Тема 6. Системи числення та перетворення чисел з однієї системи числення в іншу.

Краткие теоретические сведения

В ЭВМ арифметические и логические действия производятся над числами, представленными в виде специальных (машинных) кодов в принятой для данной машины системе счисления.

Под *системой счисления* понимается способ наименования и изображения чисел с помощью символов, имеющих определенные количественные значения.

Символы, применяемые для изображения чисел, называются *цифрами.*

В зависимости от способа изображения чисел с помощью цифр системы счисления делятся на позиционные и непозиционные.

Позиционной называется система счисления, в которой количественное значение каждой цифры зависит от ее места (позиции) в числе.

Примером такой системы может служить общепринятая в настоящее время арабская (десятичная) система счисления.

В *непозиционной* системе счисления цифры не меняют своего количественного значения при изменении положения в записи числа. К таким системам, например, относится римская система счисления, которая, однако, из-за сложности записи в ней многозначных чисел для вычислений не применяется.

В позиционной системе счисления числа записываются в виде последовательности цифр

$A = a_{m-1}a_{m-2}...a_k...a_1a_0$

Позиции, пронумерованные индексами k (в данном случае в пределах ($0<k<m$-1), называются разрядами числа. Индекс m соответствует количеству разрядов.

Каждая цифра a_k в записанной последовательности может принимать одно из некоторого количества N возможных значений, т.е. $N\text{-}1 \geq a_k \geq 0$.

Количество *(N)* различных цифр, используемых для изображения чисел в позиционной системе счисления, называется *основанием системы счисления.*

Поскольку цифра a_k соответствует количеству единиц k-го разряда, содержащихся в числе, то основание *(N)* позиционной системы счисления указывает, во сколько раз единица *(k+1)* -го разряда больше единицы младшего k-го разряда. Следовательно, записанную выше последовательность цифр, соответствующих целому числу, можно представить в виде:

$A_m = a_{m-1}N^{m-1}+a_{m-2}N^{m-2}+... +a_1N^{m-2}+a_0N^0$.

В общем случае выражение для любого числа, состоящего из целой и дробной частей (неправильная дробь), будет представлять собой ряд:

$$A_{(N)}=\pm[\, a_{m-1}N^{m-1}+a_{m-2}N^{m-2}+... +a_1N^1+a_0N^0+ a_{-1}N^{-1}+... +a_{-l}N^{-l}\,], \qquad (1)$$

где *m* и *l* — число разрядов соответственно целой и дробной частей числа, N^i- вес *i*-го разряда. Следует заметить, что в записи вида (1) основание *N* может быть разным для различных разрядов, например, запись угловых величин в градусах, минутах и секундах или запись величин, характеризующих время. Такие системы называются *неоднородными,* в отличии от *однородных* систем с равными основаниями для всех разрядов. В настоящее время в вычислительных машинах используются только однородные системы счисления.

Основание *N* позиционной системы счисления определяет и ее название. Так, например, общепринятая десятичная система счисления имеет основание N=10. Любое число в этой системе записывается с помощью различных цифр:
a_k=0,1,2,3,4,5,6,7,8,9

В качестве основания можно выбирать любое другое число. Такими числами, а следовательно и основаниями, могу быть: два, три, четыре, пять и т.д.

Исторически так сложилось, что именно десятичная система оказалась общепринятой и широко применяемой при ручном счете и в электромеханических вычислительных устройствах, Однако с точки зрения простоты конструктивного выполнения отдельных устройств для ЭВМ оказываются удобными также другие системы счисления с основаниями два -двоичная, восемь- восьмеричная и шестнадцать — шестнадцатиричная.

Двоичная система счисления

Цифровые вычислительные машины работают с двоичными числами. Двоичная система счисления или система с основанием 2 использует только цифры 0 и 1. Эти двоичные числа названы битами (от binary digit). Физически в цифровых электронных системах бит 0 представлен напряжением LOW (низким), а бит 1 — напряжением HIGH (высоким).

