

7 ФІНАНСОВО-КРЕДИТНІ ОБЧИСЛЕННЯ

7.1 Кредитні розрахунки

Всі три терміни: «кредит», «позика» означають надання грошей або товарів в борг на умовах повернення, платності, терміновості. Той, хто видає гроші або товари в кредит, називається *кредитором*, хто бере – *позичальником* (*дебітором*).

Умови видачі та погашення кредитів (позик) дуже різні. Розглянемо деякі з них.

7.2 Погашення боргу одним платежем в кінці терміну

Нехай кредит в розмірі D виданий на n років під g простих (складних) річних відсотків (ефективна ставка). Зміна позначення процентної ставки несе смислове значення, наприклад, для банків, які залучають вклади (депозит), пропонуючи процентну ставку r , і кредитують населення за ставкою g , причому зазвичай $r < g$. Ясно, що таке розуміння кредитно депозитних операцій банку дуже вузьке, але дозволяє сформулювати уявлення про так звану банківську маржу, яка в такому випадку складе $g - r$ відсотків.

До кінця n -го року нарахована сума з величини D стане

– у випадку простих відсотків: $D(1 + ng)$;

– у випадку складних відсотків: $D(1 + g)^n$.

Якщо передбачається погасити кредит одним платежем, то це і є розмір цього платежу.

Приклад 7.1 Взято в кредит 2000 доларів на 8 років під 10% річних по складних відсотках. Якщо віддати цю позику одним платежем, який розмір цього платежу?

Розв'язання.

У нашому випадку $D = 2000$ доларів, $g = 0,1$, $n = 8$; тоді сума до погашення складе

$$D(1 + g)^n = 2000 \cdot 1,1^8 = 4288 \text{ доларів.}$$

7.3 Погашення боргу в розстрочку диференційованими і ануїтетними платежами

Споживчим кредитом називається позика величиною D з річною відсотковою ставкою g , предоставлена строком на n років, і яка передбачає погашення боргу (з урахуванням відсотків) рівними платежами через рівні проміжки часу.

Схеми погашення боргу частинами, з одного боку, дозволяють позичальникові легше планувати свої витрати з обслуговування боргу, а з іншого – надають кредитору можливість відстежувати регулярність повернення

позичальником належних сум і при сумлінному виконанні позичальником платежів знизити ризик неповернення кредиту. Розмір самого кредиту називається *основним боргом*, а нараховувана добавка – *процентними грошима*. Зазначені платежі дробляться. Позначимо через d_t витрати на погашення основного боргу в кінці року t , D_t – залишок основного боргу на початок року t , Y_t – загальні витрати по обслуговуванню боргу в кінці року t . Тоді:

$$Y_t = D_t g + d_t, \quad (7.1)$$

де $D_t g$ – процентні гроші;

$$D = d_1 + d_2 + \dots + d_n. \quad (7.2)$$

Для погашення основного боргу частинами використовуються, наприклад, такі схеми.

Схема А *Схема амортизації боргу: диференційовані погасникові платежі*

Борг погашається послідовними рівними сумами в кінці кожного року, з щорічною виплатою відсотків на залишок боргу. В цьому випадку:

$$d_t = d = const, \quad d = \frac{D}{n}; \quad (7.3)$$

$$D_t = D - (t - 1)d; \quad (7.4)$$

$$Y_t = (D - (t - 1)d)g + d. \quad (7.5)$$

Планом погашення заборгованості називається сукупність даних з обслуговування основної суми боргу, про відсоткові виплати і залишки заборгованості за кожен період (рік) до моменту його повного погашення. Найбільш зручний спосіб складання плану – таблиця.

Приклад 7.2 Випущена облігація (борговий цінний папір) номіналом 1000 грн. з умовою погашення послідовними рівними сумами протягом 4 років. Щорічно виплачуються також 20% річних на залишок боргу кожен. Скласти план погашення.

Розв'язання.

У нашому випадку $D = 100$ грн., $g = 0,2$, $n = 4$. Обчислюємо розмір щорічної виплати по основному боргу, користуючись формулою (7.3):

$$d = \frac{D}{n} = \frac{100}{4} = 25 \text{ грн.}$$

План погашення складемо у вигляді таблиці 7.1. Відразу ставимо $D_1 = 100$ і заповнюємо колонку (2). Рядок $t + 1$ колонки (1) виходить вирахуванням з рядка t колонки (1) відповідного рядка колонки (2): $D_{t+1} = D_t - d$. Колонка (3) виходить з колонки (1) множенням на 0,2. Колонка (4) – це сума колонок (2) і (3).

