Практичне заняття на тему: «Обчислення границь функцій». Частина 1.

У найпростіших випадках знаходження границі $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ зводиться до підстановки у функцію $f(x)$ граничного значення аргументу x_0.

Приклад 1. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 1}\left(5x^3+2x+3\right)$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 1}\left(5x^3+2x+3\right)=\lim_{x\to 1}\left(5x^3\right)+\lim_{x\to 1}\left(2x\right)+\lim_{x\to 1}3=5\lim_{x\to 1}x^3+2\lim_{x\to 1}x+3=$$
$$=5\cdot 1^3+2\cdot 1+3=10.$$

Приклад 2. Обчислити $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8}$.

Розв'язання. При $x\to 2$ границя знаменника $2^2-6\cdot 2+8=0$, тобто $x=2$ – корінь знаменника. Безпосередньою підстановкою можна впевнитися, що 2 є також коренем чисельника.

Для знаходження заданої границі розкладемо на множники чисельник та знаменник дробу. Отримаємо:

$$\frac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8}=\frac{(x+16)(x-2)}{(x-2)(x-4)}=\frac{x+16}{x-4}.$$

Скорочення дробу на $x-2$ тут є допустимим, оскільки $x\to 2$, але $x\neq 2$.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8}=\lim_{x\to 2}\frac{x+16}{x-4}=\frac{18}{-2}=-9.$$

При обчисленні даної границі ми зустрілися з випадком, коли підстановка x_0 у вираз під знаком границі приводить до виразу виду $\left(\frac{0}{0}\right)$, який для обчислення границі потрібно перетворити. При обчисленні границь, коли $x\to x_0$, підстановка замість змінної x числа x_0 досить часто приводить до виразів виду $\left(\frac{0}{0}\right)$, $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, $(0\cdot\infty)$, $(\infty-\infty)$, $\left(1^\infty\right)$, $(\infty)^0$, $\left(0^0\right)$. Такі вирази називають *невизначеностями,* а перетворення цих виразів, що дозволяють обчислити границю – *розкриттям невизначеностей.* Метод знаходження тієї чи іншої границі вибираємо у залежності від типу невизначеності у даному конкретному випадку.

Приклад 3. Обчислити $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+1}{4x^2+2x+5}$.

Розв'язання. При $x\to\infty$ чисельник та знаменник дробу є нескінченно великими, тобто маємо невизначеність $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Поділимо чисельник та знаменник на x у найбільшому степені, що присутній у запису дробу, тобто на x^2. Отримаємо:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+1}{4x^2+2x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{4+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}.$$

Враховуючи, що функція, обернена нескінченно великій, є нескінченно малою ($\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{5}{x^2}=0$), знаходимо, що шукана границя $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+1}{4x^2+2x+5}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

При обчисленні границь, що містять тригонометричні функції та зводяться до невизначеності виду $\left(\frac{0}{0}\right)$, часто використовують **<u>першу важливу границю</u>**:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \qquad (1)$$

Приклад 4. Обчислити границю $\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}$, $k\neq 0$.

Розв’язання. Помножимо чисельник та знаменник дробу під знаком границі на число $k\neq 0$. Отримаємо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{k\sin kx}{kx}=k\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{kx}.$$

Зробимо заміну змінної $t=kx$. При $x\to 0$ $t\to 0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}=k\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=k\cdot 1=k.$$

Отримано формулу:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}=k. \tag{2}$$

Приклад 5. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$;

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$. Запишемо останню границю у вигляді

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\right)^2=2\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\right)^2.$$

За формулою (2), границя $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}=\frac{1}{2}$, тому

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=2\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\right)^2=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

Приклад 6. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1-x}$.

