

Практичне заняття № 1. Обчислення похідних.

Знайти похідні наступних функцій:

1. $y = x^5 - 4x^3 + 2x - 3.$

$$\begin{aligned} y' &= (x^5)' - 4(x^3)' + 2(x)' - 3' = 5x^4 - 4 \cdot 3x^2 + 2 \cdot 1 - 0 = \\ &= 5x^4 - 12x^2 + 2. \end{aligned}$$

2. $y = \frac{\pi}{x} + \ln 2.$

$$\begin{aligned} y' &= \pi \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' + (\ln 2)' = \pi(x^{-1})' + 0 = \pi(-1 \cdot x^{-2}) = \\ &= -\frac{\pi}{x^2}. \end{aligned}$$

3. $y = \frac{2x+3}{5-7x}.$

$$\begin{aligned}
 y' &= \frac{(2x+3)'(5-7x) - (2x+3)(5-7x)'}{(5-7x)^2} = \\
 &= \frac{2 \cdot (5-7x) - (2x+3) \cdot (-7)}{(5-7x)^2} = \frac{31}{(5-7x)^2}.
 \end{aligned}$$

4. $y = x^2 \sqrt[3]{x^2} = x^2 \cdot x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{8}{3}}.$

$$y' = \frac{8}{3} x^{\frac{8}{3}-1} = \frac{8}{3} x^{\frac{5}{3}} = \frac{8}{3} x \cdot x^{\frac{2}{3}} = \frac{8}{3} x \sqrt[3]{x^2}.$$

5. $y = \frac{5}{\sqrt[3]{x^4}} = \frac{5}{x^{\frac{4}{3}}} = 5x^{-\frac{4}{3}}.$

$$\begin{aligned}
 y' &= 5 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) x^{-\frac{4}{3}-1} = -\frac{20}{3} x^{-\frac{7}{3}} = -\frac{20}{3x^{\frac{7}{3}}} = \\
 &= -\frac{20}{3x^2 \cdot x^{\frac{1}{3}}} = -\frac{20}{3x^2 \sqrt[3]{x}}.
 \end{aligned}$$

6. $y = \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}.$

$$\begin{aligned}
 y' &= \frac{(1+\sqrt{x})'(1-\sqrt{x}) - (1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})'}{(1-\sqrt{x})^2} = \\
 &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(1-\sqrt{x}) - (1+\sqrt{x})\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(1-\sqrt{x})^2} = \\
 &= \frac{1-\sqrt{x}+1+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2} = \frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2}.
 \end{aligned}$$

7. $y = x \cdot \arcsin x$.

$$\begin{aligned}
 y' &= (x)' \cdot \arcsin x + x \cdot (\arcsin x)' = \arcsin x + \\
 &+ \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.
 \end{aligned}$$

8. $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$.

$$\begin{aligned}
 y' &= \frac{(\sin x + \cos x)'(\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x)(\sin x - \cos x)'}{(\sin x - \cos x)^2} = \\
 &= \frac{(\cos x - \sin x)(\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x)(\cos x + \sin x)}{(\sin x - \cos x)^2} = \\
 &= -\frac{2}{1 - \sin 2x}.
 \end{aligned}$$

9. $y = x \cdot \operatorname{ctg} x.$

$$y' = \operatorname{ctg} x + x \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 x} \right) = \operatorname{ctg} x - \frac{x}{\sin^2 x}.$$

10. $y = (x^2 - 2) \cos x.$

$$y' = 2x \cdot \cos x - (x^2 - 2) \sin x.$$

11. $y = e^x \cdot \arcsin x.$

$$y' = e^x \cdot (\arcsin x) + e^x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = e^x \left(\arcsin x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right).$$

12. $y = \frac{\ln x}{x^2}.$

$$y' = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - \ln x \cdot 2x}{x^4} = \frac{x(1 - 2 \ln x)}{x^4} = \frac{1 - 2 \ln x}{x^3}.$$

13. $y = (x^2 - 2x + 2) \cdot \operatorname{ch} x.$

$$y' = (2x - 2) \cdot \operatorname{ch} x + (x^2 - 2x + 2) \cdot \operatorname{sh} x.$$