Таблиця 7.1 – План погашення до прикладу 7.2

час, рік	залишок основного боргу на початок року	погашення основного боргу в кінці року t	відсотки до виплати в кінці року t	річні витрати по обслуговуванню боргу на кінець року t
	(1)	(2)	(3)	(4)
t	D_t	$d_t = d$	$D_t g$	$Y_t = D_t g + d_t$

1	100	25	20	45
2	75	25	15	40
3	50	25	10	35
4	25	25	5	30

Дана схема погашення боргу має істотний недолік: витрати по обслуговуванню боргу спочатку вище, що часто є небажаним для дебітора.

Диференційовані платежі спочатку великі, а до кінця терміну погашення кредиту поступово зменшуються або навпаки.

Приклад 7.3 Позика величиною 150000 доларів видана на термін в 5 років з розрахунком по схемі складних відсотків з умовою погашення послідовними рівними сумами під 5% річних на залишок боргу кожен. Скласти план погашення.

Розв'язання.

У нашому випадку $D = 150000$ доларів, $g = 0,05$, $n = 5$. Обчислюємо розмір щорічної виплати по основному боргу, користуючись формулою (4.3):

$$d = \frac{D}{n} = \frac{150000}{5} = 30000.$$

План погашення складемо у вигляді таблиці 7.2.

Таблиця 7.2 – План погашення до прикладу 7.3

час, рік	залишок основного боргу на початок року	погашення основного боргу в кінці року t	відсотки до виплати в кінці року t	річні витрати по обслуговуванню боргу на кінець року t
	(1)	(2)	(3)	(4)
t	D_t	$d_t = d$	$D_t g$	$Y_t = D_t g + d_t$
1	150000	30000	7500	37500
2	120000	30000	6000	36000
3	90000	30000	4500	34500
4	60000	30000	3000	33000
5	30000	30000	1500	31500
підс	0	150000	22500	172500

Схема В *Схема амортизації боргу: аннуїтетні погасникові платежі*

Погашення кредиту рівними терміновими сплатами разом з нарахованими простими або складними відсотками на непогашений залишок.

Ануїтетними платежами називаються рівні платежі кожен період (місяць, рік і т.п.). Незалежно від того, на початку терміну погашення кредиту ви перебуваєте або в його кінці, щомісяця ви будете виплачувати однакову суму.

Ця схема явно не вказує на розмір погашення частини основної суми боргу. У цьому випадку загальні річні витрати боржника з обслуговування боргу (термінові сплати) постійні протягом усього терміну погашення:

$$Y_t = Y = const. \quad (7.6)$$

Розглянемо *випадок простих відсотків*.

Поточна величина всіх виплат повинна дорівнювати розміру кредиту D , то складемо рівняння:

$$\begin{aligned} D(1 + ng) &= Y(1 + (n - 1)g) + Y(1 + (n - 2)g) + \dots + Y, \\ D(1 + ng) &= Y[(1 + (n - 1)g) + (1 + (n - 2)g) + \dots + 1], \\ Y &= \frac{D(1 + ng)}{(1 + (n - 1)g) + (1 + (n - 2)g) + \dots + 1} = \frac{D(1 + ng)2}{[(1 + (n - 1)g) + 1]n}, \end{aligned}$$

звідки маємо:

$$Y = \frac{2D(1 + ng)}{[2 + (n - 1)g]n}. \quad (7.7)$$

Розглянемо *випадок складних відсотків*.

Поточна величина всіх виплат повинна дорівнювати розміру кредиту D :

$$D = \frac{Y}{1 + g} + \frac{Y}{(1 + g)^2} + \dots + \frac{Y}{(1 + g)^{n-1}} + \frac{Y}{(1 + g)^n} = \frac{Y((1 + g)^n - 1)}{g(1 + g)^n},$$

звідки маємо:

$$Y = \frac{Dg(1 + g)^n}{(1 + g)^n - 1}. \quad (7.8)$$

Платежі за основним боргом пов'язані такими співвідношеннями:

$$\begin{aligned} d_1 &= Y - Dg, \\ d_2 &= Y - (D - d_1)g = d_1(1 + g), \end{aligned}$$

$$\dots, \\ d_t = d_{t-1}(1 + g) = d_1(1 + g)^{t-1}. \quad (7.9)$$

Позначимо загальну суму процентних грошей через DD :

$$DD = D_1g + D_2g + \dots + D_ng.$$

Скористаємося співвідношенням (4.1):

$$DD = (Y - d_1) + (Y - d_2) + \dots + (Y - d_n) = nY - (d_1 + d_2 + \dots + d_n).$$

Застосовуючи формулу (7.2), отримуємо такий вираз для розрахунку суми виплачених за період відсотків:

$$DD = nY - D. \quad (7.10)$$

Приклад 7.4 Ви зайняли на 5 років 12000 доларів під 12% річних, що нараховуються за схемою складних відсотків на непогашений залишок. Повертати потрібно рівними сумами в кінці кожного року. Складіть план погашення. Визначте, яка частина основної суми позики буде погашена за перші 2 роки.

