-1}\right)\right|\le \overset{b}{\underset{a}{V}} f.$$

Після переходу до точної верхньої межі отримаємо

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}\left(\left|f\right|\right)\le \overset{b}{\underset{a}{V}}\left(f\right).$$

Отже, функція $\left|f\left(x\right)\right|$ має обмежену варіацію на $[a;b]$. ■

6. Подання функції обмеженої варіації різницею неспадних функцій.

Приклад 2.22 [**8**]. Функцію

$$f\left(x\right)=\begin{cases} x^2, & \text{при} \quad x\in[0;1),\\ 5, & \text{при} \quad x=1,\\ x+3, & \text{при} \quad x\in(1;2]\end{cases}$$

подати у вигляді різниці двох зростаючих функцій на $[0;2]$.

Розв'язання. Наслідуючи елементи доведення *теореми 1.13*, функцію $f\left(x\right)$ подамо у вигляді різниці зростаючих $f\left(x\right)=\pi\left(x\right)-\varphi\left(x\right)$, де, $\pi(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ \overset{x}{\underset{0}{V}}(f), & x\ne 0,\end{cases}$ $\varphi\left(x\right)=\pi\left(x\right)-f\left(x\right)$. При побудові функції $\pi(x)$ бачимо, що варіація $\overset{x}{\underset{0}{V}}(f)$ заданої функції $f\left(x\right)$ для $x\in[0;1]$ зростає так само, як і функція

$f(x)$. При $x=1+h\in(1;2]$ варіація дорівнює $\overset{x}{\underset{0}{V}}(f)=6+h=6+(x-1)=x+5$. Отже,

$$\pi(x)=\begin{cases} x^2, & \text{при} \quad x\in[0;1), \\ 5, & \text{при} \quad x=1, \\ x+5, & \text{при} \quad x\in(1;2], \end{cases}$$

тоді

$$\varphi(x)=\pi(x)-f(x)=\begin{cases} 0, \text{ при } x\in[0,1], \\ 2, \text{ при } x\in(1;2]. \end{cases}$$

На рис. 2.15 зображено графіки усіх трьох функцій. ■

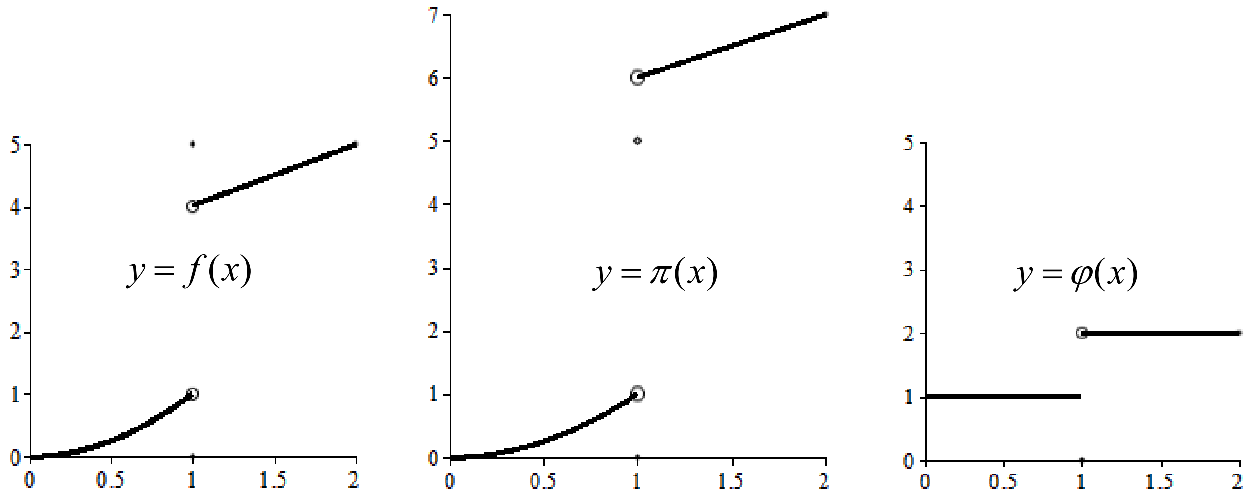


Рис. 2.15

Приклад 2.23 Функцію

$$f(x)=\begin{cases} 1-x, & \text{при} \quad x\in[0;1), \\ 1, & \text{при} \quad x=1, \\ 3-x, & \text{при} \quad x\in(1;2] \end{cases}$$

подати у вигляді різниці двох зростаючих функцій на $[0;2]$.

Розв'язання. Функцію $f(x)$ подамо у вигляді різниці зростаючих функцій $f(x)=\pi(x)-\varphi(x)$. Якщо $x\in[0,1)$, то $\overset{x}{\underset{0}{V}}(f)$ лінійно зростає від 0 до значень, близьких до 1, тому $\overset{x}{\underset{0}{V}}(f)=x$. Якщо $x=1$, то $\overset{x}{\underset{0}{V}}(f)=2$. Якщо $x\in(1;2]$, то $\overset{x}{\underset{0}{V}}(f)$ лінійно зростає від значень, близьких до 3, до значення 4, тому $\overset{x}{\underset{0}{V}}(f)=x+2$. Отже,

$$\pi(x)=\begin{cases} x, & \text{при} \quad x\in[0;1), \\ 2, & \text{при} \quad x=1, \\ x+2, & \text{при} \quad x\in(1;2]; \end{cases}$$

$$\varphi(x)=\pi(x)-f(x)=2x-1\,.$$

Рекомендуємо читачеві побудувати графіки всіх трьох функцій. ■

7. Подання функції обмеженої варіації сумою функції її стрибків і неперервною функцією.

Приклад 2.24 . Функцію

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } x=0, \\ 1-x, & \text{при } 0<x<1, \\ 5, & \text{при } x=1 \end{cases}$$

подати у вигляді суми функції її стрибків і неперервної функції на $[0;1]$.

Розв'язання. В цьому прикладі мова йде про застосування *теореми 1.14*. Для функції $f(x)$, що задана на відрізку $[a,b]$, *функція стрибків* визначається співвідношеннями:

$$s_f(a)=0,$$

$$s_f(x)=f(a+0)-f(a)+\sum_{x_k<x}\left[f\left(x_k+0\right)-f\left(x_k-0\right)\right]+f(x)-f(x-0),$$

де $\{x_k\}_k\subset(a,b)$ – точки розриву цієї функції.

Побудуємо функцію стрибків функції $f(x)$:

$$s_f(x)=\begin{cases} 0, & x=0, \\ 1, & x\in(0,1), \\ 1+5=6, & x=1. \end{cases}$$

Тоді

$$\varphi(x)=f(x)-s_f(x)=\begin{cases} 0, & x=0, \\ -x, & x\in(0,1), \\ -1, & x=1; \end{cases} \quad \varphi(x)=-x$$

є неперервною на $[0;1]$. Отже, $f(x)=s_f(x)+\varphi(x)$.

На рис. 2.16 зображено графіки всіх трьох функцій. ■

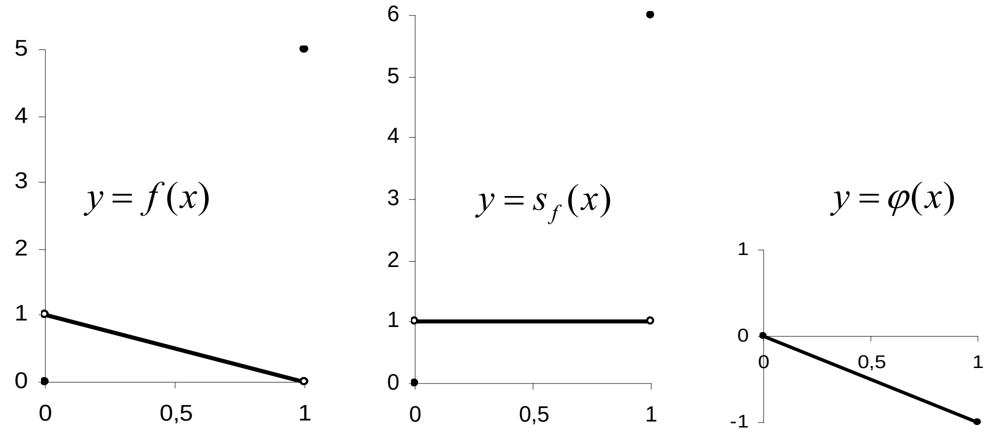


Рис. 2.16

Приклад 2.25 Функцію $f\left(x\right)=\begin{cases} x^2, & \text{при} \quad x\in[0;1), \\ 5, & \text{при} \quad x=1, \\ x+3, & \text{при} \quad x\in(1;2] \end{cases}$

подати у вигляді суми функції її стрибків і неперервної функції на $[0;2]$.