Розв'язання. Підставивши у чисельник та знаменник дробу $\dfrac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1-x}$ значення $x=1$, отримаємо невизначеність виду $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. При цьому під знаком границі присутня тригонометрична функція, тому для обчислення заданої границі доцільно використати першу важливу границю (1). Для цього спочатку зробимо заміну змінної $1-x=t$. Тоді при $x\to 1$ $t\to 0$. Оскільки $x=1-t$, то

$$\cos\frac{\pi x}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi t}{2}\right)=\sin\frac{\pi t}{2}.$$

Підставивши у задану границю ці вирази, отримуємо:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1-x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin\frac{\pi t}{2}}{t}=\frac{\pi}{2}.$$

Можна довести рівність:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{t\to 0}\left(1+t\right)^{\frac{1}{t}}=e. \qquad (3)$$

Формулу (3) називають **<u>другою важливою границею</u>**.

Другу важливу границю використовують, коли при обчисленні границі мають справу з невизначеністю виду $\left(1^{\infty}\right)$. При обчисленні границь, пов'язаних з другою важливою границею, часто застосовують наступне твердження: якщо існують границі $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)$та $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi\left(x\right)$, причому $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)>0$, то існує також границя $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)^{\varphi(x)}$, яка обчислюється за формулою:

$$\lim_{x\to x_0} f\left(x\right)^{\varphi(x)}=\left(\lim_{x\to x_0} f\left(x\right)\right)^{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)}. \tag{4}$$

Приклад 7. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^{x}$.

Розв'язання. Оскільки при $x\to\infty$ $\dfrac{k}{x}\to 0$, то $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^{x}=\left(1^{\infty}\right)$, тому для обчислення заданої границі використаємо другу важливу границю (3). Маємо:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{\frac{x}{k}\cdot k}=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{\frac{x}{k}}\right)^{k}=e^{k}.$$

Приклад 8. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+3}\right)^{1-5x}$.

Розв’язання. Маємо невизначеність виду $\left(1^{\infty}\right)$, оскільки $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-1}{2x+3}=1$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-5x\right)=\infty$. Тип невизначеності обумовлює використання для розв’язання задачі другої важливої границі. Представимо дріб $\dfrac{2x-1}{2x+3}$ у вигляді суми одиниці та нескінченно малої функції:

$$\frac{2x-1}{2x+3}=1+\left(\frac{2x-1}{2x+3}-1\right)=1+\left(-\frac{4}{2x+3}\right).$$

Отже,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{1-5x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\left(-\frac{4}{2x+3}\right)\right)^{1-5x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\left(-\frac{4}{2x+3}\right)\right)^{\left(-\frac{2x+3}{4}\right)\left(-\frac{4}{2x+3}\right)(1-5x)}.$$

Використовуючи формулу (4), запишемо останню границю у вигляді:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\left(-\frac{4}{2x+3}\right)\right)^{\left(-\frac{2x+3}{4}\right)\left(-\frac{4}{2x+3}\right)(1-5x)}=$$

$$=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\left(-\frac{4}{2x+3}\right)\right)^{\left(-\frac{2x+3}{4}\right)}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{4(1-5x)}{2x+3}\right)}.$$

Маємо:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\left(-\frac{4}{2x+3}\right)\right)^{\left(-\frac{2x+3}{4}\right)}=\lim_{t\to 0}\left(1+t\right)^{\frac{1}{t}}=e,$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-4\left(1-5x\right)}{2x+3}=\frac{20}{2}=10,$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{1-5x}=e^{10}.$$

Приклад 9. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x\right)}{x}$.

Розв'язання. Запишемо вираз під знаком границі у вигляді $\frac{\ln\left(1+x\right)}{x}=\ln\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}$. За основною логарифмічною тотожністю, $\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\ln\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}}$.

Використовуючи формулу (4), маємо:

$$\lim_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}=e=\lim_{x\to 0}e^{\ln\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}}=e^{1}.$$

Отримали важливу формулу:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x\right)}{x}=1. \tag{5}$$

У формулі (5) виконаємо заміну $\ln(1+x)=t$. При $x\to 0$ $t\to 0$. Тоді $x=e^t-1$. Вираз (5) набуває вигляду:

$$\lim_{t\to 0}\frac{t}{e^t-1}=1=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{e^t-1}{t}}=\frac{1}{\lim\limits_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}}.$$

