

Гравитационная машина катастроф Постона (1978 г.).

Определим множество положений равновесия параболического сегмента на горизонтальной опорной поверхности в зависимости от расположения его центра масс $M(a,b)$. При равновесии тела центр масс должен лежать на вертикали, проходящей через точку касания тела с опорной поверхностью, поэтому число положений равновесия будет определяться количеством ситуаций, при которых отрезок, соединяющий центр масс тела с некоторой точкой на границе параболического сегмента, перпендикулярен касательной в этой точке.

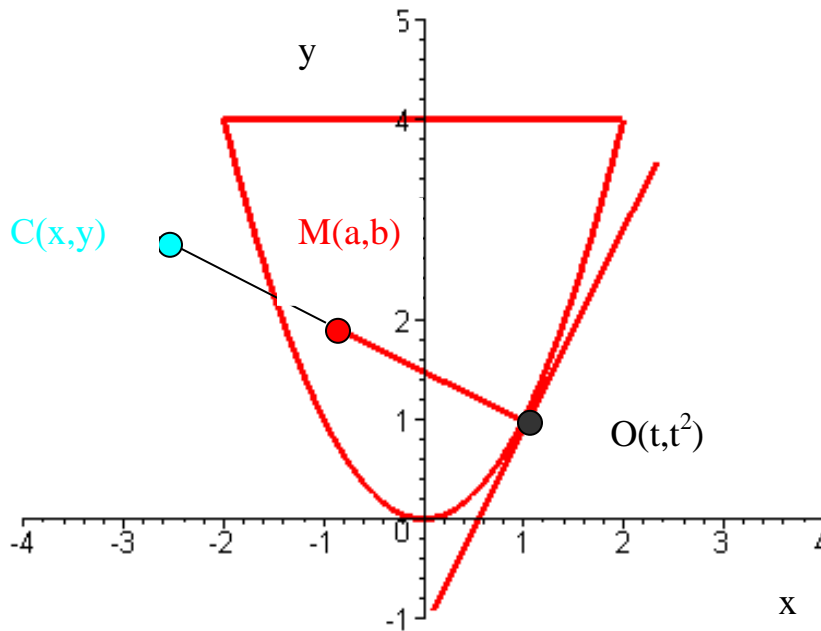


Рис.1.4.1

Определим уравнение прямой, проходящей через возможную точку контакта $O(t, t^2)$ и центр масс сегмента $M(a, b)$. Так как параметрическое уравнение параболы $x=t, y=t^2$, то вектор нормали в точке касания $\bar{n}_O = \{2t, -1\}$, с другой стороны, вектор $\overline{OM} = \{a-t, b-t^2\}$. Из условия их коллинеарности получим кубическое уравнение относительно параметра t :

$$2t^3 - t(2b - 1) - a = 0. \quad (1.4.1)$$

Последнее имеет либо три действительных корня, либо один. Множество точек (a,b) , разбивающих плоскость (xy) на области с различным числом решений (дискриминантное множество), в параметрической форме задается системой

$$\begin{aligned} a &= -4t^3; \\ b &= 1/2 + 3t^2. \end{aligned} \tag{1.4.2}$$

Однако, система (1.4.2) определяет и геометрическое место центров кривизны параболы, или ее эволюту. Действительно, координаты центра кривизны C (на расстоянии ρ от точки O вдоль прямой OC):

$$\begin{aligned} x_t &= t - \rho \sin \theta = -4t^3; \\ y_t &= t^2 + \rho \cos \theta = 3t^2 + 1/2, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \theta &= f'_x; \quad \sin \theta = \frac{f'_x}{\sqrt{1+(f'_x)^2}}; \quad \cos \theta = \frac{1_x}{\sqrt{1+(f'_x)^2}}; \\ \frac{1}{\rho} &= \frac{|f''_x|}{(1+(f'_x)^2)^{3/2}}; \quad \rho = 1/2(1+4t^2)^{3/2}. \end{aligned}$$

Таким образом, положению центра масс сегмента на эволюте соответствует кратное состояние равновесия; при переходе этой кривой чило стационарных состояний либо увеличивается, либо уменьшается на два. Области под полукубической параболой соответствует единственное положение равновесия – устойчивое (вспомните куклу «неваляшку»), а области выше дискриминантной кривой – три, одно из которых неустойчивое. Например, вертикальное положение равновесия (вершина параболы является точкой опоры) неустойчиво, если центр масс находится выше точки возврата полукубической параболы (в этом случае высота центра масс над опорной поверхностью превышает радиус кривизны, соответствующий вершине параболы). Даже при малых отклонениях центра масс от вертикали сегмент опрокинется (рис.1.4.2), система перейдет в одно из двух симметричных устойчивых положений равновесия (принцип Торичелли: тело стремится занять положение, при котором центр масс имеет наиболее низкое положение). Эта ситуация, когда малым изменениям параметров системы соответствуют скачкообразные переходы системы из одного состояние в другое как упоминалось выше называются катастрофами.

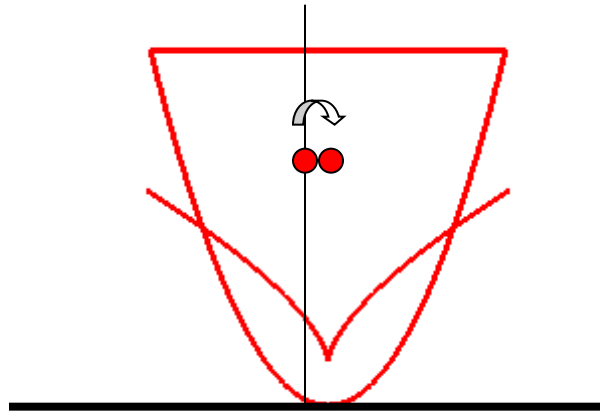


Рис.1.4.2

Обоснованием принципа Торичелли может служить теорема, доказанная Лагранжем (1788 г.):

Равновесие консервативной механической системы устойчиво в каждой точке, где потенциальная функция имеет локальный минимум.

Если центр масс параболического сегмента находится выше центра кривизны, то в вертикальном положении равновесия не достигается минимум потенциальной энергии, когда центр масс находится ниже точки возврата эволюты – в вертикальном положении равновесия потенциальная энергия системы имеет минимум. Покажем это с помощью вспомогательных геометрических построений.

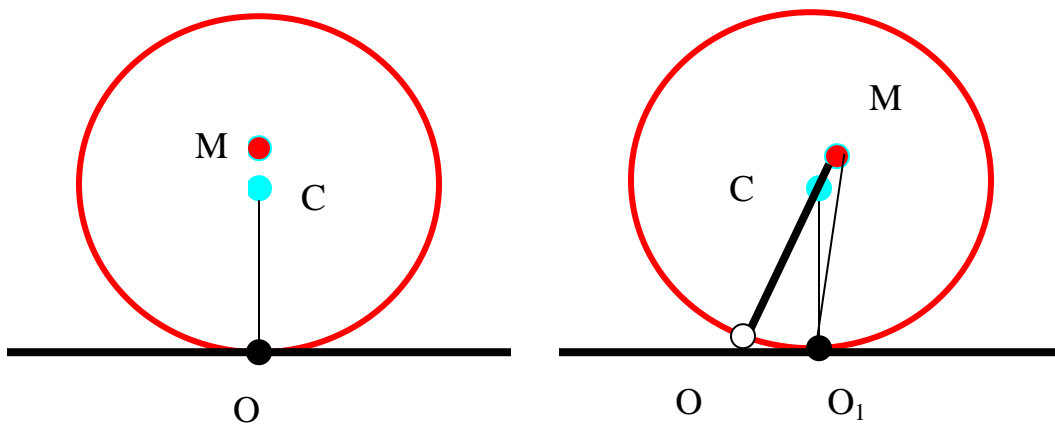


Рис.1.4.3

В малой окрестности вершины параболы ее можно аппроксимировать окружностью радиуса $\rho = CO$. Если перевести сегмент в произвольное близкое положение, например, контакт с опорной поверхностью будет в

точке O_1 (рис.1.4.3), то потенциальная энергия сегмента уменьшится, так как $OM > O_1M$ ($O_1C + CM > O_1M$).

Если центр масс лежит ниже центра кривизны (рис.1.4.4), то при перекачивании сегмента в произвольное близкое положение, он займет более «высокое» положение: $O_1M + MC > O_1C \rightarrow O_1M > OM$.

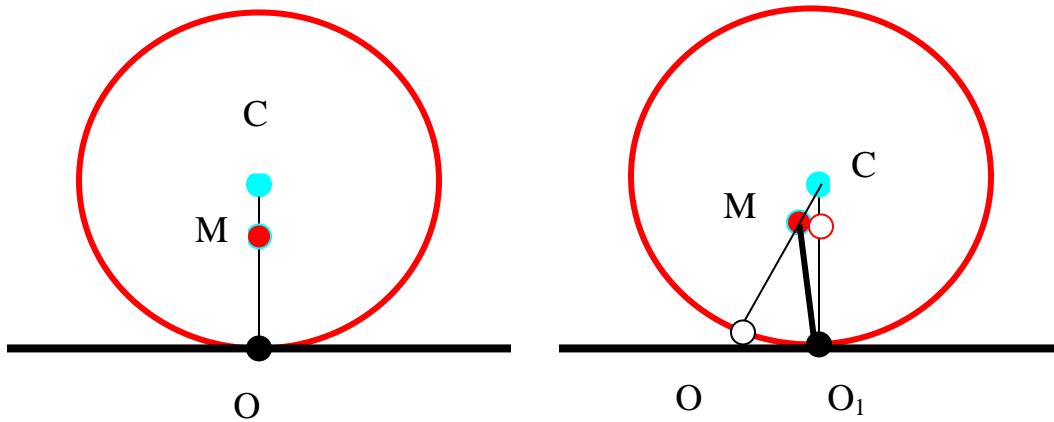


Рис. 1.4.4

Розглянутий нижче приклад розкриває просту геометричну картину дивергентної втрати стійкості при зміні характерного параметра системи, в результаті чого з'являється кратна особлива точка (дійсна біфуркація).

У цьому випадку висновок про стійкість стаціонарного стану може бути отриманий лише із залученням нелінійних членів системи в варіаціях (має місце критичний випадок одного нульового кореня). На рис.1 ілюструється біфуркація «виделки» - виникнення трикратного стаціонарного режиму при безперервній зміні параметра управління.

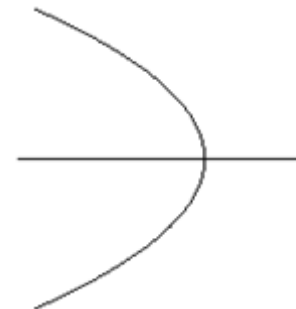
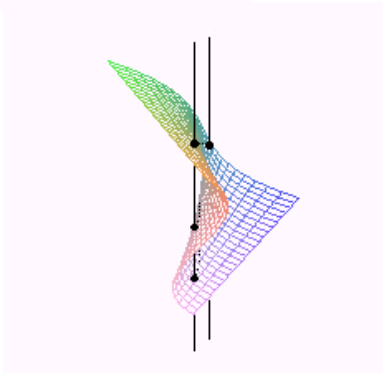


Рис.1

Реалізовані для випадку «виделки» біфуркації злиття і народження можуть бути представлені в символічному вигляді

$$O^{2,0} + (O_1^{1,1}, O_2^{1,1}) \Rightarrow O^{1,1}; \quad O^{2,0} \Rightarrow O^{1,1} + (O_1^{2,0}, O_2^{2,0}).$$

Тут перша цифра верхнього індексу особливої точки дорівнює числу коренів характеристичного рівняння з від'ємними дійсними частинами, друга - з додатними. Тоді індекс Пуанкаре $j(O^{2,0})=1$, а $j(O^{1,1})=-1$. Має місце «закон збереження» суми індексів Пуанкаре лівої і правої частин символічної рівності (до і після біфуркації). Для кривої стаціонарних станів з точкою повороту біфуркації злиття і народження можуть бути представлені в символічному вигляді (рис. 2)

$$(O_1^{2,0} + O_2^{1,1}) \Rightarrow \emptyset; \quad \emptyset \Rightarrow (O_1^{2,0} + O_2^{1,1}).$$



Рис.2

Точці повороту (точці злиття або народження) відповідає двократний стаціонарний режим «сідло-вузол». Поява точок повороту для систем з одним керуючим параметром, на відміну від розглянутої вище «виделки», є випадком загального положення (стійким чином реалізується при малих структурних змінах системи). У разі загального положення, тобто при структурних збуреннях, «виделка» розпадається на дві криві, у одній з яких є точка повороту (рис.3).



Рис.3. У разі загального положення і лише одного керуючого параметра біфуркація виделки структурно нестійка.

Існує певний набір структурно стійких особливостей, наприклад, згортка (fold); збірка (cusp); ластівчин хвіст (swallowtail); метелик (butterfly), що не зникають у разі малих структурних змін системи. Так, згортка (точка повороту) стійким чином реалізується в одновимірному просторі параметрів; збірка - в двовимірному просторі. Ластівчин хвіст і метелика можна «зловити» в просторі управління R^3 і R^4 відповідно (при наявності властивостей симетрії метелик може реалізовуватися і в тривимірному просторі параметрів). Застосування теорії особливостей в задачах аналізу динамічних систем отримали назву теорії катастроф (Р. Том) - кінцеві скачки в стані системи при нескінченно малих флуктуаціях її параметрів.

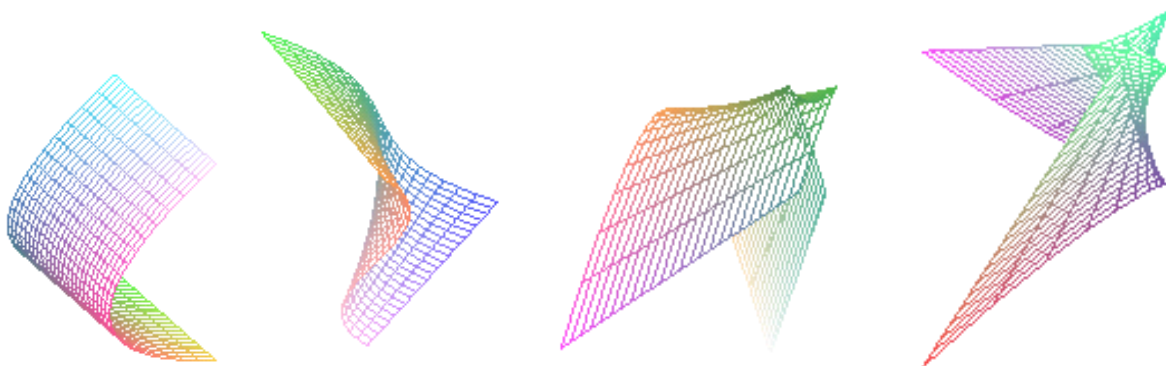


Рис.4 Згортка (fold), збірка (cusp), ластівчин хвіст (swallowtail), метелик (butterfly)

Первые четыре катастрофы (рис. 4) из знаменитой «великолепной семерки» Р.Тома: Складка (fold), сборка (casp), ласточкин хвост (swallowtail), бабочка (butterfly).

На рис.5 представлен графический образ простейшей бифуркации - складки: слияние двух особых точек с различными индексами Пуанкаре (узла и седла) либо рождения пары особых точек с противоположными индексами .

Перші чотири катастрофи (рис. 4) зі знаменитої «чудової сімки» Р.Тома: Складка (fold), збірка (casp), ластівчин хвіст (swallowtail), метелик (butterfly).

На рис.5 представлено графічний образ найпростішої біфуркації - складки: злиття двох особливих точок з різними індексами Пуанкаре (вузла і сідла) або народження пари особливих точок з протилежними індексами

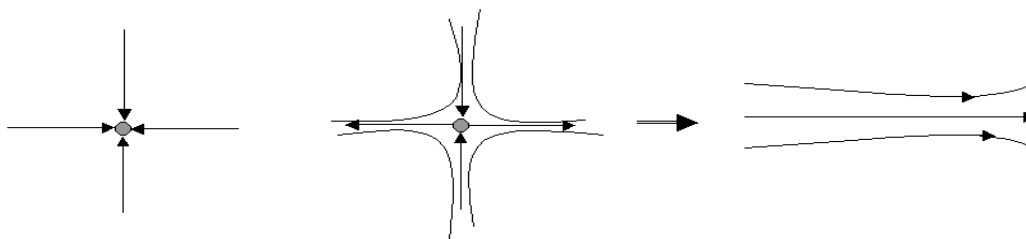
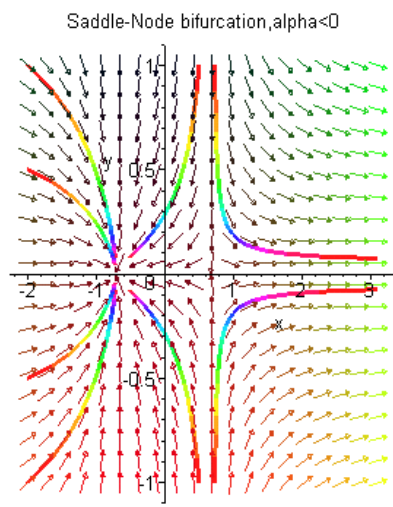


Рис.5

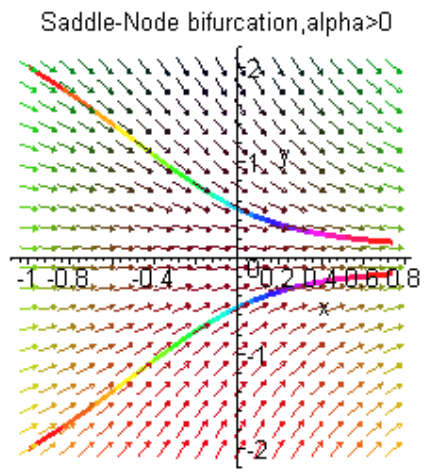
Рассмотрим конкретный пример реализации этой бифуркации (седло-узел) для двумерной динамической системы с одним управляющим параметром α

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x^2 + \alpha, \quad (x, y) \in R^2, \quad \alpha \in R; \\ \dot{y} &= -y. \end{aligned}$$

При $\alpha < 0$ система имеет две особые точки $(-\alpha^{1/2}, 0)$ и $(\alpha^{1/2}, 0)$. Первая – устойчивый узел, вторая – седло. При $\alpha > 0$ система не имеет особых точек (положений равновесия). При $\alpha = 0$ в начале системы координат реализуется двукратная особая точка седло-узел.



a)



б)

Рис. 6. Фазовые портреты: а) фазовый портрет системы $\alpha < 0$; б) фазовый портрет системы $\alpha > 0$

Отметим, что пара рассматриваемых особых точек в силу «закона сохранения» суммарного индекса должна иметь индексы $j = +1$ и $j = -1$.

Аналіз дивергентної втрати стійкості стаціонарних станів модельної системи

$$\begin{cases} x' = -\frac{kx}{\sqrt{1+(kx)^2}} + y = P(x, y); \\ y' = ax - by = Q(x, y). \end{cases} \quad (1)$$

Система рівнянь $P(x, y) = 0; Q(x, y) = 0$, що визначає множину стаціонарних станів, має один очевидний розв'язок – нульовий. Стаціонарним станам відповідають точки перетину кривих, які задаються рівнянням $P(x, y) = 0; Q(x, y) = 0$. В нашому випадку ці криві задаються системою (2):

$$\begin{cases} y = \frac{kx}{\sqrt{1+(kx)^2}}; \\ y = \frac{a}{b}x. \end{cases} \quad (2)$$

При $k > a/b$ маємо три розв'язки, при $k < a/b$ – один (нульовий).

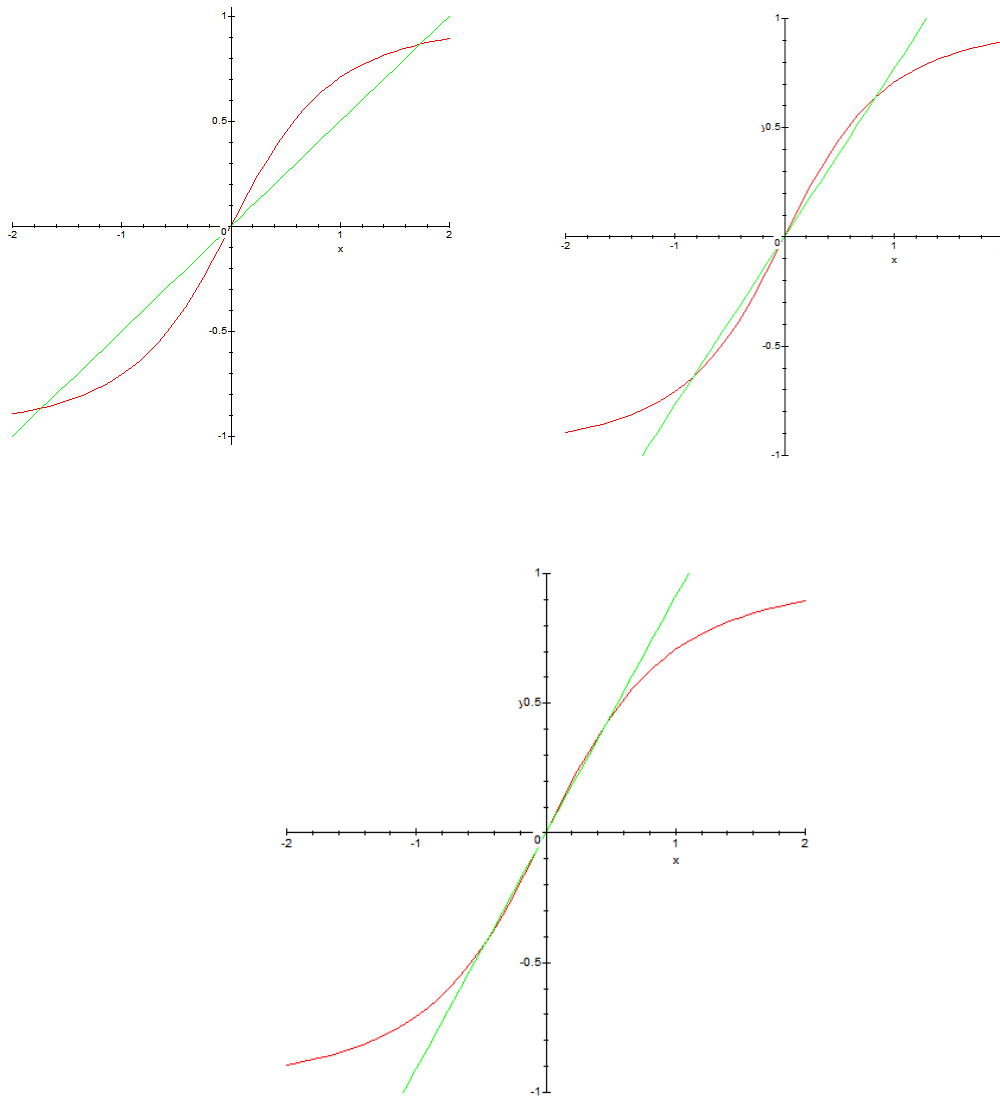
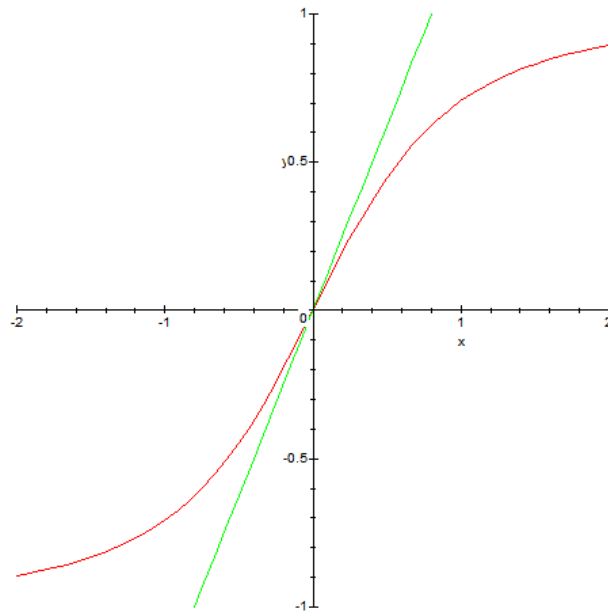


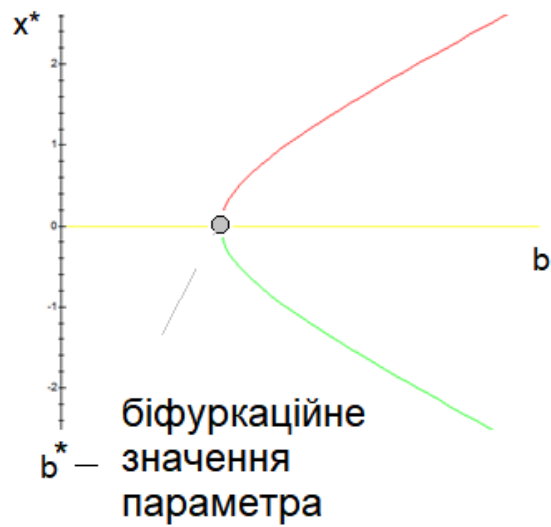
Рис.4.

На рис.4. представлена геометрична інтерпретація визначення стаціонарних станів системи (при $k > a/b$ система має три особливі точки);



при збільшенні нахилу прямої ($k < a/b$) – одну.

Наступний графік ілюструє множину стаціонарних станів системи (x^*) при зміні параметра керування b :



Стійкість початку координат визначається за лінійним наближенням

$$x' = -kx + y;$$

$$y' = ax - by.$$

Асимптотична стійкість при $k > a/b$ ($j=+1$) і нестійкість при $k < a/b$ ($j=-1$). Стійкість (асимптотична) має місце тоді, коли нахил першої ізокліни перевищує нахил другої (на це вказують умови стійкості системи лінійного наближення). В цьому випадку вихідна нелінійна система, крім асимптотично стійкої особливої точки на початку координат має ще пару особливих точок (рис. 4). Якщо ж нахил другої ізокліни перевищить нахил першої, то у вихідній нелінійній системі лишається лише сідлова особа точка ($j = -1$) на початку координат фазової площини, пара особливих точок зникає. Це свідчить про те, що зниклі особливі точки були сідловими. Дійсно, сумарний індекс Пуанкаре особливих точок не може змінитися при зміні параметрів, а у єдиної особливої точки, що залишилась, він дорівнює $j = -1$. Отже, сума індексів трьох особливих точок, одна з яких (на початку координат) мала індекс $+1$, дорівнює -1 , тобто дві інші мали індекс -1 .

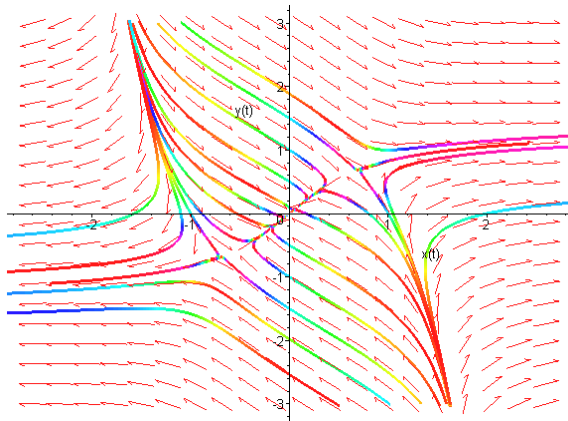


Рис.5

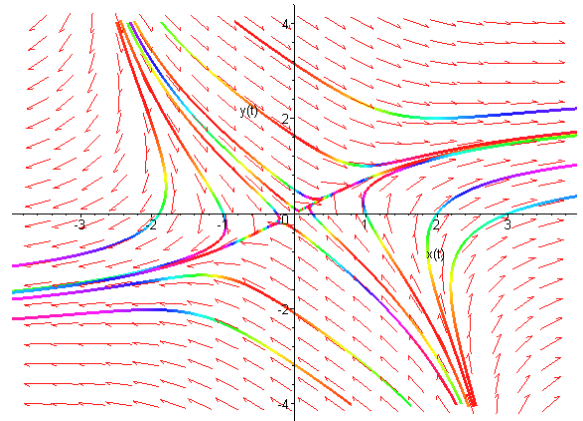


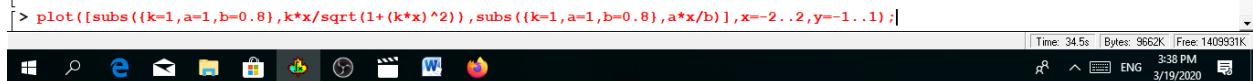
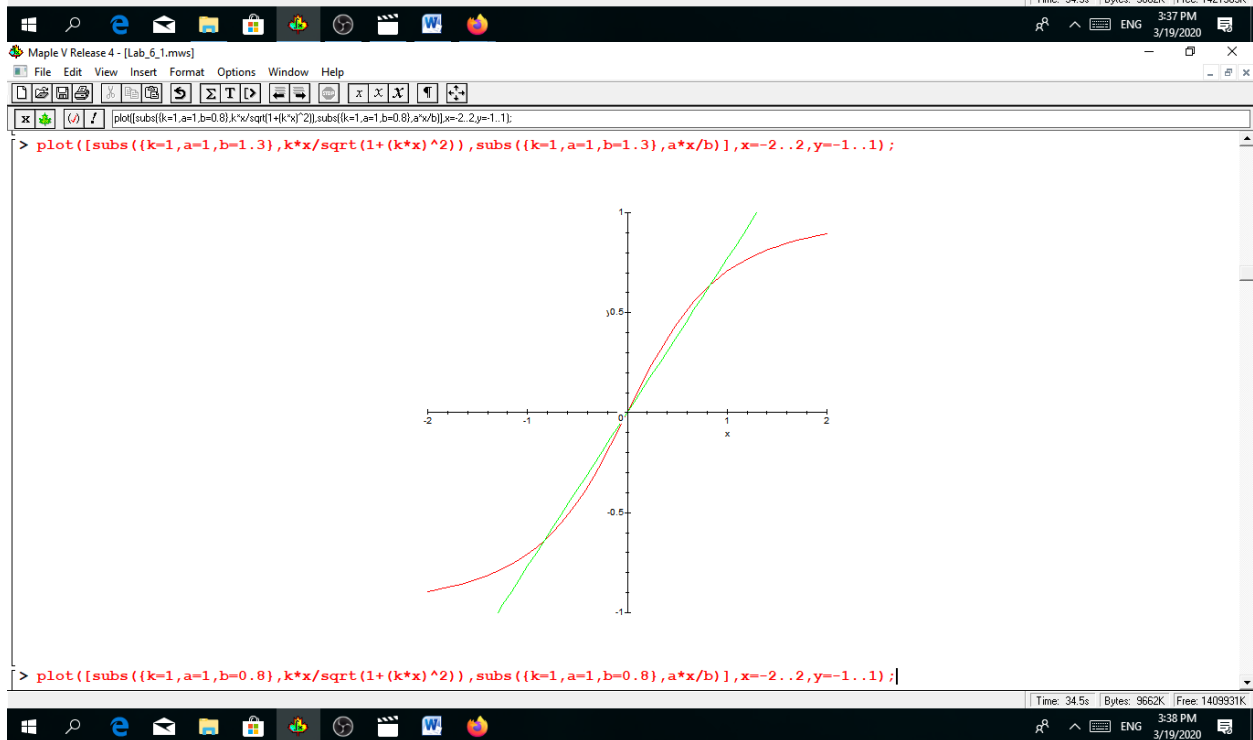
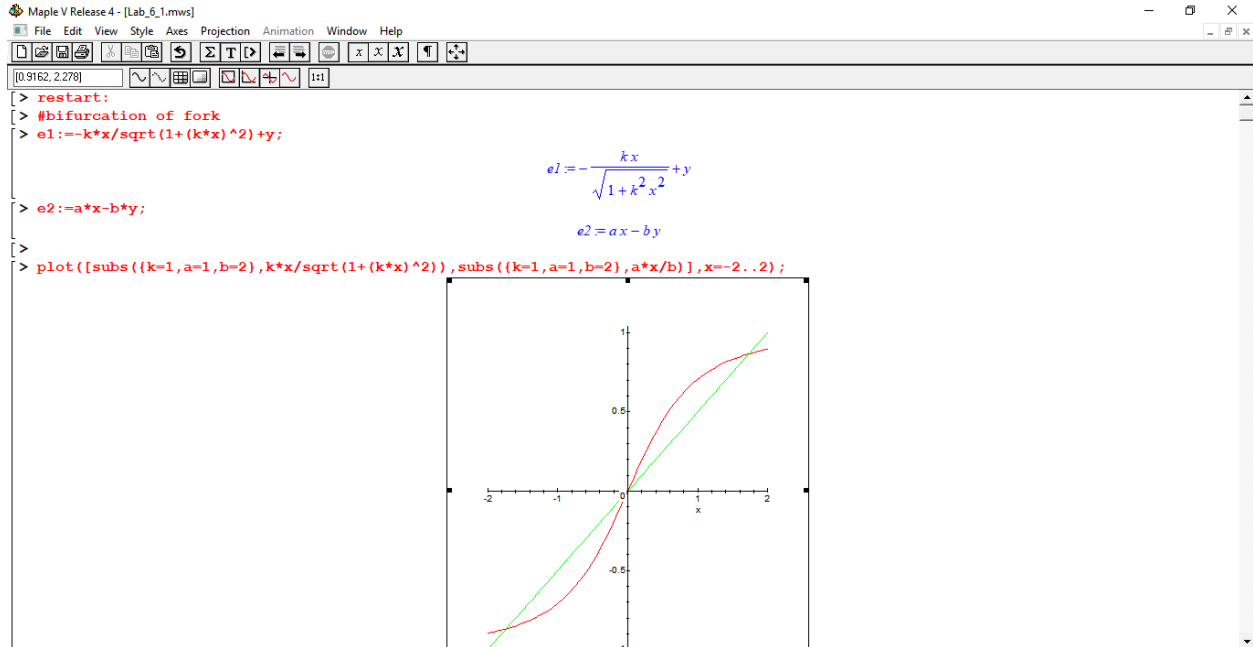
Рис.6

На рис.5 - 6 представлені фазові портрети системи: сідлові особливі точки при зменшенні параметра b ($k > a/b$) наближаються до початку координат (стійкого вузла); при $k = a/b$ на початку координат з'являється трикратна особлива точка (критичний за Ляпуновим випадок одного нульового кореня); при ($k < a/b$) на початку координат лишається проста особлива точка - сідло.