Розв’язання. Функція стрибків функції $f(x)$:

$$s_f(x)=\begin{cases} 0, & x\in[0,1), \\ 4, & x=1, \\ 4-1=3, & x\in(1;2]. \end{cases}$$

Неперервна на $[0;2]$ функція:

$$\varphi(x)=f(x)-s_f(x)=\begin{cases} x^2, & x\in[0,1), \\ 1, & x=1, \\ x, & x\in(1;2], \end{cases}=\begin{cases} x^2, & x\in[0,1], \\ x, & x\in(1;2]. \end{cases}$$

На рис. 2.17 зображено графіки трьох функцій. ■

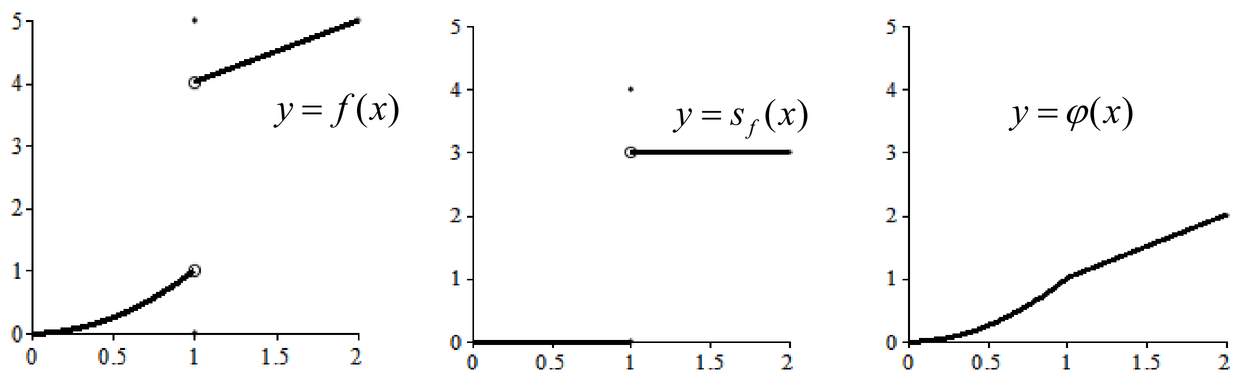


Рис. 2.17

Приклад 2.26 Функцію

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{при} \quad x\in(-3;-2)\cup(-1;1)\cup(2;3),\\ 5, & \text{при} \quad x\in\{\pm3;\pm2;\pm1\},\\ 2-|x-1|, & \text{при} \quad x\in(-2;-1)\cup(1;2)\end{cases}$$

подати у вигляді суми функції її стрибків і неперервної функції на $[-3;3]$.

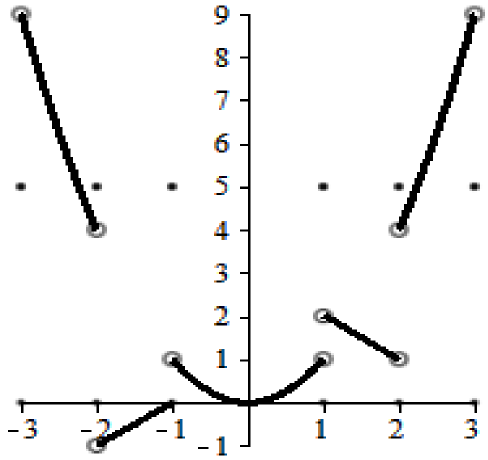


Рис. 2.18

Розв’язання. Графік заданої функції див. на рис. 2.18. Шукані функції мають вигляд:

$$s_f(x)=\begin{cases} 0, & x=-3,\\ 4, & x\in(-3;-2),\\ 4+1=5, & x=-2,\\ 5-6=-1, & x\in(-2;-1),\\ -1+5=4, & x=-1,\\ 4-4=0, & x\in(-1;1),\\ 0+4=4, & x=1,\\ 4-3=1, & x\in(1;2),\\ 1+4=5, & x=2,\\ 5-1=4, & x\in(2;3),\\ 4-4=0, & x=3,\end{cases} \qquad \varphi(x)=f(x)-s_f(x)=\begin{cases} x^2-4, & x\in[-3;-2),\\ 3-|x-1|, & x\in[-2;-1),\\ x^2, & x\in[-1;1],\\ 1-|x-1|, & x\in(1;2],\\ x^2-4, & x\in(2;3].\end{cases}$$

На рис. 2.19 зображено графіки обох шуканих функцій. ■

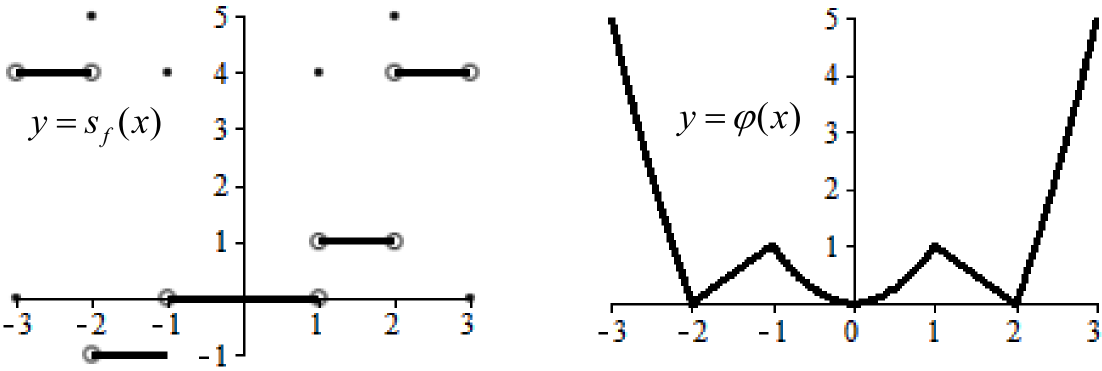


Рис. 2.19

2.2 Інтеграл Рімана-Стілтьєса

1. Теорема про існування інтеграла Рімана-Стілтьєса. Теореми про зв'язок інтеграла Рімана-Стілтьєса та інтеграла Рімана..

Приклад 2.27 Обчислити інтеграл Стілтьєса $(S)\int\limits_0^{0,75}\frac{d\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)}{x+1}$.

Розв'язання. В цьому випадку $f(x)=\frac{1}{x+1}$, $g(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$. Функція $f(x)$ – неперервна на $[0;0,75]$, функція $g(x)$ має неперервну, а тому інтегровну на $[0;0,75]$ похідну $g'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. Отже, функція $g(x)$ має обмежену похідну, а тому обмежену варіацію (*наслідок 1.3*). Таким чином, відповідно до теореми про існування інтеграла Рімана-Стілтьєса (*теорема 1.15*), даний інтеграл існує. Крім того, виконуються умови *теореми 1.16* про зв'язок між інтегралом Стілтьєса і Рімана:

$$(S)\int\limits_0^{0,75}\frac{d\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)}{(x+1)}=(R)\int\limits_0^{0,75}\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}=\left\|\begin{array}{ll} t=\frac{1}{x+1}, & dx=-\frac{dt}{t^2}, \\ x=\frac{1}{t}-1, & \frac{x}{t}\left|\frac{0}{1}\right|\frac{0,75}{4/7}\end{array}\right\|=$$

$$=\int\limits_1^{\frac{4}{7}}\frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\left(\frac{1}{t}-1\right)^2+1}}=-\int\limits_{4/7}^{1}\frac{-dt}{\sqrt{\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t}+2}}=\int\limits_{4/7}^{1}\frac{dt}{\sqrt{1-2t+2t^2}}=$$

$$=\int\limits_{\frac{4}{7}}^{1}\frac{dt}{\sqrt{2\left[\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|t-\frac{1}{2}+\sqrt{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right|\Bigg|_{4/7}^{1}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\ln\left|\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}\right|-\ln\left|\frac{1}{14}+\frac{5}{7\sqrt{2}}\right|\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{4\sqrt{2}+9}{7}.\ \blacksquare$$

2. Інтегрування частинами під знаком інтеграла Рімана-Стілтьєса.

Приклад 2.28 Обчислити інтеграл Стілтьєса $(S)\int\limits_0^a x^3 d\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)$.

Розв'язання. Формально застосуємо формулу інтегрування частинами:

$$(S)\int\limits_0^a x^3 d\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)=\left(x^3\cdot\sqrt{a^2-x^2}\right)\Big|_0^a-(S)\int\limits_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,d\left(x^3\right)= =-(S)\int\limits_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,d\left(x^3\right).$$

Розглянемо інтеграл $(S)\int\limits_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,d\left(x^3\right)$. Тут $f(x)=\sqrt{a^2-x^2}$ – неперервна на $[0,a]$, а функція $g(x)=x^3$ має неперервну похідну на $[0,a]$, тому інтеграл Стілтьєса існує (*теорема 1.15*). Отже, формальне застосування формули інтегрування частинами є коректним. Крім того, можна застосувати формулу зв'язку між інтегралами Стілтьєса і Рімана (*теорема 1.16)*:

$$(S)\int\limits_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,d\left(x^3\right)=$$

$$=(R)\int\limits_0^a 3x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\left\|\begin{array}{c} x=a\sin t, \\ dx=a\cos t dt, \\ a^2-x^2=a^2\cos^2 t \end{array}\quad\left|\begin{array}{c|c|c} \dfrac{x}{t} & \dfrac{0}{0} & \dfrac{a}{\pi/2}\end{array}\right.\right\|=$$

$$=3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin^2 t\sqrt{a^2\cos^2 t}\,a\cos t dt=3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} a^4\sin^2 t\cos^2 t dt=3\frac{a^4}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t dt=$$

$$=3\frac{a^4}{8}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4t)dt=3\frac{a^4}{8}\left(t-\frac{\sin 4t}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3\pi a^4}{16}.$$

Отже, $(S)\int\limits_0^a x^3 d\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)=-\dfrac{3\pi a^4}{16}$. ■

3. Теореми про обчислення інтеграла Рімана-Стілтьєса.

Приклад 2.29 [**11**]**.** Обчислити інтеграли:

а) $(S)\int\limits_{-1}^3 x dg(x)$, де $g(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } x=-1, \\ 1, & \text{при} -1<x<2, \\ -1, & \text{при } 2\le x\le 3; \end{cases}$

б) $(S)\int\limits_0^2 x^2 dg(x)$, де $g(x)=\begin{cases} -1, & \text{при } 0\le x<\dfrac{1}{2}, \\ 0, & \text{при } \dfrac{1}{2}\le x<\dfrac{3}{2}, \\ 2, & \text{при } x=\dfrac{3}{2}, \\ -2, & \text{при } \dfrac{3}{2}<x\le 2. \end{cases}$

Розв'язання. а) В цьому прикладі задано кусково-сталу функцію $g(x)$ і неперервну функцію $f(x)=x$ на $[-1;3]$, тому для обчислення будемо застосовувати формулу (1.14).

