ТЕМА. Методи зведення крайових задач до задачі Коші

§1 Метод суперпозиції для крайової задачі другого порядку

Розглянемо крайову задачу для звичайного диференціального рівняння другого порядку

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \tag{1}$$

$$y(a) = A,\ \ y(b) = B. \tag{2}$$

Мета: звести крайову задачу (1), (2) до задачі Коші з умовами

$$y(a) = A,\ \ y'(a) = \mu, \tag{3}$$

що передбачає пошук (в загальному випадку наближеного) значення μ такого, щоб виконувала друга крайова умова (2).
Для цього подамо розв'язок у вигляді

$$y(x) = y_1(x) + \mu^* y_2(x) \tag{4}$$

і доведемо, що $\mu = \mu^*$.

Підставимо функцію (4) в рівняння (1)

$$\left[y_1(x)+\mu^* y_2(x)\right]'' + p(x)\left[y_1(x)+\mu^* y_2(x)\right]' + q(x)\left[y_1(x)+\mu^* y_2(x)\right] = f(x),$$

$$\left[y_1''(x)+p(x)y_1'(x)+q(x)y_1(x)-f(x)\right]+\mu^*\left[y_2''(x)+p(x)y_2'(x)+q(x)y_2(x)\right]=0. \quad (5)$$

Прирівняємо обидва доданки із (5) до нуля

$$y_1''(x)+p(x)y_1'(x)+q(x)y_1(x)=f(x), \quad (6а)$$

$$y_2''(x)+p(x)y_2'(x)+q(x)y_2(x)=0. \quad (6б)$$

отримано два рівняння відносно допоміжних функцій.

Перша із крайових умов (2) $y(a)=A$і подання шуканої функції у вигляді (4) дає співвідношення

$$y_1(a)+\mu^* y_2(a)=A. \tag{7}$$

Якщо покласти

$$y_1(a)=A,\ \ y_2(a)=0\,, \tag{8}$$

то буде виконуватися умова (7).

Оскільки $y'(a)=\mu$, а $y'(a)=y_1'(a)+\mu^* y_2'(a)$, то при

$$y_1'(a)=0,\ \ y_2'(a)=1 \tag{9}$$

матимемо $\mu=\mu^*$. Однак, значення константи μ поки що не визначено.

Застосуємо другу умову із (2) $y(b)=B$, знаючи, що $\mu=\mu^*$:

$$y_1(b)+\mu y_2(b)=B\,. \tag{10}$$

Звідки

$$\mu=\frac{B-y_1(b)}{y_2(b)}\,. \tag{11}$$

Таким чином, приходимо до ***алгоритму метода суперпозиції зведення крайової задачі до задачі Коші***

1. Розв'язується задача Коші №1

$$y_1''(x)+p(x)y_1'(x)+q(x)y_1(x)=f(x), \tag{12а}$$

$$y_1(a)=A,\ \ y_1'(a)=0. \tag{12б}$$

2. Обчислюється значення $y_1(b)$.
3. Розв'язується задача Коші №2

$$y_2''(x)+p(x)y_2'(x)+q(x)y_2(x)=0, \tag{12в}$$

$$y_2(a)=0,\ \ y_2'(a)=1. \tag{12г}$$

4. Обчислюється значення $y_2(b)$.
5. Знаходиться значення константи

$$\mu=\frac{B-y_1(b)}{y_2(b)}. \tag{12д}$$

6. Отже, крайові задачу (1), (2) зведено до задачі Коші (1), (3):

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x), \qquad y(a)=A,\ \ y'(a)=\mu. \tag{12 е}$$

Розв'язок можна знайти, розв'язавши задачу (12е) або подавши суперпозицією отриманих розв'язків $y(x)=y_1(x)+\mu y_2(x)$ (12є)

§2 Зведення крайової задачі третього порядку до задачі Коші методом суперпозиції

Розглянемо крайову задачу вигляду

$$y''' + p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = f(x), \tag{13}$$

$$y(0) = 0,\ \ y'(0) = 0,\ \ y(1) = 0. \tag{14}$$

Її розв'язок подамо сумою

$$y(x) = y_1(x) + \mu y_2(x). \tag{15}$$

Метод передбачає розв'язання двох задач Коші.