Питання для самоконтролю.

1. Визначити біфуркаційне значення параметра b^* .
2. Геометрична інтерпретація умов стійкості нульового розв'язку системи (1).
3. Безпечна чи небезпечна відбувається втрата стійкості нульового розв'язку системи (1).
4. Як визначити систему лінійного наближення для ненульових стаціонарних станів.
5. Який індекс Пуанкаре мають ненульові стаціонарні стани.
6. Який тип особливої точки на початку координат при $k \cdot b > a$.
7. Чи може реалізуватись на початку координат особлива точка типу «фокус».
8. Коли індекс Пуанкаре особливої точки не може бути визначений за системою лінійного наближення.
9. Яка ознака дивергентної втрати стійкості (алгебраїчна та геометрична) стаціонарного стану нелінійної динамічної системи.
10. Які структурні збурення приведуть до «руйнування» біфуркації виделки.

Продовжити аналіз модельної динамічної системи в Maple V (Лаб. 6)



Maple V Release 4 - [Lab_6_1.mws]

File Edit View Insert Format Options Window Help

$\text{plot}([\text{subs}(\{k=1, a=1\}, -a^2+k^2b^2)^{(1/2)/(a*k)}, \text{subs}(\{k=1, a=1\}, -a^2+k^2b^2)^{(1/2)/(a*k)}, 0], b=0..3);$

```

> solve(k*x/sqrt(1+(k*x)^2)=a*x/b, x);

```

$$0, \frac{\sqrt{-a^2+k^2b^2}}{ak}, -\frac{\sqrt{-a^2+k^2b^2}}{ak}$$

```

> plot([\text{subs}(\{k=1, a=1\}, (-a^2+k^2b^2)^{(1/2)/(a*k)}, \text{subs}(\{k=1, a=1\}, -(-a^2+k^2b^2)^{(1/2)/(a*k)}, 0)], b=0..3);]

```

Time: Touch keyboard 62K Free: 1406799K

3:39 PM 3/19/2020

Maple V Release 4 - [Lab_6_1.mws]

File Edit View Insert Format Options Window Help

$\text{plot}([\text{subs}(\{k=1, a=1\}, -a^2+k^2b^2)^{(1/2)/(a*k)}, \text{subs}(\{k=1, a=1\}, -a^2+k^2b^2)^{(1/2)/(a*k)}, 0], b=0..3);$

```

>

```

$$\text{ssl} := \{x = 0, y = 0\}$$

```

> with(linalg, jacobian):

```

Time: 2 new notifications (Quiet hours on)

3:39 PM 3/19/2020

Подібна симетрія характерна для моделей транспортних засобів, для яких властива еквівалентність правого-лівого поворотів. Тривіальний розв'язок для таких систем відповідає стаціонарному прямолінійному режиму. Будемо вважати, що при $v = v^+$, $\theta = 0$ відбувається дивергентна втрата стійкості тривіального розв'язку системи (1).

Стійкість нульового розв'язку при $v = v^+$ (критичний випадок одного нульового кореня) визначається першим ненульовим ляпуновським коефіцієнтом g_3 . Якщо $g_3 < 0$, симетричний розв'язок системи (1) асимптотично стійкий, а межа області стійкості в просторі параметрів є безпечною – малі варіації параметрів системи, що призводять до перетину безпечної межі стійкості, породжують лише обмежене зростання фазових змінних в околі симетричного розв'язку. У випадку $g_3 > 0$ симетричний розв'язок нестійкий, а межа області стійкості в просторі параметрів небезпечна – навіть малі варіації параметрів системи, що порушують нестійку межу стійкості в просторі параметрів, призводять до необмеженого зростання збурень фазових змінних в околі симетричного розв'язку. Причини цього механізму будуть пояснені на основі аналізу стаціонарних станів системи в околі симетричного розв'язку (дійсних біфуркацій стаціонарних станів).

2. Основна частина. Будемо вважати, що нуль є регулярним значенням правих частин системи (1) та, крім того, що вони можуть бути наближено представлені у вигляді

$$\begin{aligned} dx_1 / dt &= ax_1 + bx_2 + a_{30}x_1^3 + a_{21}x_1^2x_2 + a_{12}x_1x_2^2 + a_{03}x_2^3 + a_{50}x_1^5 + \dots, \\ dx_2 / dt &= cx_1 + dx_2 + b_{30}x_1^3 + b_{21}x_1^2x_2 + b_{12}x_1x_2^2 + b_{03}x_2^3 + b_{50}x_1^5 + \dots \end{aligned} \quad (2)$$

Так як при $v = v^+$, $\theta = 0$ відбувається дивергентна втрата стійкості тривіального розв'язку (система лінійного наближення має одне нульове власне значення), принаймні певні коефіцієнти системи лінійного наближення залежать від параметрів v , θ .

Лема 1. При критичних значеннях параметрів керування $\{v = v^*, \theta = \theta^*\}$ «нульові» ізокліни системи (1) у відповідній точці фазової площини (особливій точці, в якій відбувається дивергентна втрата стійкості) мають точку дотику порядку не менше двох (порядок дотику 1 – відповідає простому перетину кривих). Тобто, в цьому випадку реалізується кратна особлива точка.

Доведення. З умови дивергентної втрати стійкості стаціонарного режиму $x_1 = x_1^*$, $x_2 = x_2^*$, $v = v^*$, $\theta = \theta^*$ - набор критичних параметрів) випливає, що вільний член відповідного характеристичного рівняння дорівнює нулю

$$\det \begin{pmatrix} \partial f_1 / \partial x_1 \Big|_{x=x^*} & \partial f_1 / \partial x_2 \Big|_{x=x^*} \\ \partial f_2 / \partial x_1 \Big|_{x=x^*} & \partial f_2 / \partial x_2 \Big|_{x=x^*} \end{pmatrix} = 0.$$

З чого випливає лема 1, бо

$$\text{grad}\{\partial f_1/\partial x_1|_{x=x^*}, \partial f_1/\partial x_2|_{x=x^*}\} \parallel \text{grad}\{\partial f_2/\partial x_1|_{x=x^*}, \partial f_2/\partial x_2|_{x=x^*}\}.$$

Порядок дотику може бути визначений на основі аналізу кількості стаціонарних режимів системи в околі критичного набору параметрів керування.

Приклад. Реалізація дотику порядку три.

На рисунку 1 проілюстровано процес злиття стаціонарних станів системи: при докритичному значенні параметра керування існувало три простих перетини (три прості особливі точки); при закритичному значенні параметра керування існує один простий перетин (одна проста особлива точка); критичному значенню параметра відповідає трикратна особлива точка.

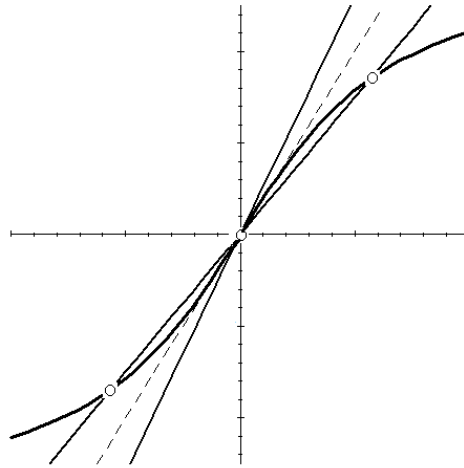


Рис.1. Ілюстрація біфуркації збірки (злиття особливих точок)

На рисунку 2 проілюстровано процес народження пари стаціонарних станів системи: при докритичному значенні параметра керування існував один простий перетин (одна проста особлива точка); при закритичному значенні параметра керування існує три простих перетини (три прості особливі точки); критичному значенню параметра відповідає трикратна особлива точка.

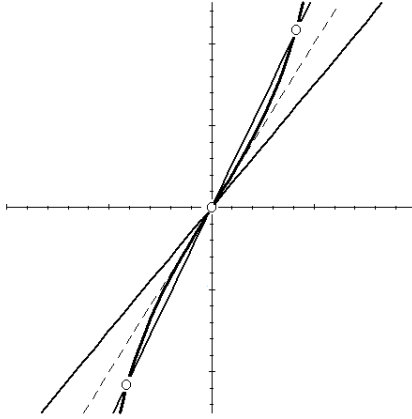


Рис.2. Ілюстрація біфуркації збірки (народження особливих точок)

Біфуркації злиття і народження можуть бути представлені в символічному вигляді
 $O^{2,0} + (O_1^{1,1}, O_2^{1,1}) \Rightarrow O^{1,1}; \quad O^{2,0} \Rightarrow O^{1,1} + (O_1^{2,0}, O_2^{2,0}).$

Тут перша цифра верхнього індексу особливої точки дорівнює числу коренів характеристичного рівняння з від'ємними дійсними частинами, друга - з додатними. Тоді індекс Пуанкаре $j(O^{2,0})=1$, а $j(O^{1,1})=-1$. Має місце «закон збереження» суми індексів Пуанкаре лівої і правої частин символічної рівності (до і після дійсної біфуркації). Біфуркації згортки - злиття і народження двох особливих точок можуть бути представлені в символічному вигляді

$$(O_1^{2,0} + O_2^{1,1}) \Rightarrow \emptyset; \quad \emptyset \Rightarrow (O_1^{2,0} + O_2^{1,1}).$$

Якщо при зміні параметрів керування зберігається ізольованість стаціонарного режиму (реалізується лише простий перетин ізоклін) індекс Пуанкаре залишається незмінним, що дозволяє опосередковано визначати індекс особливої точки; при додатковій умові, що стосується дивергенції векторного поля – $div(f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)) < 0$, гарантовано зберігається і стан стійкості стаціонарного режиму.

Теорема 1. Біфуркаційна множина динамічної системи (1) в малому околі критичного набору параметрів керування $v = v^+, \theta = 0$ задається дискримінантом визначального полінома третього степеня, а останній визначає множину стаціонарних станів в околі початку координат. Стан стійкості тривіального симетричного розв'язку системи (1) в критичному випадку та умови безпечної-небезпечної втрати стійкості визначає знак коефіцієнта при старшому мономі цього полінома (3) $\gamma = \gamma(v^+, \theta^+)$

$$\gamma x_2^3 + \beta x_2 + \alpha = 0, \quad \gamma = \gamma(v, \theta), \quad \beta = \beta(v), \quad \alpha = \alpha(\theta). \quad (3)$$

Доведення. Розглянемо систему (4), що визначає множину стаціонарних станів системи (1) з точністю до третього порядку малості в околі початку координат

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 + a_{30}x_1^3 + a_{21}x_1^2x_2 + a_{12}x_1x_2^2 + a_{03}x_2^3 &= 0; \\ cx_1 + dx_2 + b_{30}x_1^3 + b_{21}x_1^2x_2 + b_{12}x_1x_2^2 + b_{03}x_2^3 &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Розв'яжемо перше рівняння відносно x_1 та підставимо в друге рівняння, враховуючи члени лише до третього порядку

$$x_1 = -b/a x_2 + (a_{30}b^3 - a_{21}ab^2 + a_{12}a^2b - a_{03}a^3)/a^4 x_2^3 + \dots;$$

$$\beta = (c - da/b);$$

$$\gamma = [b^3(ab_{03} - ca_{30}) + ab^2(ca_{21} - ab_{21}) + a^2b(ab_{12} - ca_{12}) + a^3(ca_{03} - ab_{03})]/a^4.$$

Коефіцієнт $\gamma(v^+, \theta^+)$ з точністю до множника співпадає з першим ляпуновським коефіцієнтом g_3 .

При критичному значенні параметрів керування $v = v^+, \theta = \theta^+ : \beta(v^+) = 0, \alpha = 0$. При докритичному значенні параметрів $v = v^+ - \varepsilon, \theta = \theta^+$ рівняння (3) має вигляд

$$\gamma(v^+ - \varepsilon)x_2^3 + \beta(v^+ - \varepsilon)x_2 = 0,$$

при закритичному значенні $v = v^+ + \varepsilon, \theta = \theta^+$

$$\gamma(v^+ + \varepsilon)x_2^3 + \beta(v^+ + \varepsilon)x_2 = 0.$$

При умові, що $\gamma(v^+, \theta^+) \neq 0$ і достатньо малих ε будемо мати $\gamma(v^+ - \varepsilon) \cdot \gamma(v^+ + \varepsilon) > 0$, а $\beta(v^+ + \varepsilon) \cdot \beta(v^+ - \varepsilon) < 0$. Це дає можливість стверджувати, що при $v = v^+, \theta = \theta^+$ відбувається біфуркація збірки (реалізується трикратний стаціонарний режим) – в залежності від співвідношення знаків коефіцієнтів $\gamma(v^+)$ та $\beta(v^+ - \varepsilon)$:

- $\gamma(v^+) \cdot \beta(v^+ - \varepsilon) < 0$ - має місце злиття особливих точок у початку координат (рис.1);
- $\gamma(v^+) \cdot \beta(v^+ - \varepsilon) > 0 \Rightarrow \gamma(v^+) \cdot \beta(v^+ + \varepsilon) < 0$ - має місце народження пари стаціонарних станів у початку координат (рис.2).

Використовуючи інформацію про стан стійкості симетричного розв'язку ($v < v^+, \theta = 0$ - стійкість (вузол); $v > v^+, \theta = 0$ - нестійкість (сідло)) можна стверджувати: у випадку біфуркації злиття ($\gamma(v^+) \cdot \beta(v^+ - \varepsilon) < 0$) в початок координат приходять пара сідлових особливих точок - відповідна символічна реакція $O^{2,0} + (O_1^{1,1}, O_2^{1,1}) \Rightarrow O^{1,1}$; у випадку біфуркації народження ($\gamma(v^+) \cdot \beta(v^+ - \varepsilon) > 0$) з симетричного розв'язку (початок координат) виходить пара особливих точок з індексом Пуанкаре +1 - символічна реакція $O^{2,0} \Rightarrow O^{1,1} + (O_1^{2,0}, O_2^{2,0})$.

Біфуркації злиття відповідає нестійкість в критичному випадку і небезпечна втрата стійкості в сенсі М.М. Баутіна (при докритичній швидкості $v = v^+ - \varepsilon$ пара сідлових особливих точок звужують басейн притягання симетричного розв'язку, а при $v = v^+ + \varepsilon$ симетричному розв'язку відповідає ізольоване «сідло», тому збурення фазових змінних зростають необмежено). Біфуркації народження відповідає стійкість в критичному випадку і безпечна втрата стійкості в сенсі М.М. Баутіна (при докритичній швидкості $v = v^+ - \varepsilon$ симетричному розв'язку відповідає ізольований стійкий «вузол», а при закритичній швидкості $v = v^+ + \varepsilon$ - в малому околі «сідла» знаходяться дві стійкі особливі точки, які обмежують зростання збурень фазових змінних).

Локально біфуркаційна множина є напівкубічною параболою (дискримінант кубічного рівняння) з точкою загострення (каспом) в точці $v = v^+, \theta = 0$, при небезпечній втраті стійкості (біфуркація злиття) графік дискримінантної множини розташований нижче її вершини (додаткові сідлові стаціонарні режими існують при $v < v^+$); при безпечній втраті стійкості (біфуркація народження) графік дискримінантної множини

розташованій вище її вершини (в цьому випадку критична швидкість кругових стаціонарних режимів більша ніж критична швидкість прямолінійного режиму).

Велосипедная модель экипажа с упругими по И. Рокару колесами.
 Пусть m – масса и J – центральный момент инерции системы относительно вертикальной оси, a, b – расстояния центра масс экипажа до передней и задней колесных осей.

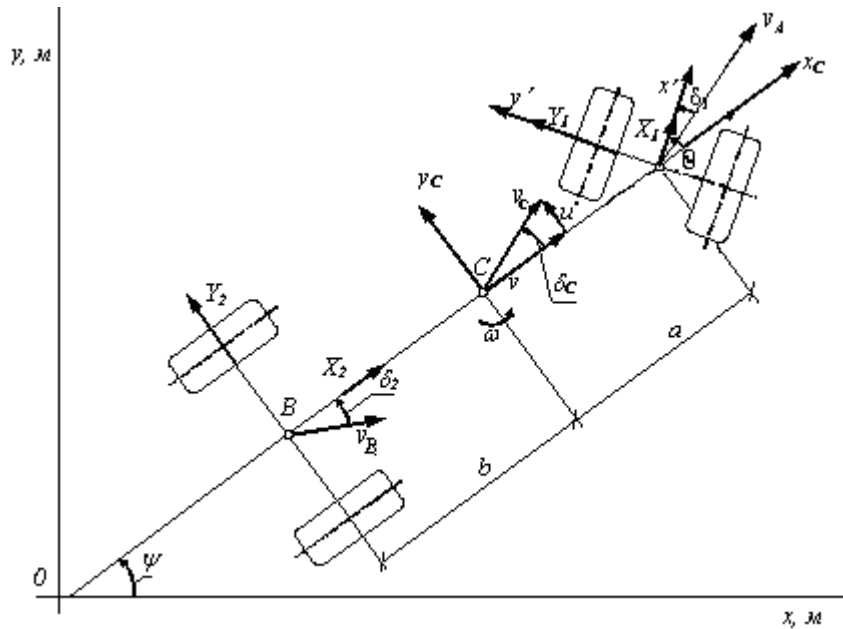


Рис. 1. Расчетная схема автомобиля с «жестким» управлением колесным модулем

Уравнения плоскопараллельного движения велосипедной схемы экипажа в предположении постоянства продольной составляющей скорости v имеют вид

$$\begin{aligned} m(\dot{u} + \omega v) &= Y_1 \cos \theta + Y_2; \\ J\dot{\omega} &= aY_1 \cos \theta - Y_2 b; \\ \delta_1 &= \theta - \operatorname{arctg} \frac{u + a\omega}{v}; \delta_2 = \operatorname{arctg} \frac{-u + b\omega}{v}, \end{aligned} \quad (1)$$

здесь u – поперечная составляющая скорости центра масс экипажа; ω – угловая скорость относительно вертикальной оси; v – продольная составляющая скорости центра масс; δ_1, δ_2 – углы увода на передней и задней осях. Силы увода Y_i определяются эмпирически и могут быть приближенно представлены различными аналитическими зависимостями, например, имеющих характер функции насыщения $Y_i(\delta_i) = k_i \delta_i (1 + \bar{k}_i^2 \delta_i^2 / \varphi_i^2)^{-1/2}$. В

линейном приближении сила увода пропорциональна коэффициенту увода $Y_i = k_i \delta_i, i = 1, 2$, пусть далее $\bar{k}_i = k_i / N_i$ - безразмерные коэффициенты бокового увода (N_i - вертикальные реакции на оси), $\bar{Y}_i = Y_i / N_i$ - безразмерные силы увода.

Радиус траектории точки на продольной оси автомобиля, скорость которой лежит вдоль продольной оси, может быть представлен в виде (следует из определения углов увода и определения угловой скорости радиуса-вектора R)

$$R = \frac{l}{\theta + \delta_2 - \delta_1}, \quad (2)$$

здесь $(\theta + \delta_2 - \delta_1)$ – угол Аккермана. Геометрический смысл угла Аккермана – угол между радиусами-векторами, соединяющими центр поворота с серединами передней и задней осей экипажа.

Следовательно, при движении экипажа (l - расстояние между передней и задней осями) по окружности радиуса R с различными значениями параметра скорости v (продольная составляющая скорости центра масс) угол Аккермана должен оставаться постоянным

$$l/R = \theta + \delta_2 - \delta_1.$$

Тогда значение угла поворота передних управляемых колес определяется соотношением

$$\theta = l/R - (\delta_2 - \delta_1). \quad (3)$$

1. Развитие графо-аналитического метода анализа стационарных режимов движения. Ниже предлагается графо-аналитический подход к определению второго слагаемого в выражении (3).

Система уравнений, определяющая множество стационарных режимов велосипедной модели автомобиля

$$\begin{aligned} -\frac{v}{g} \omega + \frac{\bar{Y}_1(\delta_1)b}{l} + \frac{\bar{Y}_2(\delta_2)a}{l} &= 0, \\ \bar{Y}_1(\delta_1) - \bar{Y}_2(\delta_2) &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

может быть сведена к одному определяющему уравнению [10]

$$\bar{Y}(\delta_2 - \delta_1) = \frac{v^2}{gl}(\theta + \delta_2 - \delta_1),$$

(5)

где $\bar{Y} = \bar{Y}(\delta_2 - \delta_1)$ кривая, определяемая безразмерными зависимостями сил увода на осях (рис.3)

$$\bar{Y} = \bar{Y}_1(\delta_1) = \bar{Y}_2(\delta_2).$$

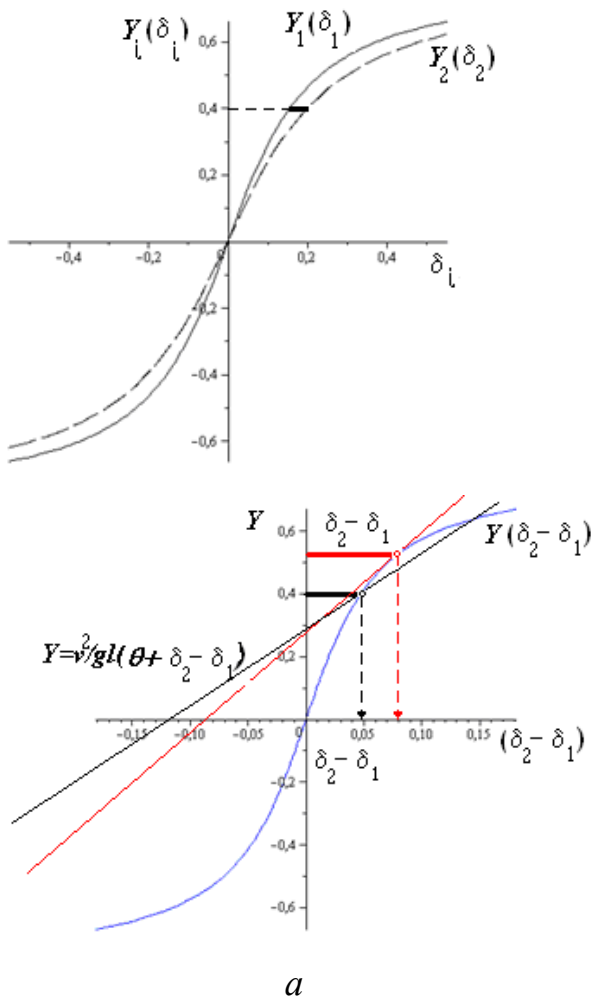


Рис.2. Построение неподвижной кривой $\bar{Y} = \bar{Y}(\delta_2 - \delta_1)$; а) – графики сил увода на передней и задней осях, как функции улов увода; б) – стационарные режимы, отвечающие движению характерной точки экипажа по траектории с фиксированным радиусом кривизны R .

Тангенс угла наклона подвижной прямой пропорционален квадрату продольной составляющей скорости центра масс автомобиля v^2 / gl , угол поворота управляемых колес θ определяет параллельный сдвиг прямой. Точкам пересечения подвижной прямой и неподвижной кривой соответствуют стационарные режимы модели: ордината точки пересечения \bar{Y} определяет удельное боковое ускорение центра масс в соответствующем стационарном режиме; ее абсцисса – разность углов увода на осях $(\delta_2 - \delta_1)$. Двум стационарным режимам с различными значениями параметра скорости v и одинаковым значением угла Аккермана (рис. 4, б) отвечает траектория с одним радиусом кривизны R , тогда ординаты соответствующих точек пересечения задаются соотношением $\bar{Y} = v^2 / gR$, а значения параметра θ получим как разность между углом Аккермана l/R и абсциссой этих точек пересечения $(\delta_2 - \delta_1)$

$$\theta = l/R - (\delta_2 - \delta_1).$$

При заданном значении параметра \bar{Y} соответствующее значение разности $(\delta_2 - \delta_1)$ определяется функцией $G(\bar{Y})$, обратной к функции $\bar{Y}(\delta_2 - \delta_1)$ [13].

Выделим этапы построения функции $(\delta_2 - \delta_1) = G(\bar{Y})$: исходными являются зависимости $\bar{Y}_1 = \bar{Y}_1(\delta_1)$, $\bar{Y}_2 = \bar{Y}_2(\delta_2)$; разрешив их относительно δ_i , находим $\delta_1 = F_1(\bar{Y})$, $\delta_2 = F_2(\bar{Y})$, а искомая функция находится как разность $(\delta_2 - \delta_1) = F_2(\bar{Y}) - F_1(\bar{Y}) = G(\bar{Y})$.

Определив функцию $G(\bar{Y})$, получим «кривую поворачиваемости»

$$\theta = l/R - (\delta_2 - \delta_1) = l/R - G(\bar{Y}), \quad (6)$$

которая в рамках линейной гипотезы увода ($\delta_2 - \delta_1 = (\frac{\bar{k}_2 - \bar{k}_1}{\bar{k}_1 \bar{k}_2}) \cdot \bar{Y}$) приводит к известной «прямой поворачиваемости»

$$\theta = l/R + (\frac{\bar{k}_2 - \bar{k}_1}{\bar{k}_1 \bar{k}_2}) a_y / g.$$

Все дальнейшие расчеты выполнялись при числовых значениях параметров $\bar{k}_1 = 3,3$; $\bar{k}_2 = 2,527$; $l=5$ м; $v_{kp} = 22,98$ м/с; $\varphi_1 = \varphi_2 = 0,8$; $R=30,5$ м, если их значения не оговариваются специально.

На рисунке 3 представлены графики прямой поворачиваемости и кривой поворачиваемости, показывающие влияние нелинейности сил увода.

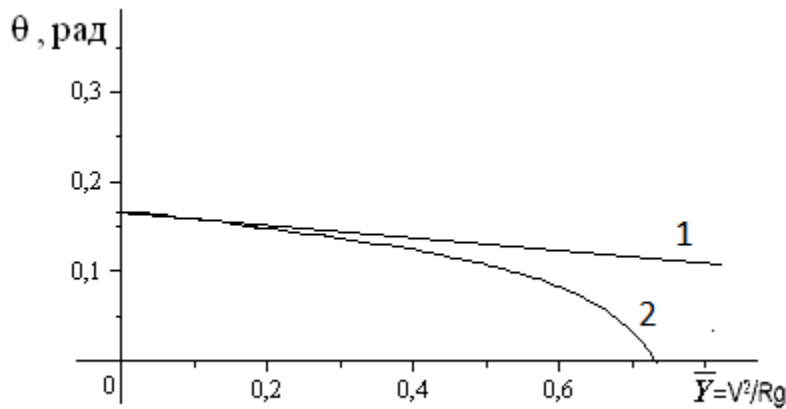


Рис.3. Кривая поворачиваемости: 1-линейная гипотеза увода ($\bar{Y}_i = \bar{k}_i \delta_i, i = 1,2$); 2- нелинейная гипотеза увода ($\bar{Y}_i(\delta_i) = \bar{k}_i \delta_i (1 + \bar{k}_i^2 \delta_i^2 / \varphi_i^2)^{-1/2}, \varphi_1 = \varphi_2 = 0,8$).

Далее будет удобно перейти от уравнения (5) к эквивалентному уравнению (7), выполнив переход к обратным функциям в левой и правой части уравнения (5)

$$G(\bar{Y}) = gl/v^2 \cdot \bar{Y} - \theta. \quad (7)$$

Нахождение круговых стационарных режимов на основе графо-аналитического подхода, использующего уравнение (7), предполагает знание двух параметров θ, v , далее необходимо вычислить наклон подвижной прямой, а после определения точек пересечения с неподвижной кривой $G(\bar{Y})$

), найти соответствующие точкам пересечения значения удельного бокового ускорения \bar{Y} и $\delta_2 - \delta_1$.

В случае круговых стационарных режимов, отвечающих фиксированному радиусу кривизны R , процедуру построений можно упростить, действительно, выбрав текущее значение удельного бокового ускорения $\bar{Y} = \frac{v^2}{gR}$, мы однозначно определяем одну точку пересечения подвижной прямой с неподвижной кривой $G(\bar{Y})$ (точка 1 на рисунке 4), далее определяется соответствующее величине \bar{Y} значение угла поворота управляемых колес θ (по графику кривой поворачиваемости – точка 2 на рисунке 4); последний шаг определение точки «3» с координатами $(0, -\theta)$, через которую должна проходить подвижная прямая.

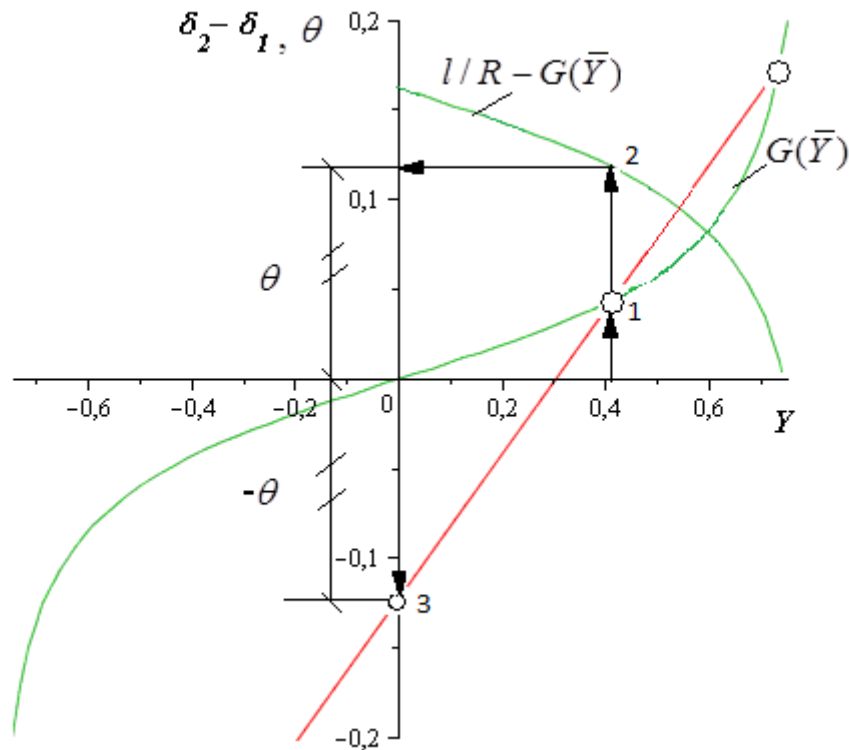


Рис.4. Иллюстрация к графо-аналитическому приему нахождения стационарных режимов, отвечающих заданному значению угла Аккермана.

Заметим, что если принять в качестве независимого аргумента $\bar{Y} = \frac{v^2}{gR}$ (при фиксированном значении R), то уравнение (7) будет задавать кривую поворачиваемости (6)

$$G(\bar{Y}) = gl/v^2 \cdot \frac{v^2}{gR} - \theta = l/R - \theta.$$

К анализу смены свойств поворачиваемости нелинейной модели двухосного экипажа. Из графика кривой поворачиваемости (рис.3) следует, что для смены характера поворачиваемости экипажа с избыточной на недостаточную, у функции $l/R - G(\bar{Y})$ должен появляться в первой четверти плоскости $(\bar{Y}, \delta_2 - \delta_1)$ локальный минимум, последнее связано с реализацией дополнительных точек перегиба; о существенной роли точек перегиба кривой $G(\bar{Y})$ будет идти речь в следующем параграфе.