Звідси знаходимо формулу, що часто використовується при обчисленні границь від виразів, що містять показникові функції:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1. \tag{6}$$

Використовуючи (5), можна отримати формулу:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}. \tag{7}$$

Застосування границі (6) дозволяє обчислити границю $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln a}-1}{x}=\ln a\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln a}-1}{x\ln a}.$$

У останній границі виконаємо заміну $x\ln a=t$. Якщо $x\to 0$, то $t\to 0$. Отримуємо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a\cdot\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=\ln a\cdot 1=\ln a.$$

Таким чином, маємо формулу:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a. \qquad (8)$$

Таблиця основних формул, пов’язаних з обчисленням границь

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \qquad (1)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}=k. \qquad (2)$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{t\to 0}\left(1+t\right)^{\frac{1}{t}}=e. \qquad (3)$$

$$\lim_{x\to x_0} f\left(x\right)^{\varphi(x)}=\left(\lim_{x\to x_0} f\left(x\right)\right)^{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)}. \qquad (4)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x\right)}{x}=1. \qquad (5)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1. \qquad (6)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a\left(1+x\right)}{x}=\frac{1}{\ln a}. \qquad (7)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a. \qquad (8)$$

Розглянемо приклади розкриття невизначеностей у випадках, що найчастіше зустрічаються на практиці.

1. Невизначеність виду $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ задана відношенням двох многочленів або ірраціональних виразів.

Приклад 10. Знайти границю $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+7x-3}{5x^4+2}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність виду $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, задану відношенням многочленів. Старший степінь цих многочленів – четвертий, тому поділимо чисельник та знаменник дробу під знаком границі на x^4. Отримуємо:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+7x-3}{5x^4+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{7}{x^3}-\dfrac{3}{x^4}}{5+\dfrac{2}{x^4}}.$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{7}{x^3}-\dfrac{3}{x^4}}{5+\dfrac{2}{x^4}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{7}{x^3}-\dfrac{3}{x^4}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(5+\dfrac{2}{x^4}\right)}=\frac{0}{5}=0.$$

При знаходженні аналогічних границь доцільно використовувати наступне правило. Якщо степінь чисельника дробу є меншою, ніж степінь знаменника, то границя дорівнює нулю; якщо степінь чисельника дорівнює степені знаменника, то границя дорівнює відношенню коефіцієнтів при старших степенях чисельника та знаменника; якщо степінь чисельника більший за степінь знаменника, то границя дробу дорівнює нескінченності.

Приклад 11. Знайти границю $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[5]{x}+1}{\sqrt[3]{8x^2+5}-\sqrt{2x-1}}$.

Розв'язання. У цьому прикладі вираз під знаком границі є відношенням ірраціональних функцій, утворюючи при $x\to\infty$ невизначеність виду $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Старший степінь чисельника дорівнює $\frac{2}{3}$ (доданок $\sqrt[3]{x^2}$), старший степінь знаменника також дорівнює $\frac{2}{3}$ ($\sqrt[3]{8x^2+5}$), тому поділимо чисельник та знаменник дробу на $x^{2/3}$. Отримаємо:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[5]{x}+1}{\sqrt[3]{8x^2+5}-\sqrt{2x-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^{1/2}}{x^{2/3}}+\frac{x^{2/3}}{x^{2/3}}-\frac{2x^{1/5}}{x^{2/3}}}{\left(\frac{8x^2+5}{x^2}\right)^{1/3}-\left(\frac{(2x-1)^3}{x^4}\right)^{1/6}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt[3]{8}}=\frac{1}{2}.$$

2. Невизначеність виду $\left(\frac{0}{0}\right)$ при $x\to x_0$ задана відношенням двох многочленів. У цьому випадку потрібно розкласти чисельник і знаменник на множники . Оскільки при $x=x_0$ чисельник та знаменник дробу дорівнюють нулю, то у їхньому розкладу на множники присутній множник $(x-x_0)^k$, $k\in\mathbb{N}$. Скорочення на степінь $(x-x_0)$ можливе, оскільки $x\to x_0$, але $x\neq x_0$. Після такого скорочення невизначеність усувається.