Задача Коші №1

$$y_1''' + p(x)y_1'' + q(x)y_1' + r(x)y_1 = f(x), \tag{16}$$

$$y_1(0) = 0,\ \ y_1'(0) = 0,\ \ y_1''(0) = 0. \tag{17}$$

Задача Коші №2

$$y_2''' + p(x)y_2'' + q(x)y_2' + r(x)y_2 = 0, \tag{18}$$

$$y_2(0) = 0,\ \ y_2'(0) = 0,\ \ y_2''(0) = 1. \tag{19}$$

Константу μ обчислюємо, знаючи значення функцій $y_1(x)$ і $y_2(x)$ в точці $x = 1$:

$$\mu = -\frac{y_1(1)}{y_2(1)}.$$

Із крайових умов (17), (19) і подання (15) отримаємо, що

$$y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = \mu . \qquad (20)$$

Отже, крайову задачу (13), (14) зведено до задачі Коші (13), (20).

Наближений розв’язок можна знайти, розв’язавши задачу Коші (13), (20), або суперпозицією отриманих функцій за формулою (15).

§3 Триточкова задача для диференціального рівняння третього порядку

Розглянемо крайову задачу вигляду

$$y''' + p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = f(x), \tag{21}$$

$$y'(0) = 0, \;\; y(b) = 0, \;\; y'(c) = 0. \tag{22}$$

Її розв'язок подамо сумою з двома константами

$$y(x) = y_0(x) + \mu y_1(x) + \lambda y_2(x). \tag{23}$$

У даному випадку потрібно розв'язання три задачі Коші.

Задача Коші №1

$$y_0''' + p(x)y_0'' + q(x)y_0' + r(x)y_0 = f(x), \tag{24}$$

$$y_0(0) = 0, \;\; y_0'(0) = 0, \;\; y_0''(0) = 0. \tag{25}$$

Задача Коші №2

$$y_1''' + p(x)y_1'' + q(x)y_1' + r(x)y_1 = 0, \tag{26}$$

$$y_1(0) = 1, \;\; y_1'(0) = 0, \;\; y_1''(0) = 0. \tag{27}$$

Задача Коші №3

$$y_2''' + p(x)y_2'' + q(x)y_2' + r(x)y_2 = 0, \tag{28}$$

$$y_2(0) = 0, \;\; y_2'(0) = 0, \;\; y_2''(0) = 1. \tag{29}$$

Константи μ і λ обч., знаючи зн. ф-ій в точках $x = b$ і $x = c$. Утворюємо систему

$$\begin{cases} y_0(b) + \mu y_1(b) + \lambda y_2(b) = 0, \\ y_0{}'(c) + \mu y_1{}'(c) + \lambda y_2{}'(c) = 0. \end{cases} \qquad (30)$$

Розвязуємо її за допомогою пакета комп'ютерної алгебри Maplt

```
> restart
> eq1 := y0(b) + μ·y1(b) + λ·y2(b) :
  eq2 := y01(c) + μ·y11(c) + λ·y21(c) :
> solve({eq1, eq2}, {μ, λ})
```

$$\left\{\lambda = \frac{y01(c)\ y1(b) - y11(c)\ y0(b)}{y11(c)\ y2(b) - y1(b)\ y21(c)}, \mu = -\frac{y01(c)\ y2(b) - y0(b)\ y21(c)}{y11(c)\ y2(b) - y1(b)\ y21(c)}\right\}$$

В результаті отримаємо

$$\lambda = \frac{y_0'(c)\ y_1(b) - y_1{}'(c) y_0(b)}{y_1'(c)\ y_2(b) - y_2{}'(c) y_1(b)}, \mu = -\frac{y_0'(c)\ y_2(b) - y_2{}'(c) y_0(b)}{y_1'(c)\ y_2(b) - y_2{}'(c) y_1(b)}. \qquad (31)$$

Із крайових умов (25), (27), (29) і подання (23) отримаємо, що

$$y(0) = \mu,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = \lambda. \qquad (32)$$

Отже, крайову задачу (21), (22) зведено до задачі Коші (21), (32).

Набл. розв'язок можна знайти, розв'язавши з. Коші (21), (32), або суперпозицією отриманих функцій за формулою (23).

2.3.2. Расчет трехслойной балки

Трехслойная балка состоит из параллельных слоев различных материалов. Для такой балки, равномерно нагруженной по всей длине, Крайчинович [5] установил, что деформация сдвига ψ описывается обыкновенным линейным дифференциальным уравнением

$$d^3\psi/dx^3 - k^2\, d\psi/dx + a = 0, \tag{3.16}$$

где k^2 и a — физические параметры, зависящие от упругих свойств слоев.

Обращение в нуль момента на свободных концах балки приводит к граничным условиям

$$d\psi(0)/dx = d\psi(1)/dx = 0, \tag{3.17}$$

а из условия симметрии следует, что

$$\psi(1/2) = 0. \tag{3.18}$$

Уравнение (3.16) и граничные условия (3.17), (3.18) определяют трехточечную граничную задачу.