Розв'язання.

Дані для розрахунку: $D = 12000$ доларів, $g = 0,12$, $n = 5$. Знаходимо суму щорічного платежу за обслуговування позики за формулою (7.8):

$$Y = \frac{Dg(1 + g)^n}{(1 + g)^n - 1} = \frac{12000 \cdot 0,12 \cdot 1,12^5}{1,12^5 - 1} = 3328,92 \text{ доларів.}$$

Залишок заборгованості на початок 1-го року відомий спочатку: $D_1 = D$. Обчислюємо залишок основного боргу через 1 рік: $d_1 = Y - D_1g = 1888,9$ дол., Підраховуємо відсотки, нараховані на 12000 дол. за 1 рік: $D_1g = 1440$ дол. і заповнюємо перший рядок таблиці 7.3. Далі обчислюємо $D_2 = D_1 - d_1 =$

10111,1 дол. і знаходимо $D_2g = 1213,3$ дол., а потім $d_2 = Y - D_2g = 2115,6$ дол. і заповнюємо рядок $t = 2$. Процес продовжуємо до тих пір, поки борг не буде погашений (5 років).

Таблиця 7.3 – План погашення до прикладу 7.4

час, рік	залишок основного боргу на початок року	погашення основного боргу в кінці року t	відсотки до виплати в кінці року t	загальні витрати по обслуговуванню боргу в кінці року t
t	D_t	$d_t = Y - D_tg$	D_tg	$Y_t = Y$
1	12 000,0	1888,92	1 440,0	3 328,92
2	10 111,08	2 115,59	1 213,33	3 328,92
3	7 995,49	2 369,46	959,46	3 328,92
4	5 626,03	2 653,79	675,12	3 328,92
5	2 972,23	2 972,25	356,67	3 328,92
підс	0	12000,01	4644,58	16644,6

За перші 2 роки буде виплачено по основному займу $d_1 + d_2 = 1888,92 + 2115,59 = 4004,51$ дол., що становить від основної суми боргу

$$\frac{d_1+d_2}{D} = 0,3337 \text{ або } 33,37\%.$$

Зауважимо, що платежі з погашення основного боргу з року в рік збільшуються, а процентні виплати скорочуються, хоча в сумі їх величина постійна.

Приклад 7.5 Позика величиною 200000 доларів, видана терміном 5 років з розрахунком по складних відсотках з річною відсотковою ставкою 6%, що нараховуються на непогашений залишок. Повертати потрібно рівними сумами в кінці кожного року. Складіть план погашення.

Розв'язання.

Дані для розрахунку: $D = 200000$ доларів, $g = 0,06$, $n = 5$. Знаходимо суму щорічного платежу за обслуговування позики за формулою (4.8):

$$Y = \frac{Dg(1+g)^n}{(1+g)^n - 1} = \frac{200000 \cdot 0,06 \cdot 1,06^5}{1,06^5 - 1} = 47479,28 \text{ доларів.}$$

Складемо план погашення (табл. 7.4)

Таблиця 7.4 – План погашення до прикладу 7.5

час, рік	залишок основного боргу на початок року	погашення основного боргу в кінці року t	відсотки до виплати в кінці року t	загальні витрати по обслуговуванню боргу в кінці року t
t	D_t	$d_t = Y - D_tg$	D_tg	$Y_t = Y$
1	200000	35479,28	12000	47479,28
2	164520,72	37608,04	9871,24	47479,28
3	126912,68	39864,52	7614,76	47479,28
4	87048,16	42256,40	5222,88	47479,28

5	44791,76	44791,76	2687,52	47479,28
підс	0	200000	37396,40	237396,40

Приклад 7.6 Ви зайняли на 5 років 10 000 дол. під 8% річних. Повертати потрібно рівними сумами в кінці кожного року з урахуванням нарахованих складних відсотків на непогашений залишок. Визначте загальну суму відсотків до виплати.

Розв'язання.