Человеческая деятельность предполагает использование десятичной системы счисления. Десятичная система, или система с основанием 10, содержит 10 цифр (от 0 до 9). Она также характеризуется значением позиции (или весом). В табл. 6.1 показано, например, что десятичное число 1327 равно одной тысяче, плюс три сотни, плюс два десятка, плюс семь единиц (1000+300 + 20+7 = 1327).

Таблица 6.1. *Значения позиций десятичных чисел*

Степень основания	10^3	10^2	10^1	10^0
Значения позиций	1000	100	10	1
Двоичные	1	3	2	7
Десятичные	1000 +	300 +	20 +	7 = 1327

Двоичная система обладает также свойством уравновешивания. В табл. 6.2 приведены десятичные значения первых четырех двоичных позиций. Двоичное число 1001 (произносится: один, нуль, нуль, один) преобразовано, таким образом, в свой десятичный эквивалент 9. Бит единицы двоичного числа в табл. 6.2 называется младшим битом (МБ), бит восьмерки — старшим битом (СБ).

Таблица 6.2. *Значения позиций двоичных чисел*

Степень сновования	2^3	2^2	2^1	2^0	
Значение позиции	8 СБ	4	2	1 МБ	
Двоичные	1	0	0	1	
Десятичные	8 +	0 +	0 +	1 =	9

В табл. 6.3 приведены десятичные числа от 0 до 15, а также их двоичные эквиваленты. Те, кто работает в области использования ЭВМ, должны, по меньшей мере, запомнить эти двоичные числа.

Таблица 6.3. *Десятичные числа и их двоичные эквиваленты*

Десятичные		Двоичные				Десятичные		Двоичные			
10	1	8	4	2	1	10	1	8	4	2	1
	0				0		8	1	0	0	0
	1				1		9	1	0	0	1
	2			1	0	1	0	1	0	1	0
	3			1	1	1	1	1	0	1	1
	4		1	0	0	1	2	1	1	0	0
	5		1	0	1	1	3	1	1	0	1
	6		1	1	0	1	4	1	1	1	0
	7		1	1	1	1	5	1	1	1	1

Как преобразовать двоичное число 1011 0110 (т. е. один, нуль, один, один, нуль, один, один, нуль) в его десятичный эквивалент? Процедура преобразования выполняется в соответствии с табл. 6.4. Десятичные значения каждой позиции записаны под каждым битом, затем десятичные числа суммируются (128+32+16+4+2=182), что дает 182.

Таблица 6.4. *Двоично-десятичные преобразования*

Степень основания	2^7	2^6	2^5		2^4	2^3	2^2		2^1	2^0	
Значение позиций	128	64	32		16	8	4		2	1	
Двоичный	1		1		1	0	1		1	0	
Десятичный	128	+	32	+	16	+	4	+	2	==	182

Обычно основание системы счисления указывается индексами. Таким образом, число $1011\ 0110_2$ является двоичным (или основания 2), а число 182_{10} — десятичным: $1011\ 0110_2 = 182_{10}$.

Как преобразовать десятичное 155 в его двоичный эквивалент? Процедура преобразования приведена на рис. 6.5.