Приклад 12. Знайти $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2+3x-4}$.

Розв'язання. Розкладемо на множники чисельник та знаменник дробу під знаком границі. Маємо:

$$\begin{aligned}&x^3+2x^2-x-2=x^2(x+2)-(x+2)=(x+2)(x^2-1)=\\&=(x+2)(x-1)(x+1)\end{aligned}.$$

Коренями квадратного тричлена x^2+3x-4 є $x_1=-4$, $x_2=1$, тому його розклад на множники має вигляд:

$$x^2+3x-4=(x+4)(x-1).$$

Підставивши знайдені розклади на множники у задану границю, отримуємо:

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2+3x-4}=\lim_{x\to1}\frac{(x+2)(x-1)(x+1)}{(x+4)(x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x+2)(x+1)}{x+4}=\frac{3\cdot2}{5}=\frac{6}{5}.$$

3. Невизначеність виду $\left(\frac{0}{0}\right)$ при $x\to x_0$ задана відношенням ірраціональних виразів. Для розкриття таких невизначеностей звичайно позбавляються від ірраціональності у чисельнику або знаменнику.

Приклад 13. Обчислити $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x+1}{\sqrt{x+10}-3}$.

Розв'язання. Позбудемося ірраціональності у знаменнику. Маємо:

$$\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{\sqrt{x+10}-3}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)\left(\sqrt{x+10}+3\right)}{\left(\sqrt{x+10}-3\right)\left(\sqrt{x+10}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)\left(\sqrt{x+10}+3\right)}{\left(\sqrt{x+10}\right)^2-3^2}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)\left(\sqrt{x+10}+3\right)}{x+1}=$$

$$=\lim_{x\to-1}\left(\sqrt{x+10}+3\right)=3+3=6.$$

Від ірраціональності можна позбавитися також шляхом введення нової змінної.

Приклад 14. Обчислити $\lim\limits_{x\to-1}\frac{1+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[5]{x}}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність виду $\left(\frac{0}{0}\right)$. Щоб позбутися ірраціональності, виконаємо заміну змінної $x=t^{15}$. При $x\to -1$ $t\to -1$, $\sqrt[3]{x}=t^5$, $\sqrt[5]{x}=t^3$. Отримаємо:

$$\lim_{x\to -1}\frac{1+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[5]{x}}=\lim_{t\to -1}\frac{1+t^5}{1+t^3}.$$

$t=-1$ –корінь чисельника та знаменника дробу, їх можна поділити націло на $t+1$. Маємо:

$$t^5+1=(t+1)\left(t^4-t^3+t^2-t+1\right),$$
$$t^3+1=(t+1)(t^2-t+1).$$

Підставивши ці вирази у останню границю, отримуємо:

$$\lim_{x\to -1}\frac{1+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[5]{x}}=\lim_{t\to -1}\frac{1+t^5}{1+t^3}=\lim_{t\to -1}\frac{(t+1)\left(t^4-t^3+t^2-t+1\right)}{(t+1)\left(t^2-t+1\right)}=$$
$$=\lim_{t\to -1}\frac{t^4-t^3+t^2-t+1}{t^2-t+1}=\frac{5}{3}.$$

4. Невизначеність виду $\infty-\infty$ задана різницею раціональних дробів або ірраціональних виразів.

Приклад 15. Обчислити $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{3x^2-4}-\frac{x^2}{3x+2}\right)$.

Розв'язання. Маємо невизначеність виду $\infty-\infty$, утворену різницею раціональних дробів. Виконаємо віднімання:

$$\frac{x^3}{3x^2-4}-\frac{x^2}{3x+2}=\frac{x^3(3x+2)-x^2\left(3x^2-4\right)}{\left(3x^2-4\right)(3x+2)}=$$
$$=\frac{3x^4+2x^3-3x^4+4x^2}{9x^3-12x+6x^2-8}.$$

Підставивши знайдену різницю дробів у границю,отримаємо:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{3x^2-4}-\frac{x^2}{3x+2}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4+2x^3-3x^4+4x^2}{9x^3-12x+6x^2-8}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+4x^2}{9x^3+6x^2-12x-8}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{4}{x}}{9+\frac{6}{x}-\frac{12}{x^2}-\frac{8}{x^3}}=\frac{2}{9}.$$

Приклад 16. Обчислити $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+1}-3x\right)$.

