Лабораторна робота № 3

Оцінка похибок вимірювань динамічного тиску та швидкості руху газоповітряної суміші

Мета роботи: засвоїти методику оцінки похибок прямих та непрямих вимірювань.

Після виконання роботи студенти повинні:
- знати види похибок, закони розподілу випадкових похибок, похибки ряду прямих та опосередкованих вимірювань, форми представлення результатів вимірювань;
- вміти застосовувати отримані знання при обробці ряду прямих та опосередкованих вимірювань, представляти результати вимірювань згідно до ДСТУ 2681-94.

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Похибки вимірювань класифікують за трьома основними класифікаційними ознаками - за способом вираження, за характером зміни, за місцем виникнення. Класифікація похибок вимірювань наведена на рис.1.

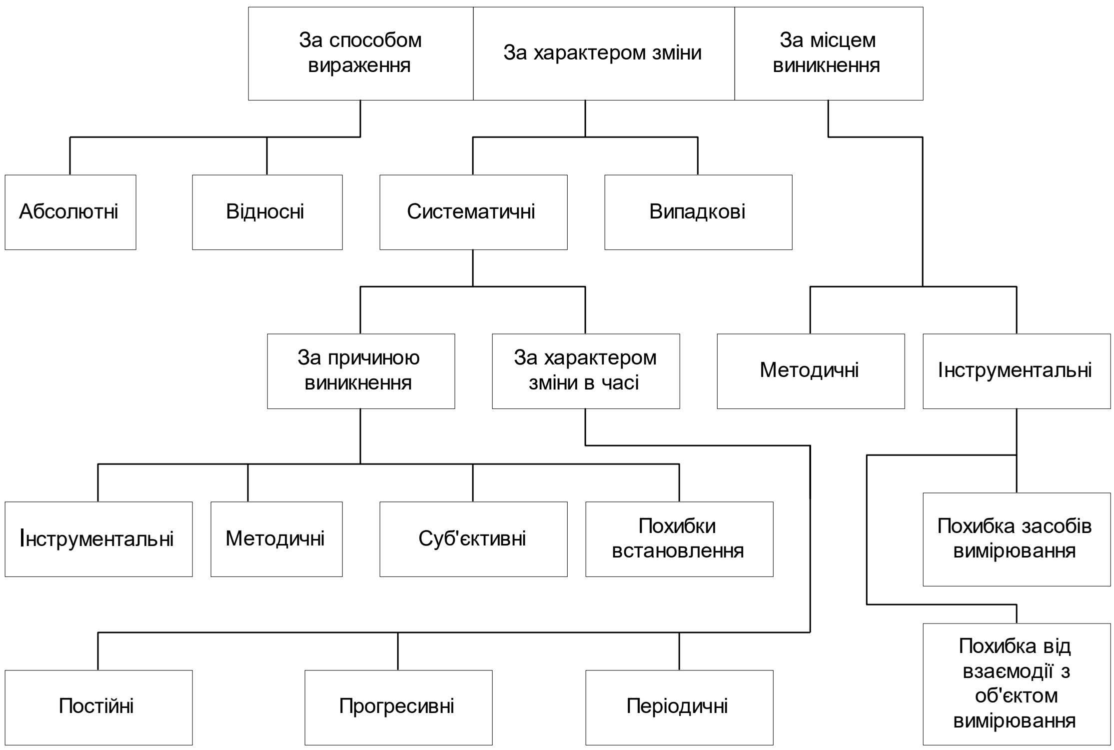

Рис. 1. Класифікація похибок вимірювання.

За способом вираження похибки поділяються на абсолютні та відносні. Класична метрологія виходить з позиції, що результат вимірювання завжди відрізняється від істинного значення вимірюваної величини. Тому під час вимірювань фізичної величини (ФВ) виникає похибка, яка дорівнює різниці між виміряним значенням X фізичної величини та її істинним X_I значенням

$$\Delta X = X - X_I . \tag{1}$$

Істинне значення. *Значення фізичної величини, яке ідеально відображало б певну властивість об'єкта.*

Визначити істинне значення величини вимірюванням неможливо через обмежені можливості засобів вимірювань. Однак існують величини істинне значення яких відоме за значенням, наприклад, один повний оберт дорівнює 2π радіанів, або 360^0. Раніш відмічена неможливість визначення істинного значення є наслідком принципової недосконалості відображення при вимірюванні та причиною неминучості похибки вимірювання. Оскільки істинне значення ФВ нам за умовою невідоме, то похибку вимірювання з останнього рівняння визначити неможливо. Для визначення похибки істинне значення ФВ замінюють дійсним - $X_Д$.

Абсолютна похибка вимірювання. *Різниця між результатом вимірювання і дійсним значенням вимірюванної величини*

$$\Delta X = X - X_Д . \tag{2}$$

Абсолютною дану похибку назвали тому, що вона виражена в абсолютних одиницях вимірюваної величини.