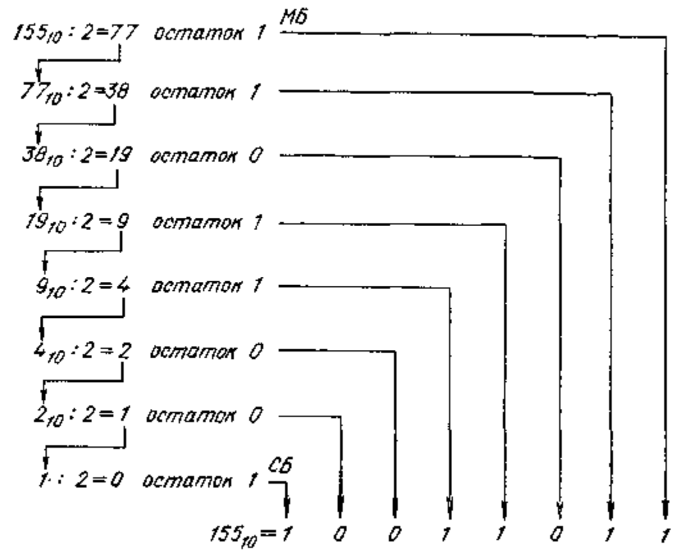

Рис. 6.5. Двоично-десятичные преобразования

Десятичное 155 сначала делится на 2, что дает нам частное 77 и остаток *1*. Этот остаток становится МБ двоичного числа и помещается в эту позицию (см. рис. 5.5). Затем частное (77) перемещается, как показывает стрелка, и становится следующим делимым. Затем каждое частное последовательно делится на 2 до тех пор, пока не получится частное, равное 0, и остаток, равный 1 (см. предпоследнюю строку на рис. 6.5). Последняя строка на рис. 5.5 дает нам результат $155_{10} = 1001$ 1011_2.

Процедура преобразования целых десятичных чисел в двоичные - это частный случай процедуры перевода чисел из одной системы счисления в другую. Предположим, что необходимо преобразовать десятичное число 10 в двоичное. Для этого проделаем следующее.

1. Разделим подлежащее преобразованию число на основание системы счисления, в которой число должно быть представлено. В данном случае 10 следует поделить на 2. При делении на 2 остаток может быть равен 1 или 0. Значение остатка присваивается младшему значащему разряду (МЗР) искомого числа. Для рассматриваемого примера частное равно 5, а остаток - нулю, т.е. 1 - й разряд равен нулю.

2. Результат деления па первом шаге необходимо разделить еще раз на 2. Остаток (0 или 1) используется в качестве значения следующего по значимости разряда. В данном случае частное от деления 5 на 2 равно 2, а остаток, т. е. значение 2-го разряда, равно 1.

3. Результат деления на предыдущем шаге необходимо разделить па 2, а значение остатка присвоить очередному разряду. В данном случае частное равно 1, а остаток равен нулю, т.е. 3-й разряд равен нулю.

4. Шаги описанной процедуры повторяются до тех пор, пока частное, полученное в результате очередной операции деления, не станет равным нулю. Тогда остаток от последнего деления используется в качестве значения старшего значащего разряда (СЗР). В данном случае

частное от деления 1 па 2 составляет нуль, а остаток равен 1, поэтому значение 4-го разряда равно 1.

Итак, получено целое двоичное число 1010. Рассмотрим еще два примера преобразования десятичных чисел в двоичные.

Пример 1. Преобразование десятичного числа 57_{10} в двоичное число:

Шаг	Деление	Частное	Остаток
1	57/2	28	1 (МЗР)
2	28/2	14	0
3	14/2	7	0
4	7/2	3	1
5	3/2	1	1
6	1/2	0	1 (СЗР)

Результат: $57_{10} = 1000\ 0110_2$,

Пример 2. Преобразование десятичного числа 134_{10} в двоичное число:

Шаг	Деление	Частное	Остаток
1	134/2	67	0 (МЗР)
2	67/2	33	1
3	33/2	16	1
4	16/2	8	0
5	8/2	4	0
6	4/2	2	0
7	2/2	1	0
8	1/2	0	1 (СЭР)

Результат $-134_{10} = 1000\ 0110_2$

Изложенная процедура применима к преобразованию целых (или целой части) десятичных чисел в двоичные. Для дробных чисел (или дробных частей вещественных чисел) требуется отдельная, хотя и похожая, процедура. Если преобразовать выполнено отдельно для целой и дробной частей числа, то результат получают путем записи двоичных эквивалентов этих частей соответственно слева и справа от двоичной точки.

Процедуру преобразования десятичной дроби в двоичную рассмотрим на примере преобразования числа 0.375.

1. Преобразование осуществляется умножением дроби на основание системы счисления, в которой дробь должна быть представлена. В данном случае умножаем на 2: 2 х 0.375 = 0.75.

2. Если результат умножения меньше 1, то старшему значащему разряду присваивается значение 0; если больше 1, то

присваивается 1. Поскольку 0.75 < 1, то СЗР = 0.

3. Результат предыдущей операции умножения опять умножается на 2. Заметим, что если бы результат предыдущей операции умножения был больше 1, то в данной операции умножения участвовала лишь его дробная часть. В данном случае 2 х 0.75 = 1.5.