Розв'язання. Маємо невизначеність $(\infty-\infty)$, утворену різницею виразів, що містять ірраціональність. Розкриємо дану невизначеність:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+1}-3x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{9x^2+1}-3x\right)\cdot\left(\sqrt{9x^2+1}+3x\right)}{\sqrt{9x^2+1}+3x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{9x^2+1-9x^2}{\sqrt{9x^2+1}+3x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{9x^2+1}+3x}=\left(\frac{1}{\infty}\right)=0.$$

5. Невизначеності виду $\left(\frac{0}{0}\right)$, задані виразами, що містять тригонометричні функції, часто розкриваються за допомогою першої важливої границі (1).

Приклад 17. Знайти границю $\lim\limits_{t\to0}\frac{\operatorname{tg} t}{t}$.

Розв'язання. Використовуючи співвідношення $\operatorname{tg} t=\frac{\sin t}{\cos t}$, запишемо границю у вигляді:

$$\lim_{t\to0}\frac{\operatorname{tg} t}{t}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t\cos t}=$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}\cdot\lim_{t\to0}\frac{1}{\cos t}=1\cdot1=1.$$

Приклад 18. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$.

Розв'язання. Виконаємо перетворення виразу у чисельнику дробу:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\left(\dfrac{1}{\cos x}-1\right)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cdot\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^3\cos x}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{x}=$$

$$=2\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

При обчисленні цієї границі було використано формулу (2):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}=k\text{ при } k=\frac{1}{2}.$$

Приклад 19. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\operatorname{tg} 2x\cdot\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\right)$.

Розв'язання. У даному прикладі при підстановці замість x значення $\pi/4$ отримуємо невизначеність $(\infty\cdot 0)$. Перетворимо її до вигляду $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Для цього задану границю запишемо у вигляді:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\operatorname{tg} 2x\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)}{\operatorname{ctg} 2x}.$$

Виконаємо заміну змінної $x-\dfrac{\pi}{4}=t$. Тоді при $x\to\dfrac{\pi}{4}$ $t\to 0$, тригонометричні вирази у границі набувають вигляду:

$$\operatorname{ctg} 2x = \operatorname{ctg} 2\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{ctg}\left(2t + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{tg} 2t,$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \operatorname{tg}(-t) = -\operatorname{tg} t.$$

Підставимо ці вирази у границю:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \left(\operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right) = \lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{tg} t}{\operatorname{tg} 2t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\frac{\sin t}{\cos t}}{\frac{\sin 2t}{\cos 2t}} = \lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{\sin 2t} \cdot \lim_{t \to 0} \frac{\cos 2t}{\cos t} = \frac{\lim\limits_{t \to 0} \frac{\sin t}{t}}{\lim\limits_{t \to 0} \frac{\sin 2t}{t}} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

Приклад 20. Обчислити $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x}$.

Розв'язання. Виконаємо заміну змінної $\arcsin x = t$, $x = \sin t$. При $x \to 0$ $t \to 0$. Задана границя набуває вигляду:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{t \to 0} \frac{t}{\sin t} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{\frac{\sin t}{t}} = \frac{1}{\lim\limits_{t \to 0} \frac{\sin t}{t}} = \frac{1}{1} = 1.$$

7. При розкритті невизначеності виду $\left(1^{\infty}\right)$ використовують другу важливу границю (3).

Приклад 21. Обчислити $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{4x-5}$.

