## Практичне заняття «Неперервність функцій»

### Основні теоретичні відомості

Функцію $y=f\left(x\right)$ називають ***неперервною у точці*** $x_0$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=f\left(x_0\right)$.

Для неперервності функції у точці $x_0$ необхідним та достатнім є виконання наступних умов:

1) $f\left(x\right)$ визначена у точці $x_0$, тобто $\exists f\left(x_0\right)$;

2) $\exists \lim\limits_{x\to x_0-0} f\left(x\right)$;

3) $\exists \lim\limits_{x\to x_0+0} f\left(x\right)$;

4) $\lim\limits_{x\to x_0-0} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f\left(x\right)=f\left(x_0\right)$.

Функцію $y=f\left(x\right)$ називають ***неперервною у точці*** $x_0$, якщо $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y=0$.

**Означення**. Точки, у яких порушується неперервність функції, називають ***точками розриву*** цієї функції.

Якщо $x = x_0$ – точка розриву функції $y = f(x)$, то у ній не виконується хоча б одна з умов 1) – 4). У залежності від того, яка з них не виконується, розрізняють наступні типи точок розриву.

1. Якщо $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A = const$, проте $A \neq f(x_0)$, або функція $f(x)$ не визначена у точці $x_0$, то точку $x_0$ називають ***точкою усувного розриву.***

2. $\exists \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_1 = const$, $\exists \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_2 = const$, проте $A_1 \neq A_2$. У цьому випадку точку $x_0$ називають ***точкою розриву першого роду*** або ***точкою розриву типу стрибка***. Величину $\delta = A_2 - A_1$ називають ***стрибком функції*** $f(x)$ ***у точці*** $x_0$.

3. Хоча б одна з границь: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ або $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ не існує, або дорівнює $\infty$. Точку $x_0$ у цьому випадку називають ***точкою розриву другого роду.***

**Обчислити наступні границі.**

**1.** $\lim\limits_{x \to \pm 0} \dfrac{\sin x}{|x|}$.

**Розв'язання.** Нехай $x \to +0$, тобто $x \to 0, x > 0$.

При $x > 0$ $|x| = x$. Отримуємо:

$$\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{|x|}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Нехай $x\to-0$, тобто $x\to0, x<0$. Тоді $|x|=-x$.

$$\lim_{x\to-0}\frac{\sin x}{|x|}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{-x}=-1.$$

**2.** $\lim\limits_{x\to3\pm0}10^{\frac{1}{x-3}}$.

**Розв’язання.** При $x\to3+0$ $x>3$, тому $x-3$ є додатною нескінченно малою, $x-3\to+0$.

$$\lim_{x\to3+0}10^{\frac{1}{x-3}}=\left(10^{\frac{1}{+0}}=10^{+\infty}\right)=+\infty.$$

При $x\to3-0$ $x<3$, тому $x-3$ є від’ємною нескінченно малою, $x-3\to-0$.

$$\lim_{x\to3-0}10^{\frac{1}{x-3}}=\left(10^{\frac{1}{-0}}=10^{-\infty}=\frac{1}{10^{+\infty}}=\frac{1}{\infty}\right)=0.$$

**3.** $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2^x+3}{2^x-3}$.

**Розв’язання**. При $x\to+\infty$ $2^x\to+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x+3}{2^x-3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\dfrac{3}{2^x}}{1-\dfrac{3}{2^x}}=\left\|\begin{matrix}\dfrac{3}{2^x}\to 0,\\ x\to+\infty\end{matrix}\right\|=1.$$

При $x\to-\infty$ $2^x=\left(2^{-\infty}\right)\to 0$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2^x+3}{2^x-3}=\frac{3}{-3}=-1.$$

**4.** $\lim\limits_{x\to 2\pm 0}\dfrac{2+x}{4-x^2}$.

**Розв'язання.** При $x\to 2+0$ $x>2$ і $4-x^2=(2-x)(2+x)<0$.

$$\lim_{x\to 2+0}\frac{2+x}{4-x^2}=\lim_{x\to 2+0}\frac{2+x}{(2-x)(2+x)}=\left(\frac{1}{-0}\right)=-\infty.$$

При $x\to 2-0$ $x<2$ і $4-x^2=(2-x)(2+x)>0$.

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{2+x}{4-x^2}=\lim_{x\to 2+0}\frac{2+x}{(2-x)(2+x)}=\left(\frac{1}{+0}\right)=+\infty.$$

**5.** $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\operatorname{arctg}x$.

**Розв’язання.** Використаємо властивості функції $y = \operatorname{arctg} x$. При $x \to +\infty$ $\operatorname{arctg} x \to \frac{\pi}{2}$, при $x \to -\infty$ $\operatorname{arctg} x \to -\frac{\pi}{2}$.

Отже, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \operatorname{arctg} x = \pm\frac{\pi}{2}$.

