Метод кінцевих різниць

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння 2-го порядку із змінними коефіцієнтами

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \qquad (1)$$

$$\begin{cases} \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B, \end{cases}$$

де $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ неперервні функції на $[a,b]$, α_i, β_i, A, B – сталі, такі, що $|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0, |\beta_0| + |\beta_1| \neq 0$.

Розіб'ємо відрізок $[a,b]$ на n рівних частин, тобто одержимо $h = (b-a)/n$ і побудуємо систему рівновіддалених вузлів

$$x_i = x_0 + ih \quad (i = 1, \ldots, n-1); \quad x_0 = a; \quad x_n = b \ .$$

Розв'язок задачі будемо шукати чисельно. Для цього в рівнянні (1) похідні замінимо кінцевими різницями другого порядку точності.

Введемо позначення $y(x_i) = y_i$, $p(x_i) = p_i$, $q(x_i) = q_i$, $f(x_i) = f_i$.

$$y_{i+1} = y_i + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2!}y''(x_i) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_i) + o(h^3)$$

$$y_{i-1} = y_i - hy'(x_i) + \frac{h^2}{2!}y''(x_i) - \frac{h^3}{3!}y'''(x_i) + o(h^3)$$

$$y_{i+1} - y_i = 2h\, y'(x_i) + o(h^2) \;\; => \;\; y'(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_i}{2h} + o(h)$$

$$y_{i+1} + y_{i-1} = 2y_i + h^2 y''(x_i) + o(h^3) \;\; => \;\; y''(x_i) = \frac{y_{i+1} + y_{i-1} - 2\, y_i}{h^2} + o(h)$$

$$\boxed{y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)}$$

Підставляючі отримані значення похідних до рівняння (1), одержимо:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = f_i \quad (i = 1,2,\ldots,n-1)\,. \qquad (2)$$

Розглянемо граничні умови. Обчислимо значення похідної в лівій точці відрізка $x = a$ через кінцеві різниці «вперед», а в правій $x = b$ – через різниці «назад»:

$$x = a = x_0$$

$$y_1 = y_0 + hy'(x_0) + \frac{h^2}{2} y''(x_0) + o(h^2) \qquad 4y_1 = 4y_0 + 4hy'(x_0) + 2h^2 y''(x_0) + o(h^2)$$

$$y_2 = y_0 + 2hy'(x_0) + 2h^2 y''(x_0) + o(h^2)$$

$$4y_1 - y_2 = 3\, y_0 + 2h\, y'(x_0) + o(h^2)$$

$$y'(x_0) = \frac{4y_1 - y_2 - 3\, y_0}{2h} + o(h)$$

$$x = b = x_n$$

$$y_{n-1} = y_n - hy'(x_n) + \frac{h^2}{2} y''(x_n) + o(h^2) \qquad 4y_{n-1} = 4y_n - 4hy'(x_n) + h^2 y''(x_n) + o(h^2)$$

$$y_{n-2} = y_n - 2hy'(x_n) + 2h^2 y''(x_n) + o(h^2)$$

$$4y_{n-1} - y_{n-2} = 3\, y_n - 2h\, y'(x_n) + o(h^2)$$

$$y'(x_n) = -\frac{4y_{n-1} - y_{n-2} - 3\, y_n}{2h} + o(h)$$

Граничні умови запишемо в такому вигляді:

$$\begin{cases} \alpha_0 y_0 + \alpha_1 \dfrac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h} = A \\ \beta_0 y_n + \beta_1 \dfrac{3y_n - 4y_{n-1} + y_{n-2}}{2h} = B \end{cases} . \tag{3}$$

Таким чином одержимо систему $n+1$ лінійних алгебраїчних рівнянь з $n+1$ невідомими. Розв'язуючи цю систему, знайдемо значення функції y у відповідних точках.

На рис. 4 наведено блок-схему програми розв'язку крайової задачі методом кінцевих різниць.

У даній блок-схемі: n – кількість відрізків розбиття, a, b – ліва та права границя відрізку, α_0, β_0, α_1, β_1, A, B – сталі з крайових умов, h – крок розбиття, $x(0),\ldots,x(n)$ – система рівновіддалених точок, $y(0),\ldots,y(n)$ – наближені значення розв'язку крайової задачі, $p(x(i))$, $q(x(i))$, $f(x(i))$ – значення функцій $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ з диференційного рівняння у точці $x(i)$, $gauss(a,m,b,y)$ – підпрограма розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса (a – матриця сталих коефіцієнтів, m – кількість рівнянь, b – вектор-стовпець вільних членів, y – вектор-стовпець невідомих).

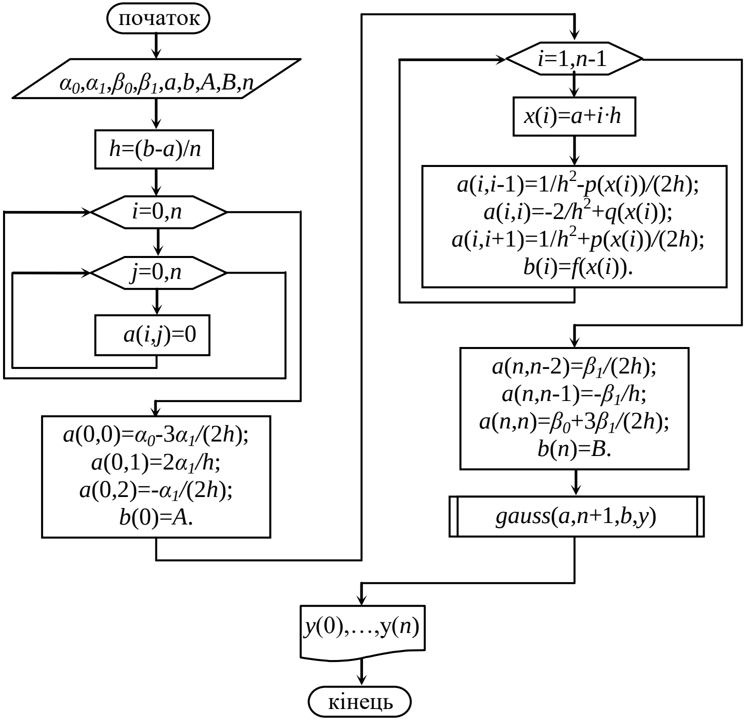

Рис.4. Блок-схема розв’язку задачі Коші методом кінцевих різниць