4. Если полученный результат меньше 1, то следующему по значимости (ближайшему справа) разряду присваивается значение 0; если равен или больше 1, то присваивается 1. В рассматриваемом примере 1.5 > 1, поэтому значение разряда 2 равно 1.

5 Шаги описанной процедуры повторяются до тех пор, пока либо результат умножения не будет точно равен 1, либо не будет достигнута требуемая точность. В данном случае после выполнения очередного шага результат равен (2 х 0.5=1.0). Поэтому очередному разряду, являющемуся младшим значащим разрядом, присваивается значение 1. Следовательно, получена двоичная дробь 0.011.

Следует отметить, что не всегда путем повторения операций умножения можно достичь результата умножения, точно равного 1. В таком случае процесс повторения останавливают по достижении необходимой точности, а целую часть результата последней операции умножения используют в качестве значения младшего значащего разряда.

Рассмотрим еще два примера преобразования десятичных дробей в двоичные.

Пример 1. Преобразование десятичного числа 0.34375_{10} в двоичное:

Умножение	Результат в целочисленной форме
2 х 0.34375 = 0.6875	0 (СЗР)
2х0.6875= 1.375	1
2 х 0.375 = 0.75	0
2 × 0,75 = 1,5	1
2 × 0,5 = 1,0	1
2 × 0 = 0	0 (МЗР)

Результат: $0{,}01011_2$.

Пример 2. Преобразование десятичного числа $0{,}3_{10}$ в двоичное:

Умножение	Результат в целочисленной форме
2 × 0,3 = 0,6	0
2 × 0,6 = 1,2	1
2 × 0,2 = 0,4	0
2 × 0,4 = 0,8	0
2 × 0,8 = 1,6	1
2 × 0,6 = 1,2	1
2 × 0,2 = 0,4	0
2 × 0,4 = 0,8	0

$2 \times 0{,}8 = 1{,}6$	1
$2 \times 0{,}6 = 1{,}2$	1
$2 \times 0{,}2 = 0{,}4$	0

Процедура преобразование в примере 2 носит характер бесконечного построения группы одинаковых операций и результатов. Поэтому ограничимся восемью разрядами. Тогда получим $0{,}3_{10} = 0{,}01001100_2$.

Шестнадцатеричная система счисления

Ячейка памяти типичной микро-ЭВМ может содержать двоичное число 1001 1110. Такая длинная цепь нулей и единиц сложна для запоминания и неудобна для ввода с клавиатуры. Число 1001 1110 могло бы быть преобразовано в десятичное, что дало бы 158_{10}, но процесс преобразований занял бы много времени. Большая часть систем микроинформатики использует шестнадцатеричную форму записи, чтобы упростить запоминание и использование таких двоичных чисел, как 1001 1110.

Шестнадцатеричная система счисления *(hexadecimal)* [1], или система с основанием 16, использует 16 символов от 0 до 9 и A, B, C, D, E, F. В табл. 6.5 приведены эквиваленты десятичных, двоичных и шестнадцатеричных чисел.

Заметим из табл. 6.5, что каждый шестнадцатеричный символ может быть представлен единственным сочетанием четырех бит. Таким образом, представлением двоичного числа 1001 1110 в шестнадцатеричном коде является число 9E. Эго значит, что часть 1001 двоичного числа равна 9, а часть 1110 равна E (конечно, в шестнадцатеричном коде). Следовательно, $1001\ 1110_2 = 9E_{16}$. (Не следует забывать, что индексы означают основание системы счисления.)

Как преобразовать двоичное число 111010 в шестнадцатеричное? Надо начать с МБ и разделить двоичное число на группы из 4 бит. Затем надо заменить каждую группу из 4 бит эквивалентной шестнадцатеричной цифрой: $1010_2 = A$, $0011_2 = 3$, следовательно, $111010_2 = 3A_{16}$.