Дійсне значення. *Значення фізичної величини, знайдене експериментальним шляхом і настільки наближене до істинного значення, що його можливо використати замість істинного для даної мети.*

На практиці дійсне значення ФВ може бути знайдено за допомогою багаторазових вимірювань з наступним усередненням результатів спостережень і представленням цього середнього в якості дійсного або за допомогою зразкового засобу вимірювання. Якщо абсолютну похибку взяти з протилежним знаком і алгебрично додати до результату вимірювання, то можна ввести поправку в результати вимірювання.

$$\Delta q = -\Delta X . \tag{3}$$

Поправка - *значення величини, що алгебрично додається до результату вимірювання з метою вилучення систематичної похибки.*

У багатьох випадках числове значення абсолютної похибки не дає правильного уявлення про точність вимірювання, ступінь достовірності одержаного результату. Тому введено більш універсальну характеристику точності у вигляді **відносної похибки.**

Відносна похибка вимірювання. *Відношення абсолютної похибки вимірювання до дійсного значення вимірюваної величини*

$$\delta = \frac{\Delta X}{X_Д} = \frac{X - X_Д}{X_Д} . \tag{4}$$

Відносна похибка може виражатися не тільки у відносних величинах, але і в відсотках

$$\delta = \frac{\Delta X}{X_Д} \cdot 100\% = \frac{X - X_Д}{X_Д} \cdot 100\% . \qquad (5)$$

Аналіз останніх двох рівнянь дозволяє дійти висновку, що чим менша похибка вимірювання, тим вища його точність, отже, тим менша різниця між істинним значенням ФВ і результатом її вимірювань. Із збільшенням похибки зменшується точність.

Точність вимірювання. *Головна характеристика якості вимірювання, що відображає близкість результату вимірювання до істинного значення вимірюванної величини.*

Кількісно точність Θ вимірювання визначається як величина, обернена до відносної похибки

$$\Theta = \frac{1}{\delta} = \frac{X_Д}{X - X_Д} . \qquad (6)$$

Крім точності вимірювань на практиці застосовують також такі характеристики якості вимірювань: правильність, збіжність та відтворюваність вимірювань.

Правильність вимірювань. *Характеристика якості вимірювання, що відображає близкість до нулю систематичної похибки вимірювання.*

Збіжність результатів вимірювання. *Характеристика якості вимірювань, що відображає близкість повторних результатів вимірювань однієї й тієї ж величини в однакових умовах.*

Збіжність результатів вимірювань відображає близкість до нуля випадкової похибки. Збіжність може бути оцінена кількісно дисперсією результатів вимірювань.

Відтворюваність вимірювань. *Характеристика якості вимірювань, що відображає близкість результатів вимірювань однієї й тієї ж величини, виконаних в різний час, в різних умовах, різними методами і засобами.*

Розрізнюють надмірну похибку і промах.

Надмірна похибка. *Похибка вимірювання, що суттєво перебільшує очікувану (в даних умовах) похибку.*

Промах. *Результат вимірювання, що має надмірну похибку.*

В методиках оцінки результатів вимірювання промахи вилучають із ряду багаторазових спостережень, як аномальні результати вимірювання.

За характером зміни похибки вимірювання поділяють на систематичні і випадкові.

Систематична похибка. *Складова похибки $\overline{\Delta}$, що залишається сталою або прогнозовано змінюється у ряді вимірювань тієї ж величини.*

Випадкова похибка. *Складова похибки $\overset{o}{\Delta}$, що непрогнозовано змінюється у ряді вимірювань тієї ж величини.*

У загальному випадку похибка результату вирювання містить систематичну і випадкову складові, навіть якщо було введено поправки на систематичні похибки, викликані відомими факторами впливу. Пояснюється це, по-перше, тим, що значення факторів не залишаються в процесі вимірювання постійними, а по-друге, тим, що на результат вимірювання впливають фактори, дія яких у даному експерименті не передбачалася, або ж фактори, дію яких неможливо врахувати. Оскільки у похибку вимірювання входить випадкова складова, то її слід вважати величиною випадковою. Значення повної похибки вимірювання для будь-якого моменту часу визначається

$$\Delta = \overline{\Delta} + \overset{o}{\Delta}. \tag{7}$$

Використовуючи апарат підсумовування частинних /часткових/ похибок випадкового характеру і часткових /частинних/ похибок систематичного характеру, можна оцінити похибку вимірювання.

Примітка: У 1980 році з'явилася рекомендація робочої групи вчених Міжнародного комітету мір і ваг у Парижі, що пропонує розділити похибку результату вимірювань на дві групи - А и В. Складові групи А оцінюються статистичними методоми, а складові групи В - іншими методами. Поняття "систематична похибка" признається неточним, тому що може вводити в оману. Вказується, що розходження між групами А и В має скоріше практичне значення, ніж фундаментальне. Рекомендується внесок у загальну похибку похибок обох категорій розглядати як випадковий, що визначає порядок сумування цих складових загальної похибки.

Систематичні похибки в свою чергу поділяються **за причиною виникнення** та **за характером зміни у часі**. За причиною виникнення систематичні похибки поділяються на інструментальні, методичні, суб'єктивні, похибки встановлення.

Похибки встановлення. *До них належать такі, прояви яких зумовлені неправильним застосуванням міри: встановлення приладу з нахилом або відхилення зовнішніх умов від нормальних (наявність зовнішніх полів, відхилення температури від нормальної тощо).*

Суб'єтивні похибки *проявляються в результаті особливостей самого спостерігача. Наприклад, при підрахунку поділок шкали різні люди порізному оцінюють одне і те саме положення стрілки. Один схильний завжди занижувати покази, інший - завищувати їх.*

Методичні похибки *виникають через недоліки самого методу вимірювання або через неточність застосованих спрощених формул. Скажімо, при непрямому вимірюванні площі перерізу круглого стержня прямим вимірюванням діаметра з наступим обчисленням площі* $S = \pi d^2/4$ *результат буде із систематичною методичною похибкою через обмежене число знаків і значення числа* π.

Інструментальні похибки *властиві усім вимірювальним приладам і мірам. Ці похибки виникають у результаті допущених при виготовленні і градуюванні ЗВ порушень технології при нанесенні міток на шкали стрілочних приладів, за рахунок різних відхилень при підгонці дійсних значень ФВ до номінального. Наприклад, додаткових резисторів, при визначенні коефіцієнта трансформації, площі поршня у манометрів. При використанні таких засобів вимірювальної техніки усі виміри будуть супроводжуватися постійною похибкою.*

За характером зміни у часі систематичні похибки поділяються на постійні, прогресивні, періодичні.