В случае аппроксимации сил увода в виде монотонных зависимостей, имеющих характер кривых насыщения, для модели с недостаточной поворачиваемостью по линейному приближению ($\bar{k}_2 > \bar{k}_1$) необходимым условием перехода к избыточной поворачиваемости является условие $\varphi_1 > \varphi_2$; для модели с избыточной поворачиваемостью ($\bar{k}_2 < \bar{k}_1$) необходимым условием перехода к недостаточной поворачиваемости является условие $\varphi_1 < \varphi_2$; для принятых в работе зависимостей $\bar{Y}_i(\delta_i) = \bar{k}_i \delta_i (1 + \bar{k}_i^2 \delta_i^2 / \varphi_i^2)^{-1/2}$, переход реализуется при значении удельного бокового ускорения

$$V^2 / Rg = \varphi_1 \varphi_2 \sqrt{\frac{(\bar{k}_1)^{2/3} - (\bar{k}_2)^{2/3}}{\varphi_2^2 (\bar{k}_1)^{2/3} - \varphi_1^2 (\bar{k}_2)^{2/3}}}.$$

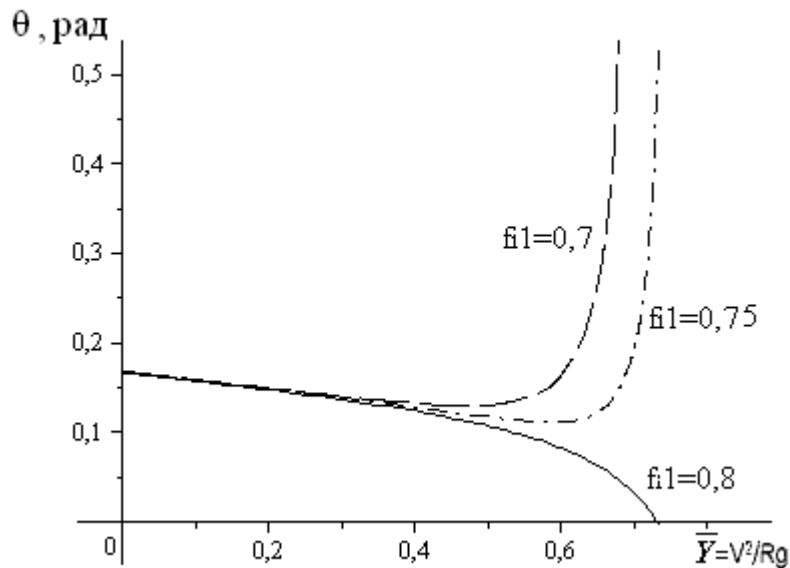


Рис.5. Кривые поворачиваемости при вариации коэффициента сцепления в поперечном направлении на передней оси.

2. Анализ дивергентной потери устойчивости многообразия круговых стационарных режимов движения; построение бифуркационного множества в плоскости параметров управления как двойственной кривой к кривой $G(Y)$.

Стационарным режимам системы (1) соответствуют точки пересечения неподвижной кривой $\delta_2 - \delta_1 = G(\bar{Y})$ и подвижной прямой $\delta_2 - \delta_1 = gl/v^2 \cdot \bar{Y} - \theta$. Оставим без исчерпывающего обоснования критерий определения устойчивости найденных стационарных режимов, представив лишь соответствующее практическое руководство [12,14,15]:

- 1) Для устойчивости стационарного режима наклон подвижной прямой должен быть больше наклона неподвижной кривой в соответствующей точке пересечения (заметим, что этот критерий изменится с точностью до, наоборот при переходе к графическому представлению на основе уравнения (5) (см. рисунок 2).
- 2) Дивергентная потеря устойчивости стационарного режима происходит лишь при реализации кратного стационарного режима – в момент касания подвижной кривой с неподвижной (рис.6).

Последний критерий гарантирует сохранение свойств устойчивости стационарного режима при его эволюции, вследствие изменения параметров управления, вплоть до момента реализации кратного стационарного режима.

Некоторая аргументация приведенного критерия. Дивергентная потеря устойчивости стационарных режимов, связана с появлением нулевого собственного значения. Следовательно, определитель матрицы системы линейного приближения, численно равный свободному члену характеристического уравнения, обращается в нуль. Последний факт приводит к выводу о касании кривых, определяющих множество стационарных режимов, в соответствующей точке.

Таким образом, бифуркационным значениям параметров v и θ отвечает касание подвижной прямой к кривой $G(\bar{Y})$, а все бифуркационное множество параметров порождает кривую двойственную к $G(\bar{Y})$. Ее параметрическое представление $\theta = \theta(Y)$, $v = v(Y)$ имеет вид

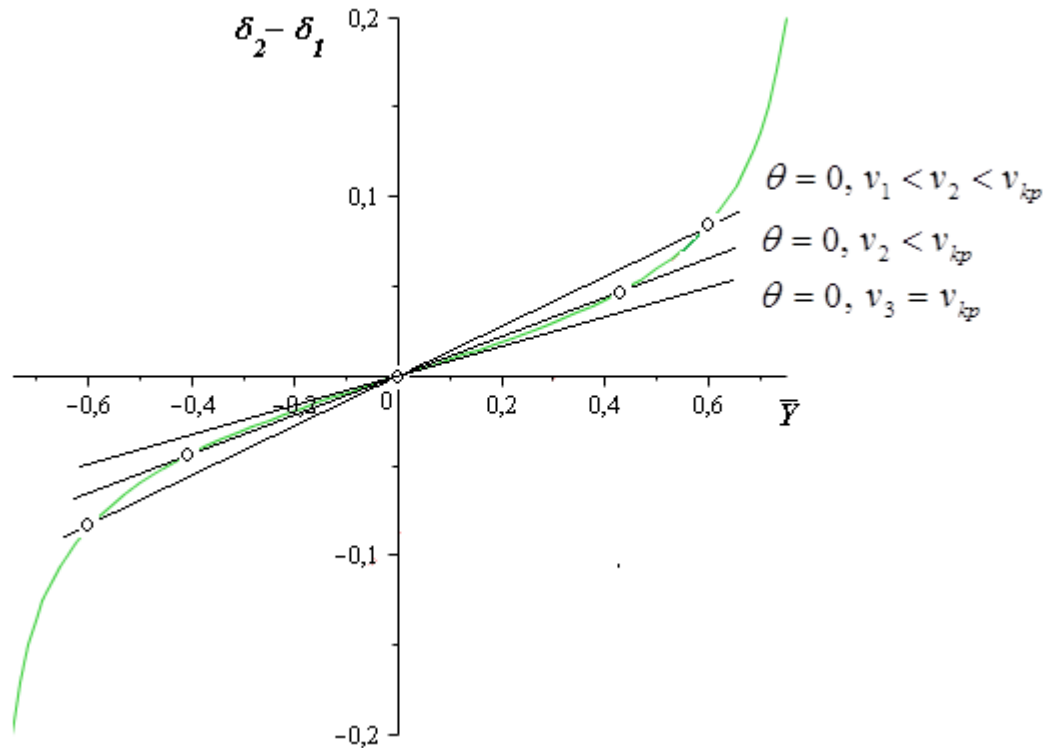
$$\begin{aligned} \theta &= Y \cdot G'(Y) - G(Y); \\ v &= \sqrt{\frac{gl}{G'(Y)}}. \end{aligned} \quad (8)$$

Точки возврата («каспы») двойственной кривой соответствуют точкам перегиба исходной кривой $G(\bar{Y})$.

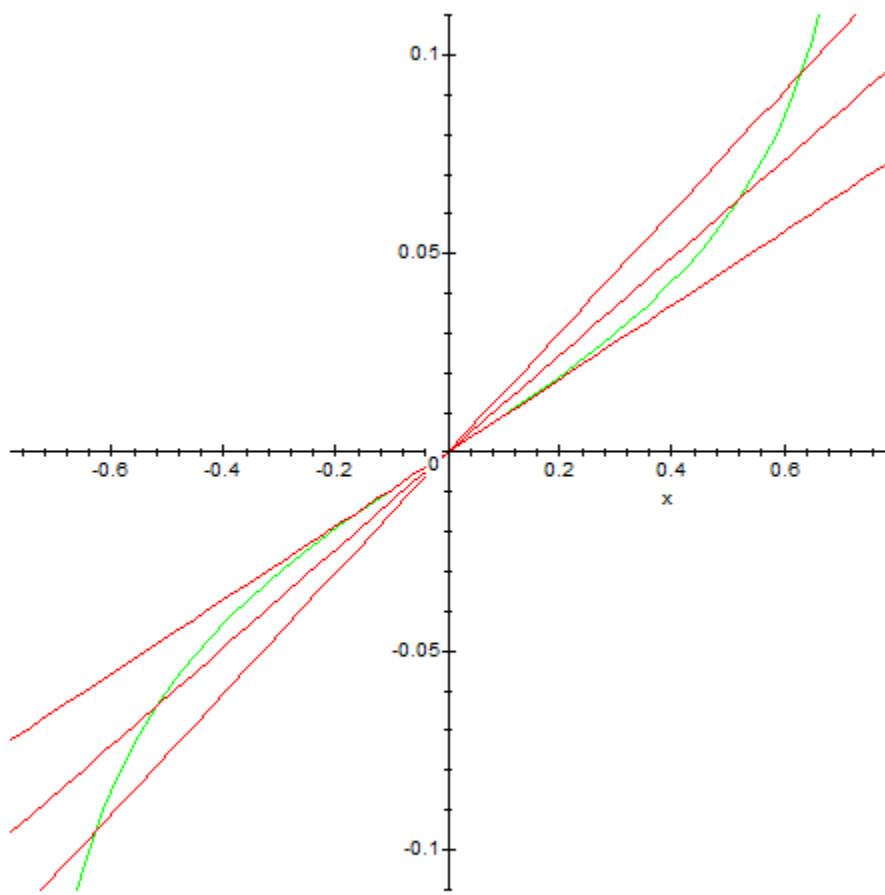
Покажем, что в случаях общего положения точке перегиба функции $G(\bar{Y})$ в начале координат соответствует трехкратный стационарный режим при $\theta = 0, v = v_{kp}$ (потеря устойчивости прямолинейного режима

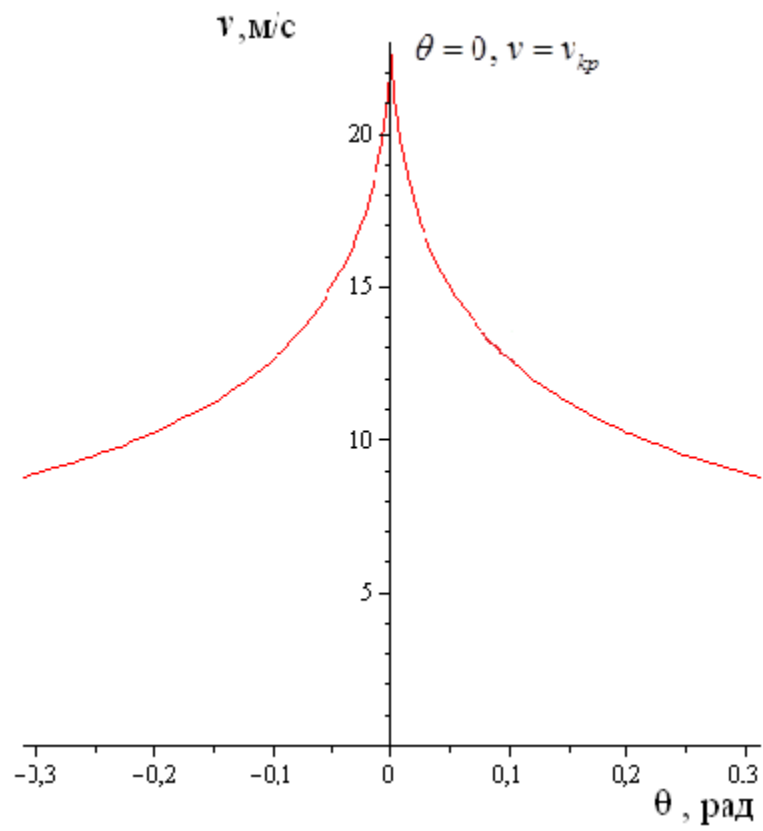
движения происходит вследствие прихода при $\theta = 0, v = v_{kp} = \left(\frac{\bar{k}_1 \cdot \bar{k}_2}{\bar{k}_1 - \bar{k}_2} gl\right)^{1/2}$

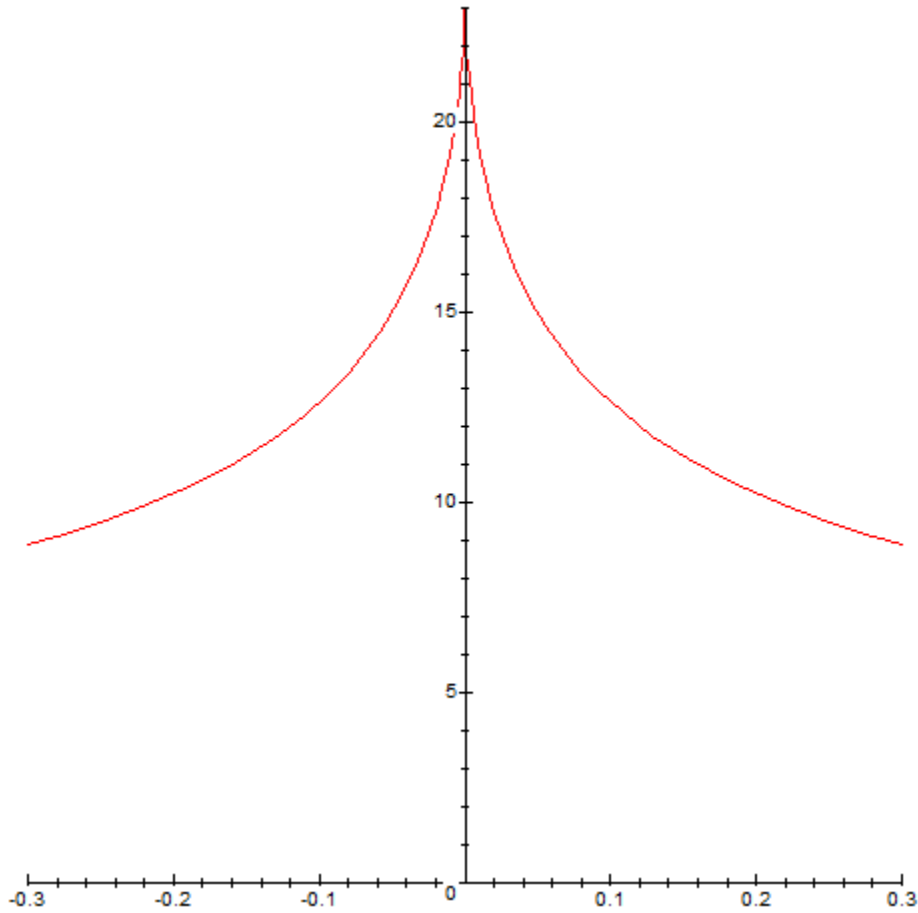
пары неустойчивых стационарных режимов, либо рождения пары устойчивых).



a)







b)

Рис.6. Дивергентная потеря устойчивости прямолинейного режима движения - случай одной точки перегиба кривой $G(\bar{Y})$: a) Иллюстрация механизма потери устойчивости прямолинейного стационарного режима движения модели экипажа с избыточной поворачиваемостью; b) Соответствующее критическое множество параметров (бифуркационное множество) представляет собой характерное сечение особенности «сборка».

В случае аппроксимации сил увода в виде монотонной зависимости (9)

$$\bar{Y}_i(\delta_i) = \bar{k}_i \delta_i (1 + \bar{k}_i^2 \delta_i^2 / \varphi_i^2)^{-1/2}, \quad (9)$$

первые два члена разложения функции $(\delta_2 - \delta_1) = G(\bar{Y})$ имеют вид

$$G(\bar{Y}) = (\bar{k}_2^{-1} - \bar{k}_1^{-1})\bar{Y} + \frac{1}{2}(\bar{k}_2^{-1}\varphi_2^{-2} - \bar{k}_1^{-1}\varphi_1^{-2})\bar{Y}^3 + \dots, \quad (10)$$

а уравнение (7) будет представлено полиномом третьей степени (11) (определяет множество стационарных режимов в малой окрестности прямолинейного режима движения)

$$(\bar{k}_2^{-1} - \bar{k}_1^{-1})\bar{Y} + \frac{1}{2}(\bar{k}_2^{-1}\varphi_2^{-2} - \bar{k}_1^{-1}\varphi_1^{-2})\bar{Y}^3 = gl/v^2 \cdot \bar{Y} - \theta. \quad (11)$$

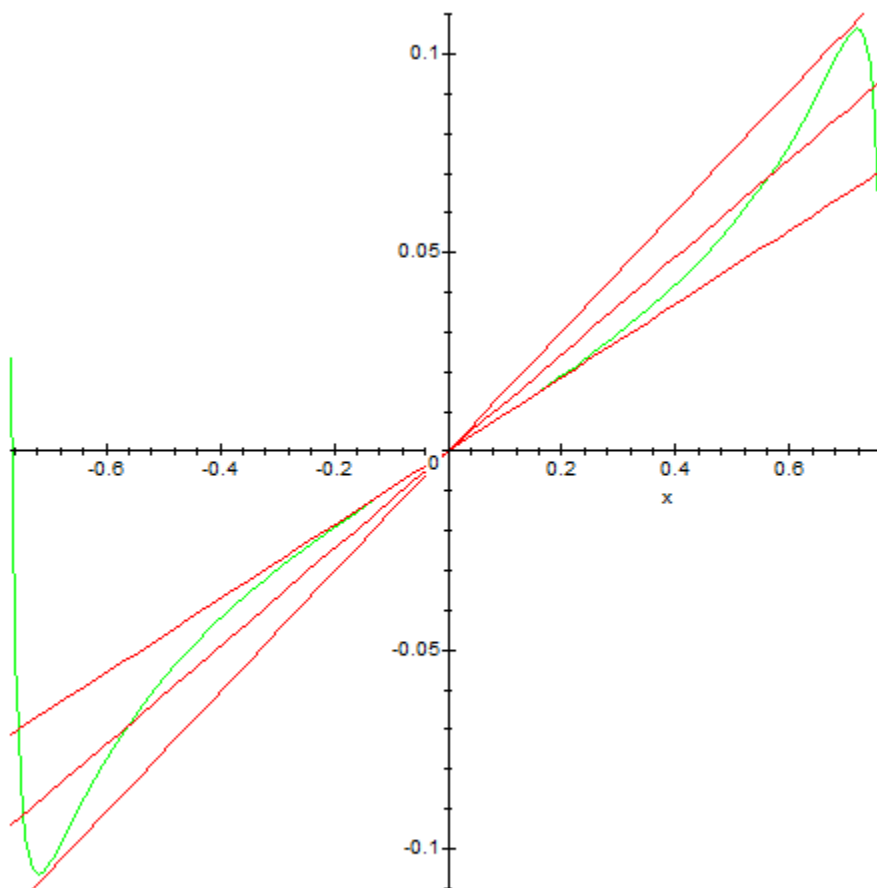
Проведем анализ числа решений уравнения (11) в малой окрестности критической скорости $v = v_{kp}$ (предполагается, что $\bar{k}_1 > \bar{k}_2$, $\theta = 0$). Уравнение (11) при этих предположениях можно привести к виду

$$gl/v_{kp}^2 \cdot (1 - \frac{v_{kp}^2}{v^2})\bar{Y} + \frac{1}{2}(\frac{\bar{k}_1\varphi_1^2 - \bar{k}_2\varphi_2^2}{\bar{k}_1\varphi_1^2 \cdot \bar{k}_2\varphi_2^2})\bar{Y}^3 = 0,$$

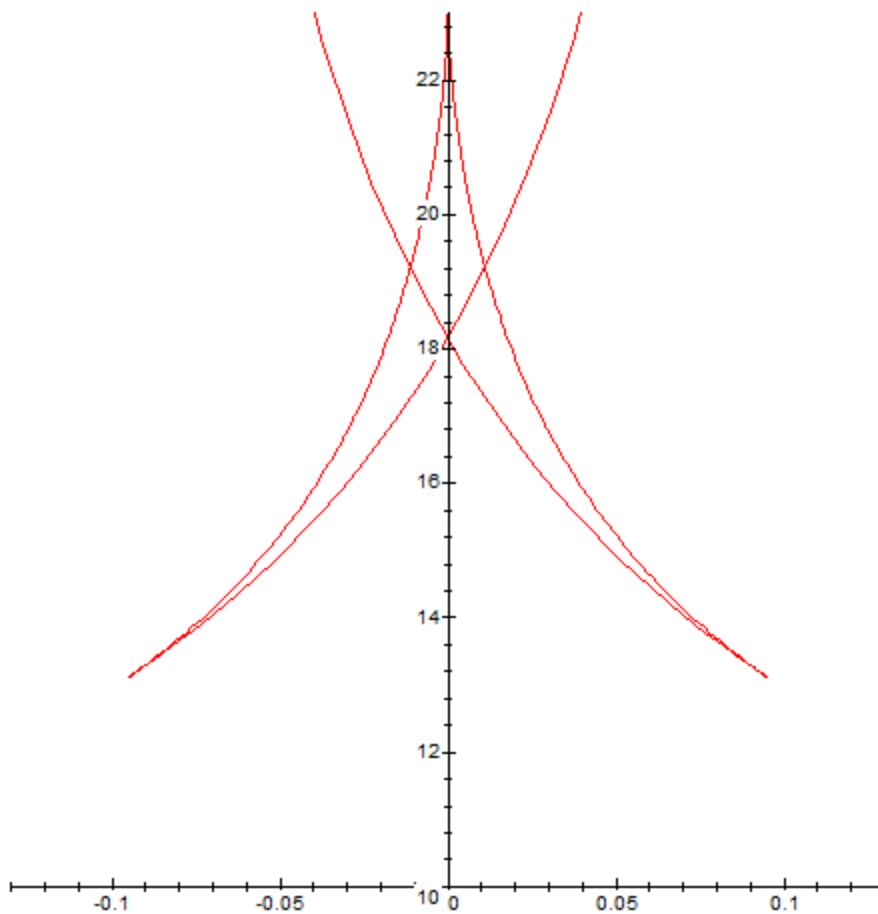
тогда при $v < v_{kp}$ и $\bar{k}_1\varphi_1^2 > \bar{k}_2\varphi_2^2$ имеем три стационарных режима (один устойчивый и два неустойчивых), а при $v > v_{kp}$ и $\bar{k}_1\varphi_1^2 > \bar{k}_2\varphi_2^2$ - один (неустойчивый). Если $\bar{k}_1\varphi_1^2 < \bar{k}_2\varphi_2^2$, то при $v > v_{kp}$ имеем три стационарных режима (один неустойчивый и пара устойчивых) – случай рождения пары устойчивых стационарных режимов. Таким образом, в случаях общего положения ($\bar{k}_1\varphi_1^2 \neq \bar{k}_2\varphi_2^2$), при $\theta = 0$, $v = v_{kp}$ реализуется трехкратный стационарный режим в начале координат; если выполняется соотношение $\bar{k}_1\varphi_1^2 = \bar{k}_2\varphi_2^2$, то для дальнейшего анализа необходимо привлекать члены разложения функции $G(\bar{Y})$ до пятого порядка включительно. Бифуркационное множество (вернее, его часть в достаточно малой окрестности точки $\theta = 0$, $v = v_{kp}$) получим в виде полукубической параболы – геометрическое место точек, удовлетворяющих уравнению $\text{Discrim3}(\theta, v) = 0$, где $\text{Discrim3}(\theta, v)$ – дискриминант уравнения (11). Точке возврата (каспу) полукубической параболы соответствуют параметры управления, отвечающие трехкратному прямолинейному стационарному режиму ($\theta = 0$, $v = v_{kp}$), остальным точкам дискриминантного множества отвечают двукратные круговые стационарные режимы с достаточно большим значением радиуса кривизны. Поверхность равновесных состояний системы (1) в этом случае имеет особенность «сборки» - клиновидной части плоскости параметров, образованной полукубической параболой, отвечают три стационарных режима на равновесной поверхности, остальным точкам плоскости параметров - один стационарный режим. Для реализации в

симметричной модели экипажа (1) особенности более высокого ранга - «бабочки» (соответствует стационарному режиму кратности пять) потребуются расширение пространства параметров, в котором возможны дополнительные критические наборы параметров (наряду с $\theta = 0, v = v_{kp}$ потребуется выполнение еще условия $\bar{k}_1 \varphi_1^2 = \bar{k}_2 \varphi_2^2$).

Рисунок 7, b) иллюстрирует изменения бифуркационного множества при вариации «внутреннего» параметра φ_1 , что объясняется появлением дополнительных точек перегиба на кривой $G(\bar{Y})$ (рис.7, a)).



a) $v=18,20,23$; $fi1:=0.785$;

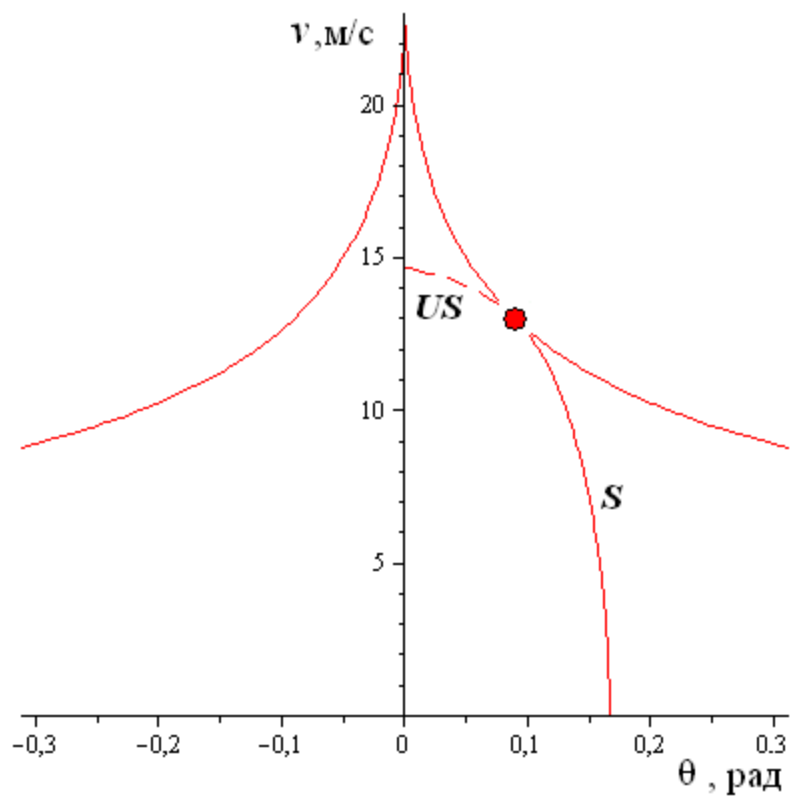


b) $f_{i1}:=0.785$;

Рис.7. Дивергентная потеря устойчивости прямолинейного режима движения - случай трех точек перегиба кривой $G(\bar{Y})$: *a)* Иллюстрация механизма потери устойчивости прямолинейного стационарного режима движения модели экипажа с избыточной поворачиваемостью; *b)* Соответствующее критическое множество параметров (бифуркационное множество) предстает собой характерное сечение особенности «бабочка».

Перейдем к анализу дивергентной потери устойчивости стационарных круговых режимов, удовлетворяющих кривой поворачиваемости. Так как рассматриваемый случай является частным случаем потери устойчивости кругового стационарного режима, это дает возможность при совмещении диаграммы устойчивости (бифуркационного множества) и кривой поворачиваемости на одной координатной плоскости определить их общие

точки (если такие имеются), в противном случае, стационарным режимам, отвечающим кривой поворачиваемости, дивергентная потеря устойчивости несвойственна.



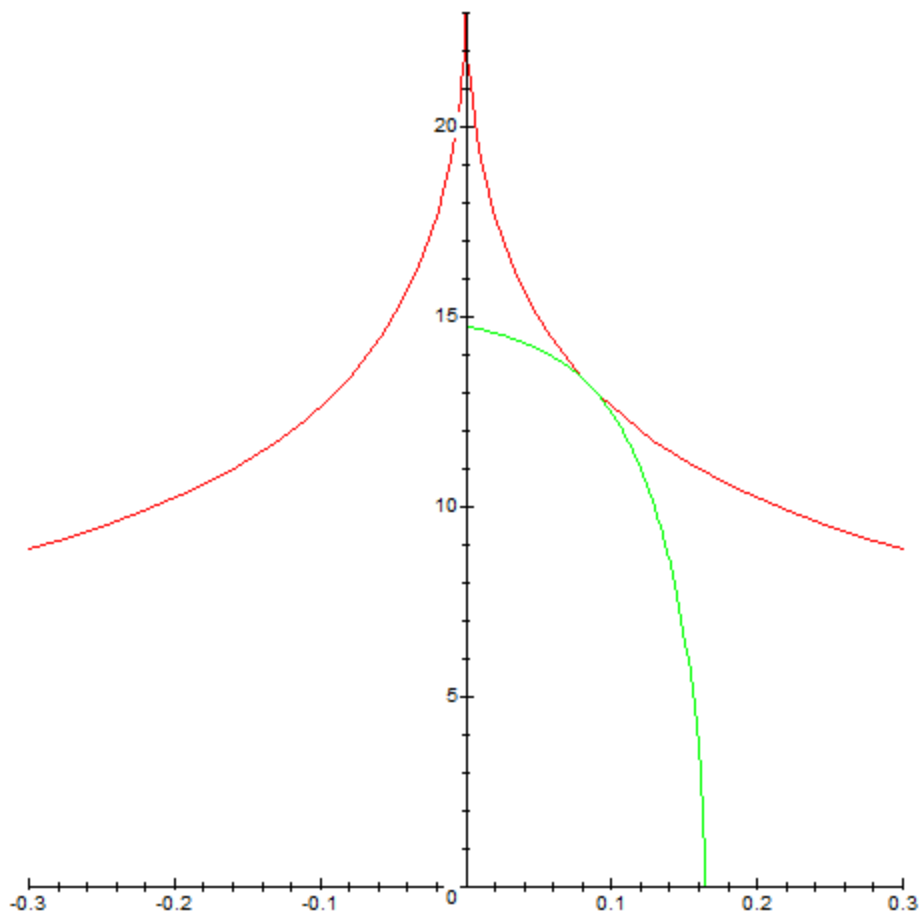


Рис.8. Определение параметров управления при дивергентной потере устойчивости стационарных режимов, отвечающих кривой поворачиваемости, с использованием бифуркационной диаграммы.

При достижении изображающей точки параметров управления, соответствующей кривой поворачиваемости, бифуркационного множества (точка касания двух кривых на рисунке 8), устойчивый до этого момента круговой стационарный режим, сливается с одним из двух неустойчивых стационарных режимов, при этом происходит обмен свойств устойчивости между ними. Напомним, каждой точке параметров из клиновидной области соответствуют три стационарных режима (в данном случае один устойчивый и два неустойчивых, двухкратный режим может реализоваться лишь при слиянии устойчивого и неустойчивого режимов). Это подтверждается графо-аналитическим анализом устойчивости стационарных режимов (рис.9) по

соотношению наклонов подвижной прямой и касательной к неподвижной кривой в интересующей нас точке пересечения.

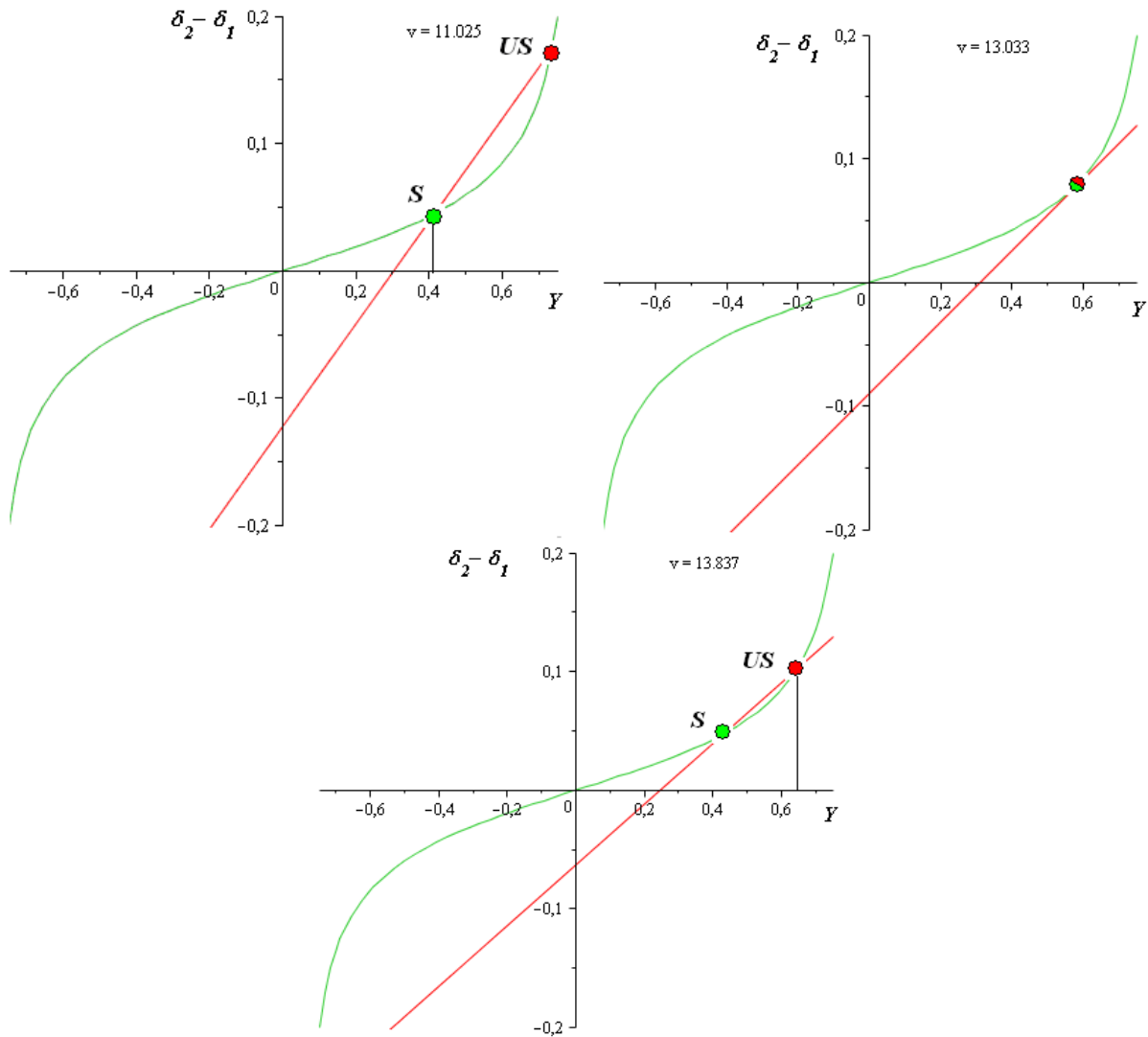


Рис.9. Иллюстрация дивергентной потери устойчивости стационарного режима, отвечающего кривой поворачиваемости, через реализацию 2-х кратного стационарного режима.

