

Практичне заняття на тему: «Фізичні та геометричні застосування похідної»

Похідна $f'(x)$ виражає миттєву швидкість зміни функції $f(x)$. Зокрема, похідна від шляху $s(t)$, пройденого тілом, що рухається прямолінійно, за час t , дорівнює його миттєвій швидкості у момент часу t , тобто швидкість $v(t) = s'(t)$. У цьому полягає механічний зміст похідної.

Фізичний зміст похідної полягає у тому, що, коли функція $y = f(x)$ описує деякий фізичний процес, то похідна $y' = f'(x)$ є швидкістю зміни цього процесу.

Геометричний зміст похідної функції $y = f(x)$ у точці $x = x_0$ полягає у тому, що значення $f'(x_0)$ дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної до графіка цієї функції, проведеної у точці з абсцисою $x = x_0$, до додатного напрямку осі Ox , тобто кутовому коефіцієнту цієї дотичної. При цьому рівняння дотичної до графіка $y = f(x)$ у точці $P_0(x_0; f(x_0))$ має вигляд:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \quad (1)$$

Нормаллю до кривої називають пряму, що проходить перпендикулярно дотичній через точку дотику. Рівняння нормалі має вигляд:

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \quad (2)$$

Задача 1. Шлях s (у метрах), пройдений тілом за час t (у секундах) після початку руху, визначається за формулою

$$s = \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + 2t.$$

Обчислити швидкість та прискорення тіла у момент часу $t = 1$ с.

Розв'язання. За фізичним змістом похідної, швидкість тіла є похідною пройденого ним шляху за часом;

$$v = s'(t) = t^2 + t + 2.$$

У момент часу $t = 1$ с $v(1) = 1^2 + 1 + 2 = 4$ (м/с).

Прискорення є похідною швидкості:

$$a(t) = v'(t) = 2t + 1.$$

При $t = 1$ с $a(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$ (м/с²).

Задача 2. Закон радіоактивного розпаду виражається формулою $m = m_0 e^{-kt}$, де m_0 – маса радіоактивної речовини, що не розпалася, k – стала розпаду, t – час розпаду. Визначити швидкість розпаду у початковий момент часу.

Розв'язання. Швидкість розпаду у момент часу t дорівнює похідній функції $m = m_0 e^{-kt}$ за змінною t , тобто $v(t) = m'(t) = -km_0 e^{-kt}$. Підставивши у цю формулу значення $t = 0$, отримуємо швидкість радіоактивного розпаду у початковий момент часу: $v(0) = -km_0$. Знак « $-$ » тут свідчить, що кількість речовини з часом зменшується.

Задача 3. Сторони a та b прямокутника змінюються за законом $a = 3t + 1$, $b = 2t + 5$. З якою швидкістю змінюються його площа та периметр у момент часу $t = 5$?

Розв'язання. Площа прямокутника

$$S = ab = (3t + 1)(2t + 5) = 6t^2 + 17t + 5,$$

а його периметр $P = 2(a + b) = 10t + 12$.

Швидкість зміни площі: $v_1 = s'(t) = 12t + 17$, $v_1(5) = 77$,

Швидкість зміни периметра: $v_2 = p'(t) = 10$, $v_2(5) = 10$.

Задача 4. Довжина драбини дорівнює 5 м. Нижній кінець драбини починає відсуватися від стіни зі сталою швидкістю 2 м/с. З якою швидкістю опускається у момент часу t верхній кінець драбини? Чому дорівнює його прискорення у цей момент часу?

Розв'язання. За t секунд нижній кінець драбини пройде відстань у $2t$ метри. За теоремою Піфагора верхній кінець драбини знаходиться у цей час на висоті $h(t) = \sqrt{25 - 4t^2}$. Щоб знайти швидкість руху верхнього кінця драбини, знайдемо похідну від цієї функції:

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{4t}{\sqrt{25-4t^2}}.$$

Знак «–» свідчить про те, що висота, на якій знаходиться верхній кінець драбини, зменшується.