Функція $g(x)$ має стрибок 1 при $x=-1$ і стрибок -2 при $x=2$, причому $f(-1)=-1,\ f(2)=2$. Тому

$$(S)\int_{-1}^{3} xdg(x) = f(-1)\cdot\left[g(-1+0)-g(-1)\right]+f(2)\cdot\left[g(2+0)-g(2-0)\right]=$$

$$=(-1)\cdot 1+2\cdot(-2)=-5.$$

б) За тих же причин, що і в *прикладі 2.29 а)*, застосовуємо формулу (1.14). При $x=\dfrac{1}{2}$ функція $g(x)$ має стрибок 1, а при $x=\dfrac{3}{2}$ її стрибок дорівнює -2 (значення функції $g(x)$ при $x=\dfrac{3}{2}$ не впливає на результат). Маємо:

$$(S)\int_{-0}^{2} x^2dg(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot 1+\left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot(-2)=-\frac{17}{4}.\ \blacksquare$$

Приклад 2.30 [**11**]**.** Обчислити інтеграли $(S)\int_{-2}^{2} f(x)dg(x)$ і $(S)\int_{-2}^{2} g(x)df(x)$, де

$$f(x)=x^2,\quad g(x)=\begin{cases} 1, & -2<x<-1; \\ 2, & x=-2;\ x=-1; \\ 3, & -1<x<0; \\ 0, & x=0;\ x=1;\ x=2; \\ -1, & 0<x<1;\ 1<x<2. \end{cases}$$

Розв'язання. При $x=-2$ функція $g(x)$ має правий стрибок –1, при $x=-1$ її повний стрибок дорівнює 2, при $x=1$ повний стрибок дорівнює 0, а при $x=2$ лівий стрибок дорівнює 1. Застосуємо формулу (1.14)

$$(S)\int_{-2}^{2} f(x)dg(x)=(-2)^2\cdot(-1)+(-1)^2\cdot 2+0+1^2\cdot 0+2^2\cdot 1=2,$$

а тепер – формулу інтегрування частинами:

$$(S)\int_{-2}^{2} g(x)\,df(x)=f(x)g(x)\Big|_a^b-(S)\int_{-2}^{2} f(x)dg(x)=$$

$$=f(2)g(2)-f(-2)g(-2)-2=2^2\cdot 0-(-2)^2\cdot 2-2=-10.\ \blacksquare$$

Приклад 2.31 [**11**]. Обчислити інтеграли:

а) $\int_{-2}^{2} x\,dg(x)$, **б)** $\int_{-2}^{2} x^2dg(x)$, **в)** $\int_{-2}^{2} (x^3+1)\ dg(x)$,

де $g(x)=\begin{cases} x+2, & \text{при} -2\le x\le -1, \\ 2, & \text{при} -1<x<0, \\ x^2+3, & \text{при}\ 0\le x\le 2. \end{cases}$

Розв'язання. В цьому прикладі задано функцію $g(x)$ так, що $\exists g'(x)$ – інтегровна за Ріманом у всіх точках відрізка $[-2;2]$, окрім двох точок $x=-1$ і $x=0$. Функції $f(x)$ неперервні на цьому відрізку. Тому для обчислення будемо застосовувати формулу (1.15).

Функція $g(x)$ має стрибки, що дорівнюють 1, при $x=-1$ і $x=0$. Похідна цієї функції:

$$g'(x)=\begin{cases}1, & \text{при } -2\le x<-1,\\ 0, & \text{при } -1<x<0,\\ 2x, & \text{при } \ 0<x\le 2.\end{cases}$$

Тому

а) $\int\limits_{-2}^{2} x dg(x)=\int\limits_{-2}^{-1} x dx+\int\limits_{0}^{2} x\cdot 2x dx+(-1)\cdot 1+0\cdot 1=2\frac{5}{6}$,

б) $\int\limits_{-2}^{2} x^2 dg(x)=\int\limits_{-2}^{-1} x^2 dx+\int\limits_{0}^{2} x^2\cdot 2x dx+(-1)^2\cdot 1+0^2\cdot 1=11\frac{1}{3}$,

в) $\int\limits_{-2}^{2} (x^3+1) dg(x)=\int\limits_{-2}^{-1} (x^3+1) dx+\int\limits_{0}^{2} (x^3+1)\cdot 2x dx+2\cdot 1+1\cdot 1=15\frac{1}{20}$. ■

Приклад 2.32 Обчислити інтеграли

а) $(S)\int\limits_{-2}^{2} x^3 d\{x\}$; **б)** $(S)\int\limits_{-2}^{2} x\, d\{\sin \pi x\}$

(тут $[t]$ – ціла частина дійсного числа t, а $\{t\}=t-[t]$ – дробова частина числа t).

Розв'язання. а) Маємо:

$$(S)\int\limits_{-2}^{2} x^3 d\{x\}=(S)\int\limits_{-2}^{2} x^3 d\left(x-[x]\right)=(S)\int\limits_{-2}^{2} x^3 d(x)-(S)\int\limits_{-2}^{2} x^3 d[x],$$

$$(S)\int\limits_{-2}^{2} x^3 dx=(R)\int\limits_{-2}^{2} x^3 dx=\left.\frac{x^4}{4}\right|_{-2}^{2}=0.$$

Функція $[x]$ має стрибки, рівні 1, у всіх точках розриву $x=-1, 0, 1, 2$ з відрізку $[-2;2]$. Застосуємо формулу (1.14)

$$(S)\int\limits_{-2}^{2} x^3 d[x]=(-1)^3\cdot 1+0+1^3\cdot 1+2^3\cdot 1=8.$$

Звідки $(S)\int\limits_{-2}^{2} x^3 d\{x\}=0-8=-8$.

б) Маємо

$$(S)\int\limits_{-2}^{2} x d\{\sin \pi x\}=(S)\int\limits_{-2}^{2} x d(\sin \pi x)-(S)\int\limits_{-2}^{2} x d[\sin \pi x],$$

$$(S)\int_{-2}^{2} xd(\sin\pi x) = x\sin\pi x\Big|_{-2}^{2} - (S)\int_{-2}^{2}\sin\pi x dx = -(R)\int_{-2}^{2}\sin\pi x dx = 0\,.$$

На рис. 2.13 зображено графік функції $y=[\sin\pi x]$ на відрізку $[-1;4]$. Побудуйте самостійно ✍ графік цієї функції на $[-2;2]$. В точках розриву $x=-\dfrac{3}{2}$ і $x=\dfrac{1}{2}$ повний стрибок цієї функції дорівнює 0, в точках $x=\pm1$ стрибок дорівнює -1, у точці $x=0$ він дорівнює 1, а в точці $x=2$ лівий стрибок дорівнює 1. Застосовуючи формулу (1.14), отримаємо

$$(S)\int_{-2}^{2} x\,d[\sin\pi x] = (-1)\cdot(-1)+0+1\cdot(-1)+2\cdot 1 = 2\,.$$

Звідки $(S)\int_{-2}^{2} x\,d\{\sin\pi x\} = 0-2=-2$. ■

4. Елементи функціонального аналізу.

Приклад 2.33 Перевірити лінійність, неперервність функціонала $F:C[0,1]\to\mathbb{R}$ та знайти його норму, якщо

$$F(f)=\int_0^1 f(x)\,x\,dx + f(0)\,.$$

Перевіримо лінійність цього функціонала за означенням: нехай $f(x),g(x)\in C\big[0,1\big]$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, тоді

$$F(\alpha f+\beta g)=\int_0^1\big(\alpha f(x)+\beta g(x)\big)\,x\,dx+\big(\alpha f+\beta g\big)(0)=$$

$$=\alpha\left(\int_0^1 f(x)x\,dx+f(0)\right)+\beta\left(\int_0^1 g(x)\,x\,dx+g(0)\right)=\alpha F(f)+\beta F(g)\,,$$

тобто функціонал дійсно лінійний.

Отже, ми можемо перевіряти цей функціонал не на неперервність, а лише на обмеженість [6, с.256]. Нехай $f(x)\in C\big[0,1\big]$, тоді

$$\left|F(f)\right|=\left|\int_0^1 f(x)xdx+f(0)\right|\le\int_0^1\left|f(x)\right|xdx+\left|f(0)\right|\le$$

$$\le\int_0^1\max_{s\in[0,1]}\left|f(s)\right|xdx+\max_{s\in[0,1]}\left|f(s)\right|=\|f\|\cdot\left(\int_0^1 xdx+1\right)=\frac{3}{2}\|f\|.$$

Тут ми користуємося тим, що значення неперервної функції у будь-якій точці відрізка не перебільшує її максимального значення.

Отже, $\forall f \in C[0,1]$ $\left|F(f)\right| \le \frac{3}{2}\|f\|$, тобто нерівність виконується зі сталою $C = \frac{3}{2}$, отже, функціонал F − обмежений та неперервний.

Знайдемо його норму. З того, що $\|F\|$ дорівнює найменшій сталій, для якої виконується нерівність $\left|F(f)\right| \le C \cdot \|f\|$ $\forall f \in C[0,1]$, та з того, що така нерівність виконується при $C = \frac{3}{2}$, випливає, що

$$\|F\| \le \frac{3}{2}.$$

Заданий функціонал лінійний та обмежений, тобто $\forall f \in C[0,1]$ $\left|F(f)\right| \le \|F\| \cdot \|f\|$.

Виберемо тепер функцію $f_0(x) = 1 \in C[0,1]$. Для неї також $\left|F(f_0)\right| \le \|F\| \cdot \|f_0\|$. Але $\|f_0\| = \max\limits_{t \in [0,1]} \left|f_0(t)\right| = 1$ та $F(f_0) = \int\limits_0^1 t\,dt + 1 = \frac{3}{2}$, тобто $\frac{3}{2} \le \|f\| \cdot 1$.

Ми одержали одночасне виконання двох нерівностей: $\|F\| \le \frac{3}{2}$ та $\|F\| \ge \frac{3}{2}$. З цього випливає, що $\|F\| = \frac{3}{2}$.