14. $y = e^x \cdot \cos x.$

$$y' = e^x \cos x - e^x \sin x = e^x (\cos x - \sin x).$$

15. $y = (1 + 3x - 5x^2)^{100}.$

Розв'язання. Нехай $u = 1 + 3x - 5x^2$. Тоді $y = u^{100}$. За правилом диференціювання складеної функції маємо:

$$\begin{aligned} y'_x &= y'_u \cdot u'_x = 100 \cdot u^{99} \cdot u'_x = 100(1 + 3x - 5x^2)^{99} \times \\ &\times (1 + 3x - 5x^2)' = 100(1 + 3x - 5x^2)^{99} \cdot (3 - 10x). \end{aligned}$$

16. $y = \operatorname{tg}^4 x.$

Розв'язання. $y = \operatorname{tg}^4 x = u^4$, де $u = \operatorname{tg} x$.

$$y' = y'_x = y'_u \cdot u'_x = 4u^3 \cdot (\operatorname{tg} x)' = 4\operatorname{tg}^3 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}.$$

17. $y = \sqrt{\operatorname{arctg} x}.$

Розв'язання. $y = \sqrt{\operatorname{arctg} x} = \sqrt{u}, \quad u = \operatorname{arctg} x.$

$$y' = y'_x = y'_u \cdot u'_x = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{arctg} x}} \cdot \frac{1}{1+x^2}.$$

18. $y = \sin(2x+3).$

Розв'язання. $y = \sin(2x+3) = \sin u, \quad u = 2x+3.$

$$y' = y'_x = y'_u \cdot u'_x = \cos u \cdot (2x+3)' = 2 \cos(2x+3).$$

19. $y = \operatorname{ctg}(x^2 - x + 1).$

Розв'язання. $y' = -\frac{1}{\sin^2(x^2 - x + 1)} \cdot (2x-1).$

20. $y = \ln^3(x^2 + 5).$

Розв'язання. $y = \ln^3(x^2 + 5) = u^3, \quad u = \ln v, \quad v = x^2 + 5.$

$$\begin{aligned} y' &= y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x = 3u^2 \cdot \frac{1}{v} \cdot 2x = 3 \ln^2(x^2 + 5) \cdot \frac{1}{x^2 + 5} \cdot 2x = \\ &= \frac{6x \ln^2(x^2 + 5)}{x^2 + 5}. \end{aligned}$$

21. $y = \sin^2(x^3 + 1).$

Розв'язання. $y' = 2 \sin(x^3 + 1) \cdot \cos(x^3 + 1) \cdot 3x^2 = 3x^2 \sin(2x^3 + 2).$

22. $y = \ln(\arcsin 5x).$

Розв'язання. $y' = \frac{1}{\arcsin 5x} \cdot (\arcsin 5x)' = \frac{1}{\arcsin 5x} \cdot \frac{5}{\sqrt{1 - 25x^2}}.$

23. $y = e^{\sin^2 x}.$

Розв'язання. $y' = e^{\sin^2 x} \cdot (\sin^2 x)' = e^{\sin^2 x} \cdot 2 \sin x \cdot \cos x = e^{\sin^2 x} \cdot \sin 2x.$

24. $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}).$

Розв'язання.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}} (x + \sqrt{1 + x^2})' = \frac{1 + \frac{1}{2\sqrt{1 + x^2}} \cdot 2x}{x + \sqrt{1 + x^2}} = \\ &= \frac{\sqrt{1 + x^2} + x}{\sqrt{1 + x^2} (\sqrt{1 + x^2} + x)} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}. \end{aligned}$$

$$25. y = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2(\sqrt{x}).$$

Розв'язання.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2} \cdot 2 \operatorname{tg}(\sqrt{x}) \cdot \left(\operatorname{tg}(\sqrt{x}) \right)' = \operatorname{tg}(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{\cos^2(\sqrt{x})} \cdot (\sqrt{x})' = \\ &= \frac{\operatorname{tg}(\sqrt{x})}{2\sqrt{x} \cdot \cos^2(\sqrt{x})}. \end{aligned}$$

$$26. y = \ln(\ln(\ln x)).$$

Розв'язання.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{\ln(\ln x)} \cdot (\ln(\ln x))' = \frac{1}{\ln(\ln x)} \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot (\ln x)' = \\ &= \frac{1}{x \ln x \cdot \ln(\ln x)}. \end{aligned}$$

$$27. \text{Довести, що функція } y = xe^{-x} \text{ задовольняє рівняння } xy' = (1-x)y.$$

Розв'язання. $y = xe^x$, $y' = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x)$, підставимо y' та y у рівняння:

$$xy' = xe^{-x}(1-x) = (1-x)y.$$

28. Знайти $f'(0)$, якщо $f(x) = e^{-x} \cos 3x$.