При реализации стационарного кругового режима движения ($R = 30.5$ м) с возрастающими значениями продольной скорости Ц.М., потеря устойчивости

происходит при скорости $v_{R=30,5}^+ \approx 13$ м/с (рис.9); пунктирной части кривой поворачиваемости соответствуют неустойчивые круговые режимы (рис.8.).

Замечание к рисунку 9. При возрастании параметра скорости растет и удельное боковое ускорение стационарного режима, отвечающего кривой поворачиваемости, при скорости 13,837 м/с наблюдаемому стационарному режиму соответствует удельное боковое ускорение несколько больше 0,6).

Условие наличия общих точек кривой поворачиваемости и бифуркационного множества (предполагаемое условие дивергентной потери устойчивости) можно выписать в аналитическом виде, так из системы соотношений (8) и (6) следует (12)

$$\begin{aligned} \theta &= G'(\bar{Y}) \cdot \bar{Y} - G(\bar{Y}), \\ &\Rightarrow G'(\bar{Y}) \cdot \bar{Y} = l / R. \\ \theta &= l / R - G(\bar{Y}), \end{aligned} \tag{12}$$

Таким образом, вопрос о дивергентной потере устойчивости круговых стационарных режимов, отвечающих кривой поворачиваемости, связан с разрешимостью уравнения $G'(\bar{Y}) \cdot \bar{Y} = l / R$. Разрешая последнее уравнение относительно параметра v , получим значение критической скорости $v_{R=30,5}^+ = 13,17$ м/с при движении по круговой траектории с радиусом кривизны $R=30,5$ м.

Считая скорость известным параметром, из (12) получим минимальную величину радиуса кривизны, отвечающую устойчивому стационарному круговому режиму при заданной скорости (рис.10). График этой зависимости имеет вертикальную асимптоту в точке

$$v = v_{kp} = \left(\frac{\bar{k}_1 \cdot \bar{k}_2}{\bar{k}_1 - \bar{k}_2} gl \right)^{1/2}.$$

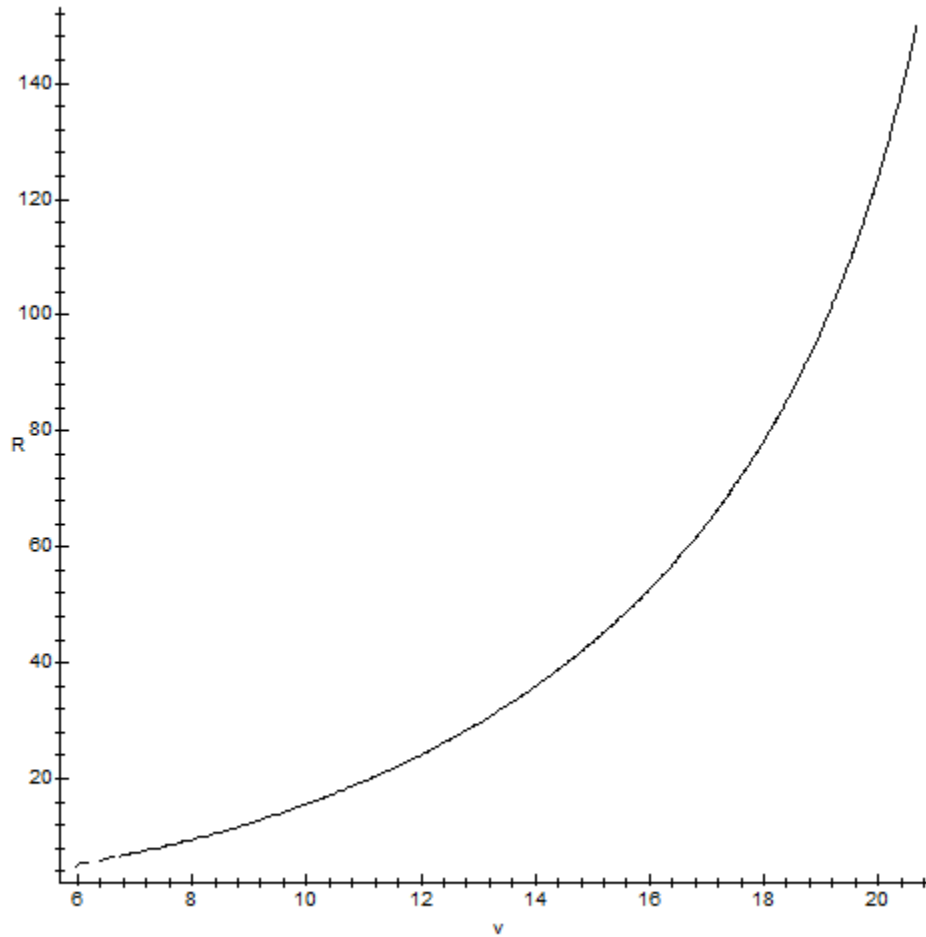
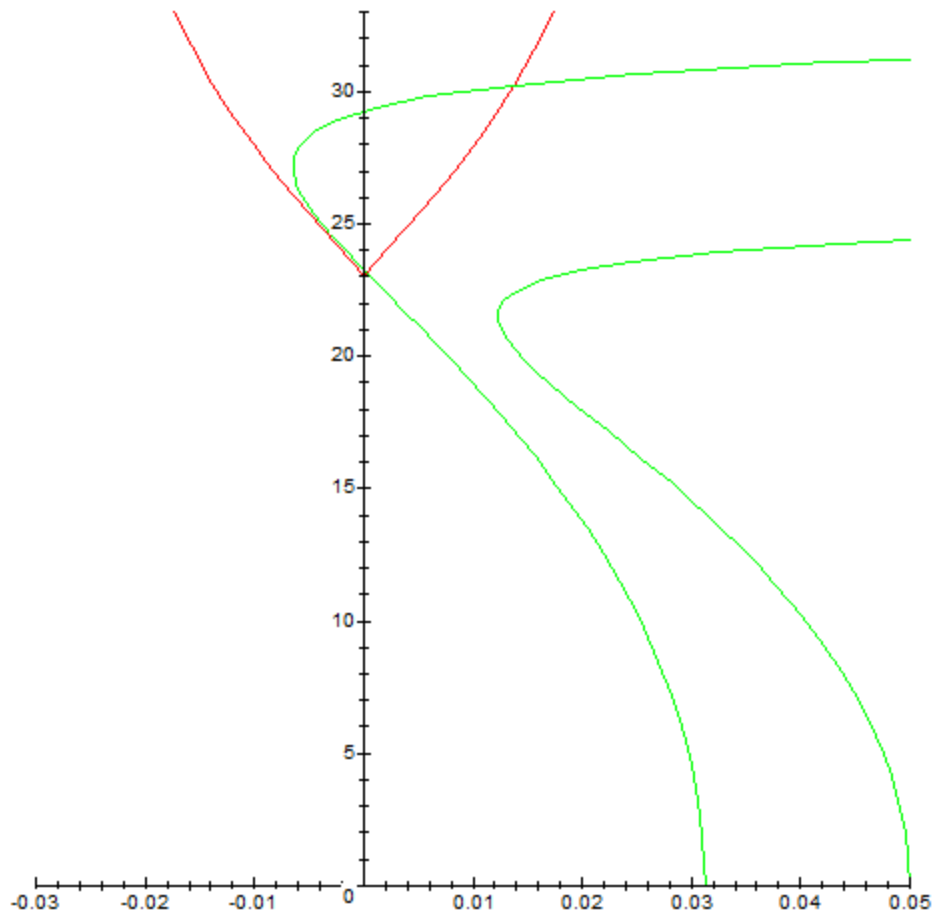


Рис.10. График минимального радиуса кривизны R в зависимости от продольной скорости Ц.М. экипажа.

Таким образом, в случае $\bar{k}_1 > \bar{k}_2, \varphi_1 \geq \varphi_2$ для возрастающей последовательности значений параметра R получим семейство кривых поворачиваемости, для которых бифуркационное множество будет служить огибающей; соотношение (12) дает возможность определить скорость, при которой происходит дивергентная потеря устойчивости на кривой поворачиваемости. Реализация устойчивого кругового стационарного режима при $v > v_{kp} = \left(\frac{\bar{k}_1 \cdot \bar{k}_2}{\bar{k}_1 - \bar{k}_2} gl\right)^{1/2}$ в рамках рассматриваемой модели и принятых предположений невозможна.

Как показывает следующий пример (рис.11-12) пересечение бифуркационного множества и кривой поворачиваемости не всегда связано с дивергентной потерей устойчивости стационарных круговых режимов, отвечающих кривой поворачиваемости. Действительно, при выполнении условий $\bar{k}_1 > \bar{k}_2$, $\bar{k}_1 \varphi_1^2 < \bar{k}_2 \varphi_2^2$ бифуркационное множество, задает область параметров - клинообразная область, каждой точке которой отвечает три стационарных режима, за ее пределами - один стационарный режим (устойчивый). При пересечении границы области (рассматриваем вход в клиновидную область), если точкой пересечения не является касп, кроме уже имеющегося устойчивого стационарного режима, рождается пара стационарных режимов (устойчивый и неустойчивый). То есть, в данном случае кратность рассматриваемого стационарного режима не изменяется, следовательно, потеря дивергентной устойчивости на кривой поворачиваемости не происходит.



$R=160,100, fi1=0.7, fi2=0.8$

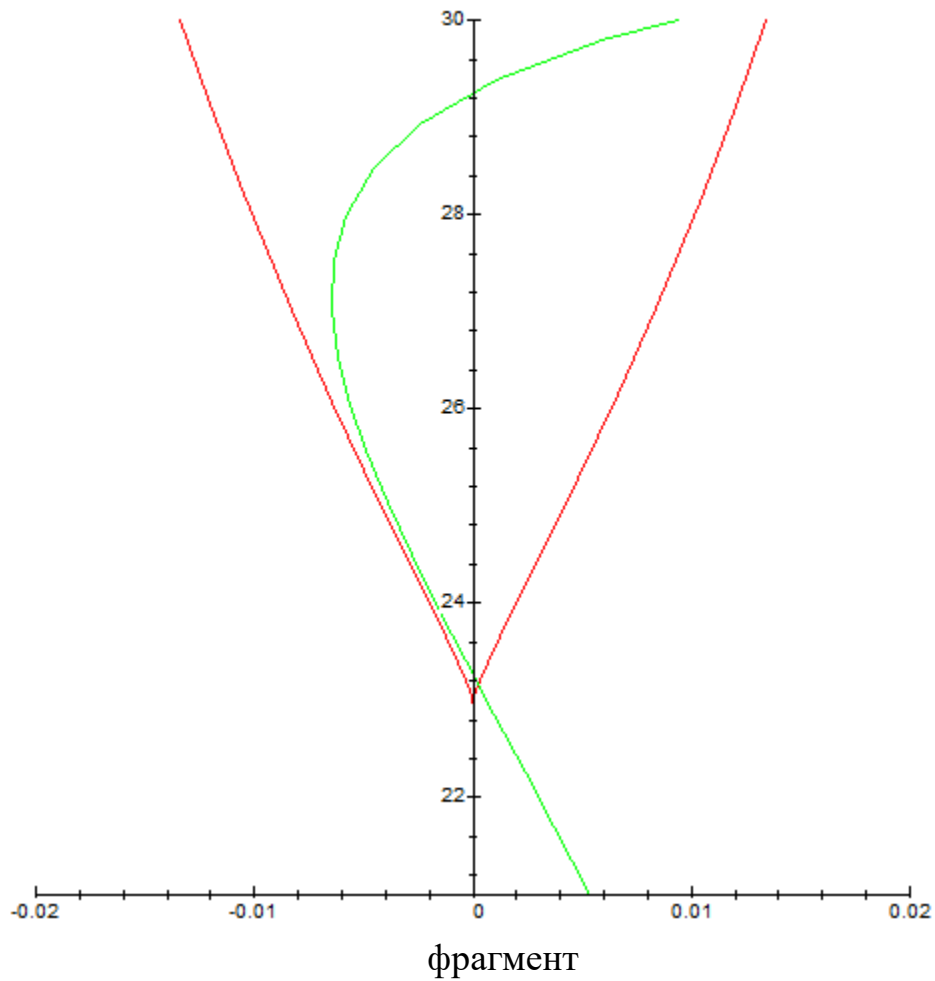
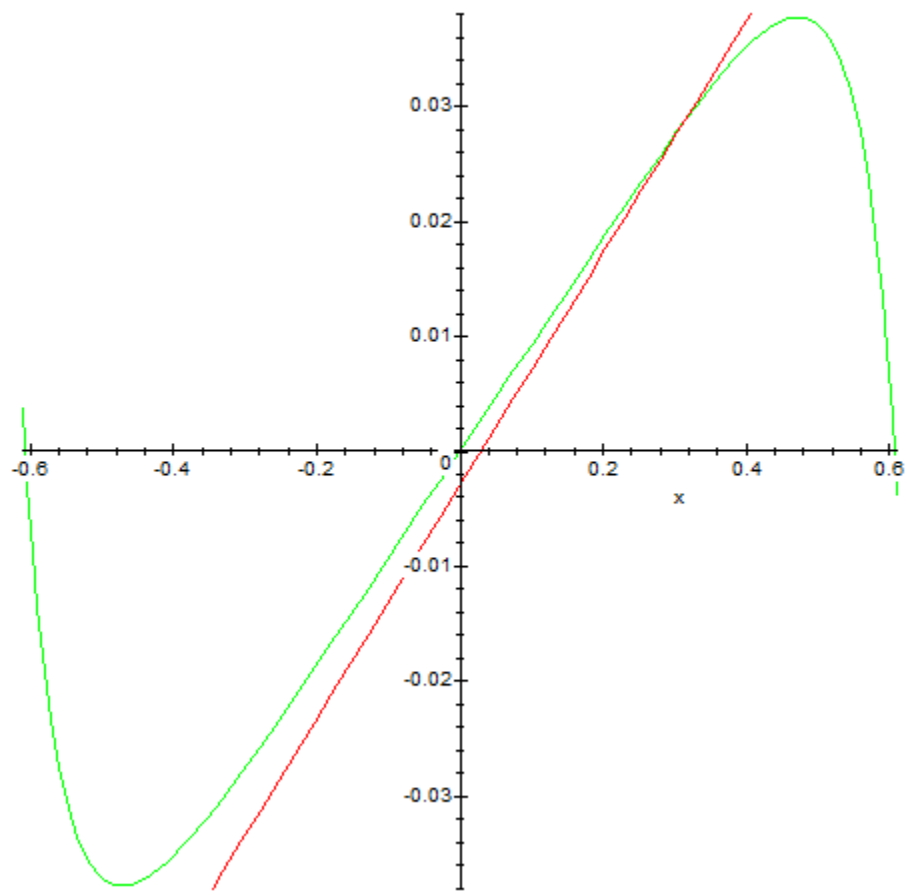
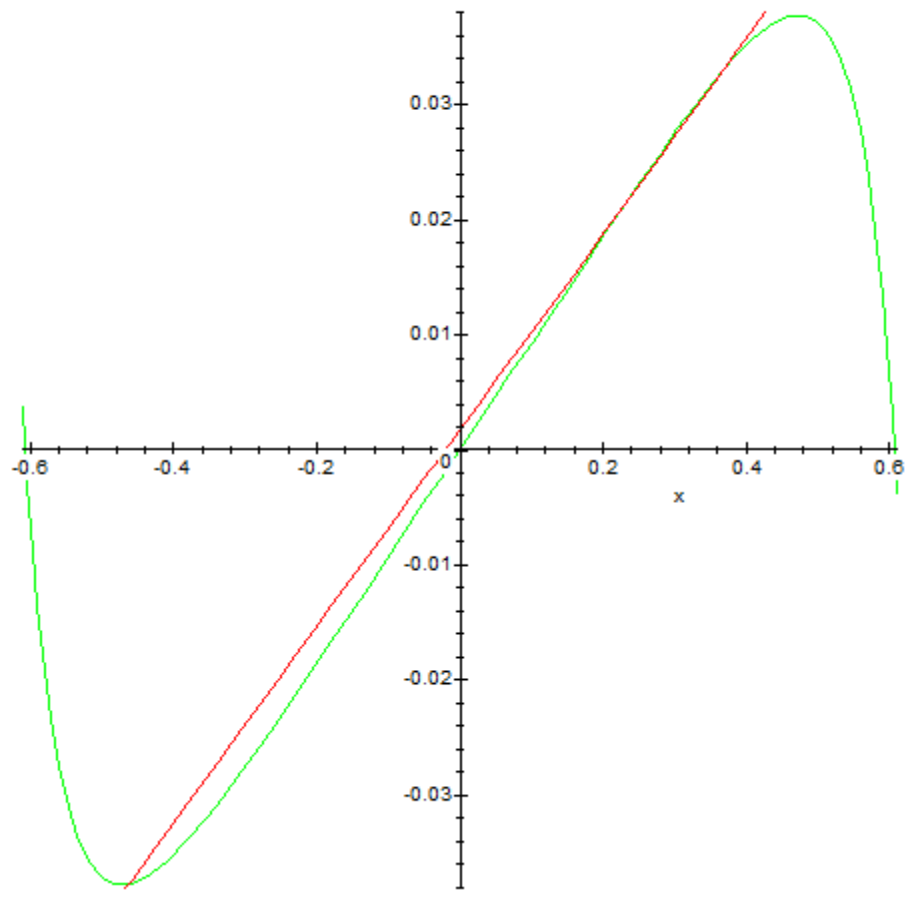


Рис.11. Анализ возможной дивергентной потери устойчивости стационарных режимов, отвечающих кривой поворачиваемости, на основе бифуркационной диаграммы.

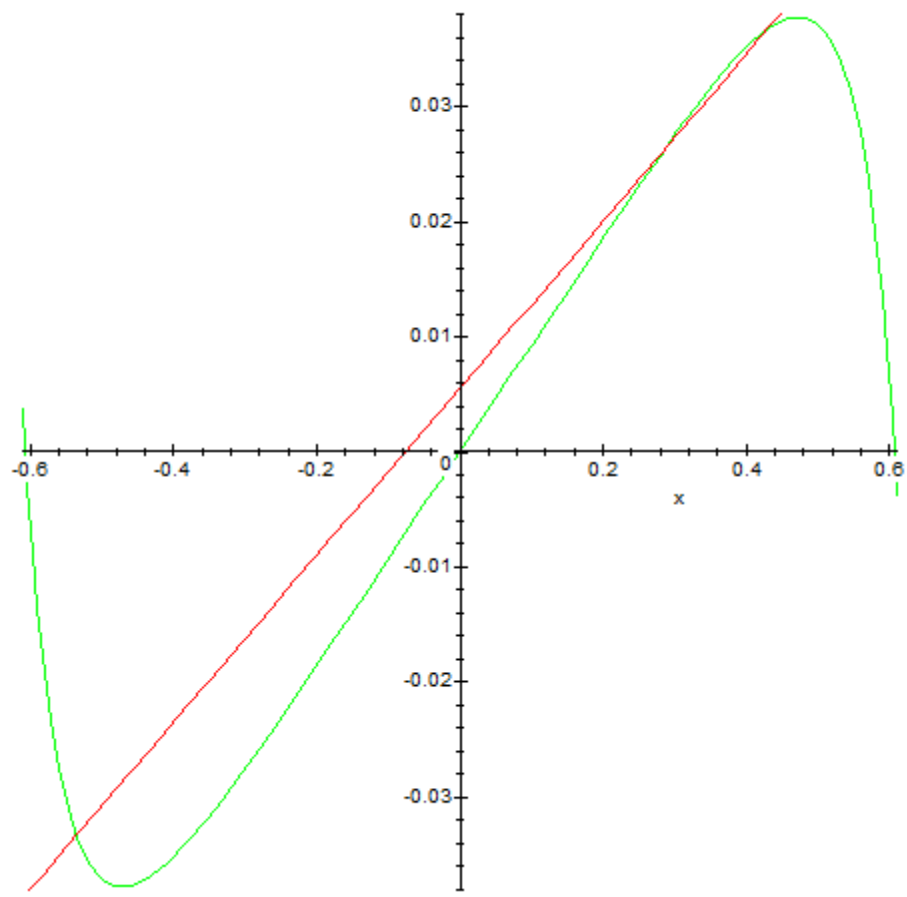
Этот вывод можно проиллюстрировать на основе графо-аналитического анализа стационарных режимов (рис.12, *a*)- *d*))



a) $v=22$



b) $v=24$



c) $v=26$

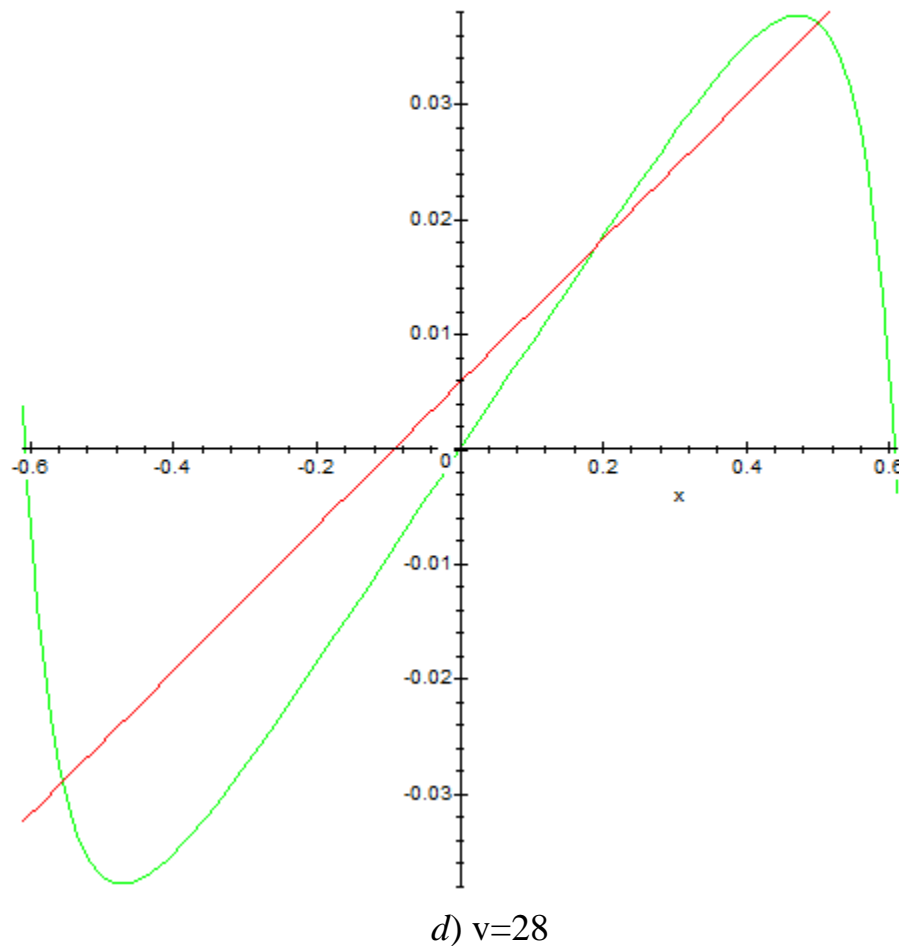


Рис.12. Иллюстрация сохранения устойчивости круговых стационарных режимов, отвечающих кривой поворачиваемости, на основе графо-аналитического метода.

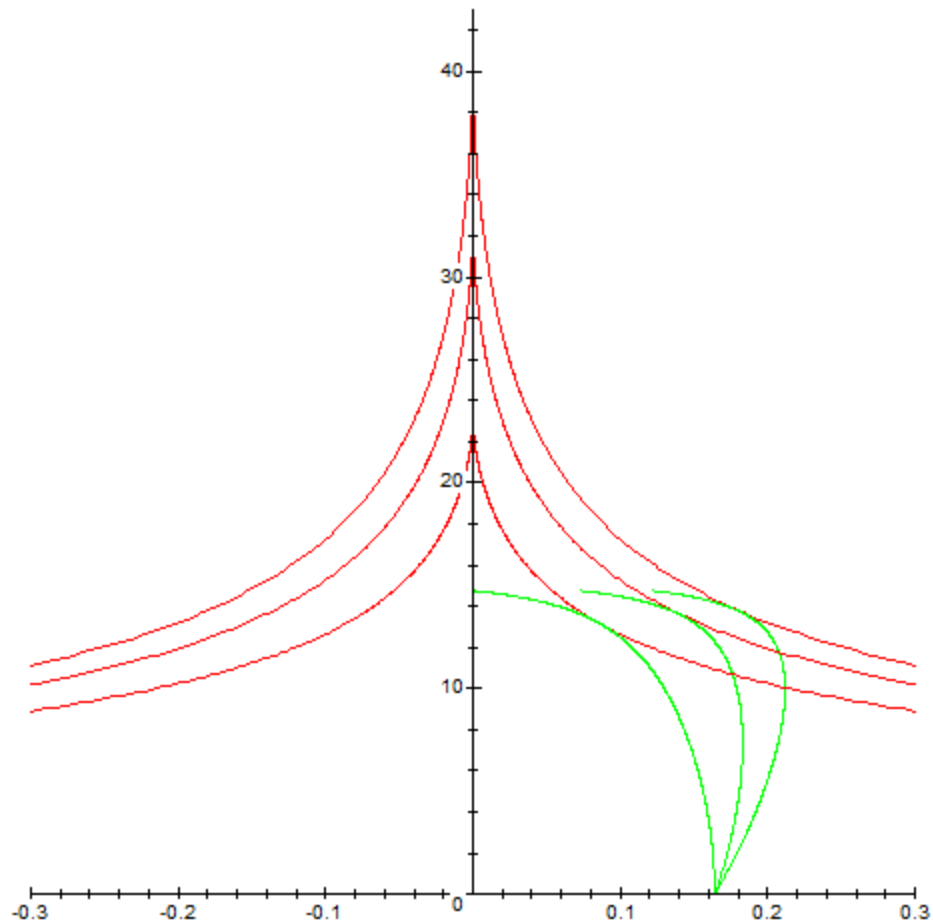
Максимальная величина продольной скорости Ц.М. экипажа ($\bar{k}_1 > \bar{k}_2$, $\bar{k}_1 \varphi_1^2 < \bar{k}_2 \varphi_2^2$), при которой возможна реализация устойчивого кругового стационарного режима с заданным радиусом кривизны R , определяется соответствующим максимальным значением удельного бокового ускорения \bar{Y} (рис.11), при котором определена кривая поворачиваемости, то есть

$$\bar{Y}_{\max} = \frac{v^2}{gR} \leq \min\{\varphi_1, \varphi_2\}, \quad v_R^{\max} \leq \sqrt{\varphi_1 g R}.$$

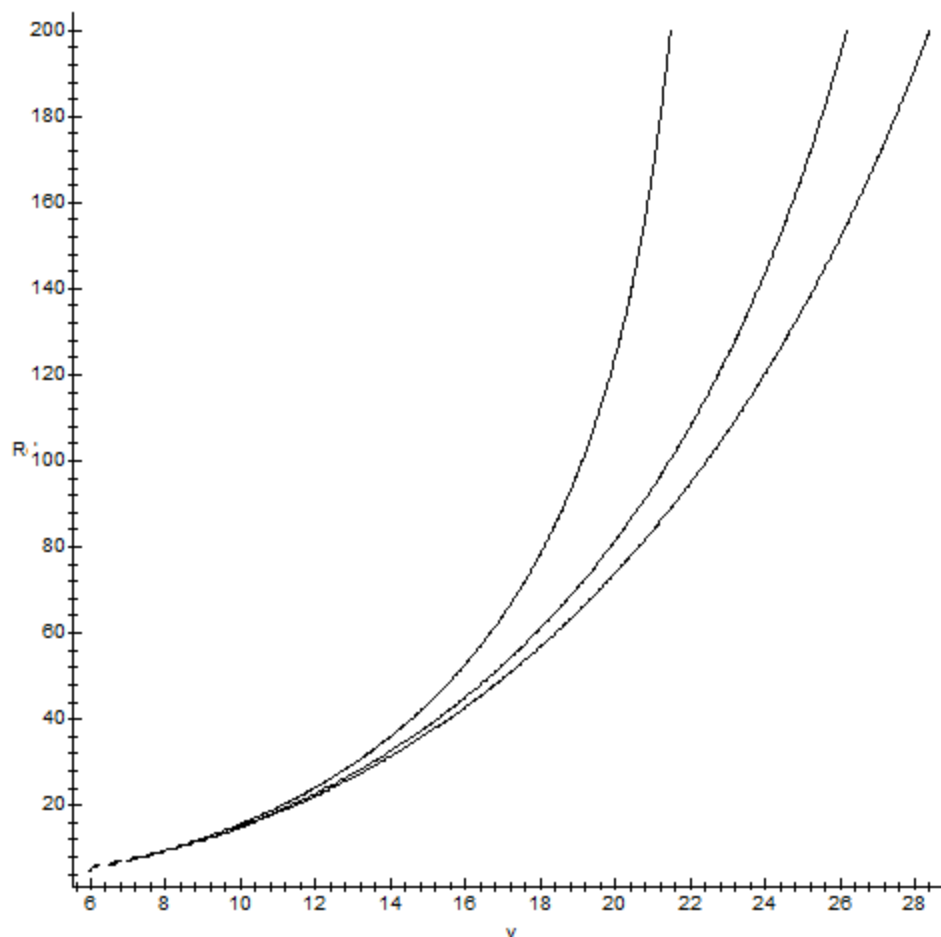
Далее приведем результаты анализа дивергентной потери устойчивости модели экипажа с подруливающей задней осью. Угол увода задней оси корректируется в сторону увеличения на величину $K_\omega \omega$

$$\delta_2 = K_\omega \omega + \operatorname{arctg} \frac{-u + b\omega}{v}.$$

На рисунке 13, а) представлены диаграммы дивергентной потери устойчивости множества стационарных режимов при значениях коэффициента управления $K_\omega = 0; 0,15; 0,25$. Соотношения, задающие в параметрической форме диаграмму устойчивости, при $K_\omega = 0$ отвечают (8). На рисунке 13, а) представлены также кривые поворачиваемости ($R=30,5$ м) - точкам касания отвечают значения критических скоростей: $v_{R=30,5}^+ = 13,17$ м/с; $v_{R=30,5}^- = 13,64$ м/с; $v_{R=30,5}^+ = 13,85$ м/с.



а)



б)

Рис. 13, а), б). Характеристики устойчивости и поворачиваемости модели колесного экипажа при дополнительном управлении колесами задней оси ($K_{\omega} = 0; 0,15; 0,25$) а) Диаграммы дивергентной потери устойчивости; б) Минимальный радиус кривизны траектории при различных значениях параметра продольной скорости движения

Анализ результатов, полученных на основе предлагаемого подхода исследования устойчивости и поворачиваемости модели двухосного экипажа, указывает на значительную эффективность введения в конструкцию подобной схемы управления колесами заднего ряда, а именно: существенно повышается критическая скорость прямолинейного движения модели с избыточной поворачиваемостью; уменьшаются минимально возможные радиусы кривизны устойчивых круговых режимов движения; увеличивается

максимально возможная скорость в круговых траекториях с достаточно большими радиусами кривизны; эффективное значение коэффициента управления лежит в интервале $K_{\omega} = 0,15 - 0,2$.

A MATHEMATICAL MODEL FOR TRAILER-TRUCK JACKKNIFING*

TIMOTHY V. FOSSUM† AND GILBERT N. LEWIS‡

Abstract. We present a differential equation which is a model for the position of a trailer relative to the cab which is pulling it. The solution is given for two examples, and the results are generalized in a theorem.

Suppose that a cab is pulling a trailer which is d units long. With suitable scaling, d can be taken to be 1. We can represent the positions of the cab and trailer by two vectors. Let \mathbf{X} be a position vector whose terminal point is at the trailer hitch on the cab, and let \mathbf{Y} be a position vector whose terminal point is at the midpoint between the wheels of the trailer. We represent the truck-trailer combination as shown in Fig. 1. \mathbf{X} will be a given, "smooth" function of time t . We would like to be able to predict \mathbf{Y} . That is, for a given path $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t)$, we want to know if the truck-trailer will jackknife. Alternatively, we want to determine what conditions we must impose on $\mathbf{X}(t)$ to prevent jackknifing.