Зауважимо, що безпосередньо за означенням знайти норму лінійного неперервного функціонала не завжди легко. В розглянутій задачі ми спочатку визначили сталу $C = 3/2$ в означенні обмеженості лінійного функціонала, що дало нам можливість отримати оцінку $\|F\| \le 3/2$. А потім ми підбирали функцію $f_0(x) = 1 \in C[0,1]$, на якій ця стала досягається. Це стало можливим завдяки тому, що підінтегральна функція X є невід'ємною на [0,1]. Якщо ж підінтегральна функція на відрізку інтегрування змінює свій знак, підібрати функцію, на якій стала досягається, не завжди можливо. В такому випадку саме застосування інтеграла Рімана-Стілтьєса дає можливість розв'язати задачу.

5. Застосування інтеграла Рімана-Стілтьєса у функціональному аналізі.

Приклад 2.34 Представити лінійний неперервний функціонал в просторі $C[-1;1]$ інтегралом Стілтьєса і обчислити його норму, якщо

а) $F(f) = \int\limits_{-1}^{1} xf(x)dx + f(0) + \dfrac{f(-1) + f(1)}{2}$, б) $F(f) = \int_{-1}^{1} xf(x)dx + f(0) - \dfrac{f(-1)+f(1)}{2}$.

Розв’язання. а) Розглянувши представлення функціонала і формулу (1.15), можна прийти до висновку: $g'(x) = x$, повний стрибок функції $g(x)$ в точці $x=0$ дорівнює 1, в точках $x=-1$ і $x=-1$ відповідно правий і лівий стрибки дорівнюють $\dfrac{1}{2}$.

Оскільки $g'(x) = x$, то $g(x) = \dfrac{x^2}{2} + C$. Зважаючи на значення стрибків, в якості функції $g(x)$ можна обрати наступну функцію:

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x=-1; \\ \dfrac{x^2}{2}, & -1 < x < 0; \\ \dfrac{x^2}{2}+1, & 0 \le x < 1; \\ 2, & x=1. \end{cases}$$

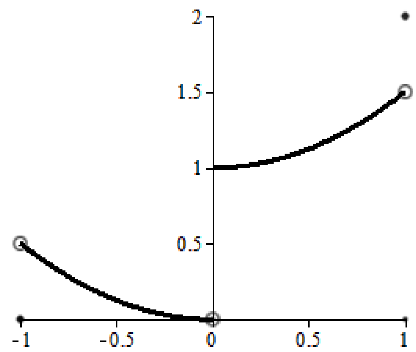


Рис. 2.20

Графік див. на рис. 2.20. Тоді

$$F(f) = (S)\int_{-1}^{1} f(x)d(g(x)).$$

Норма цього функціоналу дорівнює

$$\|F\| = \mathop{V}_{-1}^{2}(g) = |g(-1+0) - g(-1)| + |g(0-0) - g(-1+0)| +$$

$$+|g(0) - g(0+0)| + |g(1-0) - g(0)| + |g(1) - g(1-0)| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 3.$$

б) Повний стрибок функції $g(x)$ в точці $x=0$ дорівнює 1, в точках $x=-1$ і $x=-1$ відповідно правий і лівий стрибки дорівнюють $-\dfrac{1}{2}$. Оскільки $g'(x) = x$, то $g(x) = \dfrac{x^2}{2} + C$. Зважаючи на значення стрибків, в якості функції $g(x)$ можна обрати наступну функцію:

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x=-1; \\ \dfrac{x^2}{2}, & -1 < x < 0; \\ \dfrac{x^2}{2}+1, & 0 \le x < 1; \\ 1, & x=1. \end{cases}$$

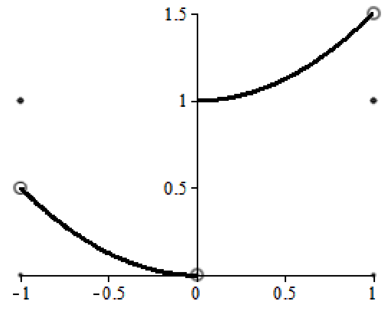


Рис. 2.21

Графік див. на рис. 2.21.

Тоді $F(f) = (S)\int_{-1}^{1} f(x)d(g(x))$. Норма цього функціоналу дорівнює

$$\|F\| = \overset{2}{\underset{-1}{V}}(g) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 3 . \ \blacksquare$$

6. Застосування інтеграла Рімана-Стілтьєса у фізиці

Приклад 2.35 Побудувати функцію $g(x)$ для такого розподілу мас: одиничні маси в точках $x = 2,\ 3$ і 5 та неперервно розподілені маси щільності 5 вздовж проміжку $[2;5]$.

Розв’язання. За означенням $g(2) = 0$.

Якщо $x \in (2;3)$, то $g(x) = 1 + \int_2^x 5dt = 1 + 5(x-2) = 5x - 9$.

Якщо $x = 3$, то $g(3) = 1 + \int_2^3 5dt + 1 = 1 + 5 + 1 = 7$.

Якщо $x \in (3;5)$, то $g(x) = g(3) + \int_3^x 5dt = 7 + 5(x-3) = 5x - 8$.

Якщо $x = 5$, то $g(5) = g(3) + \int_3^5 5dt + 1 = 7 + 10 + 1 = 18$.

Таким чином,

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x = 2; \\ 5x - 9, & 2 < x < 3; \\ 7, & x = 3; \\ 5x - 8, & 3 < x < 5; \\ 18, & x = 5; \end{cases} = \begin{cases} 0, & x = 2; \\ 5x - 9, & 2 < x < 3; \\ 5x - 8, & 3 \le x < 5; \\ 18, & x = 5. \end{cases} \ \blacksquare$$

Приклад 2.36 Побудувати функцію $g(x)$ для такого розподілу мас: маси величини 5 в точках $x = 1$ і 5 та неперервно розподілені маси щільності $3x^2$ вздовж сегменту $[0;7]$.

Розв’язання. Аналогічно попередньому прикладу одержимо:

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x = 0; \\ \int_0^x 3t^2\,dt = t^3\Big|_0^x = x^3, & 0 < x < 1; \\ \int_0^1 3t^2\,dt + 2 = t^3\Big|_0^1 + 5 = 6, & x = 1; \\ g(1) + \int_1^x 3t^2\,dt = 6 + t^3\Big|_1^x = x^3 + 5, & 1 < x < 5; \\ g(1) + \int_1^5 3t^2\,dt + 5 = 6 + 124 + 5 = 135, & x = 5; \\ g(5) + \int_5^x 3t^2\,dt = 135 + x^3 - 125 = x^3 + 10, & 5 < x \le 7 \end{cases} = \begin{cases} x^3, & 0 \le x < 1; \\ x^3 + 5, & 1 \le x < 5; \\ x^3 + 10, & 5 \le x \le 7. \end{cases} \ \blacksquare$$

Приклад. 2.37 Обчислити статичні моменти мас, розподілених так, як зазначено в прикладах 2.34 та 2.35.

Розв'язання. Обчислювати статичні моменти будемо за формулою (1.16), а саме: $M = \int_a^b x\,dg(x)$. Для цього інтеграла, відповідно до прикладу 2.34 маємо:

1) $f(x) = x -$ неперервна на відрізку $[2;5]$;
2) $g(x)$ має похідну в усіх точках $[2;5]$, окрім точок $x = 2,\ 3$ і 5;
   $g'(x) -$ інтегровна на $[2;5]$;
3) $g(x) -$ неперервна в усіх точках $[2;5]$, окрім точок $x = 2,\ 3$ і 5, в яких ця функція має розриви першого роду.

Отже, виконуються умови *теореми 1.18*. Застосовуємо формулу (1.15):

$$\forall x \in (2;3) \cup (3;5) \quad g'(x) = 5;$$

стрибки функції $g(x)$ в усіх точках $x = 2,\ 3$ і 5 дорівнюють 1;

$$M = (S)\int_1^3 x\,dg(x) = (R)\int_2^5 x \cdot 5\,dx + f(2)\cdot 1 + f(3)\cdot 1 + f(5)\cdot 1 = \left.\frac{5x^2}{2}\right|_1^3 + 2 + 3 + 5 = 32\frac{1}{2}.$$

Аналогічно для розподілу мас прикладу 2.35:

$$f(x) = x; \quad \forall x \in [0;1) \cup (1;5) \cup (5;7] \quad g'(x) = 3x^2;$$

стрибки функції $g(x)$ в усіх точках $x = 1$ і 5 дорівнюють 5;

$$M = (S)\int_0^5 x\,dg(x) = (R)\int_0^7 x \cdot 3x^2\,dx + f(1)\cdot 5 + f(5)\cdot 5 = \left.\frac{3x^4}{4}\right|_0^7 + 5 + 25 = 1830\frac{3}{4}. \ \blacksquare$$

3 ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ

Формальні вимоги щодо виконання індивідуального завдання. Індивідуальне завдання оформлюється в зошиті обсягом 12 – 18 аркушів і здається не пізніше, як за два тижні до закінчення навчального семестру, протягом якого вивчається навчальна дисципліна. Розв'язки повинні містити усі необхідні обґрунтування з посиланням на відповідні формули, теореми і властивості. У разі не зарахування індивідуального завдання студент повинен його доопрацювати до передостаннього тижня навчального семестру. Захист індивідуального завдання проводиться на останньому тижні. Студент, у якого індивідуальне завдання не зараховано, не допускається до заліку.

3.1 Варіанти індивідуальних типових завдань

Тут N – номер прізвища студента в журналі академічної групи, g – остання цифра номера групи. Якщо t – дійсне число, то $[t]$ – ціла частина числа t, а $\{t\} = t - [t]$ – дробова частина числа t.

1. Побудувати монотонну функцію, що має N точок розриву на відрізку $[0;(N+1)\cdot g]$.
2. Чи мають функції обмежену варіацію?