Розв'язання. Оскільки $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x+3}{2x+1} = 1$, $\lim\limits_{x \to \infty} (4x - 5) = \infty$, то обчислення даної границі зводиться до знаходження невизначеності $\left(1^{\infty}\right)$. Застосуємо другу важливу границю

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$. Для цього представимо дріб $\dfrac{2x+3}{2x+1}$ у вигляді суми одиниці та нескінченно малої величини:

$$\frac{2x+3}{2x+2}=1+\left(\frac{2x+3}{2x+1}-1\right)=1+\frac{2x+3-2x-1}{2x+1}=$$
$$=1+\frac{2}{2x+1}.$$

Отримуємо:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+2}\right)^{4x-5}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{4x-5}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{2}\cdot\frac{2(4x-5)}{2x+1}}.$$

Тут у показнику степеня ми виділили величину $\dfrac{2x+1}{2}$, обернену нескінченно малій, що додається до одиниці у основі степеня.

Застосовуючи формулу (4), знаходимо:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{4x-5}=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{2}}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2(4x-5)}{2x+1}}=e^{\frac{8}{2}}=e^4.$$

Приклад 22. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

Розв'язання. Підставивши у вираз під знаком границі $x=0$, отримуємо невизначеність $\left(1^\infty\right)$, тому для розв'язання прикладу використаємо другу важливу границю. Для цього представимо вираз у основі степеня у вигляді суми одиниці та нескінченно малої і виділимо у показнику степеня величину, обернену цій нескінченно малій:

$$\lim_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\left(1+\left(\cos x-1\right)\right)^{\frac{1}{\cos x-1}\cdot\frac{\cos x-1}{x^2}}.$$

Використовуючи формулу (4), отримуємо:

$$\lim_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\left(\left(1+\left(\cos x-1\right)\right)^{\frac{1}{\cos x-1}}\right)^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}} =$$

$$= e^{-2\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{x}}{x}\right)^2} = e^{-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

8. При розкритті невизначеності $\left(\frac{0}{0}\right)$ у випадках, коли під знаком границі знаходяться логарифмічні або показникові функції, доцільно використовувати формули (5) – (8).

Приклад 23. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{x}$.

Розв'язання. Підстановка у вираз під знаком границі значення $x=0$ приводить до невизначеності $\frac{0}{0}$. Оскільки під знаком границі знаходиться показникова функція, то для обчислення границі можна використати формулу (6). Зробимо заміну $ax=t$, $x=\frac{t}{a}$. При $x\to 0$ $t\to 0$. Отримуємо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{e^{t}-1}{t/a} = a\cdot\lim_{t\to 0}\frac{e^{t}-1}{t} = a\cdot 1 = a.$$

Приклад 24. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{kx}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність $\left(\frac{0}{0}\right)$ і під знаком границі знаходяться показникові функції. Отримуємо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{kx}=\frac{1}{k}\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{\alpha x}-1\right)-\left(e^{\beta x}-1\right)}{x}=$$
$$=\frac{1}{k}\left[\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-1}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{e^{\beta x}-1}{x}\right]=\frac{1}{k}(\alpha-\beta).$$

Тут ми використали результат, отриманий у попередньому прикладі – $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-1}{x}=a$.

Приклад 25. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+kx)}{x}$.

Розв'язання. Підстановка у вираз під знаком границі значення $x=0$ визначає невизначеність $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Оскільки у виразі під знаком границі знаходиться логарифмічна функція, для розв'язання прикладу доцільно використати формулу (5). Виконавши заміну $kx=t$, $x={}^{t}\!/_{k}$, отримаємо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+kx)}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{{}^{t}\!/_{k}}=k\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=k\cdot 1=k.$$

Приклад 26. Обчислити $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}$**.**

Розв'язання. Після підстановки у вираз під знаком границі значення $x=e$ маємо невизначеність виду $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Зробивши заміну $x-e=t$, $x=t+e$, отримуємо (при $x\to e$ $t\to 0$):

$$\lim_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(t+e)-\ln e}{t}=$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{\ln\left(\dfrac{t+e}{e}\right)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln\left(1+\dfrac{t}{e}\right)}{t}=\frac{1}{e}.$$

Тут ми використали результат попереднього прикладу:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln\left(1+kx\right)}{x} = k \text{, де } \quad k = \frac{1}{e}.$$