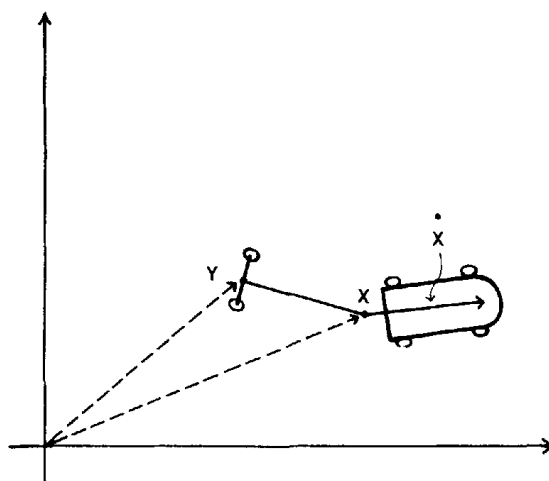


FIG. 1

We model the motion of \mathbf{Y} as follows. First, the trailer length $|\mathbf{X} - \mathbf{Y}| = 1$ is constant, which shows that

$$(1) \quad (\mathbf{X} - \mathbf{Y}) \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{Y}) = 1.$$

where \cdot is the vector dot product. Also, the wheels of the trailer constrain the vector \mathbf{Y} so that its velocity vector is directed along the trailer's lateral axis $\mathbf{X} - \mathbf{Y}$. That is,

$$(2) \quad \dot{\mathbf{Y}} = \lambda (\mathbf{X} - \mathbf{Y})$$

for some λ , where $\dot{\mathbf{Y}} = d\mathbf{Y}/dt$.

Differentiating (1) yields $2(\dot{\mathbf{X}} - \dot{\mathbf{Y}}) \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{Y}) = 0$ and so

$$(3) \quad \dot{\mathbf{X}} \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{Y}) = \dot{\mathbf{Y}} \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{Y}).$$

* Received by the editors April 9, 1979, and in revised form August 25, 1979.

† Department of Mathematics, University of Wisconsin-Parkside, Kenosha, Wisconsin 53141.

‡ Department of Mathematical and Computer Sciences, Michigan Technological University, Houghton, Michigan 49931.

Taking the dot product of (2) on both sides by $\mathbf{X}-\mathbf{Y}$ yields $\dot{\mathbf{Y}} \cdot (\mathbf{X}-\mathbf{Y}) = \lambda (\mathbf{X}-\mathbf{Y}) \cdot (\mathbf{X}-\mathbf{Y}) = \lambda$, and so by (3), $\lambda = \dot{\mathbf{X}} \cdot (\mathbf{X}-\mathbf{Y})$. Therefore, (2) becomes

$$(4) \quad \dot{\mathbf{Y}} = [\dot{\mathbf{X}} \cdot (\mathbf{X}-\mathbf{Y})](\mathbf{X}-\mathbf{Y}).$$

We introduce Cartesian coordinates to describe \mathbf{X} and \mathbf{Y} . Let $\mathbf{X} = (x_1, x_2)$ and $\mathbf{Y} = (y_1, y_2)$. Equation (4) can be written as the system

$$(5) \quad \begin{aligned} \dot{y}_1 &= x_1^2 \dot{x}_1 - 2x_1 \dot{x}_1 y_1 + x_1 x_2 \dot{x}_2 - x_1 \dot{x}_2 y_2 + \dot{x}_1 y_1^2 - x_2 \dot{x}_2 y_1 + \dot{x}_2 y_2 y_1, \\ \dot{y}_2 &= x_1 \dot{x}_1 x_2 - \dot{x}_1 x_2 y_1 + \dot{x}_2 x_2^2 - 2x_2 \dot{x}_2 y_2 - x_1 \dot{x}_1 y_2 + \dot{x}_1 y_1 y_2 + \dot{x}_2 y_2^2. \end{aligned}$$

For convenience, let $\mathbf{Z} = \mathbf{X}-\mathbf{Y}$, so that (4) can be rewritten as

$$(4') \quad \dot{\mathbf{Y}} = (\dot{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{Z})\mathbf{Z}.$$

If the cab is moving forward, we say the cab and trailer are *jackknifed* if $\dot{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{Z} < 0$; otherwise, we say they are *unjackknifed*. These two configurations are illustrated in Fig. 2. If the cab is backing up, the above situation is reversed. That is, the cab and trailer are *jackknifed* if $\dot{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{Z} > 0$ and *unjackknifed* otherwise; see Fig. 3.

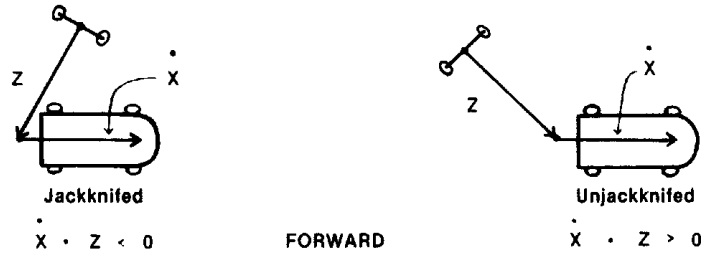


FIG. 2

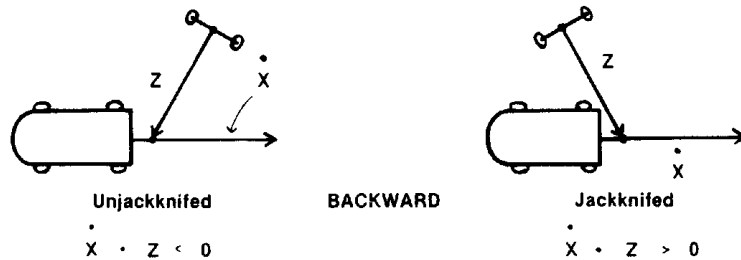


FIG. 3

Example 1. Consider the cab moving forward in a straight line. We may assume the cab travels along the positive x -axis, with $\mathbf{X}(t) = (t, 0)$. Since $|\mathbf{Z}| = 1$, the point $\mathbf{Z}(0) = \mathbf{X}(0) - \mathbf{Y}(0) = -\mathbf{Y}(0)$ must lie on the unit circle, so we may assume $\mathbf{Y}(0) = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ for some real α . Then the system (5) becomes

$$\dot{y}_1 = t^2 - 2ty_1 + y_1^2 = (t - y_1)^2, \quad \dot{y}_2 = -ty_2 + y_1 y_2,$$

whose solution is

$$\begin{aligned} y_1(t) &= t + \frac{e^{-2t} + C_1}{e^{-2t} - C_1}, \\ y_2(t) &= C_2 \exp \left\{ \int_0^t (y_1(s) - s) ds \right\}. \end{aligned}$$

Applying the initial conditions, $y_1(0) = \cos \alpha$, $y_2(0) = \sin \alpha$, we obtain

$$C_1 = \frac{\cos \alpha - 1}{\cos \alpha + 1}, \quad C_2 = \sin \alpha.$$

(Note: If $\alpha = 2n\pi$, $C_1 = 0$. If $\alpha = (2n+1)\pi$, $C_1 = \infty$). Thus,

$$y_1(t) = \begin{cases} t+1 & \text{if } \alpha = 2n\pi, \\ t-1 & \text{if } \alpha = (2n+1)\pi, \\ t-1 + o(1) & \text{if } \alpha \neq n\pi \end{cases}$$

and

$$y_2(t) = \frac{(C_1 - 1) \sin \alpha}{C_1 e^t - e^{-t}} = \begin{cases} 0 & \text{if } \alpha = n\pi, \\ 0 + o(1) & \text{if } \alpha \neq n\pi. \end{cases}$$

This solution shows that unless the cab and trailer start in the (rather unrealistic) completely jackknifed position with $\alpha = 2n\pi$, the trailer will approach the position following the cab. That is, $\alpha = 2n\pi$ is an unstable initial condition with solution $\mathbf{Y}(t) = (t+1, 0)$, while $\alpha \neq 2n\pi$ as an initial condition leads to the stable limiting solution $\mathbf{Y}(t) = (t-1, 0)$.

Alternatively, we can consider the similar example in which the cab is backing up. In this situation, the solution shows that, *except* for the unstable initial condition $\alpha = 2n\pi$, which corresponds to the trailer directly behind the cab, *all* solutions ultimately approach the jackknifed position. Anyone who has attempted to back up a vehicle with a trailer can attest to this fact.

Example 2. Consider the cab traveling along a circle of radius r . For the moment, assume $r > 1$. We may assume $\mathbf{X}(t) = (r \cos t, r \sin t)$. Again, since $\mathbf{Z}(0) = \mathbf{X}(0) - \mathbf{Y}(0)$ has length 1, we may assume $\mathbf{Y}(0) = \mathbf{X}(0) + (\cos \alpha, \sin \alpha)$. Intuition, aided by computer graphics, tells us that the trailer should approach an asymptotically stable state. It seems reasonable that the cab-trailer combination should approach the configuration shown in Fig. 4. In fact, direct substitution into (4) or (5) shows that the function

$$(6) \quad \begin{aligned} \mathbf{Y}_1(t) &= c(\cos(t - \theta), \sin(t - \theta)) \\ &= (y_{11}, y_{21}) \end{aligned}$$

is a solution, where

$$c = \sqrt{r^2 - 1}, \quad \sin \theta = 1/r, \quad \cos \theta = c/r.$$

In the usual terminology of phase plane analysis, $\mathbf{Y}_1(t)$ represents a periodic solution, and the path of $\mathbf{Y}_1(t)$ represents a stable limit cycle. We verify this in the following way.

The differential equations (5) become

$$(7) \quad \begin{aligned} \dot{y}_1 &= r(y_1 \sin t - y_2 \cos t)(r \cos t - y_1), \\ \dot{y}_2 &= r(y_1 \sin t - y_2 \cos t)(r \sin t - y_2). \end{aligned}$$

We introduce new variables by letting

$$(8) \quad u = y_1 \sin t - y_2 \cos t, \quad v = y_1 \cos t + y_2 \sin t.$$

The differential equations for u and v are

$$(9) \quad \dot{u} = -ru^2 + v, \quad \dot{v} = (r^2 - rv - 1)u.$$

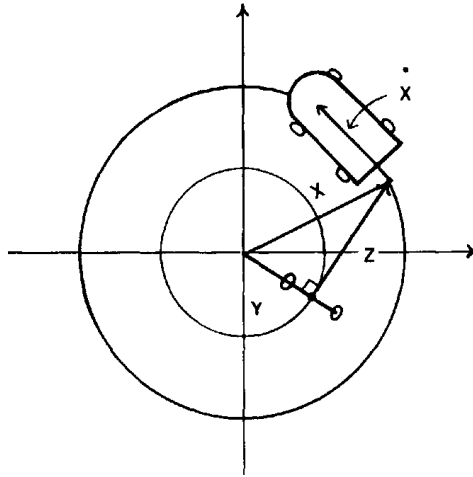


FIG. 4

This system has three critical points; $(0, 0)$, $(c/r, c^2/r)$ and $(-c/r, c^2/r)$, all of which correspond to actual solutions.

The first can be eliminated from consideration, since $(u, v) = (0, 0)$ implies $(y_1, y_2) = (0, 0)$. If this were the case, then $1 = |\mathbf{X} - \mathbf{Y}| = |\mathbf{X}| = r > 1$, a contradiction. It should be noted that $(0, 0)$ is a saddle point for (9).

The second critical point corresponds to the solution \mathbf{Y}_1 . The linearized version of (9) about this solution is

$$\dot{w} = z - 2cw, \quad \dot{z} = -cz,$$

where $w = u - c/r$, $z = v - c^2/r$. Both characteristic values ($-c$ and $-2c$) of this system are negative. Therefore, by standard theorems of phase plane analysis (see, for example, [1, Chapt. 11]), the solution $(c/r, c^2/r)$ of (9) is stable, and all other solution paths which start close to it will approach it. The point $(c/r, c^2/r)$ is a stable node for (9).

The third critical point corresponds to another solution

$$\mathbf{Y}_2(t) = c(\cos(t + \theta), \sin(t + \theta))$$

of (7). Analysis similar to that given above shows that this is an unstable (node) solution. In fact, it represents the same orbit as that for \mathbf{Y}_1 . In this case, the cab-trailer combination is in a jackknifed position initially and will remain in that position. However, any deviation from that initial position will cause the cab-trailer to wander farther away from the initial configuration.

Now, any solution of (4) must satisfy $r - 1 \leq |\mathbf{Y}| \leq r + 1$ since $|\mathbf{X} - \mathbf{Y}| = 1$ and $|\mathbf{X}| = r$. Hence, any physically meaningful solution of (9) other than $(-c/r, c^2/r)$ and $(0, 0)$, must approach $(c/r, c^2/r)$. Any bounded solution cannot approach $(-c/r, c^2/r)$ or $(0, 0)$, and there cannot be another periodic solution (limit cycle). If there were, there would have to be one enclosing none of the previously mentioned critical points, and thus there would have to be more critical points. Thus, all bounded solutions of (7) approach the stable periodic solution \mathbf{Y}_1 , with the exception of $(-c/r, c^2/r)$ and $(0, 0)$. In terms of our original model, the trailer approaches the periodic solution of an unjackknifed trailer shown in Fig. 4. We assume, of course, that the trailer is free to rotate 360° around the hitch without the cab getting in the way. In general, as long as $\mathbf{Y}(0) \neq \mathbf{Y}_2(0)$, then $\mathbf{Y}(t) \rightarrow \mathbf{Y}_1(t)$ as $t \rightarrow \infty$.

As before, if the cab is backing up, then the jackknifed solution $\mathbf{Y}_2(t)$ is stable, and all others, except $\mathbf{Y}_1(t)$, approach it. The solution $\mathbf{Y}_1(t)$ is the only solution in which the cab-trailer combination remains unjackknifed, yet it is unstable.

In the above example, we assumed that $r > 1$. If $r = 1$, then $\mathbf{Y}(t) \rightarrow (0, 0)$. If $r < 1$, then the cab-trailer will enter a jackknifed position, even if it started in an unjackknifed position. This will hold whether the cab is going forward or backing up.

We gain some insight into the general situation from the above example. In particular, if r is too small in Example 2, the cab-trailer jackknifes. From this, we postulate the following theorem.

THEOREM. *Assume \mathbf{X} is twice continuously differentiable. If the length of the trailer is 1, if $1 < r(t)$, where $r(t)$ is the radius of curvature of \mathbf{X} , and if $\dot{\mathbf{X}}(0) \cdot \mathbf{Z}(0) > 0$, then $\dot{\mathbf{X}}(t) \cdot \mathbf{Z}(t) > 0$ for all $t > 0$.*

In other words, if the cab is moving forward and the cab-trailer combination is not originally jackknifed, then it will remain unjackknifed. On the other hand, if the cab is moving backward and the cab-trailer is originally jackknifed, then it will remain jackknifed.

Proof. Let $f(t) = \dot{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{Z}$. Then $f(0) > 0$, and f is continuously differentiable. Suppose the conclusion of the theorem is false. Then there exists $t_1 > 0$ such that $f(t_1) = 0$ and $f'(t_1) \leq 0$. Assuming that $|\mathbf{Z}| = |\mathbf{X} - \mathbf{Y}| = 1$ (trailer has length 1) and $|\dot{\mathbf{X}}| \neq 0$ (cab doesn't stop), we have $\dot{\mathbf{X}}(t_1) \cdot \mathbf{Z}(t_1) = 0$ so that $\dot{\mathbf{X}}(t_1) \perp \mathbf{Z}(t_1)$. Also,

$$\begin{aligned} f'(t) &= \ddot{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{Z} + \dot{\mathbf{X}} \cdot \dot{\mathbf{Z}} \\ &= \ddot{\mathbf{X}} \cdot (\dot{\mathbf{X}} - \dot{\mathbf{Y}}) + \dot{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{Z} \\ &= |\dot{\mathbf{X}}|^2 - \dot{\mathbf{X}} \cdot \dot{\mathbf{Y}} + \dot{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{Z} \\ &= |\dot{\mathbf{X}}|^2 - (\dot{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{Z})\mathbf{Z} \cdot \dot{\mathbf{X}} + \dot{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{Z} \\ &= |\dot{\mathbf{X}}|^2 - (\dot{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{Z})^2 + \dot{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{Z} \\ &= |\dot{\mathbf{X}}|^2 - f^2(t) + \dot{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{Z} \end{aligned}$$

and

$$f'(t_1) = |\dot{\mathbf{X}}(t_1)|^2 + \ddot{\mathbf{X}}(t_1) \cdot \mathbf{Z}(t_1).$$

We now use a familiar formula for acceleration (see, for example, [2, p. 423]):

$$\ddot{\mathbf{X}} = \frac{d|\dot{\mathbf{X}}|}{dt} \mathbf{t} + \kappa |\dot{\mathbf{X}}|^2 \mathbf{n} \quad \left(\kappa = \frac{1}{r} \right),$$

where \mathbf{t} and \mathbf{n} are unit tangent and normal vectors respectively. Then $\mathbf{t}(t_1)$ is parallel to $\dot{\mathbf{X}}(t_1)$, and $\mathbf{Z}(t_1)$ is parallel to $\mathbf{n}(t_1)$. Therefore, $\ddot{\mathbf{X}}(t_1) \cdot \mathbf{Z}(t_1) = \pm \kappa(t_1) |\dot{\mathbf{X}}(t_1)|^2$, and

$$\begin{aligned} f'(t_1) &= |\dot{\mathbf{X}}(t_1)|^2 \pm \kappa(t_1) |\dot{\mathbf{X}}(t_1)|^2 \\ &= (1 \pm \kappa(t_1)) |\dot{\mathbf{X}}(t_1)|^2. \end{aligned}$$

We conclude that $f'(t_1) > 0$, since $\kappa(t_1) = 1/r(t_1) < 1$. This contradicts our assumption that $f'(t_1) \leq 0$, and the theorem is proved.

Acknowledgment. The authors would like to express their thanks to Professor Otto Ruehr for his valuable assistance.

REFERENCES

- [1] W. KAPLAN, *Ordinary Differential Equations*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1962.
- [2] G. B. THOMAS, *Calculus*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1969.

HANDLING ANALYSES ARTICULATED VEHICLES

Abstract

The handling properties of a two-section road train nonlinear model and conditions of steady movement states divergent stability loss are researched. The analytical correspondences defining road train configuration in circular paths and conditions of divergent stability loss during constant movement with Ackermann angle are received; the analytical results precision evaluation is considered based on comparing with results received with the numerical analytic parameter continuation method.

Keywords: two-section road train, handling, steady mode, divergent instability

Road train handling properties can differ from the corresponding properties of a separately taken tractor truck to a great extent because of vertical reactions redistribution on the tractor truck centre shafts and transverse reaction appearing in the point of coupling with a semitrailer. Special attention from the point of view of traffic security should be paid to analyzing conditions which may cause abrupt changes (folding bifurcation corresponding to the divergent circular steady mode stability loss) semitrailer orientation (internal-external) in the circular mode with varying movement traveling speed. The multitude of parameters when the kind of abrupt transferrings of steady states occur is a critical multitude or a bifurcation multitude with cuspidal points playing significant role in its structure. Typical and the simplest bifurcation set implementation is semicubical parabola though the algorithms of building bifurcation sets in an analytical form even for a case of single vehicle have been missing. The results of H.Troger and Fabio Della Rossaa were based on a numeric two parameter continuation method, this complicates defining safe conditions of linear movement mode stability loss in a space of parameters according to N.N. Bautin. In the works of L.G. Lobas V.G. Verbitskii the questions of qualitative analyses of wheel vehicles non-linear models have been reviewed involving bifurcation theory elements. A similar approach is implemented in the present work allowing to receive a more complete bolster – type road train model bifurcation multitude representation in an analytical form. The work is inspired by J.P. Pauwelussen results and is aimed at further development of graph-analytical approach to analyzing two-section road train nonlinear model steady states multitude using the idea of bifurcation analyses.

Task setting. **A critical controlling parameters multitude should be found θ, v responsible for two-section road train steady states multitude divergent**

stability loss. Conditions for steady circular states divergent stability loss should be defined which correspond to movement with varying traveling speed along a curve of a set bend radius (with a fixed Ackermann angle).

Task solving method. A geometric method of analyzing a road train nonlinear model steady states multitude combined with dynamic systems bifurcations theory approaches give a possibility to get divergent stability loss conditions on a handling curve in a general form (a condition of divisible steady states implementation).

A number of simplifying suggestions are accepted in the work traditional to tasks of graph-analytical analyses of steady states variety for bolster-type road train bicycle mode. A scheme of an articulate vehicle is given on Figure 1, here v – tractor truck centre line of mass direct-axis component; θ – controlled module turning angle; a, b – a distance from tractor truck centre line of mass to tractor truck front (controlled) axle and rear axle centres; c – a distance from tractor truck centre line of mass to coupling with the second link; d_1 – a distance from the second link centre line of mass to the point of coupling with a tractor truck; Y_i – vehicle drift force on axles, resistance coefficients to vehicle drift on axles ($k_1; k_2; k_3$); m – tractor truck mass; u – transverse tractor truck centre line of mass velocity vector projection; ω – tractor truck rotational speed in correspondence to vertical axis; m_2 – the second link mass; v_1, u_1 – lengthwise and transverse semitrailer centre line of mass velocity vector projection; φ – folding angle (the angle between the tractor truck and semitrailer rolling axis).

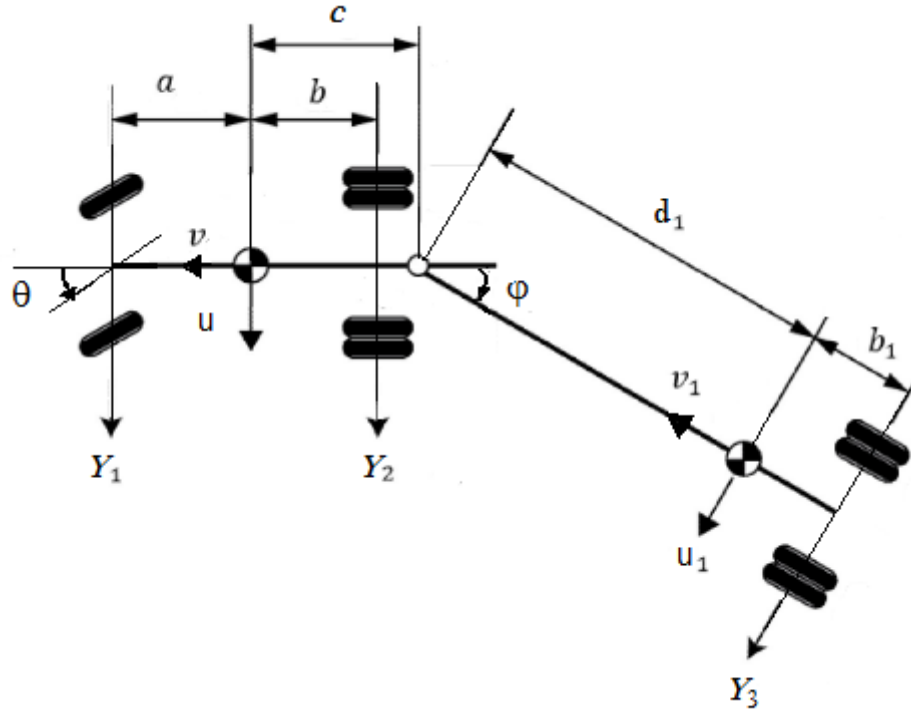


Figure 1. A two-section road train structural scheme

Analytical representation of a handling curve (a nonlinear approach). The source system defining two-section road train nonlinear model steady states multitude has the looks of

$$\begin{aligned}
 -(m+m_2)\omega v + Y_1 + Y_2 + Y_3 \cos\varphi + m_2 d_1 \omega^2 \sin\varphi &= 0; \\
 cm_2 \omega v + aY_1 - bY_2 - cY_3 \cos\varphi - cm_2 d_1 \omega^2 \sin\varphi &= 0; \\
 L_1 Y_3 - m_2 d_1 \omega v \cos\varphi + m_2 d_1 \omega u \sin\varphi - cm_2 d_1 \omega^2 \sin\varphi &= 0;
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\delta_1 = \theta - \frac{u + a\omega}{v};$$

$$\delta_2 = \frac{-u + b\omega}{v};$$

$$\delta_3 = \frac{-u_1 + b_1\omega}{v_1};$$

$$u_1 = (u - c\omega) \cos\varphi + v \sin\varphi - d_1 \omega;$$

$$v_1 = v \cos\varphi - (u - c\omega) \sin\varphi.$$

A simplified (partially linear) equations system defining road train movement steady mode

$$\begin{aligned} -(m+m_2)\omega v + Y_1 + Y_2 + Y_3 &= 0; \\ cm_2\omega v + aY_1 - bY_2 - cY_3 &= 0; \\ -d_1m_2\omega v + L_1Y_3 &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

can be solved in relation to drift forces implemented on axles:

$\bar{Y}_1(\delta_1) = \bar{Y}_2(\delta_2) = \bar{Y}_3(\delta_3) = \frac{v^2}{gR}$, где $\bar{Y}_i = Y_i / N_i$ - a dimensionless drift force on i-n axle [10]; linear drift angles $\delta_1 = \theta - \frac{u+a\omega}{v}$; $\delta_2 = \frac{-u+b\omega}{v}$; $\delta_3 = -\varphi + \frac{-u+(L_1+c)\omega}{v}$; vertical reactions on axles

$$N_1 = \frac{bL_1m - (c-b)b_1m_2}{L_1l}, \quad N_2 = \frac{(a+c)b_1m_2 + aL_1m}{L_1l}, \quad N_3 = \frac{m_2d_1}{L_1}.$$

With a set movement along the circle with a set radius the $\omega = \frac{v}{R}$ correlation is present where v - direct-axis tractor truck centre line of mass (CLM) component, R - dot locus radius on a tractor truck rolling axis the speed of which is directed along the tractor truck rolling axis.

Taking into account that the difference of drift angles on the first and second tractor truck axes $\delta_1 - \delta_2 = \theta - l/R$, on the third and the second axes

$\delta_3 - \delta_2 = -\varphi + (L_1 + c - b)/R$, and drift angles values corresponding to movement steady states δ_i : $\delta_1 = \bar{Y}_1^{-1}(\bar{a}_y)$, $\delta_2 = \bar{Y}_2^{-1}(\bar{a}_y)$, $\delta_3 = \bar{Y}_3^{-1}(\bar{a}_y)$, two correlations are received defining handling curve and folding curve in case of an articulated vehicle

$$\begin{aligned} \theta &= l/R + \bar{Y}_1^{-1}(\bar{a}_y) - \bar{Y}_2^{-1}(\bar{a}_y), \\ -\varphi &= -(L_1 + c - b)/R + \bar{Y}_3^{-1}(\bar{a}_y) - \bar{Y}_2^{-1}(\bar{a}_y), \end{aligned} \quad (3)$$

where $\bar{a}_y = v^2/(Rg)$ - transverse tractor truck CLM acceleration component. The system (3) can be presented in a more general form

$$\begin{aligned}\theta &= l/R + \bar{Y}_1^{-1}(\bar{a}_y) - \bar{Y}_2^{-1}(\bar{a}_y) = l \cdot g \cdot \bar{a}_y / v^2 + G_1(\bar{a}_y) - G_2(\bar{a}_y) = l \cdot g \cdot \bar{a}_y / v^2 + G_{12}(\bar{a}_y); \\ -\varphi &= -(L_1 + c - b)/R + \bar{Y}_3^{-1}(\bar{a}_y) - \bar{Y}_2^{-1}(\bar{a}_y) = -(L_1 + c - b) \cdot g \cdot \bar{a}_y / v^2 + G_{32}(\bar{a}_y),\end{aligned}\quad (4)$$

allowing to define phase variables values corresponding to a steady mode with set controlling parameters values θ, v .

Thus, from the first system equation (4) it can be concluded that steady states parameters of which are going to depend on corresponding $\bar{a}_y = v^2 / (R \cdot g) = v \cdot \omega / g$ argument values correspond to the cross points of “movable” right line $l \cdot g \cdot \bar{a}_y / v^2 - \theta$ and “fixed” curve $G_{21}(\bar{a}_y) = -G_{12}(\bar{a}_y)$. The corresponding folding angle value is received from the second equation (4). This way the simplified equation system (2) leads to splitting the source system (1). In this case the first system equation (4) is defining from the point of view of divergent stability loss conditions (has the same form as in case of a separately taken tractor track).

A criterion of steady states stability found from the first defining system equation (4) based on a geometric interpretation can be summarized as follows: a steady mode is stable if the inclination of movable right line is larger than the inclination of fixed curve in the corresponding crossing point (Figure 1). A divisible steady mode is going to correspond to divergent stability loss, i.e. the contact of movable right line $l \cdot g \cdot \bar{a}_y / v^2 - \theta$ and fixed curve $G_{21}(\bar{a}_y)$, which leads to the following correlation for controlling parameters:

$$\begin{aligned}\theta &= \bar{a}_y \cdot G'_{21}(\bar{a}_y) - G_{21}(\bar{a}_y); \\ v &= (l \cdot g / G'_{21}(\bar{a}_y))^{1/2}.\end{aligned}\quad (5)$$

The conditions when systems (1) and (2) have quantitative discrepancies only should be analyzed. The numerical analytical parameter continuation method should be used for building balanced curves corresponding to the source system (1). Balanced curves corresponding to system (2) can be set analytically in a parameters form (according to rotational speed):

$$\begin{aligned}\theta &= l \cdot g \cdot \bar{a}_y / v^2 + G_{12}(\bar{a}_y); \\ \omega &= \bar{a}_y \cdot g / v,\end{aligned}$$

and (according to folding angle)

$$\theta = l \cdot g \cdot \bar{a}_y / v^2 + G_{12}(\bar{a}_y);$$

$$-\varphi = -(L_1 + c - b) \cdot g \cdot \bar{a}_y / v^2 + G_{32}(\bar{a}_y).$$

Balanced system (1) and (2) curves are represented on Figure 2 received for the following parameters numeric values $g = 9,81 \text{ m/c}^2$; $a = 4,217 \text{ m}$; $b = 3,376 \text{ m}$; $b_1 = 2,93 \text{ m}$; $d_1 = 8,075 \text{ m}$; $c = 3,376 \text{ m}$; $m = 6417 \text{ kg}$; $m_2 = 41846 \text{ kg}$; $k_1 = 100000 \text{ H}$; $k_2 = 300000 \text{ H}$; $k_3 = 300000 \text{ H}$; $\kappa_1 = 0.8$; $\kappa_2 = 0.8$; $\kappa_3 = 0.8$; axial forces in the contact area of wheels with bearing surface haven't been taken into account; rotational drift forces were take approximate as an arctangensoid:

$$\bar{Y}_i = 2 \cdot \kappa_i \cdot \arctan\left(\frac{1}{2} \bar{k}_i \cdot \delta_i \cdot \pi / \kappa_i\right) / \pi \Rightarrow$$

$$G_i = \bar{Y}_i^{-1} = 2 \cdot \kappa_i \tan\left(\frac{1}{2} \pi \cdot \bar{Y}_i / \kappa_i\right) / (\pi \cdot \bar{k}_i), \quad i = 1, 2.$$

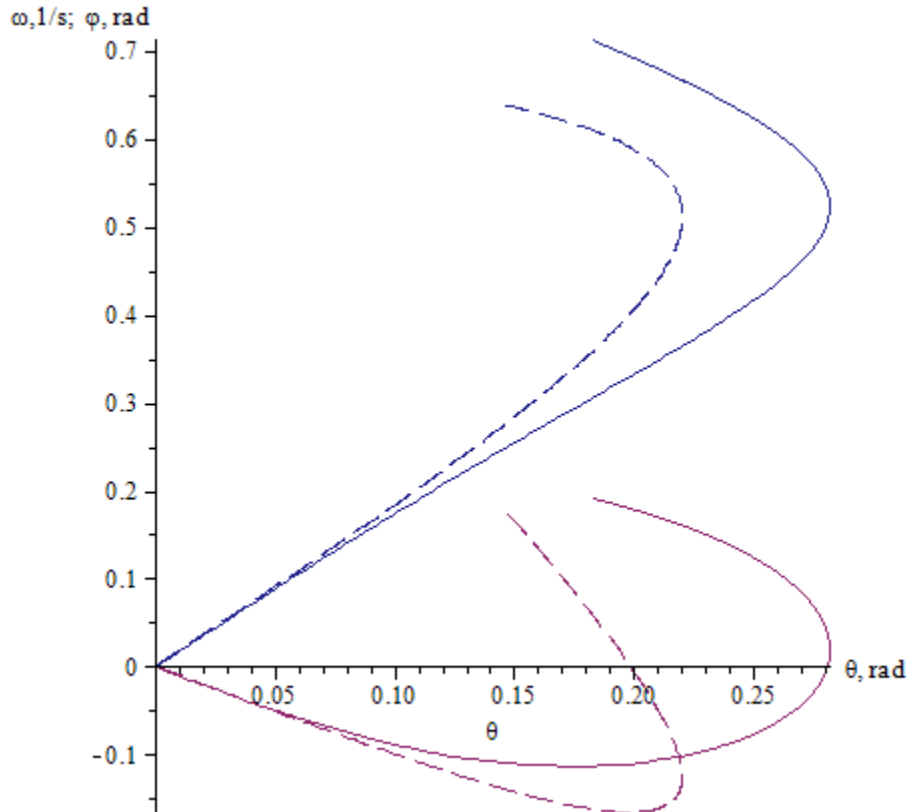


Figure 2. Balanced curves at a speed of 10 m/s: $\omega(\theta)$ - the navy colour, the solid curve for system (1), the dashed one for (2); $\varphi(\theta)$ - the maroon colour, the solid curve for system (1), the dashed one for system (2)

It should be noted that steady mode divergent stability loss corresponds to the turning points on the balanced curves with a corresponding controlling angle value θ . Thus, the source system (1) critical parameters multitude is a bit different from the system (2) critical multitude, besides with sufficiently small movement traveling speed (in comparison with the critical linear motion speed) there are quality difference there – there is a traveling speed interval there for the source system for which divergent stability loss is not implemented as opposed to the simplified system (2). Nevertheless, the analyses of system (2) divergent stability loss can be quite useful at the first stage of researching the results of which can be made more specific as required base on the complete system (1).