а) $f(x) = \begin{cases} x^{N+g}\sin\dfrac{\pi}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ на відрізку $[0;1]$;

б) $f(x) = (Nx^2 + gx)\cos 3x$ на відрізку $[0;\pi]$,

в) $f(x) = \begin{cases} \left[x^{-\frac{N}{g}} \right], & x \neq 0; \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ на відрізку $[0;1]$;

г) $f(x) = \begin{cases} \log^{g}_{N+1} x, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ на відрізку $[0;1]$?

3. Знайти варіацію функцій

а) $f(x) = \begin{cases} 3x + g, & 0 \le x < 1, 2 < x < 3; \\ N, & x = 1,2,3; \\ (x-g)^2, & 1 < x < 2; \\ \sin \pi x, & 3 < x < 4; \\ N - g, & x = 4 \end{cases}$ на відрізку $[0;4]$;

б) $f(x)=\begin{cases}\left\{\sin\dfrac{2\pi x}{g}\right\}, 0<x<2g;\\ N, \qquad\qquad x=0,2g,3g;\\ \left(\dfrac{x}{g}-1\right)^2,\ 2g<x<3g\end{cases}$ на відрізку $[0;3g]$.

4. Подати кожну з функцій прикладу 3 у вигляді суми функції її стрибків і неперервної функції.
5. Подати функцію

$$f(x)=\begin{cases}x+g, & \text{при} -2\le x\le -1,\\ 2, & \text{при} -1<x<0,\\ N-x, & \text{при } 0\le x\le 2\end{cases}$$

у вигляді різниці двох зростаючих функцій.

6. Обчислити

а) $(S)\displaystyle\int_{\sqrt{\frac{\pi}{3g}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2g}}}\frac{1}{\sin gx^2}d(gx^2)$; б) $(S)\displaystyle\int_0^1\left(Nx+g\right)d(\mathrm{arctg}(Nx+g))$;

в) $(S)\displaystyle\int_0^1\frac{1}{Nx+g}d(\mathrm{arctg}(Nx+g))$; г) $(S)\displaystyle\int_0^{\pi}(gx+N)^2d(\cos x)$.

7. Обчислити інтеграли:

а) $(S)\displaystyle\int_{-1}^{3}x\,dh(x)$, де $h(x)=\begin{cases}g, & \text{при } x=-1,\\ N, & \text{при} -1<x<2,\\ N+g, & \text{при } 2\le x\le 3;\end{cases}$

б) $(S)\displaystyle\int_0^2 x^2dh(x)$, де $h(x)=\begin{cases}-g, & \text{при } 0\le x<\dfrac{1}{2},\\ 0, & \text{при } \dfrac{1}{2}\le x<\dfrac{3}{2},\\ N+2, & \text{при } x=\dfrac{3}{2},\\ N-2, & \text{при } \dfrac{3}{2}<x\le 2.\end{cases}$

Знайти варіацію функції $h(x)$ на відрізку а) $[-1;3]$, б) $[0;2]$.

8. Обчислити інтеграли $(S)\displaystyle\int_{-2}^{2}f(x)dh(x)$ і $(S)\displaystyle\int_{-2}^{2}h(x)df(x)$, де

$$f(x)=\cos\pi x,\ h(x)=\begin{cases} g+1, & -2<x<-1; \\ N+2, & x=-2;\ x=-1; \\ g+3, & -1<x<0; \\ N, & x=0;\ x=1;\ x=2; \\ g-1, & 0<x<1; 1<x<2. \end{cases}$$

Обчислити варіації кожної з функцій на відрізку $[-2;2]$.

9. Обчислити $(S)\int_a^b h(x)d(f(x))$ і $(S)\int_a^b f(x)d(h(x))$, якщо

а) $f(x)=\begin{cases} 3x+g, & 0\le x<1,\ 2<x<3; \\ N, & x=1,2,3; \\ (x-g)^2, & 1<x<2; \end{cases}$, $h(x)=\sin\dfrac{\pi x}{4}$, $[a;b]=[0;3]$;

б) $f(x)=\log_2 x$; $h(x)=\begin{cases} -x+g, & \frac{1}{2}\le x<1,\ 2<x<4; \\ N, & x=1,2,8; \\ (x-5)^2, & 1<x<2,\ 4<x<8. \end{cases}$ $[a;b]=\left[\dfrac{1}{2};8\right]$.

Обчислити варіацію кожної функції на відрізку $[a;b]$.

10. Обчислити інтеграл $(S)\int_1^{N+1}\dfrac{1}{x}d\{\log_{N+1}x\}$.

3.2 Приклад виконання індивідуального завдання

Приклад 3.1 Чи мають функції обмежену варіацію на відрізку $[0,1]$?

а) $f(x)=\begin{cases} x^2\ln x, & \text{якщо } x\ne 0; \\ 0, & \text{якщо } x=0; \end{cases}$

б) $f(x)=x^3+2x+3-\sin(5x+1)-(3x^2+7x)\cos 4x$;

в) $f(x)=\begin{cases} [\ln x], & \text{якщо } x\ne 0; \\ 0, & \text{якщо } x=0. \end{cases}$

Розв'язання. а) При розв'язанні будемо застосовувати *теорему 1.8* про обмеженість варіації у монотонної функції та наслідок із *теореми 1.12* про адитивність повної варіації.

Дослідження на монотонність проведемо за допомогою похідної. Знайдемо похідну заданої функції в точці $x=0$:

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2\cdot\ln\Delta x-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\cdot\ln\Delta x=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\Delta x}{(\Delta x)^{-1}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=[\text{правило Лопіталя}]\overset{?}{=}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^{-1}}{-(\Delta x)^{-2}}=-\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x=0..$$

При $x \in (0;1]$

$$f'(x) = 2x\ln x + x = x(2\ln x + 1).$$

Отже,

$$f'(x) = 0; \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ 2\ln x + 1 = 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = \dfrac{1}{\sqrt{e}}; \end{array}\right.$$

$$f'(x) \geq 0 \text{ при } x \in \left[\frac{1}{\sqrt{e}};1\right] \Rightarrow f(x) - \nearrow \text{ на } \left[\frac{1}{\sqrt{e}};1\right];$$

$$f'(x) \leq 0 \text{ при } x \in \left[0;\frac{1}{\sqrt{e}}\right] \Rightarrow f(x) - \searrow \text{ на } \left[0;\frac{1}{\sqrt{e}}\right].$$

Таким чином, унаслідок *теореми 1.8*, на кожному з відрізків $\left[0;\frac{1}{\sqrt{e}}\right]$ та $\left[\frac{1}{\sqrt{e}};1\right]$ функція має обмежену варіацію, а тому має обмежену варіацію на відрізку $[0;1]$ (*за наслідком 1.5*). ■

б) Похідна функції $f(x)$ на відрізку $[0,1]$

$$f'(x) = 3x^2 + 2 - 5\cos(5x+1) - (6x+7)\cos 4x + 4(3x^2 + 7x)\sin 4x$$

є функцією, неперервною на відрізку $[0,1]$. Тоді, за першою теоремою Вейєрштрасса [**5**, с.186; **9**, с.175], $f'(x)$ − обмежена на $[0,1]$.

Отже, за *наслідком 1.3*, задана функція має обмежену варіацію на відрізку $[0,1]$.

в) Оскільки $\lim\limits_{x \to 0}\left[\ln x\right] = -\infty$, то задана функція необмежена в околі точки 0, тому для неї не виконується *необхідна умова обмеженості варіації*. Отже, ця функція має необмежену варіацію на відрізку $[0,1]$. ■

Приклад 3.2 Знайти повну варіацію функцій

$$\textbf{а)}\ f(x) = \begin{cases} 3, & \text{при } x = -2; \\ x + 4, & \text{при } x \in (-2;-1); \\ 4, & \text{при } x = -1; \\ -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}, & \text{при } x \in (-1;1); \\ 2, & \text{при } x = 1; \\ x, & \text{при } x \in (1;2); \\ 1, & \text{при } x = 2 \end{cases}$$

на відрізку $[-2;2]$;

б) $f(x)=\begin{cases} 1+4(x+0,5)^2, \text{ при } x\in(-1;-0,5)\bigcup(-0,5;0); \\ 3, \quad \text{при } x=-1,\ x=0,5,\ x=5; \\ 1, \quad \text{при } x=0,\ x=4; \\ \{\sin\pi x\}, \quad \text{при } x\in(0;3]; \\ x-2, \quad \text{при } x\in(3;4) \\ 7-x, \quad \text{при } x\in(4;5) \end{cases}$

на відрізку $[-1;5]$.

Розв’язання. а) Графік заданої функції побудовано на рис. 3.1.

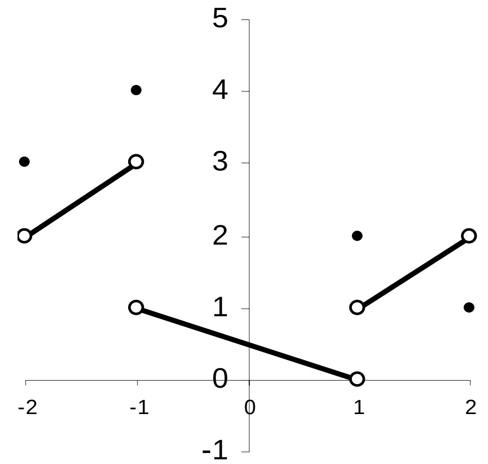


Рис. 3.1

Для обчислення варіації цієї функції знайдемо значення величин, які наведено в табл. 3.1:

Таблиця 3.1 –

Зміна функції на інтервалі	Лівий стрибок	Правий стрибок
		$\lvert f(-2)-f(-2+0)\rvert=1$
$\lvert f(-2+0)-f(-1-0)\rvert=1$		
	$\lvert f(-1-0)-f(-1)\rvert=1$	$\lvert f(-1)-f(-1+0)\rvert=3$
$\lvert f(-1+0)-f(1-0)\rvert=1$	$\lvert f(1-0)-f(1)\rvert=2$	$\lvert f(1)-f(1+0)\rvert=1$
$\lvert f(1+0)-f(2-0)\rvert=1$	$\lvert f(2-0)-f(2)\rvert=1$	

Застосовуючи формулу (2.1), що потребує підсумовування усіх значень із таблиці, отримаємо: $\mathop{V}\limits_{-2}^{2}(f)=12$.