Розв'язання. Знайдемо $f'(x)$.

$$f'(x) = -e^{-x} \cos 3x + e^{-x} (-3 \sin 3x) = -e^{-x} (\cos 3x + 3 \sin 3x).$$

Підставивши у цей вираз $x = 0$, отримуємо $f'(0) = -1 \cdot (1 + 3 \cdot 0) = -1$.

29. Знайти $y'(1)$, якщо $y(x) = x^3 + 3x^2 - 7x + 2$.

Розв'язання. Знайдемо $y'(x)$: $y'(x) = 3x^2 + 6x - 7$. Підставивши сюди $x = 1$, отримуємо: $y'(1) = 3 + 6 - 7 = 2$.

30. Знайти $y'(e)$, якщо $y(x) = x \ln^3 x$.

Розв'язання.

$$y'(x) = \ln^3 x + x \cdot 3 \ln^2 x \cdot \frac{1}{x} = \ln^3 x + 3 \ln^2 x = \ln^2 x (\ln x + 3),$$

$$y'(e) = 1^2 \cdot (1 + 3) = 4.$$

31. Знайти $f'(0)$, якщо $f(x) = \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x}$.

Розв'язання.

$$f'(x) = \frac{2 \sin x \cdot \cos x \cdot (1 + \cos x) - \sin^2 x \cdot (-\sin x)}{(1 + \cos x)^2} =$$

$$= \frac{\sin 2x \cdot (1 + \cos x) + \sin^3 x}{(1 + \cos x)^2}.$$

$$f'(0) = 0.$$

Домашнє завдання.

Знайти похідні.

1. $y = \frac{2}{7}x^3\sqrt{x} - \frac{4}{11}x^5.$

Відповідь: $y' = x^2\sqrt{x}(x^2 - 1)^2.$

2. $y = (x^2 + 2x + 2)e^{-x}.$

Відповідь: $y' = -x^2e^{-x}.$

3. $y = 3x^3 \ln x - x^3.$

Відповідь: $y' = 9x^2 \ln x.$

4. $y = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x.$

Відповідь: $y' = x^2 \cos x.$

5. $y = \ln(2x^3 + 3x^2).$

Відповідь: $y' = \frac{6(x+1)}{2x^2 + 3x}.$

6. $y = \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right)^2.$

Відповідь: $y' = -\cos x.$

7. $y = \ln \sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}.$

Відповідь: $y' = \frac{1}{\cos x}.$

8. $y = \left(\frac{\sin x}{1 + \cos x} \right)^2.$

Відповідь: $y' = \frac{2 \sin x}{(1 + \cos x)^2}.$

9. $y = \operatorname{arctg}(x+1) + \frac{x+1}{x^2 + 2x + 2}.$

Відповідь: $y' = \frac{2}{(x^2 + 2x + 2)^2}.$

$$10. y = \frac{2 \cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2} + 3 \cos \frac{x}{2}}.$$

$$\text{Відповідь: } y' = \frac{1}{3 \sin x + 4 \cos x + 5}.$$

$$11. y = \frac{x - e^{2x}}{x + e^{2x}}.$$

$$\text{Відповідь: } y' = \frac{2e^{2x}(1 - 2x)}{(x + e^{2x})^2}.$$

$$12. y = \operatorname{arctg} \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}.$$

$$\text{Відповідь: } y' = \frac{3}{1 + x^2}.$$

$$13. y = \sqrt{2x + 1} (\ln(2x + 1) - 2).$$

$$\text{Відповідь: } y' = \frac{\ln(2x + 1)}{\sqrt{2x + 1}}.$$

$$14. y = \frac{x^2 e^{x^2}}{x^2 + 1}.$$

$$\text{Відповідь: } y' = 2xe^{x^2} \cdot \frac{x^4 + x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2}.$$

15. $y = \ln\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{\sin x}.$

Відповідь: $y' = \frac{x \cos x}{\sin^2 x}.$

16. Довести, що функція $y = (x^2 + 1) \cdot e^x$ задовольняє рівняння

$$y' - \frac{2xy}{x^2 + 1} = e^x (x^2 + 1).$$