Знайдемо прискорення верхнього кінця драбини у момент часу t . Для цього знайдемо похідну від швидкості або другу похідну від $h(t)$:

$$\begin{aligned}\frac{d^2h}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(-\frac{4t}{\sqrt{25-4t^2}} \right) = -\frac{4\sqrt{25-4t^2} - 4t \cdot \left(-\frac{4t}{\sqrt{25-4t^2}} \right)}{(25-4t^2)} = \\ &= -\frac{100}{(25-4t^2)\sqrt{25-4t^2}}.\end{aligned}$$

Задача 5. Резервуар, що має форму півкулі, заповнюється водою. Радіус резервуара дорівнює R , швидкість його заповнення дорівнює v_l . Визначити швидкість v підвищення рівня води у резервуарі.

Розв’язання. Швидкість підвищення рівня води у резервуарі дорівнює похідній за часом від рівня води у ньому. Якщо рівень води у резервуарі дорівнює h , то $v = \frac{dh}{dt}$.

Знайдемо залежність $h(t)$.

Об’єм води V , що наповнює резервуар, обчислюється за формулою:

$$V = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right).$$

Маємо:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt} = (2\pi hR - \pi h^2) \frac{dh}{dt} = v_1.$$

Звідси знаходимо:

$$v = \frac{dh}{dt} = \frac{v_1}{2\pi hR - \pi h^2}.$$

Задача 6. Човен підтягують до берега з допомогою каната, який намотується на барабан з швидкістю 3 м/хв. Визначити швидкість руху човна у момент часу, коли він знаходиться від берега на відстані 25 м, якщо барабан знаходиться на березі вище поверхні води на 4 м.

Розв'язання. Нехай s – довжина канату між барабаном та човном, x – відстань від човна до берега. За умовою маємо:

$$s^2 = x^2 + 4^2.$$

Диференціюємо цю рівність за часом t . При цьому знаходимо співвідношення між швидкостями: $2s \frac{ds}{dt} = 2x \frac{dx}{dt}$.

Звідси знаходимо:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{s}{x} \cdot \frac{ds}{dt}.$$

Враховуючи, що

$$\frac{ds}{dt} = 3, x = 25, s = \sqrt{25^2 + 16} = \sqrt{641} \approx 25,3,$$

отримуємо швидкість руху човна

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{641} \cdot 3}{25} \approx 3,03 \text{ (м/хв)}.$$

Задача 7. Тіло масою 6 кг рухається прямолінійно за законом $s = -1 + \ln(t+1) + (t+1)^3$ м. Обчислити його кінетичну енергію через 1 с після початку руху.

Розв'язання. Кінетична енергія тіла обчислюється за формулою $K = \frac{mv^2}{2}$. Знайдемо швидкість руху тіла:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{1}{t+1} + 3(t+1)^2.$$

$$\text{Маємо: } v(1) = 12,5 \text{ м/с, } K = \frac{6 \cdot (12,5)^2}{2} = 468,75 \text{ Дж.}$$

Задача 8. Рух двох матеріальних точок вздовж прямої задано рівняннями $s_1 = 4t^2 + 2$ м та $s_2 = 3t^2 + 4t - 1$ м. Знайти швидкість руху точок у моменти, коли вони проходять однакові відстані.

Розв'язання. У момент часу, коли вони проходять однакові відстані, $s_1 = s_2$, $4t^2 + 2 = 3t^2 + 4t - 1$, $t^2 - 4t + 3 = 0$, $t_1 = 1$ с, $t_2 = 3$ с.

$$v_1 = \frac{ds_1}{dt} = \dot{s}_1 = 8t, \quad v_2 = \frac{ds_2}{dt} = \dot{s}_2 = 6t + 4,$$

$$v_1(1) = 8 \cdot 1 = 8 \text{ м/с}, \quad v_1(3) = 8 \cdot 3 = 24 \text{ м/с},$$

$$v_2(1) = 6 \cdot 1 + 4 = 10 \text{ м/с}, \quad v_2(3) = 6 \cdot 3 + 4 = 22 \text{ м/с}.$$

Задача 9. Кут α , на який повернеться колесо через проміжок часу t с, $\alpha = 3t^2 - 12t + 36$ рад. Знайти кутову швидкість ω в момент часу $t = 4$ с і визначити, у який момент часу колесо зупиниться.