б) В прикладі 2.18 викладено подробиці щодо побудови графіка функції $y=\{\sin\pi x\}$, який зображено на рис. 2.14. Графік такої функції побудовано на рис. 3.2.

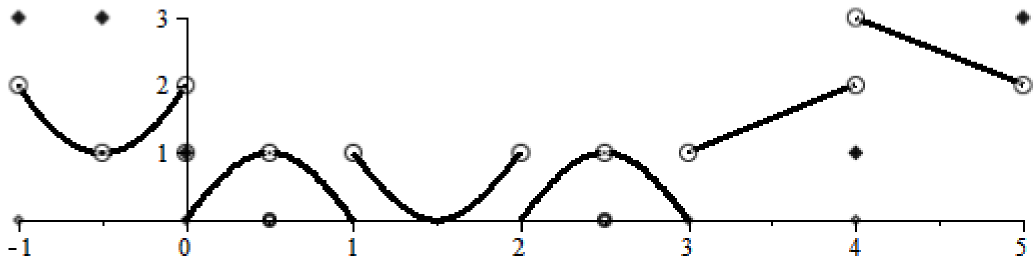


Рис. 3.2

Для обчислення варіації функції $f(x)$ знайдемо значення величин, які зведемо в табл. 3.2:

Таблиця 3.2 –

Зміна функції на інтервалі чи півінтервалі	Лівий стрибок	Правий стрибок
		$\lvert f(-1)-f(-1+0)\rvert=1$
$\lvert f(-1+0)-f(-0{,}5-0)\rvert=1$		
	$\lvert f(-0{,}5-0)-f(-0{,}5)\rvert=2$	$\lvert f(-0{,}5)-f(-0{,}5+0)\rvert=2$
$\lvert f(-0{,}5+0)-f(0-0)\rvert=1$	$\lvert f(0-0)-f(0)\rvert=1$	$\lvert f(0)-f(0+0)\rvert=1$
$\lvert f(0+0)-f(0{,}5-0)\rvert=1$	$\lvert f(0{,}5-0)-f(0{,}5)\rvert=1$	$\lvert f(0{,}5)-f(0{,}5+0)\rvert=1$
$\lvert f(0{,}5+0)-f(1)\rvert=1$		$\lvert f(1)-f(1+0)\rvert=1$
$\lvert f(1+0)-f(1{,}5)\rvert=1$		
$\lvert f(1{,}5)-f(2-0)\rvert=1$	$\lvert f(2-0)-f(2)\rvert=1$	
$\lvert f(2)-f(2{,}5-0)\rvert=1$	$\lvert f(2{,}5-0)-f(2{,}5)\rvert=1$	$\lvert f(2{,}5)-f(2{,}5+0)\rvert=1$
$\lvert f(2{,}5+0)-f(3)\rvert=1$		$\lvert f(3)-f(3+0)\rvert=1$
$\lvert f(3+0)-f(4-0)\rvert=1$	$\lvert f(4-0)-f(4)\rvert=1$	$\lvert f(4)-f(4+0)\rvert=2$
$\lvert f(4+0)-f(5-0)\rvert=1$	$\lvert f(5-0)-f(5)\rvert=1$	

Застосовуючи формулу (2.1), отримаємо: $\overset{5}{\underset{-1}{V}}(f)=28$. ■

Приклад 3.3 Подати кожну з функцій прикладу 3.2 у вигляді суми функції її стрибків і неперервної функції.

Розв'язання. В цьому прикладі мова йде про застосування *теореми 1.14*. Для функції $f(x)$, що задана на відрізку $[a,b]$, *функція стрибків* визначається співвідношеннями:

$$s_f(a)=0,$$

$$s_f(x)=f(a+0)-f(a)+\sum_{x_k<x}\left[f\left(x_k+0\right)-f\left(x_k-0\right)\right]+f(x)-f(x-0),$$

де $\{x_k\}_k\subset(a,b)$ – точки розриву функції $f(x)$.

а) У табл. 3.1 наведено значення модулів усіх односторонніх стрибків заданої функції. Враховуючи напрям стрибка («вгору» або «вниз»), побудуємо функцію стрибків функції $f(x)$:

$$s_f(x) = \begin{cases} 0, & x = -2, \\ -1, & x \in (-2,-1), \\ -1+1=0, & x=-1, \\ 0+(-3)=-3, & x \in (-1,1), \\ -3+2=-1, & x=1, \\ -1+(-1)=-2, & x \in (1,2), \\ -2+(-1)=-3, & x=2. \end{cases}$$

Тоді

$$\varphi(x) = f(x) - s_f(x) = \begin{cases} 3-0=3, & x=-2; \\ x+4-(-1)=x+5, & x \in (-2;-1); \\ 4-0=4, & x=-1; \\ \left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)-(-3) = -\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}, & x \in (-1;1); \\ 2-(-1)=3, & x=1; \\ x-(-2)=x+2, & x \in (1;2); \\ 1-(-3)=4, & x=2; \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} x+5, & x \in [-2;-1]; \\ -\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}, & x \in (-1;1]; \\ x+2, & x \in (1;2]. \end{cases}$$

є неперервною на $[0;1]$. Отже, $f(x) = s_f(x) + \varphi(x)$.

На рис. 3.3 зображено графіки функцій, що вимагалися умовою задачі. ■

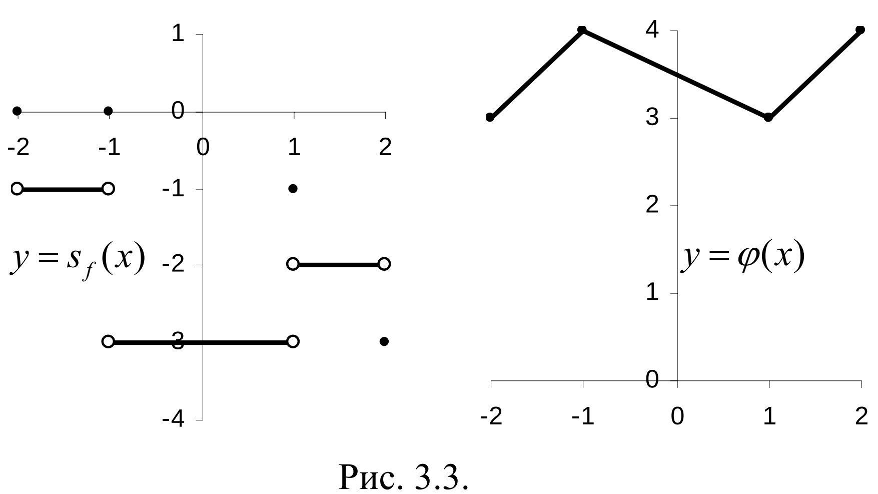


Рис. 3.3.

б) Враховуючи значення модулів стрибків, наведених у табл. 3.2 та їхній напрям, побудуємо функцію стрибків функції $f(x)$:

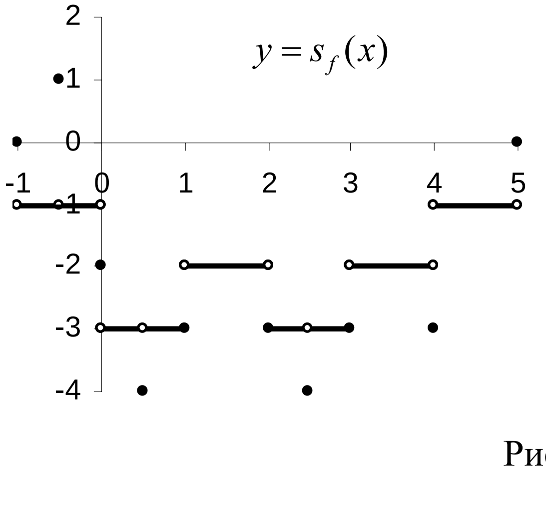
$$
s_f(x) = \begin{cases}
0, & x = -1; \\
-1, & x \in (-1; -0,5); \\
-1 + 2 = 1, & x = -0,5; \\
1 + (-2) = -1, & x \in (-0,5; 0); \\
-1 + (-1) = -2, & x = 0; \\
-2 + (-1) = -3, & x \in (0; 0,5); \\
-3 + (-1) = -4, & x = 0,5; \\
-4 + 1 = -3, & x \in (0,5; 1]; \\
-3 + 1 = -2, & x \in (1; 2); \\
-2 + (-1) = -3, & x \in [2; 2,5); \\
-3 + (-1) = -4, & x = 2,5; \\
-4 + 1 = -3, & x \in (2,5; 3]; \\
-3 + 1 = -2, & x \in (3; 4); \\
-2 + (-1) = -3, & x = 4; \\
-3 + 2 = -1, & x \in (4; 5); \\
-1 + 1 = 0, & x = 5.
\end{cases}
$$

Тоді

$$
\varphi(x) = f(x) - s_f(x) = \begin{cases}
2 + 4(x + 0,5)^2, & x \in [-1; 0]; \\
\sin \pi x + 3, & x \in (0; 3]; \\
x, & x \in (3; 4]; \\
8 - x, & x \in (4; 5]
\end{cases}
$$

є неперервною на $[0;1]$. Отже, $f(x) = s_f(x) + \varphi(x)$.