Divergent stability loss criterion. Analyzing steady circular states divergent stability loss satisfying the handling curve (the first system (3) equation). As the reviewed case is a particular case of losing steady circular mode stability, this gives a possibility to define common points (if they exist) when combining stability diagram (bifurcation multitude) and handling curve on the same coordinate plane.

The condition of common points presence between a handling curve and a bifurcation multitude can be written down in an analytical form:

$$G'_{21}(\bar{a}_y) \cdot \bar{a}_y = l / R. \quad (6)$$

It can be concluded from the “geometric” stability criterion that the steady circular states divergent stability loss corresponding to the handling curve is related to breaking the inequation:

$$G'_{21}(\bar{a}_y) \cdot \bar{a}_y < l / R. \quad (7)$$

Let the handling curve be equal to the $R=30,5$ m parameter solving equation (6) in relation to \bar{a}_y , the following is received $\bar{a}_y = 0,52717$, putting this value of scaled transverse acceleration into the handling equation gives a critical parameter value $\theta=0,1081$ rad, a critical parameter value $v=12.559$ m/s can be found from the correlation $\bar{a}_y = v^2 / (R \cdot g)$.

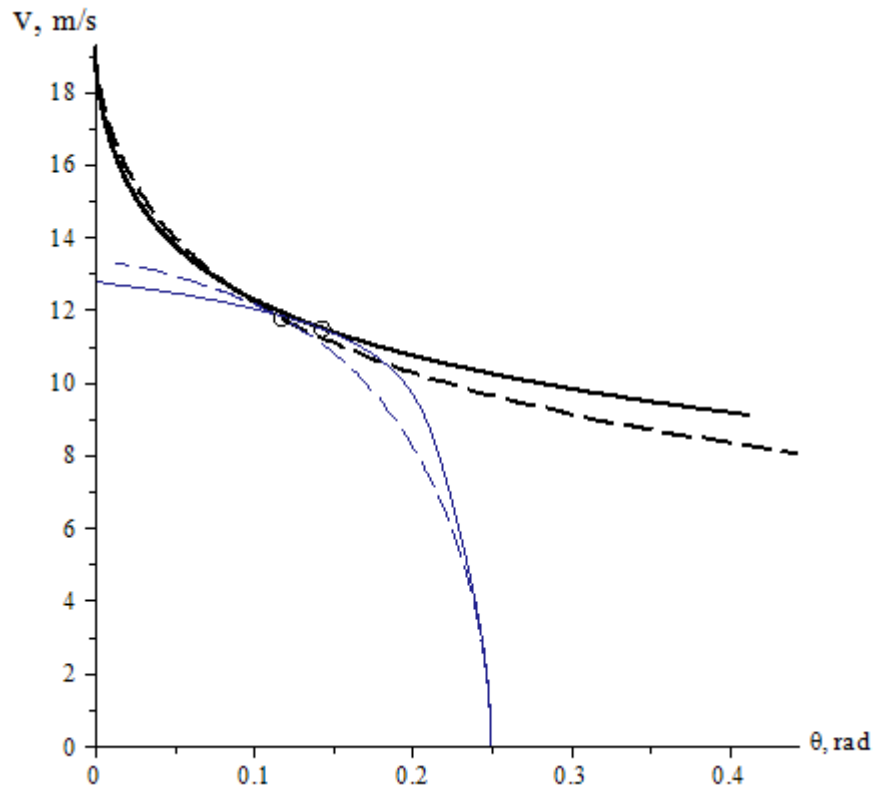


Figure 3. Defining controlling parameters critical values corresponding to divergent stability loss on handling curve using bifurcation diagram (solid curves correspond to system (1), dashed curves to system (2))

Divergent instability on handling curve for the source system (1) implements with the speed of $v = 11.5$ m/s - it's received based on the numerical analytical two parameter continuation method.

In case of the simplified system (2) geometric rendering of the corresponding steady mode divergent stability loss conditions is possible – divisible mode implementation (Figure 4) which is useful when analyzing the results of numerical complete system (1) integration.

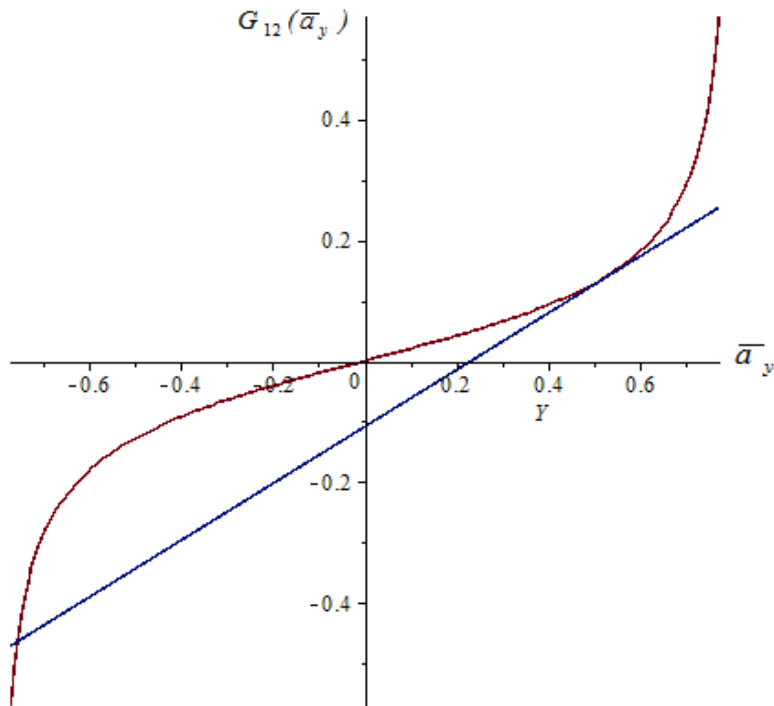


Figure 4. An illustration to a graph-analytical technique for finding steady states corresponding to the set Ackermann angle value; a case of divergent stability loss

A comparison is available further on for approximate analytical expressions defining handling curve and folding curve with the results of building these curves base on numerical analytical parameter continuation method. The diagrams of the handling curve (the navy colour) and the “folding” curve (the maroon colour) correspond to the flection radius of $R = 30,5 m$ (Figure 4).

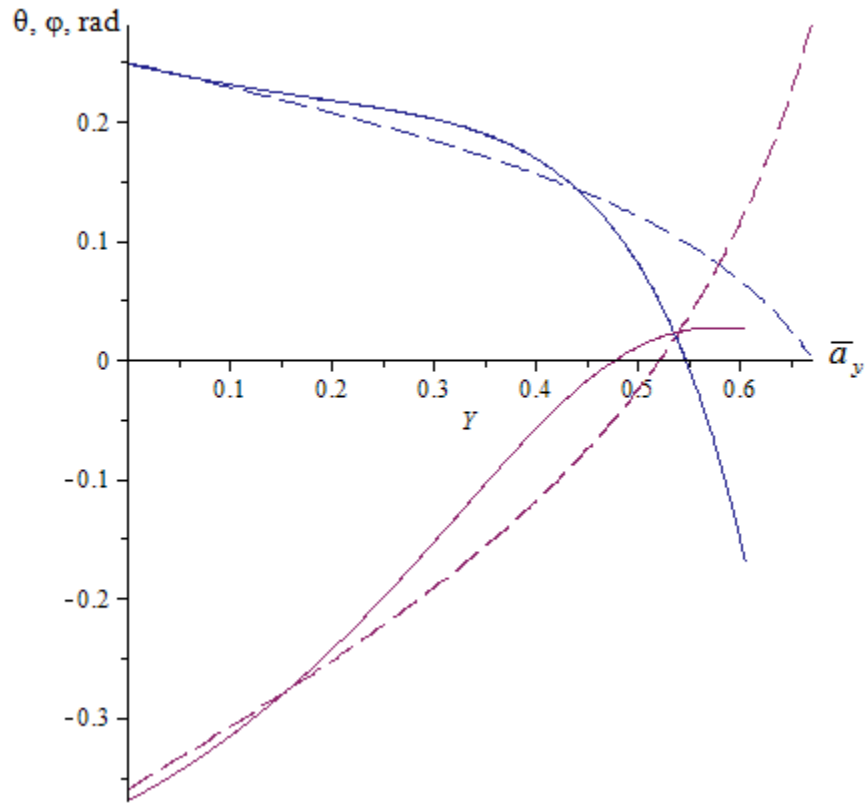


Figure 5. Combining of handling curve and folding curve of a source two-section road train nonlinear model (solid curves) with their approximate variants (dashed curves)

This way, handling curves and the folding ones (which are received when putting $\bar{a}_y = v^2 / (R \cdot g)$) into (4) can serve as a nonlinear generalization of handling and folding right lines (the later ones correspond to the case of drift forces linear approximation) [5]: the speed of angle folding is defined by the $\frac{N3}{k3} - \frac{N2}{k2}$ expression (similar to the $\frac{N1}{k1} - \frac{N2}{k2}$ understeering gradient), the folding angle value at a considerably low speed v is set with $-\frac{L1 + c - b}{R}$ correlation similar to the Ackermann angle $\frac{l}{R}$. And the divergent stability loss (7) condition received when working corrects the stability boarder obtained based on a linear model in a parameters space to a large extent.

Conditions of safe two-section road train linear movement mode stability loss. The conditions for rebuilding bifurcation multitude structure in small neighbourhood of linear movement critical speed should be defined. To solve the task the source system (1) with the precision up to the third term is going to be

brought together to a defining equation (the third extent polynom) in relation to one phase variable.

Let's represent system (1) in an approximate form:

$$-m\omega v + \bar{Y}_1 N_1 + \bar{Y}_2 N_2 + Y_o = 0;$$

$$a\bar{Y}_1 N_1 - b\bar{Y}_2 N_2 - cY_o = 0;$$

$$Y_o = \frac{m_2 \omega \{d_1 \varphi [-u + (L_1 + c)\omega - v\varphi] - b_1 v\}}{L_1};$$

$$\bar{Y}_3 = \frac{\omega [(-u + c\omega)\varphi + v(1 - \varphi^2 / 2)]}{g},$$

where Y_o - transverse reaction in the joint point influencing a tractor track (Y_o and \bar{Y}_3 are defined with the precision to the third term smallness values). Solving this system in relation to non-dimesional drift forces:

$$\bar{Y}_1 = \frac{-bm\omega + Y_o(b-c)}{lN_1}; \quad \bar{Y}_2 = \frac{-am\omega + Y_o(a+c)}{lN_2},$$

switching to inverse functions $\delta_1 = \bar{Y}_1^{-1}(x_1)$, $\delta_2 = \bar{Y}_2^{-1}(x_2)$, $\delta_3 = \bar{Y}_3^{-1}(x_3)$. Then arguments are put into x_i dependences:

$$u = \frac{-\omega v^2}{k_2 g} + b\omega;$$

$$\varphi = \frac{(L_1 - b + c)\omega}{v} + \frac{(1/\bar{k}_2 - 1/\bar{k}_3)\omega v}{g},$$

correct in linear approximation (after this procedure x_i arguments are still going to be set with the precision up to the third term of smallness). Taking into account that in a curve of flecion fixed radius $\omega = v/R$, and the difference of drift angles on the first and second tractor truck axels $\delta_1 - \delta_2 = \theta - l/R$, on the third and second axels $\delta_3 - \delta_2 = -\varphi + (L_1 + c - b)/R$, specified to the third term of smallness equations of handling and folding are received similar to equations (3):

$$\theta = l/R + \bar{Y}_1^{-1}(x_1) - \bar{Y}_2^{-1}(x_2),$$

(8)

$$-\varphi = -(L_1 + c - b)/R + \bar{Y}_3^{-1}(x_1) - \bar{Y}_2^{-1}(x_2) \quad ,$$

where $x_1 = x_1(v)$, $x_2 = x_2(v)$.

Figure 6, a, b represents handling and folding curves for comparison corresponding to approximate dependences (3), (8) and curves received based on numerical parameter continuation method for a complete system (1).

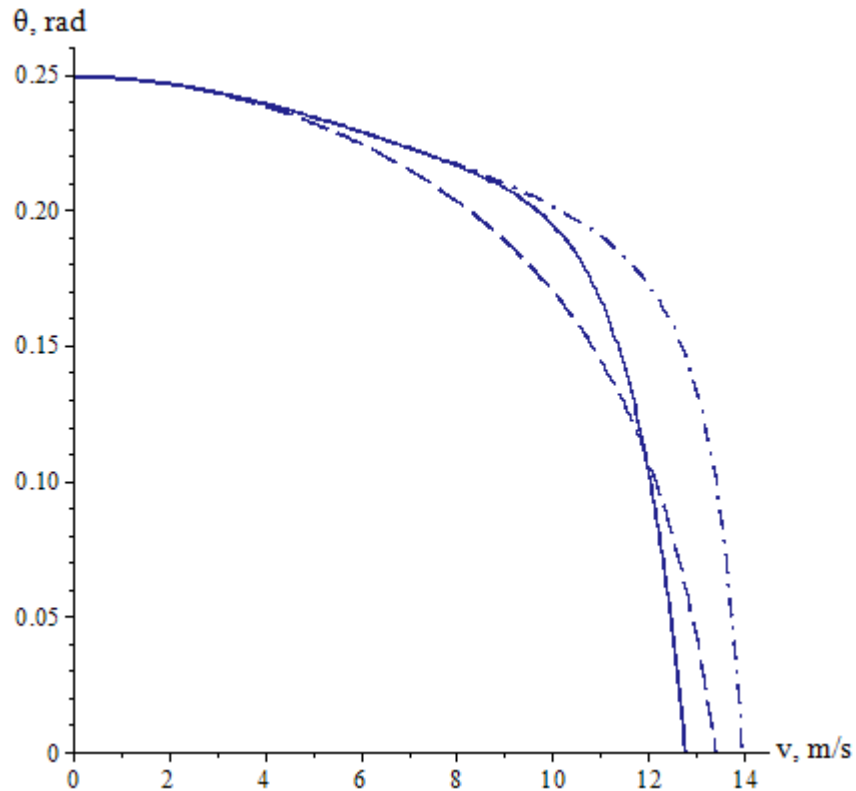


Figure 6. a) handling curve; b) folding curves (the solid curve corresponds to system (1), system (8) – the dash-dotted one, system (3) – the dashed one).

The first system (8) equation without a suggestion of circular locus flecion permanence

$$\theta = l \cdot \omega / v + \bar{Y}_1^{-1}(x_1) - \bar{Y}_2^{-1}(x_2), \quad x_1 = x_1(\omega), x_2 = x_2(\omega)$$

is a defining equation (received with the precision of up to the third term of smallness) from one phase variable – rotational speed. With fixed controlling parameters θ, v it defines steady states multitude. If limiting only with its linear and cubic terms in Taylor series expansion of ω grades a required polynomial is

received. A formalized approach to analyzing safe linear movement mode stability loss is given below. Let's introduce a new generalized \bar{K}_i parameter which value is going to depend on drift forces approximation kind: $\delta_i = \bar{Y}_i^{-1}(x_i) = x_i / \bar{k}_i + x_i^3 / \bar{K}_i, i = 1, 2$. Further result is going to be received for a particular case of $c=b, b_1=0$, in this case coefficients of the defining polynomial can be represented in a visible form:

$$0 = -\theta + \frac{l}{v}(1 - v^2/V_1^2)\omega + \frac{v}{g^3} \left[v^2(1/\bar{K}_1 - 1/\bar{K}_2) + d_1 \cdot g \cdot (m_1/m) \cdot (1+b/a) \cdot (1 - v^2/V_2^2) / (\bar{k}_2 \cdot \bar{k}_3) \right] \omega^3.$$

From analyzing coefficients signs for linear and cubic terms in small neighbourhood of critical velocity $v < V_1$ and $v > V_1$ it can be concluded that safe linear movement mode stability loss ($\theta=0$) implements for a positive coefficient value with the highest term of the defining polynomial ($v=V_1$ should be considered in the later one) – in this case with the supercritical velocity a pair of steady circular movement states appears limiting the unstable linear mode destabilization growth. Then at least within the small neighbourhood of linear movement mode critical velocity, the boarder of bifurcation multitude should be higher that the cuspidal point (cusp) indicating the implementation of threefold movement mode with $v=V_1, \theta=0$. The mentioned condition is equivalent to the condition of linear movement mode stability in a critical case of zero root (in the A.M. Lyapunov stability theory), though this approach leads to considerable simplification of concurrent calculations.

In other words, bifurcation multitude in a small neighbourhood of linear movement critical velocity co-insides with a defining polynomial discriminant curve. Earlier in the work analytical correlations were received corresponding to the conditions of safe linear movement mode stability loss for parameters which considerably influence rebuilding of bifurcation mode relating to d_1, b_1, m_2, k_3 . Though it's necessary to remember that results strongly depend on a particular approximation kind of drift forces dependences. Thus in the present work drift forces have been approximated as an arctangensoid, in the work fractional surdic approximation was used which with other equal conditions led to discrepancy of the received critical d_1 parameter value at about 5 m. Above is the condition of safe two section road train linear movement mode stability loss which in a certain sense doesn't depend on a particular drift forces approximation kind - the chosen drift forces approximation type should allow transferring to inverse functions or at last allow the possibility of defining their Taylor series expansion first nonlinear (cubic) terms $\delta_i = \bar{Y}_i^{-1}(x_i) = x_i / \bar{k}_i + x_i^3 / \bar{K}_i, i = 1, 2$).

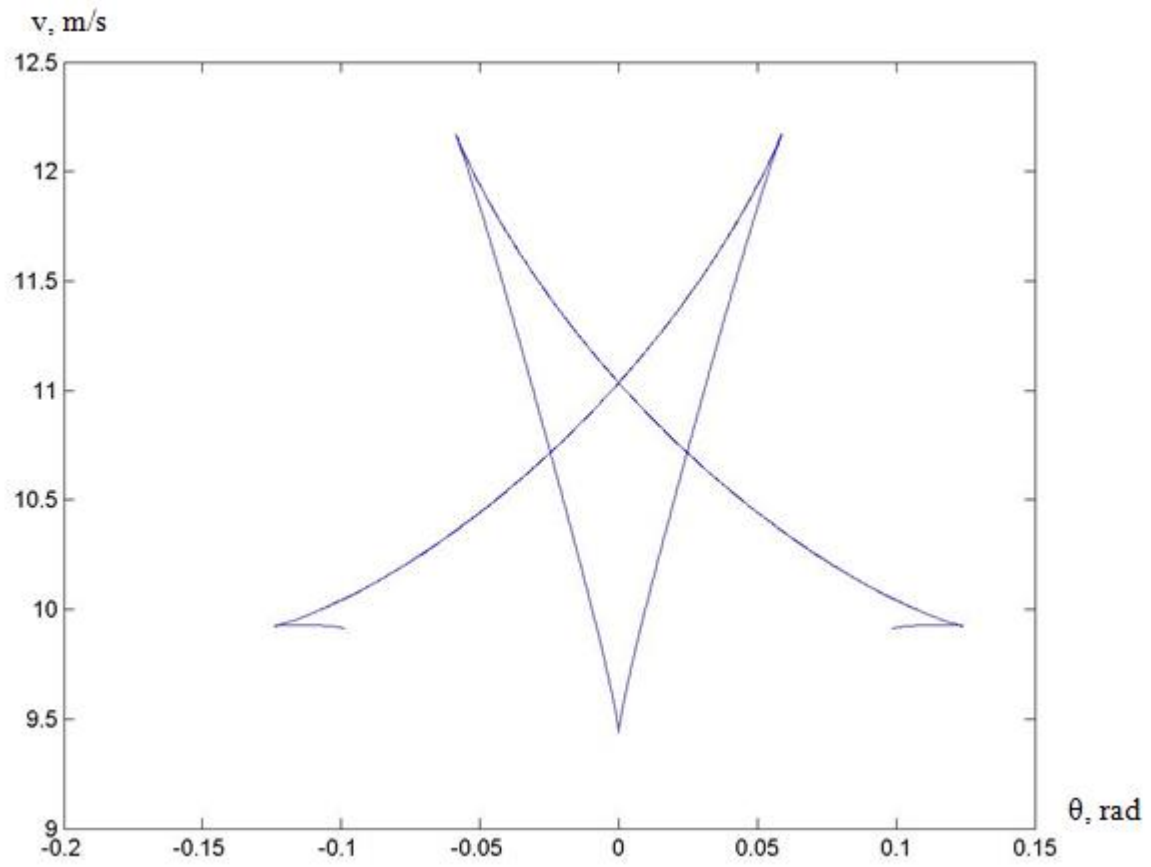
$$V_1^2(1/\bar{K}_1 - 1/\bar{K}_2) + d_1 \cdot g \cdot (m_1/m) \cdot (1+b/a) \cdot (1 - V_1^2/V_2^2) / (\bar{k}_2 \cdot \bar{k}_3) > 0, \quad (9)$$

where $V_1^2 = \bar{k}_1 \cdot \bar{k}_2 l \cdot g / (\bar{k}_1 - \bar{k}_2)$, $V_2^2 = \bar{k}_2 \cdot \bar{k}_3 d_1 \cdot g / (\bar{k}_3 - \bar{k}_2)$,

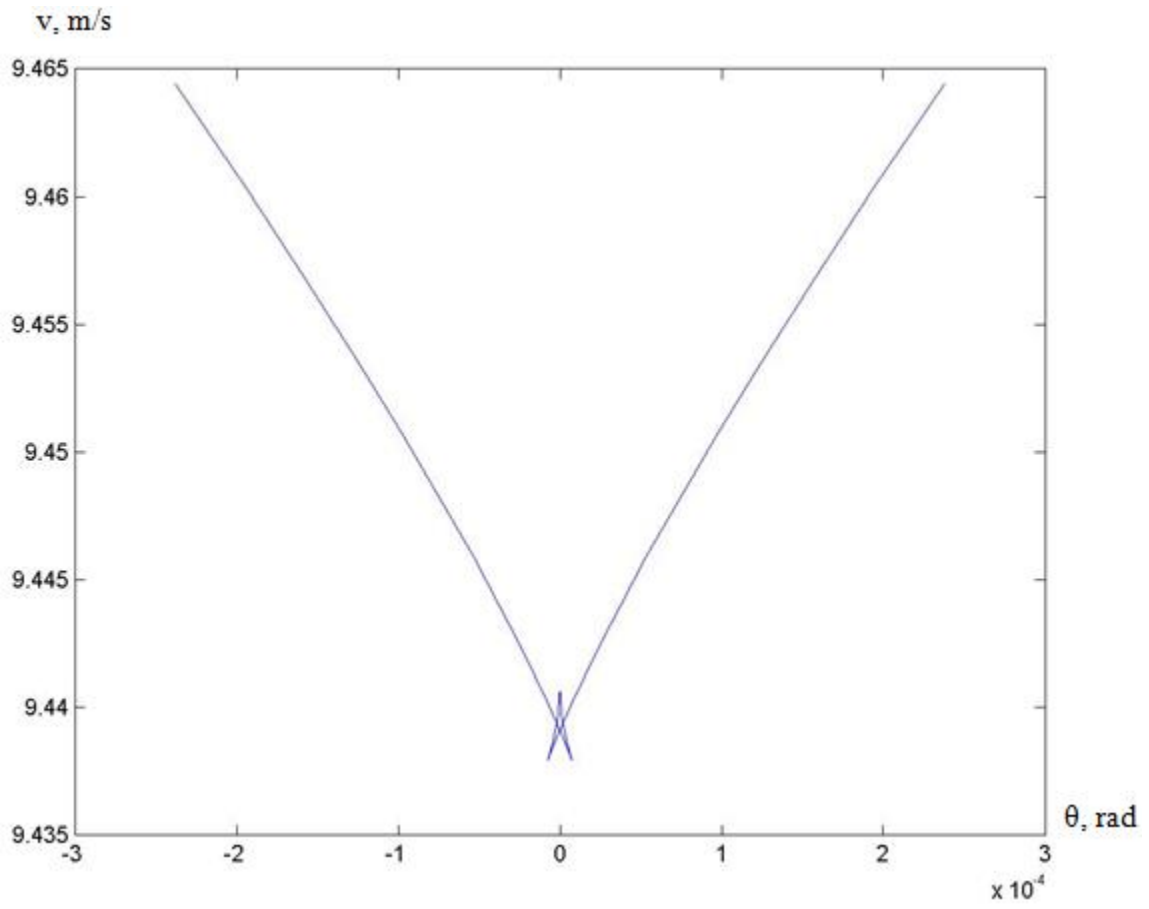
$1/\bar{K}_i = (\pi^2 / 12) / (\bar{k}_i \cdot \kappa_i^2)$, $i = 1, 2$ in case of drift forces approximation as an arctangenoid.

The addend in inequation (9) is generated by linear approximation terms and this makes it stable with various kinds of wheel slipping forces approximation. V_1 value defines critical velocity of an articulate vehicle linear movement mode, V_2 – is a value possessing dimension of velocity.

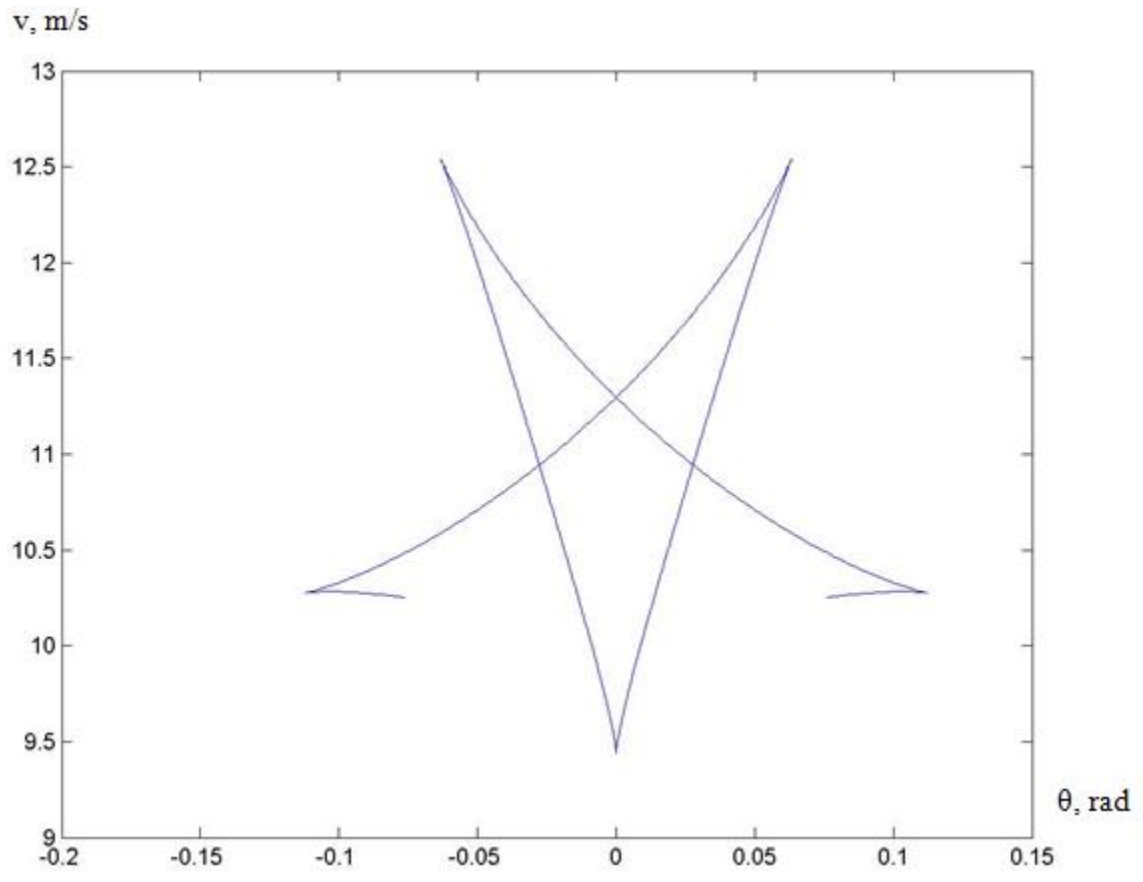
Figure 7, *a,c* depicts the influence of peculiar d_1 parameter variation in its critical value neighbourhood ($d_1^* = 14.435$ m) on bifurcation multitude type, bifurcation curves are build for undercritical ($d_1 = 14$ m) and supercritical ($d_1 = 15$ m) parameter values, bifurcation curves fragments in small neighbourhood of linear movement mode critical velocity are represented on Figure 7, *b,d*. Qualitative changes in bifurcation diagram structure (the later are received numerically based on the two parameter continuation method) correlate with the analytical result (9). With numerical building the following set of parameters was used $g = 9,81$ m/s²; $a = 1,92$ m; $b = 0,82$ m; $c = 0,82$ m; $m = 5310$ κ₂; $m_2 = 6481$ κ₂; $k_1 = 305091$ H; $k_2 = 103496$ H; $k_3 = 154079$ H; $\kappa_1 = 0.8$; $\kappa_2 = 0.8$; $\kappa_3 = 0.8$.



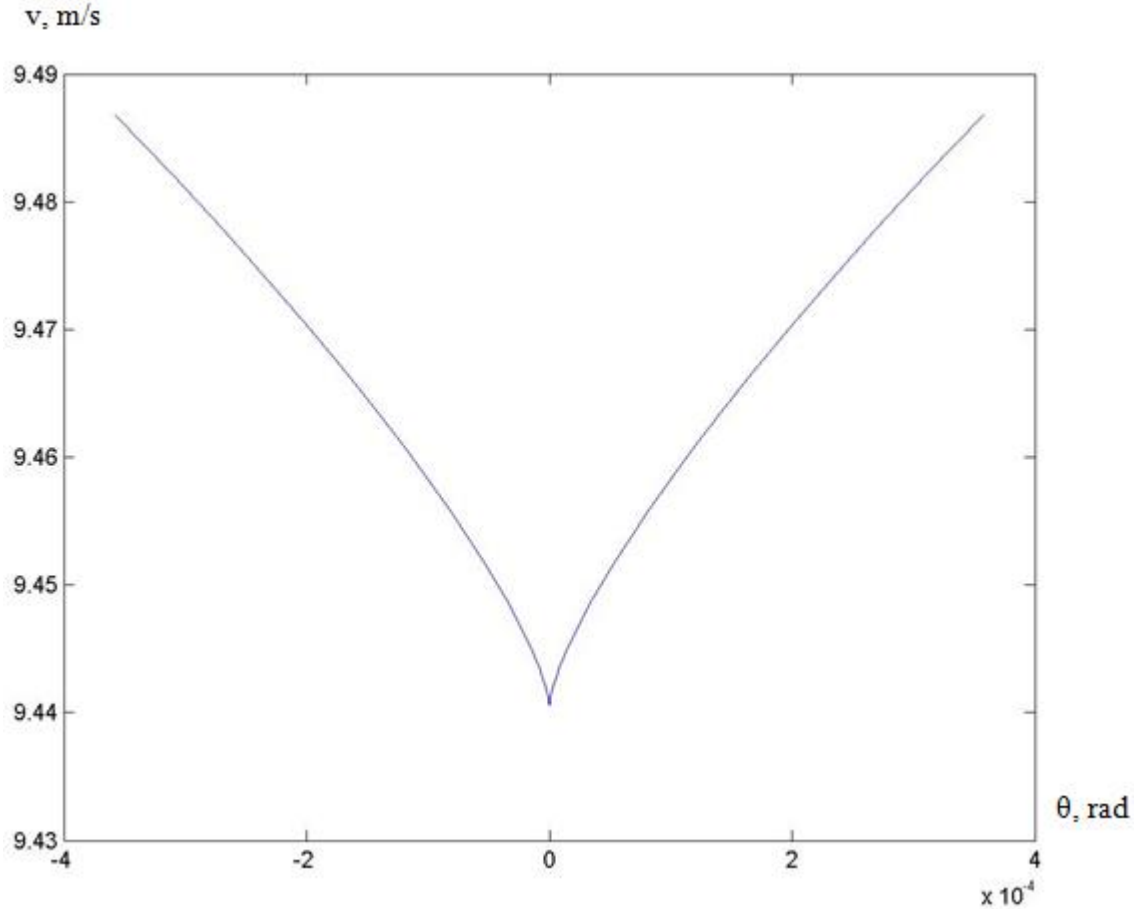
a)



b)



c)



d)

Figure 7 Controlling parameters bifurcation multitude corresponding to system (1):
a) bifurcation multitude with undercritical d_1 parameter value; b)- bifurcation multitude fragment with undercritical d_1 parameter value in central cusp neighbourhood; c) bifurcation multitude with supercritical d_1 parameter value; d) bifurcation multitude fragment with supercritical d_1 parameter value in central cusp neighbourhood

Bifurcation multitude of complete system (1) and simplified system (2) can have considerable differences – this comes out of the safe linear movement mode stability loss conditions received analytically. Thus Figure 8 represents bifurcation multitude corresponding to approximate system (2) to compare it to its exact equivalent on Figure 7, c.