Постійні похибки. *До них належать такі, які тривалий час залишаються незмінними і на протязі вимірювального експеримету є постійними.*

Прогресивні похибки. *Це такі похибки, які в процесі даної серії вимірювань неперервно зростають або зменшуються, тобто є функцією часу.*

Періодичні похибки. *До їх числа належать систематичні похибки, значення яких є періодичною функцією або часу, або самої вимірюваної величини.*

За місцем виникнення похибки вимірювання розподіляються на **інструментальні** і **методичні.**

Інструментальна похибка. *Складова похибки вимірювання, зумовлена властивостями засобів вимірювальної техніки.*
Методична похибка. *Складова похибки вимірювання, що зумовлена неадекватністю об'єкта вимірювання та його моделі, прийнятою при вимірюванні.*

Інструментальна похибка складається з **похибки засобів вимірювання** та **похибки від їх взаємодії з об'єктом вимірювання**.

Похибка від взаємодії. *Складова інструментальної похибки, що виникає внаслідок впливу засобів вимірювальної техніки на стан об'єкту вимірювання.*
Похибка засобів вимірювальної техніки. *Складова інструментальної похибки, що виникає внаслідок наявності похибки певного засобу вимірювання.*

Похибки засобів вимірювальної техніки в свою чергу поділяються на абсолютні, відносні та зведені, систематичні та випадкові, адитивні, мультиплікативні і нелінійні, основні і додаткові, статичні і динамічні.

Абсолютною похибкою засобу вимірювань *називають різницю між показом засобу вимірювань та істинним значенням вимірюванної величини за відсутності методичних похибок і похибок від взаємодії засобу вимірювань з об'єктом вимірювання*

Відносною похибкою засобу вимірювань *називають відношення абсолютної похибки засобу вимірювань до істинного значення вимірюванної величини*

Зведеною похибкою засобу вимірювань *називають відношення абсолютної похибки засобу вимірювань до нормованого значення*

Основна похибка - *похибка засобу вимірювальної техніки за нормальних умов його використання.*

Додаткова похибка - *похибка засобу вимірювальної техніки, яка додатково виникає під час використання засобу вимірювань в умовах відхилення хоча б однієї з впливних величин від нормального значення або її виходу за границі нормальної зони значень.*

Адитивна - *складова абсолютної похибки засобу вимірювальної техніки, яка не залежить від вимірюваної величини.*

Мультиплікативна *- складова похибки засобу вимірювальної техніки, яка пропорційна вимірюваній величині.*
Нелінійна *- складова похибки засобу вимірювальної техніки, яка нелінійно залежить від вимірюваної величини.*

Систематична похибка засобу вимірювання *– складова похибки засобу вимірювання, яка є постійною постійною під час проведення вимірювань або змінюється за певним законом.*
Випадкова похибка засобу вимірювання *– складова похибки засобу вимірювання, яка під час проведення вимірювань змінюється випадково.*

Динамічна похибка *- складова похибки, що виникає додатково до статичної під час динамічних вимірювань.*
Статична похибка *– похибка засобу вимірювання, що виникає при проведенні статичних вимірювань.*

Імовірність появлення випадкових похибок. При проведенні вимірювань разом з детермінованими процесами виникають стохастичні процеси, для яких неможна передбачити ступінь їхньої дії і характер ФВ, що впливає на результат виміру. При оцінці значення ФВ, що вимірюється, говорять не про одне її фіксоване значення, а про область, у якій можуть знаходитися значення вимірюваної ФВ. Отже, при повторних вимірах через зміну характеру і інтенсивності впливаючих ФВ, щораз буде з'являтися новий результат вимірювання.

Тому результати вимірювань слід розглядати як випадкові величини, які підкоряються визначеним закономірностям, що з'ясовуються при обробці ряду результатів багатократних вимірювань. Одержані результати відносяться до випадкових величин і характер їх поведінки описується теорією імовірностей і математичної статистики.

Проведемо ряд вимірювань ФВ X. Під дією випадкових похибок одержимо n декілька відмінних один від одного результатів, що займуть деякий діапазон значень. Розіб'ємо весь інтервал значень на декілька піддіапазонів, що мають досить малі кроки квантування. Можна згрупувати результати вимірів у ці піддіапазони, кожний із який буде характеризуватися кількістю результатів вимірювань, що попали до нього. На основі отриманих результатів побудуємо гістограмму розподілу результатів вимірів у вигляді, зображеному на рис. 2. Висота прямокутників визначається частотою p появи результатів у кожному піддіапазоні. При зменшенні ширини інтервалів до нуля гістограмма перейде в плавну криву, яка називається кривою щільності розподілу імовірностей (рис. 3).

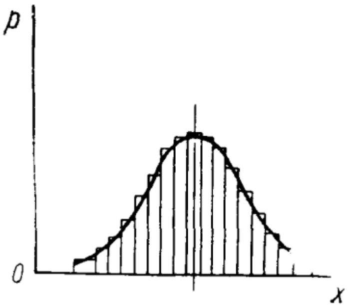

Рис. 2.

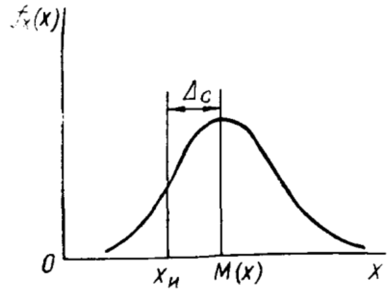

Рис. 3.