На рис. 3.4 зображено графіки функцій, що вимагалися умовою задачі. ■



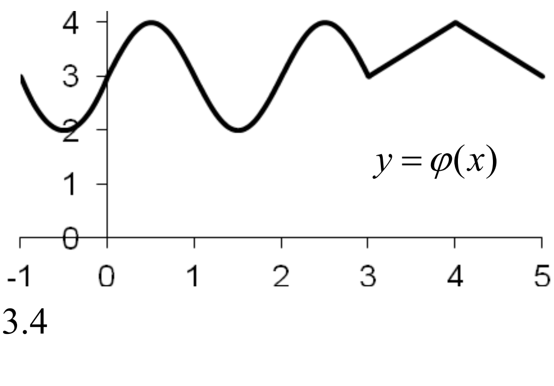


Рис. 3.4

Приклад 3.4 Функцію з прикладу 3.2 а подати у вигляді різниці двох зростаючих функцій на відрізку $[-2;2]$.

Розв'язання. З *теореми 1.13* випливає, що функцію $f(x)$ можна подати у вигляді різниці зростаючих $f(x)=\pi(x)-\varphi(x)$, де

$$\pi(x)=\overset{x}{\underset{-2}{V}}(f),\quad \varphi(x)=\pi(x)-f(x),\quad x\in[-2;2].$$

За означенням, $\pi(0)=0$. Якщо $x\in(-2;-1)$, то $\overset{x}{\underset{-2}{V}}(f)$ лінійно зростає від значень, близьких до 1, до значень, близьких до 2, тому $\overset{x}{\underset{-2}{V}}(f)=x+3$. Якщо $x=-1$, то $\overset{x}{\underset{-2}{V}}(f)=3$. При $x=-1+h\in(-1;1)$ варіація дорівнює $\overset{x}{\underset{-2}{V}}(f)=6+\frac{1}{2}h=6+\frac{1}{2}(x+1)=\frac{1}{2}x+\frac{13}{2}$. Для $x=1$ маємо: $\overset{x}{\underset{-2}{V}}(f)=9$. Для $x=1+h\in(1;2)$ варіація дорівнює $\overset{x}{\underset{-2}{V}}(f)=10+h=10+(x-1)=x+9$. Нарешті, при $x=1$ маємо: $\overset{x}{\underset{-2}{V}}(f)=12$. Отже,

$$\pi(x)=\begin{cases} 0, & x=-2;\\ x+3, & x\in(-2;-1);\\ 3, & x=-1;\\ \frac{1}{2}x+\frac{13}{2}, & x\in(-1;1);\\ 9, & x=1;\\ x+9, & x\in(1;2);\\ 12, & x=2, \end{cases}$$

тоді

$$\varphi(x)=\pi(x)-f(x)=\begin{cases} 0-3=-3, & x=-2;\\ (x+3)-(x+4)=-1, & x\in(-2;-1);\\ 3-4=-1, & x=-1;\\ \left(\frac{1}{2}x+\frac{13}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)=x+6, & x\in(-1;1);\\ 9-2=7, & x=1;\\ x+9-x=9, & x\in(1;2);\\ 12-1=11, & x=2; \end{cases}$$

$$\varphi(x)=\begin{cases} -3, & x=-2; \\ -1, & x\in(-2;-1]; \\ x+6, & x\in(-1;1]; \\ 9, & x\in(1;2); \\ 11, & x=2. \end{cases}$$

На рис. 3.5 зображено графіки функцій, що вимагалися умовою задачі. ■

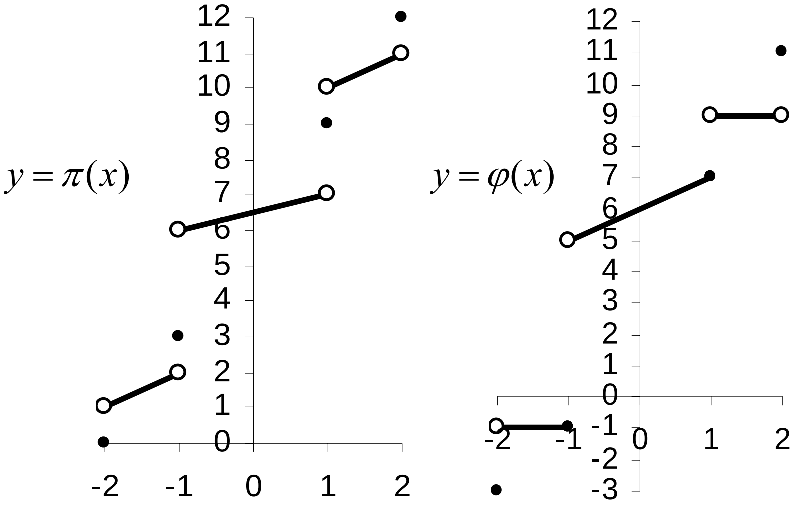


Рис. 3.5

Приклад 3.5 Обчислити інтеграли Стілтьєса

а) $(S)\int_0^1 \frac{d\left(\ln\left(x+1\right)\right)}{x+2}$, **б)** $(S)\int_0^1 \left(x^2+1\right)d\left(e^{5x-3}\right)$.

Розв'язання. а) В даному випадку $f(x)=\frac{1}{x+2}$, $g(x)=\ln\left(x+1\right)$. Функція $f(x)$ – неперервна на $[0;1]$, функція $g(x)$ має неперервну, а тому інтегровну на $[0;1]$ похідну $g'(x)=\frac{1}{x+1}$. Тому застосовуємо теорему про зв'язок між інтегралом Стілтьєса й Рімана:

$$(S)\int_0^1 \frac{d\left(\ln\left(x+1\right)\right)}{x+2}=(R)\int_0^1 \frac{\left(\ln\left(x+1\right)\right)'}{x+2}dx=(R)\int_0^1 \frac{dx}{\left(x+1\right)\left(x+2\right)}=$$

$$=(R)\int_0^1 \left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)dx=\left(\ln\left|x+1\right|-\ln\left|x+2\right|\right)\Big|_0^1=\ln\frac{4}{3}.$$

б) Формально застосуємо двічі формулу інтегрування частинами:

$$(S)\int_0^1 \left(x^2+1\right)d\left(e^{5x-3}\right)=\left(\left(x^2+1\right)\cdot e^{5x-3}\right)\Big|_0^1-(S)\int_0^1 2x\,d\left(e^{5x-3}\right)=$$

$$=2e^2-e^{-3}-\left(2x\cdot e^{5x-3}\right)\Big|_0^1+(S)\int_0^1 2\,d\left(e^{5x-3}\right)=-e^{-3}+(S)\int_0^1 2\,d\left(e^{5x-3}\right).$$

Розглянемо інтеграл $(S)\int\limits_0^1 2\,d\left(e^{5x-3}\right)$. Тут $f(x)=2$ – неперервна на $[0,a]$, а функція $g(x)=e^{5x-3}$ має неперервну похідну на $[0,a]$, тому інтеграл Стілтьєса існує. Отже, формальне застосування формули інтегрування частинами є коректним. Крім того, можна застосувати формулу зв'язку між інтегралами Стілтьєса й Рімана:

$$(S)\int\limits_0^1 2\,d\left(e^{5x-3}\right)=(R)\int\limits_0^1 2\left(e^{5x-3}\right)'dx=2e^{5x-3}\Big|_0^1=2e^2-2e^{-3}.$$

В результаті отримаємо:

$$(S)\int\limits_0^1\left(x^2+1\right)d\left(e^{5x-3}\right)=-e^{-3}+(S)\int\limits_0^1 2\,d\left(e^{5x-3}\right)=2e^2-3e^{-3}. \ \blacksquare$$

Приклад 3.6 Обчислити інтеграл:

$$(S)\int\limits_0^3\left(x-1\right)^2dg(x),\ \text{де}\ g(x)=\begin{cases}-1, & \text{при}\ 0\le x<1,\\ 0, & \text{при}\ 1\le x<2,\\ 2, & \text{при}\ x=2,\\ -2, & \text{при}\ 2<x\le 3.\end{cases}$$

Розв'язання. В цьому прикладі задано кусково-сталу функцію $g(x)$ і неперервну функцію $f(x)=\left(x-1\right)^2$ на $[0;3]$, тому для обчислення будемо застосовувати формулу (1.14).

При $x=1$ функція $g(x)$ має стрибок 1, а при $x=2$ її стрибок дорівнює -2 (значення функції $g(x)$ при $x=2$ не впливає на результат). Причому $f(1)=0,\ f(2)=1$. Маємо:

$$(S)\int\limits_0^3\left(x-1\right)^2dg(x)=f(1)\cdot\left[g(1+0)-g(1)\right]+f(2)\cdot\left[g(2+0)-g(2-0)\right]=$$

$$=0\cdot 1+1\cdot(-2)=-2. \ \blacksquare$$

Приклад 3.7 Обчислити інтеграл $\int\limits_a^b xdg(x)$, де $g(x)-$ функції із прикладу 3.2 на відрізках $[a;b]$, що відповідають умові цього прикладу.

Розв'язання. В цьому прикладі задано функції $g(x)$ так, що $\exists g'(x)$ – інтегровні за Ріманом у всіх точках відрізку $[a;b]$, окрім скінченної кількості. Функція $f(x)=x$ неперервна на цьому відрізку. Тому для обчислення будемо застосовувати формулу (1.15).

а) Функція $g(x)$ має такі стрибки:

в точці $x=-2$ стрибок (правий) дорівнює -1,
в точці $x=-1$ стрибок (повний) дорівнює -2,
в точці $x=1$ стрибок (повний) дорівнює 1,
в точці $x=2$ стрибок (лівий) дорівнює -1.