Дані для розрахунку: $D = 10000$ доларів, $g = 0,08$, $n = 5$. За формулою (7.8) знаходимо щорічний платіж по позиції:

$$Y = \frac{Dg(1+g)^n}{(1+g)^n - 1} = \frac{10000 \cdot 0,08 \cdot 1,08^5}{1,08^5 - 1} = 2504 \text{ доларів.}$$

За формулою (4.10) обчислюємо загальну суму процентних грошей:

$$DD = nY - D = 5 \cdot 2504 - 10000 = 2520 \text{ доларів.}$$

Погашення позики за допомогою виплат боргу, які змінюються за арифметичною прогресією, у випадку, коли відсотки нараховуються на непогашений залишок.

Приклад 7.7 Позика величиною 200000 долларов погашається впродовж 5 років рівними сумами в кінці року, причому виплати боргу з року в рік:

- а) збільшуються на 5000 долларов;
- б) зменшуються на 5000 долларов.

Річна ставка *простих* процентів дорівнює 6%. Процентні гроші на аннуїтети не нараховуються. Скласти план погашення в кожному з цих випадків.

Розв'язання.

а) Дані для розрахунку: $D = 200000$ долларов, $g = 0,06$, $n = 5$, $d = 5000$ долларов (різниця арифметичної прогресії). Знайдемо першу виплату Y_1 боргу з рівняння:

$$\frac{2d_1 + d(n-1)}{2} n = D,$$

ліва частина якого є сума n перших членів арифметиченої прогресії. Отже, перша виплата боргу:

$$d_1 = \frac{D}{n} - \frac{d(n-1)}{2} = \frac{200000}{5} - \frac{5000(5-1)}{2} = 30000,$$

перший процентний платіж

$$D_1g = 200000 \cdot 0,06 = 12000,$$

а сума першого платежу

$$Y_1 = Dg + d_1 = 30000 + 12000 = 42000.$$

Продовжуючи аналогічно, складемо план погашення (табл. 7.5).

Таблиця 7.5 – План погашення до прикладу 7.7, випадок а)

час, рік	залишок основного боргу на початок року	погашення основного боргу в кінці року t	відсотки до виплати в кінці року t	загальні витрати по обслуговуванню боргу в кінці року t
----------	-----------------------------------------	--------------------------------------------	--------------------------------------	-----------------------------------------------------------

t	D_t	$d_t = Y - D_t g$	$D_t g$	$Y_t = Y$
1	200000	30000	12000	42000
2	170000	35000	10200	45200
3	135000	40000	8100	48100
4	95000	45000	5700	50700
5	50000	50000	3000	53000
підс	0	20000	39000	239000

б) цей випадок відрізняється від випадку а) тільки тим, що $d = -5000$, і перша виплата боргу

$$d_1 = \frac{D}{n} - \frac{d(n-1)}{2} = \frac{200000}{5} + \frac{5000(5-1)}{2} = 50000.$$

План погашення позики для випадку б) представлено в табл. 7.6.

Таблиця 7.6 – План погашення до прикладу 7.7, випадок б)

час, рік	залишок основного боргу на початок року	погашення основного боргу в кінці року t	відсотки до виплати в кінці року t	загальні витрати по обслуговуванню боргу в кінці року t
t	D_t	$d_t = Y - D_t g$	$D_t g$	$Y_t = Y$
1	200000	50000	12000	62000
2	170000	45000	10200	54000
3	135000	40000	8100	46300
4	95000	35000	5700	38900
5	50000	30000	3000	31800
підс	0	20000	39000	233000

Погашення позики за допомогою виплат боргу, які змінюються за геометричною прогресією, у випадку, коли відсотки нараховуються на непогашений залишок.

Приклад 7.8 Позика величиною 200000 долларів погашається впродовж 5 років рівними сумами в кінці року, причому виплати боргу з року в рік:

а) збільшуються на 5%;

б) зменшуються на 5%.

Річна ставка складних процентів дорівнює 10%. Процентні гроші на аннуїтети не нараховуються. Скласти план погашення в кожному з цих випадків.

Розв'язання.

а) Дані для розрахунку: $D = 200000$ доларів, $g = 0,1$, $n = 5$, $q = 1,05$ (знаменник геометричної прогресії). Знайдемо першу виплату Y_1 боргу з рівняння:

$$d_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = D,$$

ліва частина якого є сума n перших членів геометричної прогресії. Отже, перша виплата боргу:

$$d_1 = \frac{D(q-1)}{q^n - 1} = \frac{200000(1,05 - 1)}{1,05^5 - 1} = 36195,$$

перший процентний платіж

$$D_1g = 200000 \cdot 0.1 = 20000,$$

а сума першого платежу

$$Y_1 = Dg + d_1 = 36195 + 20000 = 56195.$$

Продовжуючи аналогічно, складемо план погашення (табл. 7.7).