Розв'язання. $\omega = \frac{d\alpha}{dt} = 6t - 12$ рад/с, $\omega(4) = 6 \cdot 4 - 12 = 12$ рад/с, $\omega = 0 \Rightarrow 6t - 12 = 0 \Rightarrow t = 2$ с.

Задача 10. Записати рівняння дотичної та нормалі до параболи $y = x^2 - 3x + 1$ у точці з абсцисою $x_0 = 2$.

Розв'язання. Рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою $x = x_0$ має вигляд (1):

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Маємо $x_0 = 2$, $f(x) = x^2 - 3x + 1$, $f(2) = 2^2 - 3 \cdot 2 + 1 = -1$,
 $f'(x) = 2x - 3$, $f'(2) = 2 \cdot 2 - 3 = 1$. Отже, за формулою (1),
отримуємо рівняння дотичної:

$$y + 1 = x - 2 \quad \text{або} \quad y = x - 3.$$

Рівняння нормалі у точці з абсцисою $x = x_0$ має вигляд
(2):

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Отже, отримуємо: $y + 1 = -(x - 2)$ або $y = 1 - x$.

Задача 11. Обчислити довжину відрізка дотичної до
кривої $y = e^x$ від точки дотику з абсцисою $x = 0$ до точки її
перетину з віссю Ox .

Розв'язання. Знайдемо ординату точки дотику:
 $f(0) = e^0 = 1$. Оскільки $y'(x) = e^x$, $y'(0) = 1$, то рівняння
дотичної набуває вигляду: $y - 1 = x$ або $y = x + 1$. У точці
перетину дотичної з віссю Ox $y = 0$, тобто $x + 1 = 0$, $x = -1$.
Точка A дотику має координати $(0; 1)$, координати точки B
перетину дотичної з віссю Ox $(-1; 0)$. Довжина відрізка AB
дорівнює:

$$AB = \sqrt{(-1-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{2}.$$

Задача 12. У якій точці дотична до кривої $y = \ln x$ паралельна прямій $y = x + 1$?

Розв'язання. Нехай ця точка має координати $(x_0; y_0)$. Тоді кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює значенню похідної у точці дотику, тобто $k = f'(x_0)$, $f(x) = \ln x$, $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f'(x_0) = \frac{1}{x_0}$. Оскільки дотична паралельна прямій $y = x + 1$, кутовий коефіцієнт якої дорівнює 1, то $f'(x_0) = \frac{1}{x_0} = 1$. Звідси $x_0 = 1$, $y_0 = f(x_0) = \ln 1 = 0$.

Отже, шуканою точкою є $(1; 0)$.

Задача 13. Під яким кутом перетинаються параболи $y = x^2$ та $x = y^2$?

Розв'язання. Дві прямі з кутовими коефіцієнтами k_1 та k_2 перетинаються під кутом, що визначається з рівності

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}.$$

Кут між двома кривими визначають як кут між дотичними до цих кривих, проведеними у точці перетину кривих. Знайдемо координати точки перетину кривих $y = x^2$ та $x = y^2$. Для цього розв'яжемо систему

$$\begin{cases} y = x^2, \\ x = y^2. \end{cases}$$

З неї отримуємо рівняння $x = x^4$, звідки знаходимо абсциси точок перетину $x_1 = 1$ та $x_2 = 0$. У точці з абсцисою $x_1 = 1$ ордината точки перетину $y_1 = x_1^2 = 1$.

Знайдемо кутові коефіцієнти дотичних до кривих $y = x^2$ та $y = \sqrt{x}$ у цій точці. Маємо $k_1 = (x^2)' \Big|_{x=1} = 2x \Big|_{x=1} = 2$,

$$k_2 = (\sqrt{x})' \Big|_{x=1} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Big|_{x=1} = \frac{1}{2}. \text{ Підставивши ці значення у вираз}$$

для $\operatorname{tg} \alpha = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}$, знаходимо:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 - \frac{1}{2}}{1 + 2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{3}{4}.$$

Отже, $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{3}{4}$.