Центр розподілу результатів вимірювання називається математичним сподіванням $M(X)$ величини X і наближається, якщо немає систематичної похибки $\overline{\Delta}$, до істинного значення вимірюваної фізичної величини X_I.

Якщо змінити умови вимірів і застосувати інші ЗВ, то форма гістограми і кривої щільності розподілу змінюється. У випадку застосування більш точного ЗВ крива підніметься в центрі і буде крутіше спадати при видаленні від нього і, навпаки, вона зменшиться в центрі, збільшиться розмах коливань результатів вимірів, коли буде використано менше точний ЗВ.

Припустимо, що виконано ряд із *n* рівноточних вимірювань величини: *X*. Вважаючи (рис. 4), що число вимірів, укладених в інтервалі від *X* до *X* + *dx,* пропорційно числу вимірів n, знайдемо число результатів *dn,* які увійшли в інтервал *dx:*

$$dn = nf_x(x)dx. \qquad (8)$$

У (8) невідомої є $f_x(x)$ - висота заштрихованого стовпчика, що називають *щільністю розподілу імовірностей випадкової величини X*, тобто *щільністю розподілу результатів вимірювань.*

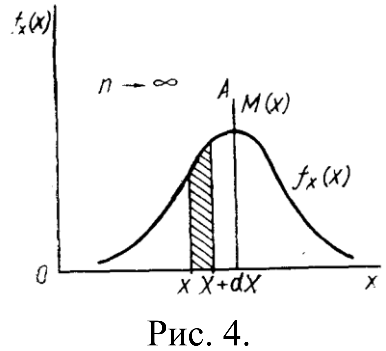

Рис. 4.

Перетворимо (8) до вигляду

$$\frac{dn}{n} = f_x(x)dx. \qquad (9)$$

Новий вираз (9) показує імовірність появи результатів вимірів в інтервалі *dx*. Функція $f_x(x)$ може мати будь-який закон зміни. З її допомогою можна знайти імовірність **P** того, що результати виміру потраплять в інтервал від X_H до X_B, для чого диференціал імовірності $\frac{dn}{n}$ необхідно проінтегрувати:

$$\mathbf{P} = \int_{X_H}^{X_B} f_x(x)dx \;, \qquad (10)$$

де $X_{Н}$, $X_{В}$ - нижня і верхня межа інтервалу.

Імовірність попадання результатів вимірювання величини X в діапазоні з нижньої $X_{Н}$ і верхньої $X_{В}$ межами можна записати так:

$$\mathbf{P}(X_H \langle X \langle X_B) = \int_{X_H}^{X_B} f_x(x)dx . \tag{11}$$

Ліва частина цього виразу показує тільки імовірність події, що знаходиться в діапазоні від $X_{Н}$ до $X_{В}$. Права частина також показує імовірність цієї події, але додатково ще вказує щільність розподілу імовірності. Права частина (11) більш повна, ніж ліва. Тому ліву частину можна назвати неповною формою представлення результатів вимірювання.

Нормальний закон розподілу. Якщо випадкова похибка є результатом впливу більш ніж чотирьох впливаючих ФВ, рівновеликих і незалежних, які викликають похибки, що мають будь-які закони розподілу, то закон розподілу випадкової композиційної похибки наближається до так називаного нормального закону розподілу імовірностей.

Нормальний закон розподілу похибок має такі дві властивості:

- число позитивних похибок дорівнює числу негативних - розподіл симетричний;
- малі похибки зустрічаються частіше, ніж великі, поява дуже великих похибок - малоймовірна подія.

Нормальний закон розподілу називають також законом Гауса. Щільність розподілу імовірності представляється формулою

$$f_x(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\left[x - M(x)\right]^2}{2\sigma^2} \right), \tag{12}$$

де σ - середнє квадратичне відхилення (СКВ) випадкової величини X.

Координатою центру ваги фігури, яка обмежена кривої щільності розподілу і віссю абсцис (рис. 4), буде математичне сподівання M(X) розглянутої сукупності випадкових величин X, яким є ряд результатів равноточных повторних вимірювань.

Якщо вилучити з M(X) істинне значення вимірюваної величини X_I, то одержимо значення систематичної похибки:

$$\overline{\Delta} = M(X) - X_I . \tag{13}$$

Систематична похибка $\overline{\Delta}$ в цьому випадку розглядається як постійна величина. Якщо $\overline{\Delta}$= 0, то $M(X) = X_I$, і математичне сподівання збігається з істинним значенням ФВ, що вимірюється.

Значення випадкових похибок $\overset{o}{\Delta}_i$, що входять у результат і-го вимірюваня, можна одержати з виразу

$$\overset{o}{\Delta}_i = X_I - M(X) . \tag{14}$$

Виходячи з цієї залежності, можна, віднімаючи від результатів повторних вимірів (X_1, X_2, ... X_i) значення математичного сподівання *M(X)*, одержати новий ряд випадкових похибок $\overset{o}{\Delta}_1$, $\overset{o}{\Delta}_2$, $\overset{o}{\Delta}_3$. Цей ряд має щільність розподілу, що за формою співпадає з розподілом величини *X*. Його центр буде зміщеним по осі абсцис на величину, рівну *M(X)*. Аналітичне вираження для кривої, наведеної на рис. 5, буде мати вигляд

$$f_{\overset{o}{\Delta}}(\overset{o}{\Delta}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\overset{o}{\Delta}{}^2}{2\sigma^2}\right). \qquad (15)$$

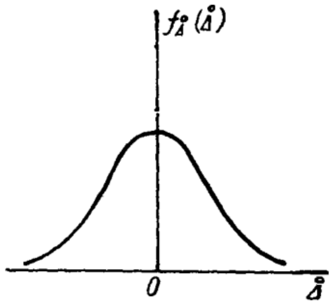

Рис.5.