Таблиця 7.7 – План погашення до прикладу 7.8, випадок а)

час, рік	залишок основного боргу на початок року	погашення основного боргу в кінці року t	відсотки до виплати в кінці року t	загальні витрати по обслуговуванню боргу в кінці року t
t	D_t	$d_t = Y - D_tg$	D_tg	$Y_t = Y$
1	200000	36195	20000	56195
2	163805	38004,75	16380,51	54385,26
3	125800,25	39904,98	12580,02	52485
4	85895,27	41900,24	8589,52	50489,76
5	43992,04	43995,04	4399,50	48394,54
підс	0	200000	61949,55	261949,55

б) цей випадок відрізняється від випадку а) тільки тим, що $q = 1 - 0,05 = 0,95$, і перша виплата боргу

$$d_1 = \frac{D(1-q)}{1-q^n} = \frac{200000(1-0,95)}{1-0,95^5} = 44204,74.$$

План погашення позики для випадку б) представлено в табл. 7.8.

Таблиця 7.8 – План погашення до прикладу 7.8, випадок б)

час, рік	залишок основного боргу на початок року	погашення основного боргу в кінці року t	відсотки до виплати в кінці року t	загальні витрати по обслуговуванню боргу в кінці року t
t	D_t	$d_t = Y - D_tg$	D_tg	$Y_t = Y$
1	200000	44204,74	20000	64204,74
2	135795,26	41994,50	13579,52	57574,02
3	113800,76	39894,77	11380,07	51274,84
4	73905,99	37900,03	7390,59	45290,62
5	36005,96	36005,03	3600,59	39605,62
підс	0	199999,07	55950,77	255949,84

Погашення кредиту за допомогою аннуїтету, останній з яких може відрізнитися від інших, у випадку, коли відсоткові гроші погашаються в залежності від залишку боргу.

Приклад 7.9 Позика величиною 8000000 долларов погашається аннуїтетами, кожний з яких, окрім останнього, складає 35% від величини позики.

Позика надається на основі складних відсотків с річною ставкою 5%. Відсоткові гроші на аннуїтети не нараховуються. Скласти план погашення позики та визначити останній аннуїтет.

Розв'язання.

Спочатку знайдемо всі аннуїтети, окрім останнього:

$$Y = 800000 \cdot 0,35 = 2800000.$$

Оскільки перший процентний платіж складає

$$Dg = 8000000 \cdot 0.05 = 400000,$$

То перша виплата боргу буде:

$$d_1 = Y - Dg = 2800000 - 400000 = 2400000.$$

Залишок боргу після першої виплати буде складати:

$$D_1 = D - d_1 = 8000000 - 2400000 = 5600000.$$

Продовжуючи далі, отримаємо:

$$D_1g = 5600000 \cdot 0.05 = 280000,$$

$$d_2 = Y - D_1g = 2800000 - 280000 = 2520000,$$

$$D_2 = D_1 - d_2 = 5600000 - 2520000 = 3080000;$$

$$D_2g = 3080000 \cdot 0.05 = 154000,$$

$$d_3 = Y - D_2g = 2800000 - 154000 = 2646000,$$

$$D_3 = D_2 - d_3 = 3080000 - 2646000 = 434000.$$

Помітимо, що залишок боргу D_3 менший за попередні аннуїтети, тому знайдемо процентний платіж:

$$D_3g = 434000 \cdot 0.05 = 21700.$$

Тоді на цьому кроці розмір виплати боргу співпадає з остачею боргу

$$D_3 = d_4 = 434000.$$

Отже, останній аннуїтет буде дорівнювати:

$$D_3 + D_3g = 434000 + 21700 = 455700.$$

План погашення позики представлено в табл. 7.9.

Таблиця 7.9 – План погашення до прикладу 7.9

час, рік	залишок основного боргу на початок року	погашення основного боргу в кінці року t	відсотки до виплати в кінці року t	загальні витрати по обслуговуванню боргу в кінці року t
t	D_t	$d_t = Y - D_tg$	D_tg	$Y_t = Y$
1	8000000	2400000	400000	2800000
2	5600000	2520000	280000	2800000
3	3080000	2646000	154000	2800000
4	434000	434000	21700	455700
підс	0	8000000	855700	8855700