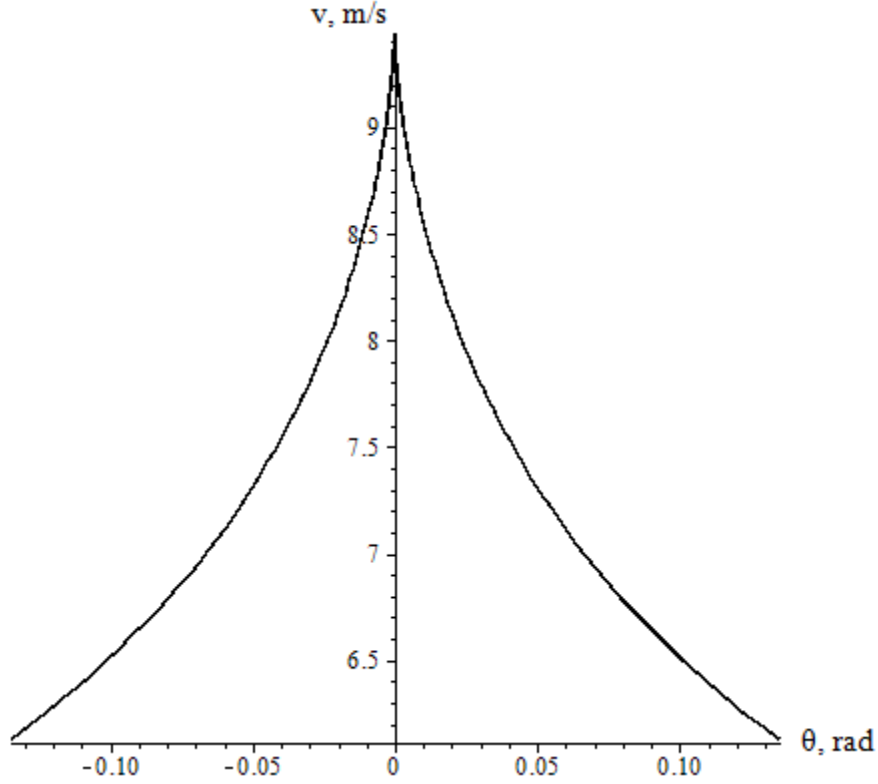


Figure 8. Bifurcation multitude of controlling parameters with supercritical d_1 , parameter value corresponding to system (2)

For system (2) conditions of safe stability loss can be easily obtained from the corresponding defining equation (the first (4) equation) represented with the precision of up to cubic terms of scaled transverse acceleration power expansion

$$\theta = l \cdot g \cdot \bar{a}_y / v^2 + G_{12}(\bar{a}_y) \Rightarrow -\theta + (gl/v^2 + 1/\bar{k}_1 - 1/\bar{k}_2)\bar{a}_y + (1/\bar{K}_1 - 1/\bar{K}_2)\bar{a}_y^3 = 0. \quad (10)$$

$$1/\bar{K}_i = (\pi^2/12)/(\bar{k}_i \cdot \kappa_i^2), i = 1, 2.$$

Analyzing solutions number of the latest equation in small critical velocity neighbourhood $v = V_1$ (it's supposed that $\bar{k}_1 > \bar{k}_2$, $\theta = 0$) is performed. Equation (10) with these suggestions can be presented in the following form:

$$gl/v^2 \cdot (1 - \frac{v^2}{V_1^2})\bar{a}_y + \pi^2/12 \left(\frac{\bar{k}_2 \cdot \kappa_2^2 - \bar{k}_1 \cdot \kappa_1^2}{\bar{k}_1 \cdot \kappa_1^2 \cdot \bar{k}_2 \cdot \kappa_2^2} \right) \bar{a}_y^3 = 0,$$

then with $v < V_1$ and $\bar{k}_1 \cdot \kappa_1^2 > \bar{k}_2 \cdot \kappa_2^2$ there are three steady states there (one stable and two unstable) and with $v > V_1$ and $\bar{k}_1 \cdot \kappa_1^2 > \bar{k}_2 \cdot \kappa_2^2$ - there is one there (unstable). If

$\bar{k}_1\kappa_1^2 < \bar{k}_2\kappa_2^2$, then with $v > V_1$ there are three steady states there (one unstable and a pair of stable ones) – the case of stable steady states pair appearing (i.e. with $\bar{k}_1\kappa_1^2 > \bar{k}_2\kappa_2^2$ bifurcation multitude branches in critical velocity small neighbourhood $v = V_1$ are located below returning point and with $\bar{k}_1\kappa_1^2 < \bar{k}_2\kappa_2^2$ above it).

This way, in system (2) semitrailer parameters only implicitly influence conditions of safe linear movement mode stability loss (included into dimensionless drift coefficients on tractor truck axels), as opposed to conditions (9). Elimination of such qualitative differences between systems (1) and (2) required nonlinear connection restoring (with precision of up to third smallness term) for sub systems tractor truck-semitrailer which appears as a transverse force in the joint point. In case of the suggested approximate system (2) correction, an analytical means of building handling and folding curves reveals broadening of their usage area according to the normal acceleration parameter.

Прийmemo ряд припущень, традиційних в задачах аналізу множини стаціонарних станів велосипедної моделі сідельного автопоїзда [5].

Схема зчленованого екіпажа приведена на малюнку 1, тут v - поздовжня складова центру мас тягача; θ - кут повороту керованого модуля; a, b - відстань від центру мас тягача до центрів передньої (керованої) осі і задньої осі тягача; c - відстань від центру мас тягача до точки зчипки з другою ланкою; d_1 - відстань від центру мас другої ланки до точки зчипки з тягачем; Y_i – сили відведення на осях, коефіцієнти опору відведенню на осях ($k_1; k_2; k_3$); коефіцієнти зчеплення коліс з опорною поверхнею в поперечному напрямі ($\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$); m - маса тягача; u - поперечна проекція вектора швидкості центру мас тягача; ω - кутова швидкість тягача, щодо вертикальної осі; m_2 - маса другої ланки; v_1, u_1 - поздовжня і поперечна проекції вектора швидкості центру мас напівпричепа; φ - кут складання (кут між поздовжньою віссю тягача і напівпричепа).

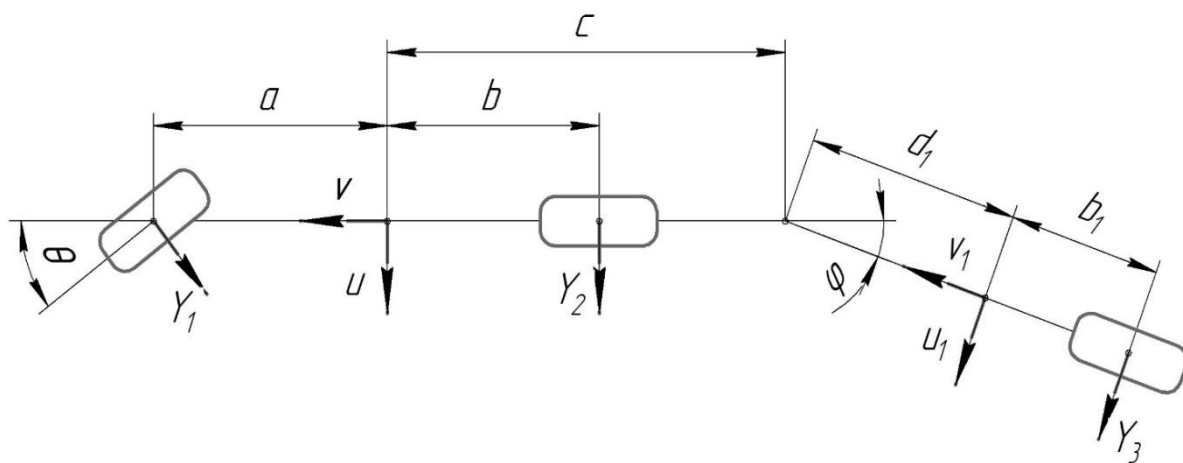


Рис.1. Конструктивна схема моделі сідельного автопоїзда.

Вихідна система, яка визначає множину стаціонарних режимів нелінійної моделі сидельного автопоїзда має вигляд:

$$\begin{cases} -(m + m_2)\omega v + Y_1 + Y_2 + Y_3 \cos \varphi + m_2 d_1 \omega^2 \sin \varphi = 0; \\ cm_2 \omega v + aY_1 - bY_2 - cY_3 \cos \varphi - cm_2 d_1 \omega^2 \sin \varphi = 0; \\ L_1 Y_3 - m_2 d_1 \omega v \cos \varphi + m_2 d_1 \omega u \sin \varphi - cm_2 d_1 \omega^2 \sin \varphi = 0, \end{cases} \quad (1)$$

$$\delta_1 = \theta - \frac{u + a\omega}{v}; \quad (2)$$

$$\delta_2 = \frac{-u + b\omega}{v}; \quad (3)$$

$$\delta_3 = \frac{-u_1 + b_1 \omega}{v_1}; \quad (4)$$

$$u_1 = (u - c\omega) \cos \varphi + v \sin \varphi - d_1 \omega; \quad (5)$$

$$v_1 = v \cos \varphi - (u - c\omega) \sin \varphi. \quad (6)$$

Спрощена (частково лінеаризована) система рівнянь, що визначає стаціонарний режим руху автопоїзда

$$\begin{cases} -(m + m_2)\omega v + Y_1 + Y_2 + Y_3 = 0; \\ cm_2 \omega v + aY_1 - bY_2 - cY_3 = 0; \\ -d_1 m_2 \omega v + L_1 Y_3 = 0, \end{cases} \quad (7)$$

може бути розв'язана як лінійна система рівнянь відносно сил відведення, що реалізуються на осях:

$$\bar{Y}_1(\delta_1) = \bar{Y}_2(\delta_2) = \bar{Y}_3(\delta_3) = \frac{\omega v}{g}, \quad (8)$$

де $\bar{Y}_i = Y_i / N_i$ - безрозмірна сила відведення на i -й осі;

лінеаризовані кути відведення

$$\delta_1 = \theta - \frac{u + a\omega}{v}; \quad (9)$$

$$\delta_2 = \frac{-u + b\omega}{v}; \quad (10)$$

$$\delta_3 = -\varphi + \frac{-u + (L_1 + c)\omega}{v}, \quad (11)$$

вертикальні реакції на осях

$$N_1 = \frac{bL_1m - (c - b)b_1m_2}{L_1l}; \quad (12)$$

$$N_2 = \frac{(a + c)b_1m_2 + aL_1m}{L_1l}; \quad (13)$$

$$N_3 = \frac{m_2d_1}{L_1}. \quad (14)$$

Враховуючи, що різниця кутів відведення на першій і другій осях тягача $\delta_1 - \delta_2 = \theta - l\omega/V$, на третій і другій осях $\delta_3 - \delta_2 = -\varphi + (L_1 + c - b)\omega/V$, а величини кутів відведення, що відповідають стаціонарним режимам руху δ_i : $\delta_1 = \bar{Y}_1^{-1}(\bar{a}_y)$, $\delta_2 = \bar{Y}_2^{-1}(\bar{a}_y)$, $\delta_3 = \bar{Y}_3^{-1}(\bar{a}_y)$, отримаємо три співвідношення, які визначають множину стаціонарних станів моделі автопоїзда

$$\theta = l g \bar{a}_y / V^2 + \bar{Y}_1^{-1}(\bar{a}_y) - \bar{Y}_2^{-1}(\bar{a}_y), \quad (15)$$

$$u/V = b g \bar{a}_y / V^2 - \bar{Y}_2^{-1}(\bar{a}_y), \quad (16)$$

$$\varphi = (L_1 + c - b) g \bar{a}_y / V^2 - (\bar{Y}_3^{-1}(\bar{a}_y) - \bar{Y}_2^{-1}(\bar{a}_y)), \quad (17)$$

де $\bar{a}_y = \frac{\omega V}{g}$ - бічна складова прискорення Ц.М. тягача.

Крім того слід пам'ятати, що рівняння (16, 17) можуть мати області можливих значень менші ніж рівняння (15), тому не обов'язково кількість стаціонарних режимів всієї системи співпадатиме з кількістю розв'язків визначального рівняння (15).

Аналіз умов статичної (дивергентної) втрати стійкості екіпажа в кривій сталого радіусу кривизни.

Як вже згадувалось, дивергентна втрата стійкості стаціонарного режиму пов'язана з появою нульового власного значення відповідної системи лінійного наближення, це означає, що визначник матриці системи лінійного наближення в цьому випадку має дорівнювати нулю, так як визначає вільний член відповідного характеристичного рівняння.

З іншого боку цей факт вказує на кратність досліджуваного стаціонарного стану, що впливає з якісної теорії динамічних систем [Андронов, Витт, Хайкин]. Безпосередньо доведення цього факту при дослідженні дивергентної втрати стійкості прямолінійного руху нелінійних моделей двохосного екіпажу та дволанкового автопоїзда було проведено в роботах [Л.Г. Лобас, В.Г. Вербицький], де результати біфуркаційного аналізу порівнювались з результатами, отриманими на основі класичного підходу О.М. Ляпунова (порівняння з першою ляпуновською величиною, що визначає умови стійкості в критичному випадку одного нульового кореня).

Так з лінійної теорії відомо вирази критичної швидкості прямолінійного руху двохосного екіпажу та дволанкового автопоїзда з надлишковою повороткістю (в цьому випадку $\bar{k}_1 > \bar{k}_2$, які в безрозмірному вигляді (відносно безрозмірних коефіцієнтів опору відведення) співпадають

$$V_{kp1} = \sqrt{\frac{l^*g}{1/\bar{k}_2 - 1/\bar{k}_1}}.$$

Далі цей самий вираз буде отримано на основі графо-аналітичного підходу та елементів біфуркаційного аналізу, що цікавить нас більше, з точки зору ілюстрації запропонованого підходу і підкреслює загальну геометричну картину, що пов'язана з механізмом дивергентної втрати стійкості.

Аналіз почнемо з одного незалежного рівняння (15)

$$l^*g * \bar{a}_y / V^2 - \theta = G_2(\bar{a}_y) - G_1(\bar{a}_y),$$

яке і визначає структуру рівноважної поверхні стаціонарних станів. Як виявляється ця поверхня має певні особливості при проектуванні на площину параметрів керування V, θ , пов'язану з її багатозначністю, з класичних результатів Уїтні [] впливає, що у випадках загального положення це може бути fold - згортка та cusp - збірка, що і підтвердить наш подальший аналіз.

Рівняння (15) є аналогом рівняння Я. М. Певзнера, його очевидна перевага (у випадках існування відповідних обернених функцій $G_i(\bar{a}_y)$) – у можливості точного

аналітичного представлення визначального рівняння (15) та наступних двох рівнянь (16,17), що визначають параметри стаціонарних станів.

Розглянемо необхідні передумови для реалізації запропонованого підходу – залежності сил відведення як функції кутів відведення повинні мати аналітично визначені обернені залежності. Так, для випадку апроксимації безрозмірних сил відведення у вигляді дробово-іраціональної функції $\bar{Y}_i = \frac{\bar{k}_i \delta_i}{\sqrt{1 + \left(\frac{\bar{k}_i \delta_i}{\kappa_i}\right)^2}}$, обернена функція визначається

$$\bar{Y}_i = \frac{\bar{k}_i \delta_i}{\sqrt{1 + \left(\frac{\bar{k}_i \delta_i}{\kappa_i}\right)^2}}$$

співвідношеннями

$$\delta_i = \frac{\bar{Y}_i}{\bar{k}_i \sqrt{1 - \left(\frac{\bar{Y}_i}{\kappa_i}\right)^2}}; G_i = \frac{\bar{a}_y}{\bar{k}_i \sqrt{1 - \left(\frac{\bar{a}_y}{\kappa_i}\right)^2}},$$

(графіки вихідних залежностей сил відведення і відповідних обернених функцій представлені на рис.1, а), б))

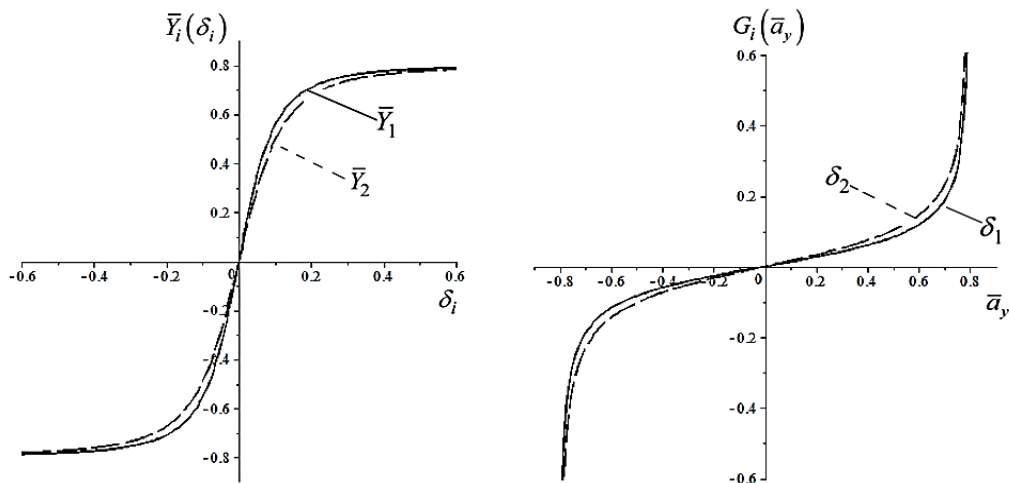


Рис. 2. Графіки нелінійних сил відведення а) та відповідних обернених залежностей б)

Стационарним станам системи відповідають точки перетину прямої $\frac{gl}{V^2}\bar{a}_y - \theta$ та графіка нелінійної функції $G_{21}(\bar{a}_y) = G_2(\bar{a}_y) - G_1(\bar{a}_y)$ (рисунок 3). Дивергентна втрата стійкості (критичний випадок О. М. Ляпунова одного нульового кореня відповідного характеристичного рівняння) супроводжується появою кратних стаціонарних станів нелінійної динамічної системи. Ця обставина дає можливість дослідити умови появи кратних станів системи на підставі аналізу визначального рівняння (15), а саме умови, коли пряма $\frac{gl}{V^2}\bar{a}_y - \theta$ стає дотичною до графіка нелінійної функції $G_{21}(\bar{a}_y)$.

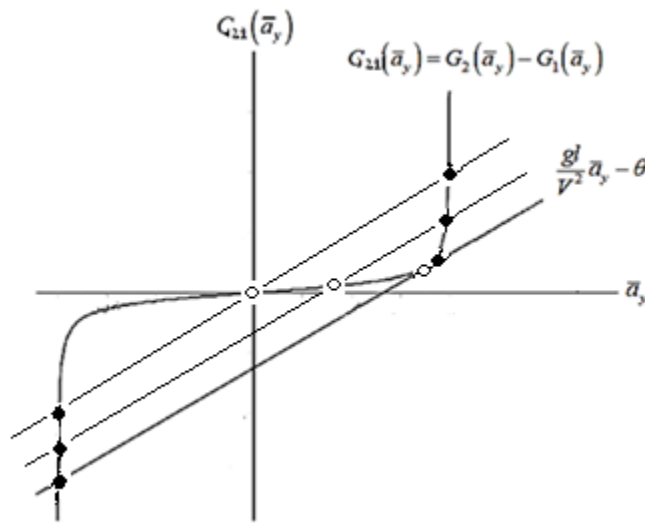


Рис. 3. До визначення умов реалізації кратних стаціонарних станів

Умови, за яких пряма $\frac{gl}{V^2}\bar{a}_y - \theta$ дотична до кривої $G_{21}(\bar{a}_y)$ (рисунок 3)

$$\begin{cases} G'_{21} = \frac{gl}{V^2}; \\ G_{21} + \theta = G'_{21} \cdot \bar{a}_y. \end{cases} \quad (18)$$

визначають в параметричній формі множину параметрів V, θ (критичну або біфуркаційну) за яких відбувається дивергентна втрата стійкості стаціонарних станів нелінійної моделі екіпажа. Точкам перетину функції $G_{21}(\bar{a}_y)$ відповідають точки загострення на біфуркаційній кривій. У випадку функції $G_{21}(\bar{a}_y)$, представленій на рисунку 3, точка перетину знаходиться на початку координат – їй відповідає касп на біфуркаційній кривій

(рис.4, а) з ординатою $V_{кр1}$ (з необхідністю виникає для випадку моделі з надлишковою повороткістю). Площина параметрів керування (V, θ) в цьому випадку розбивається біфуркаційною кривою на дві області – з трьома стаціонарними станами (під біфуркаційною кривою) та з одним стаціонарним станом (вище біфуркаційної кривої), на самій біфуркаційній кривій виникають кратні стаціонарні стани – відбувається дивергентна втрата стійкості стійких стаціонарних станів. Так при фіксованій поздовжній швидкості (рис.3), що менше ніж критична швидкість прямолінійного руху $V < V_{кр1}$, і повільній зміні кута повороту θ від нуля до певного критичного значення на біфуркаційній кривій – стійкий стаціонарний стан, що відповідав прямолінійному руху, переходить у стійкий круговий режим і лишається стійким, поки кут повороту не стає критичним. При подальшому збільшенні кута повороту пара стаціонарних станів, один з яких був стійким, а другий нестійким (узагальнене сідло), зникають – лишається лише один нестійкий стаціонарний стан (узагальнене сідло). При нульовому куті повороту керування коліс і повільному зростанні поздовжньої швидкості руху прямолінійний стаціонарний стан буде лишатися стійким (з точки зору дивергентної втрати стійкості), поки нахил прямої більший за нахил дотичної до кривої $G_{21}(\bar{a}_y)$ на початку системи координат, коли ці нахили співпадуть (при $V=V_{кр1}$) на початку системи координат реалізується трикратний стаціонарний режим – зі стійким прямолінійним режимом зливається пара нестійких режимів (узагальнені сідла), а при $V > V_{кр1}$ лишається простий (однократний) нестійкий прямолінійний режим (узагальнене сідло). Дійсно з умов співпадання нахилу прямої $l^*g^* \bar{a}_y / V^2 - \theta$ та кривої $G_{21}(\bar{a}_y)$ на початку координат маємо співвідношення

$$l^*g^* / V^2 = G'_{21}(\bar{a}_y) \Big|_{\bar{a}_y=0} = 1/\bar{k}_2 - 1/\bar{k}_1,$$

з якого випливає вираз для критичної швидкості прямолінійного руху $V_{кр1}$.

Проведена вище процедура побудови критичної (біфуркаційної) множини параметрів керування не потребувала знання самих розв'язків рівняння (15).

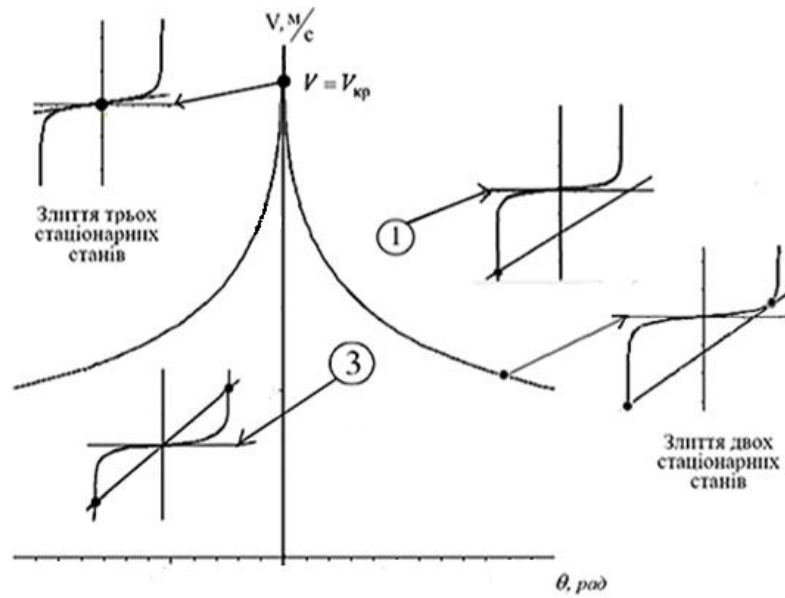


Рис. 4, а. Графік характерної біфуркаційної множини параметрів керування V, θ та закономірність зміни кількості стаціонарних станів.

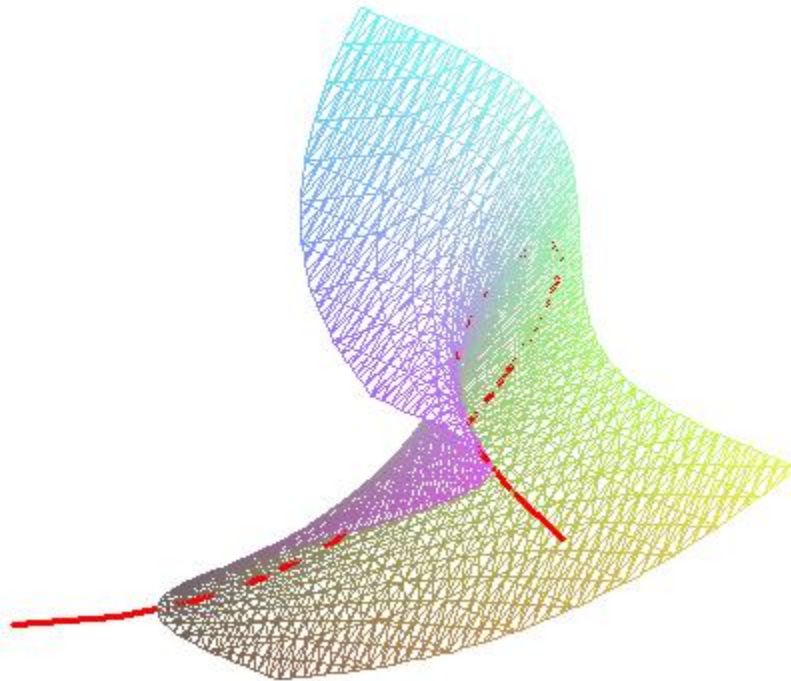


Рис. 4, б. Рівноважна поверхня, що відповідає розв'язкам рівняння (15)

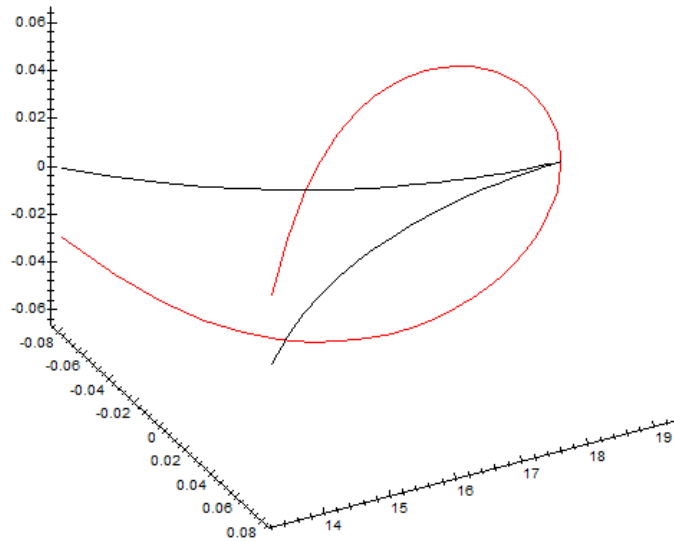


Рис. 4, а. Критична (біфуркаційна) множина параметрів відповідає проекції біфуркаційної множини стаціонарних станів на площину параметрів керування V, θ .

Розглянемо ту саму задачу з іншого боку – множина розв’язків рівняння (15) утворює так звану рівноважну поверхню $\bar{a}_y(V, \theta)$ (рис.4, б), на якій множина кратних стаціонарних режимів утворює біфуркаційну множину рівноважної поверхні (просторова крива виділена червоним на рисунку 4, б), а її проекція на площину параметрів керування задає критичну (біфуркаційну) множину параметрів керування (рис.4, в), але такий підхід потребував би знання розв’язків рівняння (15).

Перейдемо до аналізу кутів складання в кругових стаціонарних режимах при різних значеннях параметра поздовжньої швидкості.

На рисунку 5 проілюстровано графічний підхід при розв’язанні системи двох рівнянь (15), (17).

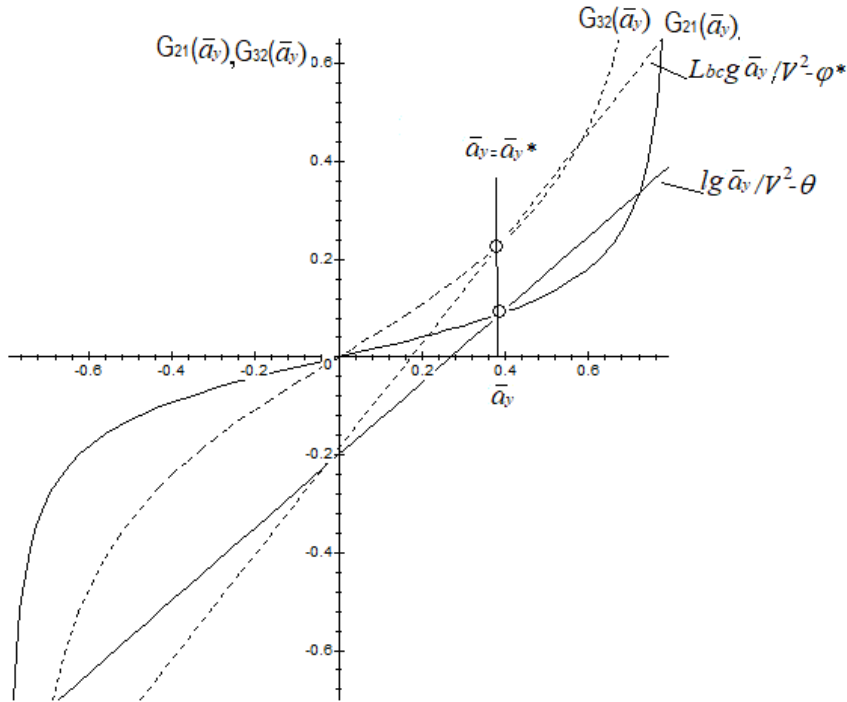


Рис. 5. Ілюстрація графічного методу розв'язання нелінійної системи кінцевих рівнянь, що визначають множину стаціонарних станів моделі сідельного автопоїзда.

Почнемо з визначального рівняння (15): при певних значеннях параметрів керування V, θ кількість перетинів прямої $l^*g^* \bar{a}_y / V^2 - \theta$ та кривої $G_{21}(\bar{a}_y)$ відповідає кількості стаціонарних станів моделі (на рисунку 5 відповідні пряма та крива показані неперервними). Для вибраного розв'язка $\bar{a}_y = \bar{a}_y^*$ (рис.5), з рівняння (17) визначимо відповідне значення кута складання φ^* .

Тоді рівняння (17) при заданому параметрі V та значенні кута складання φ^* повинне мати розв'язок відносно аргументу \bar{a}_y , який співпадає з розв'язком $\bar{a}_y = \bar{a}_y^*$ (пряма $Lbc^*g^* \bar{a}_y / V^2 - \varphi^*$ та крива $G_{32}(\bar{a}_y)$, на рисунку 5 показані перервними).

При подальшому аналізі буде важливою ще одна характерна величина поздовжньої швидкості, вона також може бути визначена з умови співпадання нахилу прямої $Lbc^*g^* \bar{a}_y / V^2 - \varphi^*$ та дотичної до нелінійної функції $G_{32}(\bar{a}_y)$ в нулі. Незалежно від конкретного вигляду нелінійних функцій, що визначають бокові сили відведення $\bar{Y}_i(\delta_i)$, цей вираз буде мати вигляд (визначальною в цьому випадку є лише лінійна частина залежностей сил відведення, де $\bar{k}_2 > \bar{k}_3$)

$$V_{kp2} = \sqrt{\frac{Lbc^*g}{1/\bar{k}_3 - 1/\bar{k}_2}}.$$

Припустимо, що $V_{kp2} < V_{kp1}$, виберемо параметри керування V : $V_{kp2} < V < V_{kp1}$ и достатньо мале значення $\theta > 0$, так щоб відповідна величина \bar{a}_y^* знаходилась в зоні «лінійності»

функцій $G_{21}(\bar{a}_y)$ та $G_{32}(\bar{a}_y)$ (рис.6). Якщо $V > V_{kp2}$, то нахил прямої $Lbc * g * \bar{a}_y / V^2 - \varphi$, що перетинає криву $G_{32}(\bar{a}_y)$ в зоні її «лінійності», менше ніж нахил в нулі функції $G_{32}(\bar{a}_y)$, звідси випливає, що відповідне значення кута складання від'ємне (пряма перетинає вісь ординат вище нуля), а при $V < V_{kp2}$ та достатньо малому $\theta > 0$ – додатне (таке співвідношення параметрів керування відповідає рисунку 5). Цей аналіз співпадає з результатами лінійної теорії – орієнтацію напівпричепа при достатньо малих значеннях кута повороту можна проаналізувати на основі відомого співвідношення

$$\varphi = (L_1 + c - b)g\bar{a}_y / V^2 - (1/\bar{k}_3 - 1/\bar{k}_2)\bar{a}_y ;$$

$$\varphi > 0 \Rightarrow V^2 < (L_1 + c - b)g / (1/\bar{k}_3 - 1/\bar{k}_2).$$

Але попередні результати можуть бути узагальнені на випадок нелінійних залежностей сил відведення, що визначаються монотонними функціями, представленими на рисунку 2 (відповідні залежності сил відведення перетинаються лише на початку координат).