Как преобразовать шестнадцатеричное число 7F в двоичное? В этом случае каждая шестнадцатеричная цифра должна быть заменена своим двоичным эквивалентом из 4 бит. В примере двоичное число 0111 заменено шестнадцатеричной цифрой 7, а 1111_2 заменяет F_{16}, откуда $7F_{16} = 1111\ 0111_2$.

Таблица 6.6. *Десятичные, шестнадцатеричные и двоичные эквиваленты*

Десятичные	Шестнадцатеричные	Двоичные			
		8	4	2	1
0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1
2	2	0	0	1	0
3	3	0	0	1	1
4	4	0	1	0	0
5	5	0	1	0	1
6	6	0	1	1	0
7	7	0	1	1	1
8	8	1	0	0	0

9	9	1	0	0	1
10	A	1	0	1	0
11	B	1	0	1	1
12	C	1	1	0	0
13	D	1	1	0	1
14	E	1	1	1	0
15	F	1	1	1	1

Шестнадцатеричная запись широко используется для представления двоичных чисел, поэтому необходимо табл. 6.7 также запомнить.

Таблица 6.7. *Преобразование шестнадцатеричного числа в десятичное*

Степень шестнадцати	16^8		16^2		16^1		16^0	
Значение позиции	4096		256		16		1	
Шестнадцатеричное число	2 4096 x 2		C 256 x 12		6 16 x 6		E 1 x 14	
Десятичное	8192	+	3072	+	96	+	14	= 11374_{10}

Преобразуем шестнадцатеричное число 2C6E в десятичное. Процедура действий соответствует табл. 2.6. Значениями позиций первых четырех шестнадцатеричных цифр являются соответственно слева направо 4096, 256, 16 и 1, Десятичное число содержит 14 (E_{16}) единиц, 6 чисел 16, 12 (C_{16}) чисел 256 и 2 числа 4096. Каждая цифра умножается на соответствующий ей вес, получается сумма, которая и дает нам десятичное число 11374.

Преобразуем десятичное число 15797 в шестнадцатеричное. На рис.6.6 показана процедура действий. В первой строке 15797_{10} разделено на 16,что дает частное 987_{10} и остаток 5_{10}, который преобразуется затем в свой шестнадцатеричный эквивалент ($5_{10} = 5_{16}$) и становится цифрой младшего разряда (МР) шестнадцатеричного числа. Первое частное (987) становится делимым во второй строке и снова делится на 16, что дает частное 61 и остаток 11_{10} или шестнадцатеричное B. В третьей строке 61 делится на 16, дает частное 3 и остаток 13_{10} или D_{16}, а в четвертой строке делимое 3 делится на 16, дает частное 0 и остаток 3_{10} или 3_{16}. Когда частное равно 0, как в четвертой строке, преобразование заканчивается. 3_{16} становится цифрой старшего разряда (СР) результата, т. е. $3DB5_{16}$.

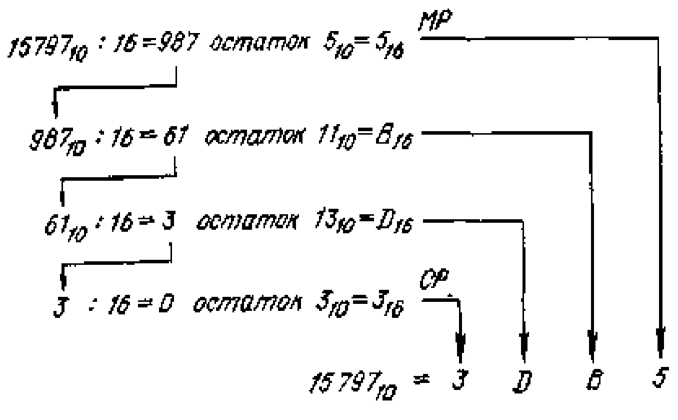

Рис. 6.6. Десятично-шестнадцатеричное преобразование

Восьмеричная система счисления

Восьмеричная запись, как и шестнадцатеричная, используется для представления двоичных чисел. Восьмеричная система содержит 8 цифр от 0 до 7 и является соответственно системой с основанием 8. В табл. 6.8 представлено несколько десятичных, восьмеричных и двоичных чисел.