**6.** $\lim\limits_{x \to \pm 0} (2 + x)^{\frac{1}{x}}$.

**Розв’язання.** При $x \to +0$ $\quad x > 0$, $\frac{1}{x} \to +\infty$. Тому

$$\lim_{x \to +0} (2 + x)^{\frac{1}{x}} = \left( 2^{\frac{1}{+0}} = 2^{+\infty} \right) = +\infty.$$

При $x \to -0$ $\quad x < 0$, $\frac{1}{x} \to -\infty$.

$$\lim_{x \to +0} (2 + x)^{\frac{1}{x}} = \left( 2^{\frac{1}{-0}} = 2^{-\infty} \right) = 0.$$

**7.** $\lim\limits_{x \to 2\pi \pm 0} \frac{x^2}{\cos x - 1}$.

**Розв’язання.** При $x \to 2\pi \pm 0$ $\quad \cos x \to 1, \cos x < 1$, тому маємо:

$$\lim_{x \to 2\pi \pm 0} \frac{x^2}{\cos x - 1} = \left( \frac{4\pi^2}{-0} \right) = -\infty.$$

II. Дослідити на неперервність та встановити характер точок розриву наступних функцій.

**1.** $y = \dfrac{x}{x-4}$.

**Розв'язання.** Функція є неперервною на числовій прямій всюди, за винятком точки $x = 4$.

$$\lim_{x\to 4+0} \frac{x}{x-4} = \left(\frac{4}{+0}\right) = +\infty, \ \lim_{x\to 4-0} \frac{x}{x-4} = \left(\frac{4}{-0}\right) = -\infty.$$

Точка $x = 4$ є точкою розриву другого роду.

**2.** $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-4}$.

**Розв'язання.** Функція є неперервною на числовій прямій всюди, за винятком точки $x = 4$.

$$\lim_{x\to 4+0} \operatorname{arctg}\frac{1}{x-4} = \left\| \begin{array}{l} \dfrac{1}{x-4} = t, \\ x \to 4+0, t \to \infty \end{array} \right\| = \lim_{t\to +\infty} \operatorname{arctg} t =$$

$$= \frac{\pi}{2}.$$

$$\lim_{x\to 4-0}\operatorname{arctg}\frac{1}{x-4}=\left\|\begin{array}{l}\dfrac{1}{x-4}=t,\\ x\to 4-0,\, t\to -\infty\end{array}\right\|=\lim_{t\to -\infty}\operatorname{arctg}t=$$

$$=-\frac{\pi}{2}.$$

Ліва та права границі є скінченними, але відрізняються між собою. Отже, $x=4$ – точка розриву першого роду (типу стрибка). Величина стрибка

$$\delta=\lim_{x\to 4+0}y(x)-\lim_{x\to 4-0}y(x)=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi.$$

**3.** $y=\dfrac{x^2-25}{x-5}$.

**Розв'язання.** Функція неперервна $\forall x\neq 5$.

$$\lim_{x\to 5\pm 0}\frac{x^2-25}{x-5}=\lim_{x\to 5\pm 0}\frac{(x-5)(x+5)}{x-5}=\lim_{x\to 5\pm 0}(x+5)=10.$$

У точці $x=5$ ліва та права границі функції співпадають, проте у цій точці функція невизначена. Отже, точка $x=5$ є точкою усувного розриву.

**4.** $y=\dfrac{2^{\frac{1}{x-2}}-1}{2^{\frac{1}{x-2}}+1}$.

**Розв'язання.** При $x=2$ функція невизначена. Знайдемо ліву та праву границю функції у цій точці. Спочатку знайдемо ці границі для функції $2^{\frac{1}{x-2}}$.

$$\lim_{x\to 2+0} 2^{\frac{1}{x-2}} = \left( 2^{\frac{1}{+0}} = 2^{+\infty} \right) = +\infty, \ \lim_{x\to 2-0} 2^{\frac{1}{x-2}} = \left( 2^{\frac{1}{-0}} = 2^{-\infty} \right) = 0.$$

$$\lim_{x\to 2+0} \frac{2^{\frac{1}{x-2}}-1}{2^{\frac{1}{x-2}}+1} = \left\| \begin{matrix} t = 2^{\frac{1}{x-2}}, \\ x \to 2+0, t \to +\infty \end{matrix} \right\| = \lim_{t\to +\infty} \frac{t-1}{t+1} = 1.$$

$$\lim_{x\to 2-0} \frac{2^{\frac{1}{x-2}}-1}{2^{\frac{1}{x-2}}+1} = \left\| \begin{matrix} t = 2^{\frac{1}{x-2}}, \\ x \to 2-0, t \to 0 \end{matrix} \right\| = \lim_{t\to 0} \frac{t-1}{t+1} = -1.$$

Ліва та права границі є скінченними, але відрізняються між собою. Отже, $x=2$ – точка розриву першого роду (розриву типу стрибка).