Імовірність перебування похибки в інтервалі від $\overset{o}{\Delta}_H$ до $\overset{o}{\Delta}_B$ буде визначатися виразом

$$\mathbf{P}(\overset{o}{\Delta}_H \langle \overset{o}{\Delta} \langle \overset{o}{\Delta}_B) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\overset{o}{\Delta}_H}^{\overset{o}{\Delta}_B} \exp\left(-\frac{\overset{o}{\Delta}{}^2}{2\sigma^2}\right) d\overset{o}{\Delta}. \qquad (16)$$

Формулу закону Гауса часто видозмінюють, ввівши нормовану безрозмірну величину g = $\overset{o}{\Delta}/\sigma$:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-g}^{g} \exp\left(-\frac{g^2}{2}\right) dg. \qquad (17)$$

Цей інтеграл не виражається через елементарні функції. Для зручності він був протабульований математиком Фішером, що склав таблиці для значень інтеграла:

$$\Phi(g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{g} \exp\left(-\frac{g^2}{2}\right) dg. \qquad (18)$$

У деяких таблицях доводиться подвоєне значення Ф(g). У якості нормованої безрозмірної величини взята величина, рівна g, що виражається через межі довірчого інтервалу $\pm a$, так що $g = \frac{a}{\sigma}$.

Інтеграл Ф(g) називають нормованою функцією Лапласа. Для крайніх значень справедливі такі рівності:

$$\Phi(-\infty) = -0.5; \Phi(0) = 0; \Phi(\infty) = 0.5.$$

Значення інтеграла Ф(g) наводяться у довідниках з математики.

Розглянемо деякі особливості нормального розподілу похибок. На рис. 6 наведено криву нормального розподілу.

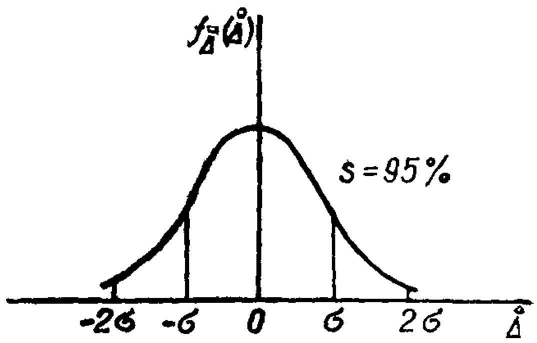

Рис. 6.

Якщо вважати, що вся площа між кривої щільності розподілу і віссю абсцис дорівнює 100%, то площа, обмежена кривою і вертикалями, проведеними через точки з значеннями $a = \pm 2\sigma$, буде дорівнювати 95 %. Поза цією площею будуть похибки інших 5% результатів. Між кривою і вертикалями, проведеними через точки $a = \pm 3\sigma$, і віссю абсцис, буде знаходитися 99,73% площі. З цього випливає що якщо $a = \pm 3\sigma$, то імовірність попадання похибки результатів виміру в цей інтервал буде дорівнювати Р =0. 9973.

Довірчим інтервалом *називається інтервал, в який похибка попадає з наперед заданою імовірністю.*

Так для нормального закону розподілу для Р = 0. 9973 довірчий інтервал дорівнює $\pm 3\sigma$

Середнє арифметичне значення результатів багаторазових вимірювань. Представимо і-й результат вимірювання у вигляді

$$X_i = X_I + \bar{\Delta} + \overset{o}{\Delta}_i . \tag{19}$$

Якщо провести *n* повторних вимірів і знайти їх суму, то середнє арифметичне значення ряду результатів буде представлятися виразом

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = X_I + \bar{\Delta} + \frac{\sum_{i=1}^{n} \overset{o}{\Delta}_i}{n}. \tag{20}$$

Як видно з цього виразу, середнє арифметичне значення ряду вимірів $\bar{X}$ буде містити X_I, систематичну похибку і усереднену випадкову складову похибки. При збільшенні числа *n,* коли $n \to \infty$, усереднена випадкова похибка

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \overset{o}{\Delta}_i}{n} = 0 \quad \text{і} \quad \bar{X} = X_I + \bar{\Delta} . \tag{21}$$

Якщо $\bar{\Delta} = 0$, то тоді $\bar{X} \to X_I$. З цього випливає, що середнє арифметичне значення ряду вимірювань при збільшенні їх кількості прямує до істинного значення вимірюваної величини X_I або до її математичного сподівання:

$$\bar{X} = X_I = M(X). \tag{22}$$

У звичайних умовах, коли $n \neq \infty$, ми маємо тільки оцінку математичного сподівання, і в якості такої оцінки приймається середнє арифметичне $\bar{X}$.

Середнє квадратичне відхилення (СКВ) результатів вимірювання. В функції розподілу імовірності для нормального закону розподілу є символ σ, що називається середнім квадратичним відхиленням. Середнє квадратичне відхилення визначається виразом

$$\sigma = +\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\overset{o}{\Delta}_i\right)^2}{n}}. \tag{23}$$

Однак практичне визначення по формулі $\overset{o}{\Delta}_i = X_i - X_I$ неможливо, тому що невідомі ні значення X_I, ні математичне сподівання M(x). Тому доводиться скористатися середнім арифметичним значенням. Тоді значення СКВ визначається

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1}}. \tag{24}$$

Знайдене значення СКВ характеризує будь-яке разове вимірювання, що входить у ряд значень X_1, X_2, X_3... .X_n.