Хотя формулировка этой задачи является простым применением принципа минимума потенциальной энергии, детали вывода слишком сложны и здесь опускаются. Мы применим для решения задачи метод суперпозиции.

Прежде всего представим решение в виде

$$\psi(x) = \psi_1(x) + \mu\psi_2(x) + \lambda\psi_3(x). \tag{3.19}$$

Тогда три задачи Коши (3.12)—(3.14) запишутся следующим образом:

$$\begin{gathered} d^3\psi_1/dx^3 - k^2\, d\psi_1/dx + a = 0, \\ d\psi_1(0)/dx = 0, \quad \psi_1(0) = 0, \quad d^2\psi_1(0)/dx^2 = 0; \end{gathered} \tag{3.20}$$

$$\begin{gathered} d^3\psi_2/dx^3 - k^2\, d\psi_2/dx = 0, \\ d\psi_2(0)/dx = 0, \quad \psi_2(0) = 1, \quad d^2\psi_2(0)/dx^2 = 0; \end{gathered} \tag{3.21}$$

$$\begin{gathered} d^3\psi_3/dx - k^2\, d\psi_3/dx = 0, \\ d\psi_3(0)/dx = 0, \quad \psi_3(0) = 0, \quad d^2\psi_3(0)/dx^2 = 1. \end{gathered} \tag{3.22}$$

Чтобы найти μ и λ, обратимся к уравнениям (3.15), которые теперь примут вид

$$\psi_1(1/2) + \mu\psi_2(1/2) + \lambda\psi_3(1/2) = 0, \tag{3.23а}$$

$$d\psi_1(1)/dx + \mu\, d\psi_2(1)/dx + \lambda\, d\psi_3(1)/dx = 0. \tag{3.23б}$$

Решая эту систему, получаем

$$\mu = \frac{(d\psi_3(1)/dx)\,\psi_1(1/2) - (d\psi_1(1)/dx)\,\psi_3(1/2)}{(d\psi_2(1)/dx)\,\psi_3(1/2) - (d\psi_3(1)/dx)\,\psi_2(1/2)}, \tag{3.24}$$

$$\lambda = \frac{(d\psi_1(1)/dx)\,\psi_2(1/2) - (d\psi_2(1)/dx)\,\psi_1(1/2)}{(d\psi_2(1)/dx)\,\psi_3(1/2) - (d\psi_3(1)/dx)\,\psi_2(1/2)}. \tag{3.25}$$

Решения, найденные этим методом для значений параметров $a=1$, $k=5$ и 10, приведены в табл. 2.1. Значения ψ, вычисленные по точной формуле

$$\psi(x)=(a/k^3)[\sin(k/2)-\operatorname{sh} kx]+(a/k^2)(x-1/2)+ \\ +(a/k^3)\operatorname{th}(k/2)[\operatorname{ch} kx-\operatorname{ch}(k/2)], \quad (3.26)$$

совпадают с соответствующими значениями, полученными методом суперпозиции.

Таблица 2.1

Пример решения задачи (3.16) — (3.18) при $a=1.00$

k	x	$\psi(x)$
5.0	0.0	—0.0121
	0.2	—0.0092
	0.4	—0.0033
	0.6	0.0033
	0.8	0.0092
	1.0	0.0121
10.0	0.0	—0.0040
	0.2	—0.0029
	0.4	—0.0010
	0.6	0.0010
	0.8	0.0029
	1.0	0.0040