Преобразуем двоичное число 11111000100 в его восьмеричный эквивалент. Процедура действий в этом случае следующая. Начиная с МБ двоичного числа, делим его на группы из 3 бит. Затем, используя табл. 6.8, преобразуем каждую триаду (группу из 3 бит) в эквивалентную восьмеричную цифру. Таким образом, мы заменим двоичное число 11111000100 его восьмеричным эквивалентом 3704_8:

Двоичное число 011111000 100

Восьмеричное число 3704

Таблица 6.8.Десятичные, восьмеричные и двоичные эквиваленты

Десятичные	Восьмеричные	Двоичные		
		4	2	1
0	0	0	0	0
1	1	0	0	1
2	2	0	1	0
3	3	0	1	1
4	4	1	0	0
5	5	1	0	1
6	6	1	1	0
7	7	1	1	I

Преобразуем теперь восьмеричное число 6521 в его двоичный эквивалент. Каждая восьмеричная цифра заменяется двоичной триадой и получится, что $6521_8 = 110101010001_2$:

Восьмеричное число 6 5 2 1

Двоичное число 110 101010001

Запишем восьмеричное число 2357 в десятичной форме Классическая процедура выполняется согласно табл. 6.9. Здесь 512, 64, 8 и 1 есть веса четырех первых восьмеричных позиций. Заметим, что в этом примере содержится 7 единиц, 5 восьмерок, 4 числа 64 и два числа 512. Мы их складываем и получаем результат: $1024 + 192 + 40 + 7 = 1263_{10}$.

Таблица 6.9. *Восьмерично-десятичное преобразование*

Степень восьми	8^4		8^2		8^1		8^0	
Значения позицій	512		64		8		1	
Восьмеричное число	2 512 x		3 64 x		5 8 x		7 1 x	

	2		3		5		7	
Десятичное число	1024	+	192	+	40	+	7	= 1263_{10}

Наконец, преобразуем десятичное число 3336 в его восьмеричный эквивалент. Процедура показана на рис. 6.7. В первую очередь 3336 разделено на 8, что дает частное 417 и остаток 0_{10}, причем $0_{10} = 0_8$, восьмеричный 0 становится значением МР восьмеричного числа. Первое частное (417) становится делимым и снова делится на 8 (вторая строка),что дает частное 52 и остаток $1_{10} = 1_8$, который становится второй цифрой восьмеричного числа. В третьей строке частное (52) становится делимым и деление его на 8 дает частное 6 и остаток $4_{10} = 4_8$. В четвертой строке последнее частное 6 разделено на 8 с частным 0 и остатком $6_{10} = 6_8$.

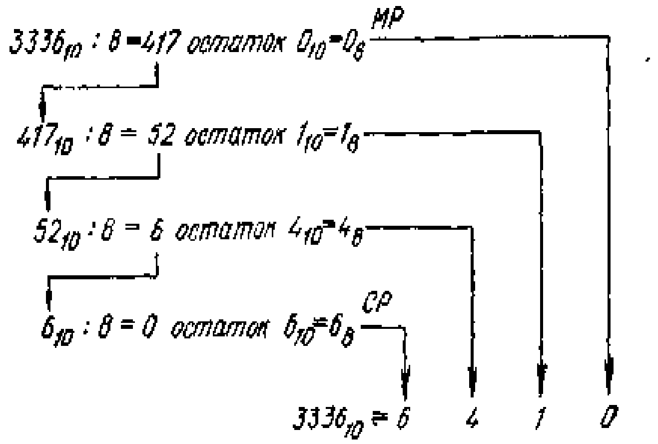

Рис 6.7. Десятично-восьмеричное преобразование

Теперь счет закончен последним частным 0. Цифра 6_8 становится значением СР восьмеричного числа, и мы можем видеть на рис. 5.7, что $3336_{10} = 6410_8$.

Большинство микропроцессоров и микро-ЭВМ обрабатывают группы из 4, 8 или 16 бит. Отсюда следует, что обычно чаще используется шестнадцатеричная запись, чем восьмеричная. Однако восьмеричная запись более удобна, когда группы бит делятся на 3 (например, группы из 12 бит).