Середнє квадратичне відхилення середнього арифметичного значення результатів вимірювань. Відзначено, що при одержанні виразу для середнього арифметичного значення вимірюваної величини $\bar{X}$ відбувається усереднення випадкових похибок. Тому $\bar{X}$ характеризується своїм СКВ S, що обчислюють по формулі

$$\sigma(\bar{X}) = S = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n(n-1)}}, \tag{25}$$

тобто при збільшенні числа вимірів у n разів СКВ S $\bar{X}$ зменшиться в $\sqrt{n}$ разів.

Непрямі вимірювання. Непрямі вимірювання складаються із власне прямих вимірювань ФВ X_1, X_2 і X_n, які називаються вимірюваними аргументами, і розрахунків, коли знаходять шукану величину Z і параметри її точності. Шукана величина Z має наступний зв'язок з вимірюваними аргументами:

$$Z = \varphi(X_1, X_2, \ldots X_n). \tag{26}$$

Розглянемо найбільше простий випадок непрямих вимірів, коли є лінійна залежність між шуканою величиною Z і вимірюваними аргументами. Припустимо, що всі вимірювані аргументи не взаємозалежні, вони некорельовані. Припустимо, також, що при проведенні вимірювань виникнули тільки випадкові похибки, а систематичні похибки виключені. У цьому випадку :

$$Z_I + \overset{o}{\Delta} = \varphi(X_{1I} + \overset{o}{\Delta}_1; X_{2I} + \overset{o}{\Delta}_2; ... X_{nI} + \overset{o}{\Delta}_n;), \tag{27}$$

де Z_I - істинне значення шуканої ФВ, X_{1I}, X_{2I} - істинні значення вимірюваних аргументів.

Щоб оцінити $\overset{o}{\Delta}$, розкладемо попередній вираз в ряд Тейлора і після спрощень отримаємо

$$\overset{o}{\Delta} = m_1 \overset{o}{\Delta}_1 + m_2 \overset{o}{\Delta}_2 + ... + m_i \overset{o}{\Delta}_i, \tag{28}$$

де значення m_1, m_2... називають коефіцієнтами впливу похибки прямого вимірювання на сумарну похибку непрямого вимірювання, їх визначають по формулі

$$m_i = \frac{\partial Z}{\partial X_i}. \tag{29}$$

Розглянемо подальшу методику обробки результатів непрямих вимірювань, застосовувану головним чином для випадків, коли є нормальний розподіл щільності результатів.

При багаторазових вимірюваннях значення кожного аргументу знаходимо як середнє арифметичне значення

$$\bar{X}_k = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_{ki}}{n_k}. \tag{30}$$

Значення шуканої величини знаходимо по формулі

$$Z = \varphi(\bar{X}_1, \bar{X}_2, ... \bar{X}_n). \tag{31}$$

Вважаючи, що розподіл похибок у всіх аргументів підпорядковано нормальному закону, визначаємо СКВ кожного аргументу.

$$\bar{s}_k = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(X_{ki} - \bar{X}_k \right)^2}{n_k (n_k - 1)}}. \tag{32}$$

Визначаємо коефіцієнти впливу кожного аргументу:

$$m_k = \frac{\partial Z}{\partial \bar{X}_k}. \tag{33}$$

Нарешті, СКВ для Z можна знайти за формулою

$$\bar{\sigma}_Z = \sqrt{\left(\frac{\partial Z}{\partial X_1} \right)^2_{X_1 = \bar{X}_1} \bar{s}^2_{X_1} + \left(\frac{\partial Z}{\partial X_2} \right)^2_{X_2 = \bar{X}_2} \bar{s}^2_{X_2} + ... + \left(\frac{\partial Z}{\partial X_k} \right)^2_{X_k = \bar{X}_k} \bar{s}^2_{X_k}}. \tag{34}$$

Вважаємо, що закон розподілу сумарної похибки Z також буде нормальний.

Теоретичне визначення середньоквадратичного відхилення та математичного сподівання. Вище вказані вирази застосовуються при обробці результатів експериментальних данних. У випадку, коли відомий аналітичний вираз для закону розподілу випадкової величини, її математичне сподівання

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} X \cdot p(X)dX \ , \tag{35}$$

де *p(X)* – аналітичний вираз закону розподілу випадкової величини *X*.

Середнє квадратичне відхилення цієї величини

$$\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} (X - M(X))^2 \cdot p(X)dX \ . \tag{36}$$

Композиція законів розподілу. Особливості законів розподілу випадкових похибок вимірювань полягають в їх великій кількості. Дана обставина пояснюється тим, що результуюча похибка засобу вимірювальної техніки є сумою декількох складових. Якщо ці складові розглядати як випадкові величини, то сумування складових похибок зводиться до сумування випадкових величин. Але під час сумування випадкових величин закон їх розподілу суттєво змінюють свою форму.

Закон розподілу суми незалежних випадкових величин $p(x) = p(x_1 + x_2)$, що мають відповідні розподіли $p_1(x_1)$ і $p_2(x_2)$, називається композицією і представляється інтегралом згортки

$$p(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_1(z) \cdot p_2(x - z)\, dz. \tag{37}$$

Обробка результатів вимірювань з використанням розподілу Ст'юдента. У випадку, коли вимірювана величина розподілена за нормальним законом і немає можливості провести багаторазові вимірювання, використовують розподіл Ст'юдента. Якщо число вимірювань $n \le 30$, то довірчий інтервал Δ_D випадкової похибки при заданих ймовірності Р і середньому квадратичному відхиленні середнього арифметичного $\sigma(\bar{X})$ визначається за формулою Ст'юдента

$$\Delta_D = \pm k_t \cdot \sigma(\bar{X}), \tag{38}$$

де k_t- коефіцієнт розподілу Стьюдента, який залежить від заданої ймовірності Р і числа вимірювань n. Значення $\sigma(\bar{X})$ знаходиться за результатами невеликої кількості вимірювань за виразом (25).