Величина стрибка $\delta = \lim\limits_{x\to 2+0} y(x) - \lim\limits_{x\to 2-0} y(x) = 1-(-1) = 2$.

**5.** $y = \dfrac{x+2}{(x-1)(x-5)}$.

**Розв'язання.** Функція неперервна всюди, крім точок $x=1$ та $x=5$. Знайдемо праві та ліві границі у цих точках.

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{x+2}{(x-1)(x-5)}=\left(\frac{3}{(+0)(-4)}\right)=-\infty,$$

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x+2}{(x-1)(x-5)}=\left(\frac{3}{(-0)(-4)}\right)=+\infty.$$

Точка $x=1$ є точкою розриву другого роду.

$$\lim_{x\to 5+0}\frac{x+2}{(x-1)(x-5)}=\left(\frac{7}{4\cdot(+0)}\right)=+\infty,$$

$$\lim_{x\to 5-0}\frac{x+2}{(x-1)(x-5)}=\left(\frac{7}{4\cdot(-0)}\right)=-\infty.$$

Точка $x=5$ є точкою розриву другого роду.

**6.** $y=\begin{cases} x^2,\ x\le 3; \\ 2x+1,\ x>3. \end{cases}$

**Розв'язання.** Можливою точкою розриву є точка $x=3$. Знайдемо у цій точці ліву та праву границі функції.

$$\lim_{x\to 3+0} y(x)=\lim_{x\to 3+0}(2x+1)=7,$$

$$\lim_{x\to 3-0} y(x)=\lim_{x\to 3-0} x^2=9.$$

У точці $x = 3$ ліва та права границя існують, є скінченними, проте відрізняються між собою. Отже, ця точка є точкою розриву першого роду. Величина стрибка

$$\delta = \lim_{x \to 3+0} y(x) - \lim_{x \to 3-0} y(x) = 7 - 9 = -2.$$

**7.** $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$.

**Розв'язання.** $\lim_{x \to +0} e^{-\frac{1}{x^2}} = \left(e^{-\infty}\right) = 0 = \lim_{x \to -0} e^{-\frac{1}{x^2}}$. У точці $x = 0$ ліва та права границі функції скінченні, співпадають між собою, проте у цій точці функція невизначена. Отже, $x = 0$ є точкою усувного розриву. Прийнявши $y(0) = 0$, отримаємо неперервну функцію.

**8.** $y = x \cdot \operatorname{ctg} x$.

**Розв'язання.** Функція має нескінченну кількість точок розриву, що мають вигляд $x = n\pi, n \in \mathbb{Z}$. При $n = 0$ $x = 0$.

$$\lim_{x \to +0} x \cdot \operatorname{ctg} x = \lim_{x \to +0} \frac{x \cos x}{\sin x} = \lim_{x \to +0} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x \to +0} \cos x = 1.$$

$$\lim_{x \to -0} x \cdot \operatorname{ctg} x = \lim_{x \to -0} \frac{x \cos x}{\sin x} = \lim_{x \to -0} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x \to -0} \cos x = 1.$$

У точці $x = 0$ ліва границя функції дорівнює правій границі, вони скінченні, проте у цій точці функція не визначена. Отже, $x = 0$ – точка усувного розриву.

Нехай $x = n\pi, n \in \mathbb{N}$, тобто $x = n\pi > 0$.

$$\lim_{x \to n\pi \pm 0} x \cdot \operatorname{ctg} x = \lim_{x \to n\pi \pm 0} x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = \lim_{x \to n\pi \pm 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x \to n\pi + 0} \cos x =$$

$$= \lim_{x \to n\pi \pm 0} \frac{x}{\sin x} \cdot (-1)^n.$$

Границя $\lim\limits_{x \to n\pi \pm 0} \frac{x}{\sin x}$ є нескінченною. Отже, точки $x = n\pi, n \in \mathbb{N}$ є точками розриву другого роду. Функція $y = x \cdot \operatorname{ctg} x$ є парною, тобто при від'ємних значеннях *n* точки $x = n\pi$ також є точками розриву другого роду.

Домашнє завдання.

Дослідити на неперервність та встановити характер точок розриву наступних функцій.

1. $y = \operatorname{arcctg} \frac{x}{x^3 + 8}$. ((Відповідь: $x = -2$ точка розриву першого роду).

2. $y = \frac{1}{1 - 2^{\frac{x}{x+1}}}$. (Відповідь: $x = -1$ – точка розриву першого роду).

3. $y = \frac{x + 5}{x^2 - 16}$. (Відповідь: $x = \pm 4$ – точки розриву другого роду).

4. $y = \begin{cases} x-1, x \le 1; \\ 5x-4, x > 1. \end{cases}$

(Відповідь: $x = 1$ – точка усувного розриву).

5. $y = 5^{\frac{1}{(x-3)^2}}$. (Відповідь: $x = 3$ – точка розриву другого роду).