Похідна цієї функції:

$$g'(x)=\begin{cases}1, & x\in(-2;-1);\\ -\dfrac{1}{2}, & x\in(-1;1);\\ 1, & x\in(1;2).\end{cases}$$

Тому

$$\int_{-2}^{2} xdg(x)=\int_{-2}^{-1} xdx-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} xdx+\int_{1}^{2} xdx+$$

$$+(-2)\cdot(-1)+(-1)\cdot(-2)+1\cdot 1+2\cdot(-1)=\frac{9}{2}.\ \blacksquare$$

б) Похідна цієї функції:

$$g'(x)=\begin{cases}8(x+0,5), & \text{при } x\in(-1;-0,5)\cup(-0,5;0);\\ \pi\cos\pi x, & \text{при } x\in(0;3)/\{0,5;1;2;2,5\};\\ 1, & \text{при } x\in(3;4);\\ -1, & \text{при } x\in(4;5).\end{cases}$$

З урахуванням формули (1.15) і значень стрибків, модулі яких внесені до табл. 3.1, отримаємо:

$$\int_{-2}^{2} xdg(x)=8\int_{-1}^{0} x\left(x+0,5\right)dx+\pi\int_{0}^{3} x\cos\pi x dx+\int_{3}^{4} xdx-\int_{4}^{5} xdx+$$

$$+(-1)\cdot(-1)+(-0,5)\cdot 0+0\cdot(-2)+0,5\cdot 0+1\cdot 1+2\cdot(-1)+2,5\cdot 0+$$

$$+3\cdot 1+4\cdot 1+5\cdot 1=20\frac{2}{3}-\frac{2}{\pi}.\ \blacksquare$$

Приклад 3.8 Обчислити інтеграл $(S)\int_{1}^{2}\frac{1}{x^2+5}d\left\{x^2\right\}$.

Розв'язання. Маємо

$$(S)\int_{1}^{2}\frac{1}{x^2+5}d\left\{x^2\right\}=(S)\int_{1}^{2}\frac{1}{x^2+5}d\left(x^2\right)-(S)\int_{1}^{2}\frac{1}{x^2+5}d\left[x^2\right],$$

$$(S)\int_{1}^{2}\frac{1}{x^2+5}d\left(x^2\right)=(R)\int_{1}^{2}\frac{2x}{x^2+5}dx=\int_{1}^{2}\frac{d\left(x^2+5\right)}{x^2+5}=\ln\left(x^2+5\right)\Big|_{1}^{2}=\ln\frac{3}{2}.$$

На рис. 2.9 зображено графік функції $y=\left[x^2\right]$. В точках розриву $x=1$, $x=\sqrt{2}$, $x=\sqrt{3}$ і $x=2$ стрибок цієї функції дорівнює 1. Застосувавши формулу (1.14), отримаємо:

$$(S)\int_{1}^{2}\frac{1}{x^2+5}d\left[x^2\right]=\frac{1}{6}\cdot 1+\frac{1}{7}\cdot 1+\frac{1}{8}\cdot 1+\frac{1}{9}\cdot 1=\frac{275}{504}.$$

Звідки $(S)\int_{1}^{2}\frac{1}{x^2+5}d\left\{x^2\right\}=\ln\frac{3}{2}-\frac{275}{504}.$ $\blacksquare$

4 ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Означення монотонної функції, стрибка, функції стрибків. Приклади. Довести, що монотонна функція може мати точки розриву лише першого роду.
2. Теорема про потужність множини точок розриву монотонної функції.
3. Довести, що різниця між монотонною функцією і функцією її стрибків є неперервною, монотонною функцією.
4. Образ і прообраз множини при відображенні: означення і властивості.
5. Множини на прямій лебеґової міри нуль. Приклади.
6. Канторова множина та іі міра.
7. Похідні числа. Теореми про похідні числа.
8. Нульмірність множини точок задання монотонної функції, в яких похідні числа нескінченні.
9. Теорема про існування у майже всіх точках задання монотонної функції скінченні похідної.
10. Приклад монотонної неперервної функції, що має нульову похідну в майже усіх точках, коливання якої на відрізку визначення не дорівнює нулю.
11. Теорема про існування монотонної, неперервної на відрізку функції, яка має нескінченну похідну в точках наперед заданої множини лебеґової міри нуль.
12. Означення функції з обмеженою варіацією.
13. Теорема про обмеженість варіації монотонної функції.
14. Теорема про обмеженість варіації функції, що задовольняє умову Ліпшица і наслідок з неї.
15. Необхідна умова обмеженості варіації функції.
16. Арифметичні операції над функціями обмеженої варіації.
17. Адитивність повної варіації.
18. Теорема про подання функції обмеженої варіації різницею двох зростаючих функцій.
19. Теорема про потужність множини точок розриву функції скінченної варіації.
20. Теорема про подання функції обмеженої варіації сумою функції її стрибків і неперервної функції.
21. Означення інтеграла Рімана-Стілтьєса, приклади.
22. Основні властивості інтеграла Стілтьєса. Формула інтегрування частинами.
23. Теорема про існування інтеграла Стілтьєса.
24. Теорема про зв’язок інтеграла Стілтьєса та інтеграла Рімана.
25. Обчислення інтеграла Стілтьєса від неперервної функції за кусково-сталою функцією.
26. Обчислення інтеграла Стілтьєса від неперервної функції по функції, що має обмежену варіацію й має інтегровну за Ріманом похідну у всіх точках, окрім скінченної кількості.
27. Застосування інтеграла Стілтьєса у функціональному аналізі.
28. Застосування інтеграла Стілтьєса у фізиці.

Питання вхідного контролю

1. Означення монотонної функції.
2. Означення стрибка функції.
3. Означення функції стрибків.
4. Якого роду розриви може мати монотонна функція?
5. Яка потужність множини точок розриву монотонної функції?
6. Властивості функції, що є різницею між монотонною функцією і функцією її стрибків.
7. Означення множини лебеґової міри нуль.
8. Чи вірне твердження: будь-яка обмежена на відрізку функція в кожній точці цього відрізку має хоча б одне похідне число?
9. Чи вірне твердження: існує обмежена на відрізку функція, яка хоча б в одній точці цього відрізку не має жодного похідного числа?
10. Яка міра множини тих точок, в яких монотонна функція має хоча б одне нескінченне похідне число?
11. Яка міра множини тих точок, в яких монотонна функція не має похідної?
12. Канторова множина та її міра
13. Необхідна умова обмеженості варіації функції.
14. Скільком дорівнює варіація зростаючої на відрізку функції?
15. Скільком дорівнює варіація спадної на відрізку функції?
16. Який зв'язок між функціями обмеженої варіації на відрізку і функціями, що мають на ньому обмежену похідну?
17. Запишіть властивість адитивності варіації.
18. Яким чином виражається функція обмеженої варіації через дві монотонні функції?
19. Якого роду розриви може мати функція скінченної варіації?
20. Властивості функції, що є різницею між функцією скінченної варіації та функцією її стрибків.
21. Теорема про існування інтеграла Рімана-Стілтьєса.
22. Теорема про зв'язок інтеграла Рімана-Стілтьєса та інтеграла Рімана.
23. Формула інтегрування частинами.
24. Формула обчислення інтеграла Рімана-Стілтьєса від неперервної функції за кусково-сталою функцією.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

Основна

1. Богачев В. И. Действительный и функциональный анализ : университетский курс. Москва; Ижевск : НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2009. 724 с.
2. Гливенко В. И. Интеграл Стильтьеса. Ленинград : ОНТИ, 1936. 216 с.
3. Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної: частина 2: навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів / С. М. Гребенюк, Н. М. Д'яченко, М. І. Клименко, І. В. Красікова, О. О. Тітова,

В. В. Леонтьєва. Запоріжжя : Видавництво ЗНУ, 2013. 499 с. (Рекомендовано МОН: лист №1/11-10197 від 17.06.2013).
4. Д'яченко Н. М., Ткаченко І. Г. Функції скінченної варіації та інтеграл Рімана-Стілтьєса: навчальний посібник для студентів напряму підготовки 6.040201-«математика». Запоріжжя : Видавництво ЗНУ, 2011. 81 с.
5. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. Москва : Наука, 1979. 720 с.; Москва : Проспект, МГУ, 2007. 672 с.
6. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. Москва : Наука, 1989. 624 с.; Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2004. 572 с.
7. Натансон И. П.[1] Теория функций вещественной переменной. Москва : Наука, 1974. 480 с.
8. Очан Ю. С. Сборник задач по математическому аналізу. Общая теория множеств и функцій / под ред. М. Ф. Бокштейна. Москва : Просвящение, 1981. 271 с.
9. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3-х т. Т.1. Москва : Наука, 1969. 607с.
10. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. Т. 2. Москва : Наука, 1966. 800с.; Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2003. 864 с.
11. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. Т. 3. Москва : Наука, 1966. 656с.; Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2003. 727 с.
12. Шкіль М. І. Математичний аналіз : у 2 ч.: підручн. для студ. математ. спец. вузів затвердж. МОНУ. Київ : Вища школа, 2005. Ч. 1. 447 с.
13. Шкіль М. І. Математичний аналіз : у 2 ч.: підручн. для студ. математ. спец. вузів затвердж. МОНУ. Київ : Вища школа, 2005. Ч. 2. 510 с.
14. Шунда Н. М. Практикум з математичного аналізу: Інтегральне числення. Ряди : навч. посібник для студ. пед. навч. закладів. Київ : Вища шк., 1995. 541 с.

Додаткова

1. Чертянин В. А. О представдении интеграла Стилтьеса интегралом Римана, зависящим от параметра. *Матем. заметки.* 2005. Т. 78. Вып. 6. С. 919-933.
2. Мацаев В. И., Соломяк М. З. Об условиях существования интеграла Стилтьеса. *Матем. сб.* **88(130)**: 4(8). 1972. С. 522-535.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної: частина 2: навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів / С. М. Гребенюк, Н. М. Д'яченко, М. І. Клименко, І. В. Красікова, О. О. Тітова, В. В. Леонтьєва. Запоріжжя : Видавництво ЗНУ, 2013. 499 с.
2. Д'яченко Н. М., Ткаченко І. Г. Функції скінченної варіації та інтеграл Рімана-Стілтьєса: навчальний посібник для студентів напряму підготовки 6.040201-«математика». Запоріжжя : Видавництво ЗНУ, 2011. 81 с.