Аналітичний вираз для закону розподілу Ст'юдента :

$$p(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{(n-1)\pi} \cdot \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{x^2}{n-1}\right)^{\frac{n}{2}}}, \tag{39}$$

де Γ - гамма-функція;

При n>30 розподіл Ст'юдента майже не відрізняється від нормального.

Значення коефіцієнтів Ст’юдента наведено у табл. 1.

Таблиця 1

Значення коефіцієнтів Ст’юдента

Кількість вимірювань n	Довірча ймовірність (P = 0.95)	Довірча ймовірність (P = 0.99)
4	3.182	5.841
5	2.776	4.604
6	2.571	4.032
7	2.447	3.707
8	2.367	3.500
9	2.306	3.355
10	2.262	3.250
11	2.228	3.169
12	2.179	3.055
13	2.145	2.997

Представлення результатів вимірювань. Для представлення абсолютної похибки результатів користуються однієї зі стандартних форм, згідно до ДСТУ 2681-94.

Перша форма. Результат вимірювання представляється числом A в одиницях вимірюваної величини. Сумарна абсолютна похибка Δ в тих самих одиницях обмежується інтервалом (від нижньої Δ_{H} до верхньої Δ_{B} границі), в якому з вказаною ймовірністю P знаходиться сумарна похибка (тобто наводиться довірчий інтервал і відповідна йому імовірність).

Друга форма. Наводиться значення результатів вимірювання A, вказується верхня і нижня ($\Delta_{C.H}$, $\Delta_{C.B}$) границі інтервала, в якому може знаходитись систематична похибка, імовірність цієї події, дається оцінка СКВ випадкової складової похибки і умовне позначення стандартної апроксимації функції розподілу щільності ймовірності випадкової похибки.

Третя форма. Наводиться значення результату вимірювання, вказується СКВ випадкової і систематичної похибки, наводяться умовні назви стандартних функцій розподілу щільності ймовірності.

Четверта форма. Наводиться значення результату вимірювання, наводяться повні функції розподілу як для випадкових, так і для систематичних похибок у вигляді відповідних таблиць.

Хід виконання роботи

1. Ознайомлення з устроєм мікроманометру ММН-240.

1.1 Ознайомлення з устроєм мікроманометру ММН-240 (рис.7) Мікроманометр являє собою точний прилад, що дозволяє вимірювати навіть невеликий тиск (~ 5 Па) з точністю до 1 Па.

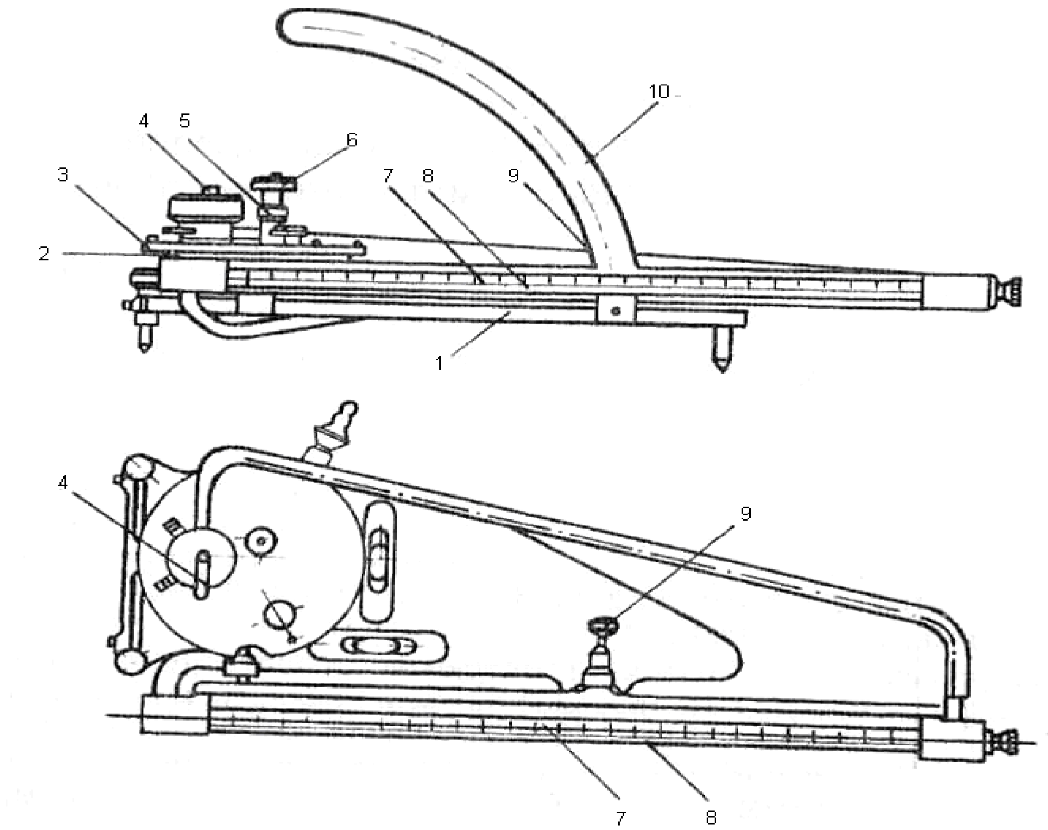

Рисунок 7 – Мікроманометр типу ММН

Циліндричний резервуар 2 приладу нерухомо встановлений на плиті 1. На кришці 3 резервуара є триходовий кран 4 для приєднання приладу до пневмометрічної трубки. При вимірі вигнута трубка, яка сприймає повний тиск, під'єднується до патрубку манометра зі знаком плюс «+», пряма трубка, яка сприймає статичний тиск, до патрубка зі знаком мінус «-». Навівши вказівник крана манометра на нульове положення, встановлюють нульовий рівень рідини у вимірювальній трубці мікроманометра. Для цієї мети служить регулятор 6 на кришці резервуара. Через отвір 5 в резервуар мікроманометра заливають робочу рідину - етиловий спирт, щільність якого 809,5 кг/м^3.