§4 Метод стрільби для крайової задачі другого порядку

Розглянемо крайове задачу вигляду

$$y'' = f(x, y, y'). \tag{1}$$

$$y(a) = A, \;\; y(b) = B. \tag{2}$$

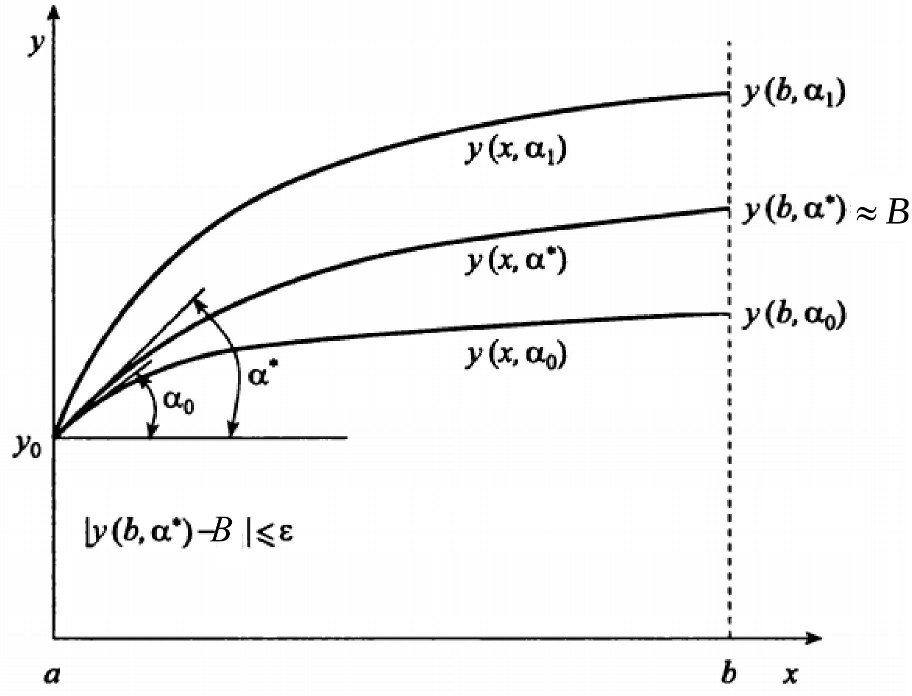
Мета: звести крайову задачу (1), (2) до задачі Коші з умовами

$$y(a) = A, \;\; y'(a) = \operatorname{tg} \alpha, \tag{3}$$

що передбачає пошук наближеного значення кута нахилу α^* кривої-розв’язку $y(x, \alpha^*)$ в точці $x = a$, або іншими словами, куту нахилу стріляючої «пушки»., таким, щоб в точці $x = b$ задовольнити нерівність

$$\left| y(b, \alpha^*) - B \right| \le \varepsilon \tag{4}$$

для наперед заданого ε



y
$y(b, \alpha_1)$
$y(x, \alpha_1)$
$y(b, \alpha^*) \approx B$
$y(x, \alpha^*)$
$y(b, \alpha_0)$
$y(x, \alpha_0)$
α^*
α_0
y_0
$|y(b, \alpha^*) - B| \leqslant \varepsilon$
a
b
x

Алгоритм розв’язання задачі методом стрільби (пристрілки)

1. Обираємо довільне значення кута α_0. Будь-яким методом розв’язуємо задачу Коші
$$y'' = f(x,y,y'),\ y(a) = A,\ y'(a) = \operatorname{tg}\alpha_0 . \tag{5}$$

2. Якщо $y(b,\alpha_0) > B$, то підбираємо такий кут α_1, щоб розв’язок задачі Коші
$$y'' = f(x,y,y'),\ y(a) = A,\ y'(a) = \operatorname{tg}\alpha_1 . \tag{6}$$
задовольняв умову $y(b,\alpha_1) < B$.

   Якщо $y(b,\alpha_0) < B$, то підбираємо такий кут α_1, щоб розв’язок задачі (6) задовольняв нерівність $y(b,\alpha_1) > B$.

   Одним із способів підбору кутів α_0 і α_1, що задовольняють умову
$$(y(b,\alpha_0) - B)(y(b,\alpha_1) - B) < 0, \tag{7}$$
може бути табуляція значень $y(b,\alpha) - B$ для різних кутів α із певного діапазону, після чого і вибираються потрібні кути α_0 і α_1.

3. Далі реалізуємо метод половинного ділення.

3.1. $\alpha_2 = \dfrac{\alpha_0 + \alpha_1}{2}$.

3.2. Розв'язуємо задачі Коші

$$y'' = f(x, y, y'),\ y(a) = A,\ y'(a) = \operatorname{tg} \alpha_i \quad (i = 0,1,2). \tag{7}$$

3.3. Якщо $(y(b, \alpha_0) - B)(y(b, \alpha_2) - B) < 0$, то $\alpha_1 := \alpha_2$.

Якщо $(y(b, \alpha_1) - B)(y(b, \alpha_2) - B) < 0$, то $\alpha_0 := \alpha_2$.

3.4. Якщо $|y(b, \alpha_2) - B| \le \varepsilon$, то $\alpha^* := \alpha_2$, і алгоритм завершує роботу. У супротивному випадку перехід до кроку 3.1.

Таким чином, крайову задачу (1), (2) зведено до задачі Коші

$$y'' = f(x, y, y'),\ y(a) = A,\ y'(a) = \operatorname{tg} \alpha^*. \tag{7}$$