У початку координат дотичною до параболи $y = x^2$ є вісь абсцис, до параболи $y = \sqrt{x}$ – вісь ординат, між якими маємо прямий кут.

Задача 14. Знайти абсцису точки, у якій дотичні до графіків функцій $y = x^2$ та $y = x^3$ є паралельними.

Розв'язання. $(x^2)' = 2x$, $(x^3)' = 3x^2$. Оскільки дотичні до графіків у шуканій точці є паралельними, то їх кутові коефіцієнти у цій точці рівні. Маємо $2x = 3x^2$, звідки знаходимо $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{2}{3}$.

Задача 15. Крива задана рівнянням $y = x^2 + 5x + 3$. Визначити кут між дотичними до кривої у точках з абсцисами $x_1 = -2$ та $x_2 = 0$.

Розв'язання. Похідна $y' = 2x + 5$. У точці з абсцисою $x_1 = -2$ кутовий коефіцієнт дотичної $k_1 = 2 \cdot (-2) + 5 = 1$, у точці з абсцисою $x_2 = 0$ $k_2 = 2 \cdot 0 + 5 = 5$. Тангенс кута між дотичними

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}.$$

Підставивши сюди значення кутових коефіцієнтів між дотичними, отримуємо $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5-1}{1+5 \cdot 1} = \frac{2}{3}$. Отже, кут $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{2}{3}$.

Задача 16. На кривій $y = x^3 - 3x + 5$ знайти точки, у яких дотична: 1) паралельна до прямої $y = -2x$; 2) перпендикулярна до прямої $y = -\frac{x}{9}$; 3) утворює з додатним напрямом осі Ox кут 45° .

Розв'язання. У точці дотику кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює похідній $y' = 3x^2 - 3$, обчислений у цій точці.

1) З умови паралельності маємо $3x^2 - 3 = -2$, звідси $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

2) З умови перпендикулярності прямих (добуток їх кутових коефіцієнтів дорівнює -1) знаходимо: $3x^2 - 3 = 9$, звідки $x_1 = -2$, $x_2 = 2$.

3) Оскільки $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$, то отримуємо рівність:

$$3x^2 - 3 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow x_{1,2} = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Домашнє завдання

1. Записати рівняння дотичної та нормалі до кривої $y = x^3 - 3x + 2$ у точці з абсцисою $x_0 = 2$.

Відповідь: $y = 9x - 14$, $y = -\frac{1}{9}x + \frac{38}{9}$.

2. Записати рівняння дотичних та нормалей до кривої $y = x^4 + 3x^2 - 16$ у точках її перетину з параболою $y = 3x^2$.

Відповідь: рівняння дотичних мають вигляд:
 $y - 12 = -44(x + 2)$, $y - 12 = 44(x - 2)$, рівняння нормалей
 $y - 12 = \frac{1}{44}(x + 2)$, $y - 12 = -\frac{1}{44}(x - 2)$.

3. Знайти кути між кривими $y = 4 - x$ та $y = 4 - \frac{x^2}{2}$ у точках їх перетину.

Відповідь: $\alpha_1 = 45^\circ$, $\alpha_2 = \arctg \frac{1}{3}$.

4. Залежність шляху від часу має вигляд: $s = t \ln(t + 1)$ м.
Знайти швидкість руху при $t = 2$ с.

Відповідь: $\approx 1,76$ м/с.

5. По параболі $y = x(8 - x)$ рухається точка так, що її абсциса змінюється у залежності від часу t за законом

$x = t\sqrt{t}$ м. Чому дорівнює швидкість зміни ординати у точці $M(1;7)$?

Відповідь: 9 м/с.

6. Закон прямолінійного руху матеріальної точки має вигляд $x = \frac{t^4}{4} - 4t^3 + 16t^2$. У які моменти часу її прискорення дорівнює нулю?

Відповідь: $\frac{4}{3}(3 \pm \sqrt{3})$ с.