Скляна вимірювальна трубка 7 зі шкалою від 0 до 250мм, напівзакрита металевим чохлом 8 від ушкоджень, з'єднана з резервуаром. Вона може встановлюватися під різними кутами нахилу до горизонтальної площини за допомогою фіксатора 9 на стійці 10 з п'ятьма отворами. Цифри у отворів стійки являють собою синус кута нахилу вимірювальної трубки приладу й визначають чисельно відповідні значення поправочного коефіцієнта мікроманометра. Мікроманометр типу ММН встановлений на трьох ніжках, одна з яких фіксованої висоти, а дві інші гвинтові. На плиті приладу розміщені також два рівнеміра.

1.2. Підготовка мікроманометру до роботи. Підготовка мікроманометра до роботи полягає в забезпеченні строго горизонтального положення приладу та встановлення нульового рівня етилового спирту у вимірювальній скляній трубці.

Для установки приладу в горизонтальне положення служать гвинтові ніжки і два рівнеміри. Нульове положення робочої рідини у вимірювальній трубці встановлюють при нульовому положенні триходового крана, користуючись розташованим на кришці резервуара регулятором.

1.3. Визначити кількість точок вимірів

1.4 Пневмометричну трубку з'єднують гумовими шлангами з мікроманометром таким чином, щоб трубка, яка сприймає повний тиск, була приєднана до патрубка зі знаком мінус.

1.5 Пневмометричну трубку після приєднання до мікроманометра перевіряють на герметичність. Для цього в каналах зігнутої і прямої трубок почерзі створюють тиск і, щільно закривши вхідний отвір каналу досліджуваної трубки, контролюють сталість показань мікроманометра.

1.6 Пневмометричну трубку розгортають на 180° так, щоб вхідний отвір розташовувався строго на зустріч газового потоку, і приступають до вимірювання. У кожній точці замірів записують свідчення мікроманометру.

2. Дослідження систематичної похибки:

2.1. Встановити мікроманометр строго горизонтально і провести вимірювання відповідно до п.1.2-1.6. Отримані дані внести до табл.2.

2.2. Примусово ввести систематичну похибку в показання мікроманометру Для цього встановити прилад не горизонтально (під нахилом). Далі провести вимірювання відповідно до п.1.2-1.6. Отримані дані внести до табл.2.

2.3. Провести серію з декількох вимірювань (при різній витраті газоповітряної суміші), щоб переконатись у наявності систематичної похибки мікроманометру.

2.4 Визначення динамічного тиск газу в точках замірів (Па) визначають за формулою:

$$P_{дин.і}=9,81mk_1k_2k_3, \tag{40}$$

де m – показання за шкалою приладу (одне ділення шкали приладу відповідає тиску 9,81 Па);

k_1 – поправочний коефіцієнт пневмотрубки, приймаємо 0,5;

k_2 – поправочний коефіцієнт мікроманометра, який визначається як синус кута нахилу вимірювальної трубки приладу, приймаємо 0,5;

k_3 – поправочний коефіцієнт, що враховує співвідношення густини рідини, залитої в мікроманометр, і чистого спирту ($\rho_{сп}$=809,5 кг/м^3 при 20 °С), приймаємо 1.

2.4. Визначити відносну систематичну похибку. За дійсне значення вимірювальної величини прийняти результати, отримані при вимірюванні приладом встановленими горизонтально з точно встановленим механічним нулем. Результати вимірювань занести до табл. 2.

Таблиця 2 – Результати виміру динамічного тиску

Положення приладу	**Положення засувки 1**			**Положення засувки 2**			**Положення засувки з**		
	m	$P_{дин}$-	$\Delta P_{дин}$	m	Рдин-	□Рдин	m	Рдин-	ΔРдин
Горизонтальне	126			42		–	68		
З нахилом	135			56			79		

3. Дослідження випадкової похибки:

3.1. Вилучити систематичну похибку, для чого встановити мікроманометр строго горизонтально;

3.2. Виконати серію з 16 вимірювань результати занести до табл. 3. Для того, щоб дослідити випадкову похибку, необхідно під час проведення серії вимірювань змінювати розташування мікроманометру (весь час встановлювати строго горизольтально).

Таблиця 3

Фізична величина	1	2	3	4	5	6	7	8
Показання за шкалою приладу, m	76	75	58	69	71	76	67	76
Динамічний тиск газу, $P_{дин}$								
	9	10	11	12	13	14	15	16
Показання за шкалою приладу, m	74	67	72	68	84	75	76	67
Динамічний тиск газу, $P_{дин}$								

3.3 Провести обробку результатів непрямих вимірювань і представити результати вимірювань згідно першої форми. Прийняти, що систематична похибка відсутня, знайти математичне сподівання вимірюваної величини, середнє квадратичне відхилення результатів вимірювань, середнє квадратичне відхилення середнього арифметичного значення результатів вимірювання. Закон розподілу випадкової похибки прийняти за нормальний з нульовим математичним сподіванням. Довірчий інтервал прийняти рівним 3σ.

3.4. Кількість вимірювань n задаються викладачем