У випадку монотонно зростаючої функції $G_{32}(\bar{a}_y)$; ($V > V_{kp2}$), при збільшенні абсциси \bar{a}_y * перетину прямої $Lbc * g * \bar{a}_y / V^2 - \varphi$ та функції $G_{32}(\bar{a}_y)$, знак кута φ залишається від'ємним, а його модуль зростає тим більше, чим більшою стає крутизна кривої в точці перетину з прямою. Дійсно, в цьому випадку похідна функції (правої частини рівняння (17), що визначає кут складання) по аргументу \bar{a}_y строго від'ємна.

Поведінка системи при $V < V_{kp2}$ більш складна, при збільшенні \bar{a}_y * - абсциси перетину прямої $Lbc * g * \bar{a}_y / V^2 - \varphi$ та функції $G_{32}(\bar{a}_y)$, знак кута φ може змінитися на протилежний (тобто від'ємний) при достатньо великих значеннях \bar{a}_y *, але з впевненістю можна стверджувати лише те, що існує значення аргументу \bar{a}_y **, при якому реалізується максимальне значення кута складання $\varphi^{max} > 0$. В цьому легко переконатися, проаналізувавши похідну правої частини рівняння (17) по аргументу \bar{a}_y : $Lbc * g * V^2 - G'_{32}(\bar{a}_y)$. В нулі цей вираз додатній, а при достатньо великих значеннях аргументу \bar{a}_y * величина $G'_{32}(\bar{a}_y)$ стане більшою за величину $Lbc * g * V^2$.

Для випадку $V < V_{kp2}$ можна навести достатню умову того, що кут φ стає від'ємним при максимально можливому значенні аргументу \bar{a}_y^{max} (відповідає дивергентній втраті стійкості відповідного стаціонарного режиму та визначається як розв'язок рівняння $l * g / V^2 = G'_{21}(\bar{a}_y)$). З рисунку 6 (вважаємо, що $Lbc > l$) випливає, що при $\bar{a}_y = \bar{a}_y^{max}$ пряма $l * g * \bar{a}_y / V^2 - \theta$ дотична до кривої $G_{21}(\bar{a}_y)$, а нахил прямої $Lbc * g * \bar{a}_y / V^2 - \varphi$ менший ніж нахил прямої $l * g * \bar{a}_y / V^2 - \theta$, в силу нашого припущення. Тому пряма $Lbc * g * \bar{a}_y / V^2 - \varphi$ гарантовано буде перетинати вісь ординат вище нуля при виконанні умови $G_{32}(\bar{a}_y^{max}) - G_{21}(\bar{a}_y^{max}) > \theta^{max}$, що приводить до наступного співвідношення

$$G_{32}(\bar{a}_y^{\max}) > \frac{l^* g}{V^2} \bar{a}_y^{\max}.$$

Далі проілюструємо підхід, пов'язаний з нелокальним аналізом максимальний значень кутів складання (випадок монотонно зростаючих функцій $G_{21}(\bar{a}_y)$, $G_{32}(\bar{a}_y)$ (рис.6)).

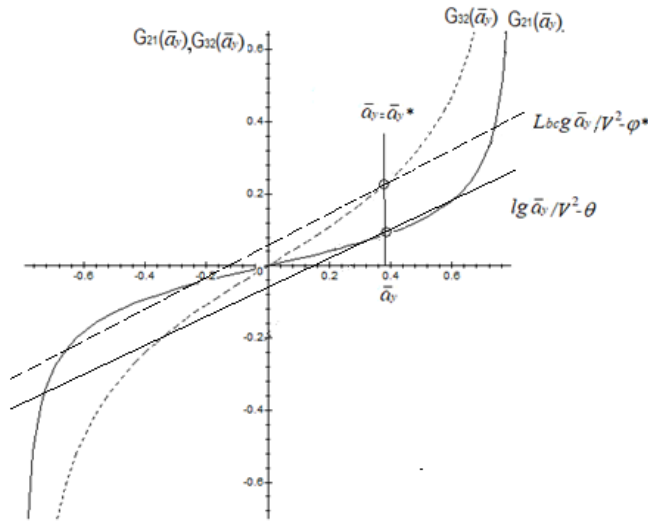


Рис. 6. Ілюстрація графічного метода для визначення конфігурації моделі сідельного автопоїзда в кругових режимах при швидкостях в околі V_{kp2} .

Так як нахил прямої $Lbc \cdot g \cdot \bar{a}_y / V^2 - \varphi$ фіксований ($V < V_{kp2}$), а функція $G_{32}(\bar{a}_y)$ є монотонно зростаючою, максимальне значення кута φ реалізується при умові, що нахил прямої $Lbc \cdot g \cdot \bar{a}_y / V^2 - \varphi$ співпадає з дотичною до кривої $G_{32}(\bar{a}_y)$. Відповідний аргумент \bar{a}_y^{**} не повинен перевищувати критичного значення \bar{a}_y^{\max} , яке визначає дивергентну втрату стійкості відповідного стаціонарного режиму, доречі, ця умова завжди виконується для обраного типу залежностей, представлених на рисунку 2.

Тому задача визначення максимально можливих значень кута складання φ_{\max}^+ при швидкостях поздовжнього руху $V < V_{kp2}$ пов'язана з побудовою двоїстої кривої [] до кривої $G_{32}(a_y)$ та задається параметрично заданою кривою (19)

$$\begin{cases} \varphi = G'_{32} \cdot \bar{a}_y - G_{32}; \\ V = \sqrt{g \cdot Lbc / G'_{32}}. \end{cases} \quad (19)$$

Відповідна локальна задача (при фіксованому значенні параметру поздовжньої швидкості) зводиться до визначення екстремуму функції, що задає праву частину рівняння (17).

Далі визначимо біфуркаційні криві в площині (φ, V) , яким відповідає дивергентна втрата стійкості, тобто стрибкоподібний перехід напівпричепа в нове положення.

Попередньо з'ясуємо один факт, пов'язаний з появою так званих точок повороту при застосуванні методу продовження по параметру (в задачі визначення розв'язків системи кінцевих нелінійних рівнянь при зміні певного параметра). Точка повороту на рівнобіжній кривій при зміні параметра характеризується вертикальною дотичною в цій точці, а при подальшій зміні параметра нахил дотичної до кривої змінює знак. В таких точках можуть відбуватися кінцеві стрибки розв'язків при нескінченно малих змінах параметра (так звані катастрофи в термінології Р. Тома [1]).

Ідею знаходження таких точок буде пояснено на прикладі двох кінцевих рівнянь (15) та (17). По-перше, точки повороту можуть бути визначені для одного незалежного рівняння (15), а прикладом однієї з таких точок є кратна (біло-чорна) точка на рисунку 3, саме з таких точок і складається критична (біфуркаційна) множина параметрів. По-друге, з двох рівнянь (15), (17) випливає диференціальний наслідок, що пов'язує між собою диференціали двох величин φ та θ при нескінченно малому зміщенні вздовж рівнобіжної кривої

$$\theta = \lg \bar{a}_y / V^2 + \bar{Y}_1^{-1}(\bar{a}_y) - \bar{Y}_2^{-1}(\bar{a}_y) \Rightarrow d\theta = d(\lg \bar{a}_y / V^2 + \bar{Y}_1^{-1}(\bar{a}_y) - \bar{Y}_2^{-1}(\bar{a}_y))$$

$$\varphi = (L_1 + c - b)g\bar{a}_y / V^2 - (\bar{Y}_3^{-1}(\bar{a}_y) - \bar{Y}_2^{-1}(\bar{a}_y)) \Rightarrow d\varphi = d((L_1 + c - b)g\bar{a}_y / V^2 - (\bar{Y}_3^{-1}(\bar{a}_y) - \bar{Y}_2^{-1}(\bar{a}_y)))$$

⇓

$$d\varphi/d\theta = d((L_1 + c - b)g\bar{a}_y / V^2 - (\bar{Y}_3^{-1}(\bar{a}_y) - \bar{Y}_2^{-1}(\bar{a}_y))) / d(\lg \bar{a}_y / V^2 + \bar{Y}_1^{-1}(\bar{a}_y) - \bar{Y}_2^{-1}(\bar{a}_y)).$$

З останнього співвідношення випливає, що точки повороту рівнобіжної кривої $\varphi(\theta)$ реалізуються при виконанні умови

$$d(\lg \bar{a}_y / V^2 + \bar{Y}_1^{-1}(\bar{a}_y) - \bar{Y}_2^{-1}(\bar{a}_y)) = 0 \Rightarrow l^* g / V^2 = G'_{21}(\bar{a}_y).$$

Тобто точки повороту рівнобіжних кривих $a_y(\theta)$ та $\varphi(\theta)$ мають співпадаючі абсциси (синхронізовані).

Оскільки відповідні значення параметра V визначаються з рівняння $l^* g / V^2 = G'_{21}(\bar{a}_y)$ (дивись (18)), біфуркаційна крива може задаватись в параметричній формі (20)

$$\begin{cases} \varphi = Lbc \cdot \bar{a}_y \cdot G'_{21} / l - G_{32}; \\ V = \sqrt{g \cdot l / G'_{21}}. \end{cases} \quad (20)$$

У цьому випадку теж можливо розглянути відповідний локальний підхід – при фіксованому значенні параметра V , з рівняння $l * g / V^2 = G'_{21}(\bar{a}_y)$ знаходимо критичне значення параметра \bar{a}_y^{\max} , після чого визначаємо з рівняння (17) відповідне значення φ .

Наведемо приклади чисельних розрахунків, які відповідають виробленій стратегії при дослідженні умов дивергентної втрати стійкості всієї множини стаціонарних станів моделі сидельного автопоїзда та оцінки максимально можливих кутів складання в заданому діапазоні поздовжньої швидкості для наступного набору конструктивних параметрів:

$m=6417; m_2=41846; a=4.217; b=3.376; l=a+b; d_1=8.075; b_1=2.93; c=3.376; L_1=b_1+d_1; \kappa_1=0.8; \kappa_2=0.8; \kappa_3=0.8; g=9.81; k_1=100000; k_2=300000; k_3=300000; Lbc=L_1+c-b; V=10\text{м/с};$

Рівняння, що відповідає умові нахил прямої $Lbc * g * \bar{a}_y / V^2 - \varphi$ співпадає з дотичною до кривої $G_{32}(\bar{a}_y)$:

$$Lbc * g / V^2 = G'_{32}(\bar{a}_y).$$

Його розв'язок

$$\bar{a}_y^{**} = 0.495111779;$$

Для перевірки умови $\bar{a}_y^{**} < \bar{a}_y^{\max}$ необхідно розв'язати ще одне нелінійне рівняння

$$l * g / V^2 = G'_{21}(\bar{a}_y).$$

Його розв'язок

$$\bar{a}_y^{\max} = 0.6105564852;$$

Відповідне значення максимального кута складання

$$\varphi^{**} = Lbc * g * \bar{a}_y^{**} / V^2 - G_{32}(\bar{a}_y^{**}) = 0.204733474;$$

Цей максимальний кут складання реалізується при швидкості $V=10\text{м/с}$ та куті повороту, який визначається з співвідношення

$$\theta^{**} = l * g * \bar{a}_y^{**} / V^2 - G_{21}(\bar{a}_y^{**}) = 0.2421216629;$$

Радіус кривизни траєкторії, яку описує характерна точка на поздовжній осі тягача, швидкість якої лежить вздовж цієї поздовжньої осі, визначається з співвідношення

$$R = V^2 / (\bar{a}_y^{**} * g) = 20.58864352 \text{ м};$$

$$u = V(bg\bar{a}_y^{**} / V^2 - G_2(\bar{a}_y^{**})) = -1.391246873 \text{ м/с};$$

На основі незалежного чисельного аналізу відповідної динамічної системи були отримані наступні характеристики досліджуваного стаціонарного стану:

$$ss := \{\omega = 0.4857046548, \phi = 0.2047334752, u = -1.391246870\}$$

$$Rd := 20.58864353$$

Власні значення лінеаризованої системи вказують на стійкість досліджуваного стаціонарного стану:

$$eigv := -0.3671402871 + 0.6486268820I, -0.3671402871 - 0.6486268820I, -0.3533060777, -3.489905257, -0.3671402871$$

Біфуркаційна множина параметрів керування (нелокальна характеристика умов дивергентної втрати стійкості множини кругових стаціонарних станів):

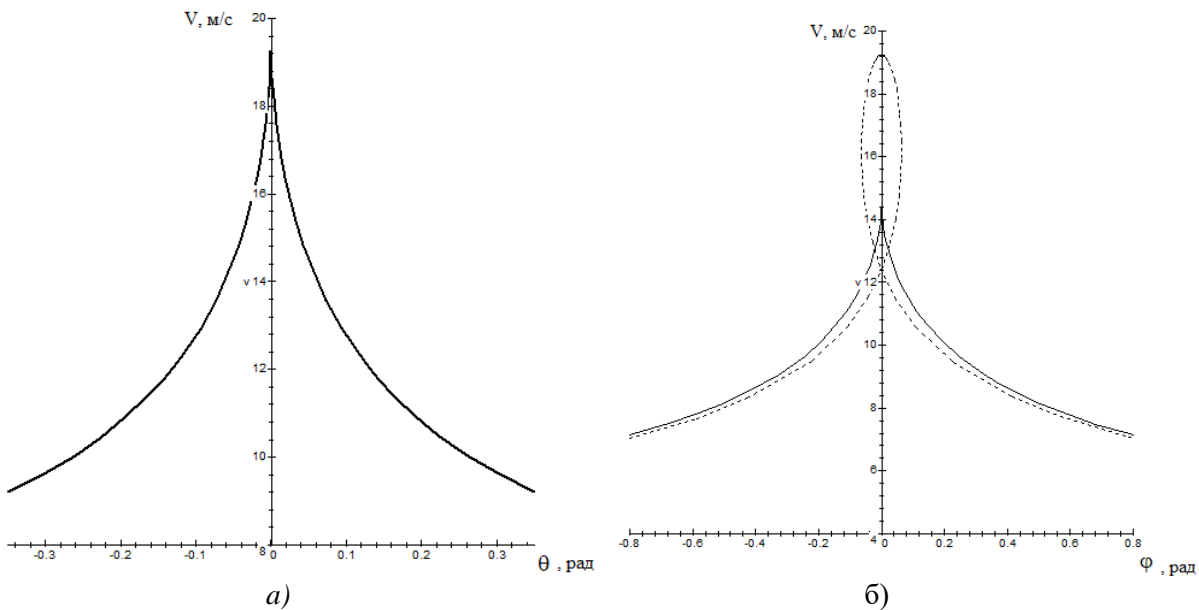


Рис.7. Біфуркаційні множини, що визначають дивергентну втрату стійкості стаціонарних станів моделі автопоїзда з монотонними характеристиками сил відведення ($\kappa_1=0.8$; $\kappa_2=0.8$; $\kappa_3=0.8$):

а) Критична множина параметрів керування V, θ ; б) граничні та біфуркаційні значення кута складання при можливих параметрах керування.

На рисунку 7,б) представлені оцінки максимальних значень кута складання сидельного автопоїзда в кругових стаціонарних режимах: неперервна крива відповідає максимальним значенням кута складання при орієнтації напівпричепа у внутрішню сторону повороту

(отримана на основі параметрично заданої кривої (19), $V_{kp2} = 14.364$ м/с визначає ординату каспу); частина перервної кривої (отримана на основі параметрично заданої кривої (20)) визначає біфуркаційні значення кута складання при орієнтації напівпричепа в протилежну сторону повороту, а дві її гілки після точки самоперетину відповідають вже додатним значенням кута складання.

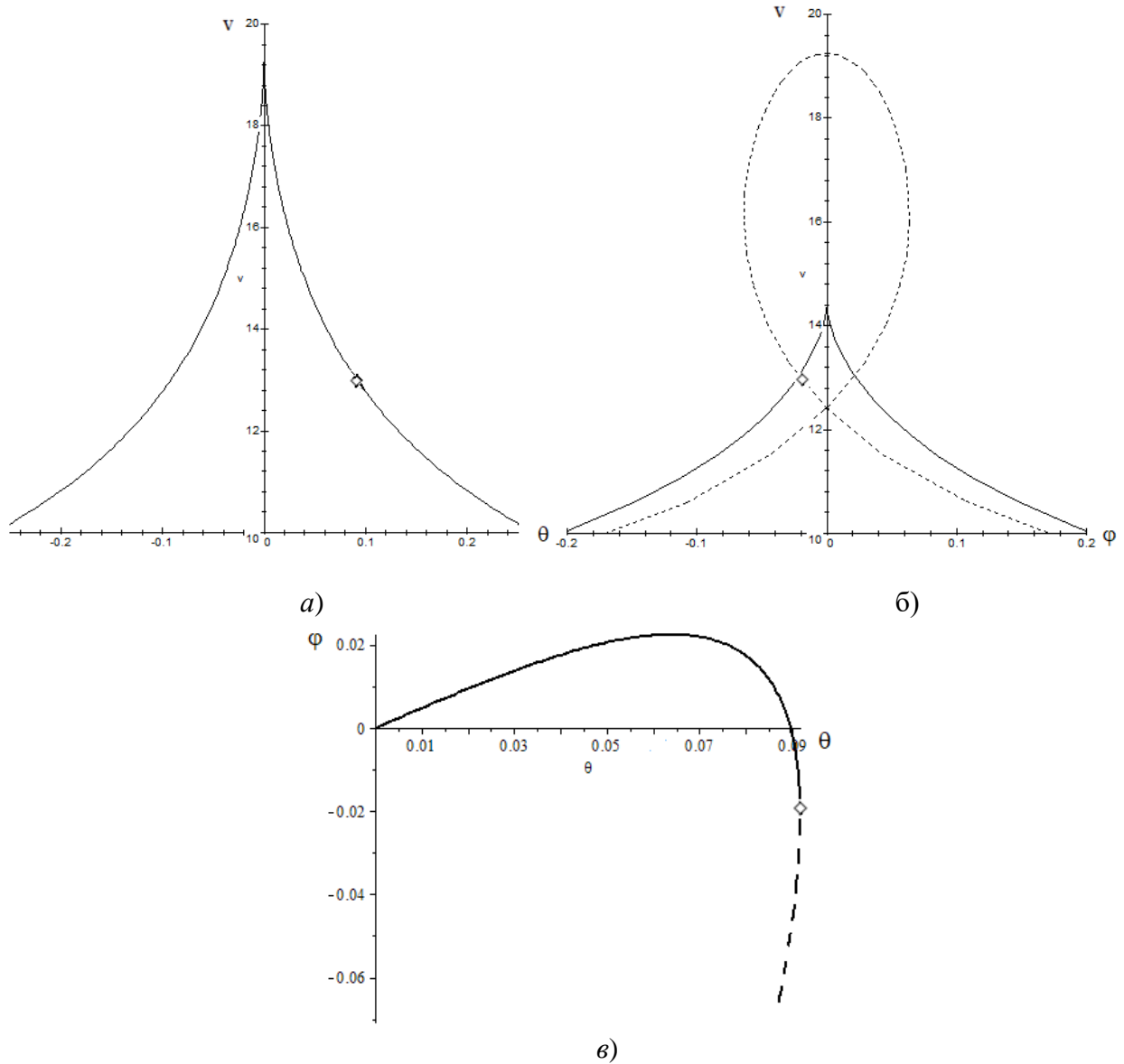


Рис.8. Співставлення критичних параметрів керування та відповідних їм точок біфуркаційної множини рівнобіжної кривої $\phi(\theta)$ при $V=13$ м/с (випадок монотонних характеристик сил відведення; $\kappa_1=0.8$; $\kappa_2=0.8$; $\kappa_3=0.8$):

а) критична множина параметрів керування V, θ ; б) граничні та біфуркаційні значення кута складання при фіксованих значеннях параметра швидкості; в) графік рівноважної кривої $\varphi(\theta)$ при $V=13$ м/с,

Зазначимо, що результати незалежного чисельного інтегрування відповідної динамічної системи автопоїзда повністю співпадають з результатами, що базуються на підходах біфуркаційного аналізу:

$$DG_{32} = \text{subs}(V=13, Lbc * g / V^2); \Rightarrow a_y = .2824221128;$$

$$(\text{subs}(\{V=13, a_y=.2824221128\}, l * a_y * g / V^2 - \theta - G_{21}) = 0; \Rightarrow \theta = .06381601844;$$

$$\varphi^{+max} = \text{subs}(\{V=13, a_y=.2824221128\}, -Lbc * a_y * g / V^2 + G_{32}) = .022484771;$$

При параметрах керування $V=13$ м/с; $\theta = .06381601844$ рад; шляхом чисельного інтегрування приходимо до стійкого стаціонарного режиму =>

$$\{\omega = 0.2131200713, \phi = 0.02248477141, u = -1.167456919\}$$

$$DG_{21} = \text{subs}(V=13, l * g / V^2); \Rightarrow a_y = .5107487518;$$

$$0 = \text{subs}(\{v=13, a_y=.5107487518\}, l * g * a_y / V^2 - \theta - G_{21}); \Rightarrow$$

$$\theta = .0917566757;$$

$$\varphi^{-max} = \text{subs}(\{V=13, a_y=.5107487518\}, -Lbc * a_y * g / V^2 + G_{32}) = -.0209130605;$$

При параметрах керування $V=13$ м/с; $\theta = .0917566757$ рад; шляхом чисельного інтегрування приходимо до стійкого стаціонарного режиму =>

$$\{\omega = 0.3854106531, \phi = -0.02090752406, u = -2.846887457\} .$$

На характер границі дивергентної втрати стійкості моделі автопоїзда, впливають саме «нелінійні» характеристики сил відведення (в даному випадку такими є κ_i - коефіцієнти зчеплення шини з опорною поверхнею у боковому напрямі), а на положення каспів - характерні параметри, що визначають лінійну модель: \bar{k}_i, l, Lbc .

Далі показано зміни в картині біфуркаційних множин при варіації характерного «нелінійного» параметра - коефіцієнта зчеплення шини з опорною поверхнею у боковому напрямі: $\kappa_1=0.72$; $\kappa_2=0.8$; $\kappa_3=0.8$;

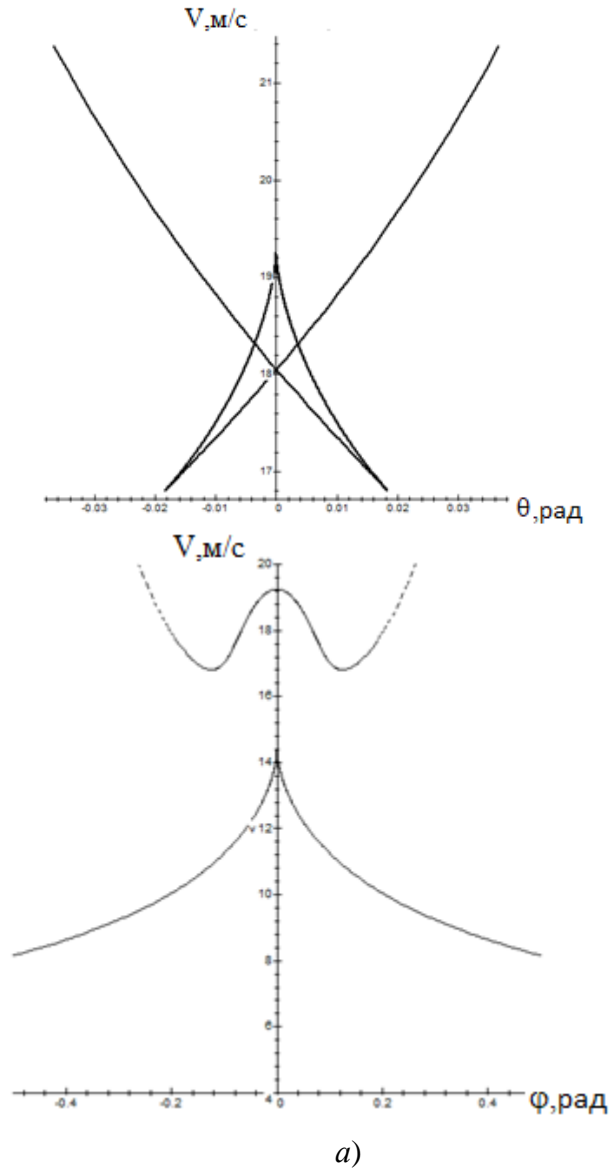


Рис. 9. Вплив на біфуркаційні множини характерного «нелінійного» параметра - коефіцієнта зчеплення шини з опорною поверхнею у боковому напрямі ($\kappa_1=0.72$; $\kappa_2=0.8$; $\kappa_3=0.8$)

а) Критична множина параметрів керування V, θ ; б) граничні (екстримальні) та біфуркаційні значення кута складання при фіксованих значеннях параметра швидкості: неперервна крива відповідає максимальним значенням кута складання при орієнтації напівпричепи у внутрішню сторону повороту; перервна крива визначає біфуркаційні значення кута складання при орієнтації напівпричепи в протилежну сторону повороту.

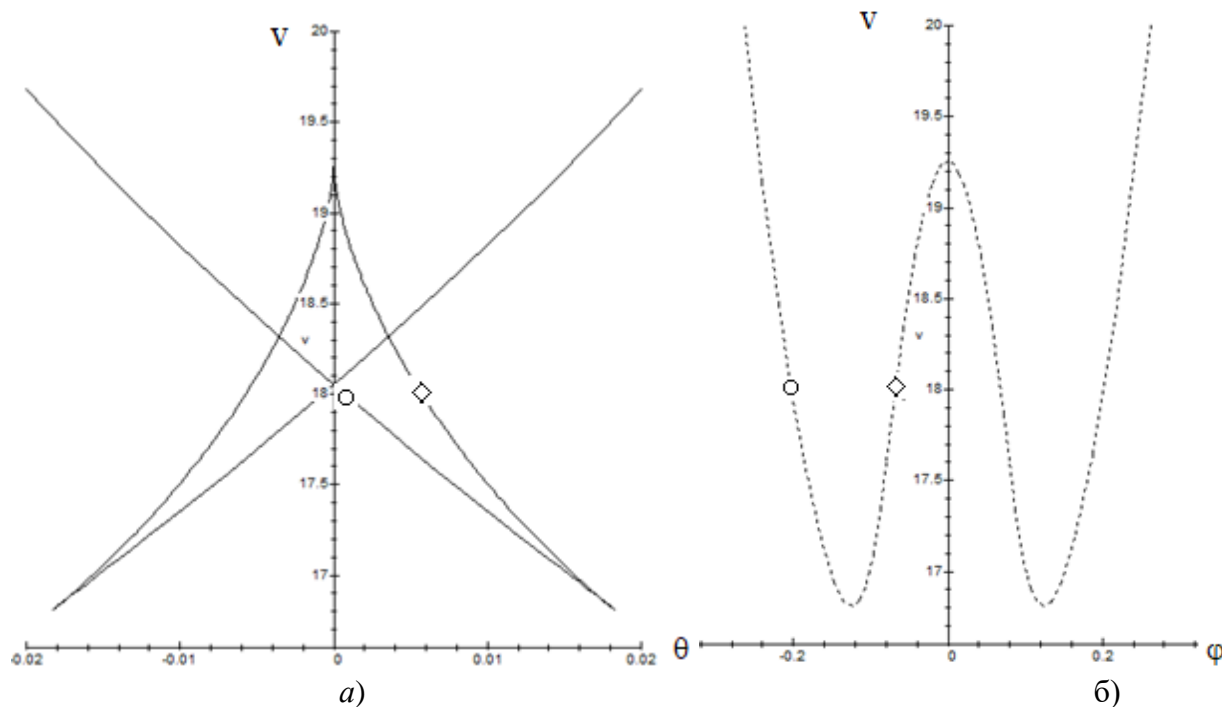


Рис.10. Співставлення критичних параметрів керування та відповідних їм точок біфуркаційної множини рівнобіжної кривої $\varphi(\theta)$ при $V=18$ м/с; $\kappa_1=0.72$; $\kappa_2=0.8$; $\kappa_3=0.8$: а) Критична множина параметрів керування V, θ ; б) біфуркаційні значення кута складання при фіксованих значеннях параметра швидкості

Проаналізуємо зв'язок між критичними точками параметрів керування V, θ (рис.10,а)) та точками біфуркаційної множини рівнобіжної кривої $\varphi(\theta)$ при фіксованому значенні параметра керування $V = 18$ м/с, які і є точками повороту рівнобіжної кривої $\varphi(\theta)$. На (рис.11) представлені графіки рівноважних кривих $a_y(\theta)$, $\varphi(\theta)$ при $V = 18$ м/с та $\theta > 0$, абсцисами точок повороту на цих кривих є критичні значення параметра керування θ при $V = 18$ м/с ($\theta = .5727769020e-2$ відповідає позначка ромб; $\theta = .7176565000e-3$ відповідає диску).

Автоколивання (флатерна втрата стійкості).

Один з найбільш добре вивчених випадків виникнення граничних циклів пов'язаний зі зміною властивостей стійкості особливої точки типу фокус (пара коренів характеристичного рівняння перетинає уявну вісь) - біфуркація Андронова-Хопфа. Ця біфуркація типова при зміні одного керованого параметра системи: м'яка (безпечна) втрата стійкості стаціонарного стану супроводжується народженням стійкого граничного

циклу, що обмежує зростання збурень мал. 1, б (траєкторії, що виходять із досить малого δ -околу нестійкого стаціонарного стану, прагнуть до граничного циклу зсередини, а при всіх досить великих початкових збуреннях траєкторії наближаються до граничного циклу із зовні); жорсткій (небезпечній) втраті стійкості стаціонарного стану відповідає стягування до нього нестійкого граничного циклу, що руйнує його стійкість, траєкторії, що виходять із як завгодно малого δ -околу нестійкого стаціонарного стану, у цьому випадку початкові довільно малі збурення з часом необмежено віддаляються від стаціонарного стану (мал. 1, а).

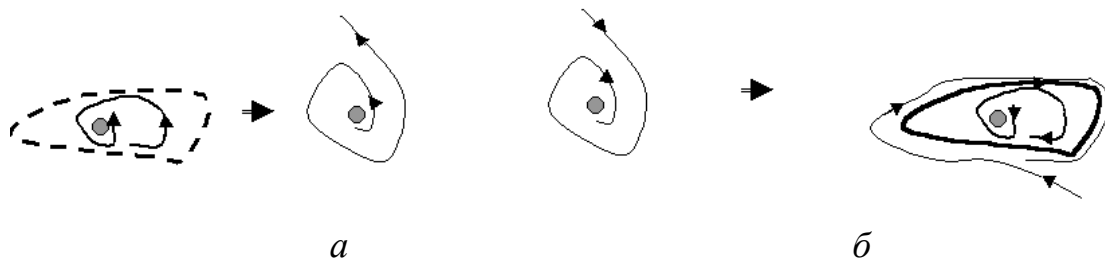


Рис. 1. Біфуркація Андронова – Хопфа: а)- жорстка втрата стійкості; б) - м'яка втрата стійкості.

Таким чином, при наявності стійкого граничного циклу в системі встановлюється коливальний процес або *автоколивання*, параметри якого не залежать від початкових збурень (всі траєкторії прагнуть до зазначеної замкненої траєкторії). Періодичні зміни узагальнених координат, які відповідають граничному циклу, можуть бути далекими від гармонічних (синусоїдальних), проте, їхнє перше наближення може бути отримане на основі такого припущення.

Теорема (Андронова – Хопфа). Нехай система

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in R^n, \quad \alpha \in R^1$$

має положення рівноваги $x=0$ при будь-яких значеннях параметра α . Далі, нехай матриця лінійного наближення при значеннях α у деякому околі α_0 має пару комплексно спряжених власних значень $\lambda_{1,2}(\alpha) = \xi(\alpha) \pm i\omega(\alpha)$, причому

$$\xi(\alpha_0) = 0, \quad \omega(\alpha_0) = \omega_0 > 0, \quad \frac{d\xi}{d\alpha}(\alpha_0) \neq 0.$$

Крім того, припустимо, що інші $n-2$ власні значення мають ненульові дійсні частини.

Тоді при $\alpha = \alpha_0$ від нульового положення рівноваги відгалужується однопараметрична система замкнених траєкторій, що відповідають періодичним розв'язкам з періодом $T(\alpha) \approx 2\pi / \omega_0$. замкнені траєкторії можуть відгалужуватися або при $\alpha < \alpha_0$, або при $\alpha > \alpha_0$.

Ілюстрацію проведемо на прикладі системи (1), яка задовольняє умовам теореми Хопфа. Спочатку проведемо попередній аналіз стійкості нульового розв'язку системи (1) при зміні параметра α :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x &= -x(x^2 + y^2) + \alpha x - y; \\ \frac{d}{dt}y &= -y(x^2 + y^2) + \alpha y + x. \end{aligned} \tag{1}$$

При всіх значеннях параметра в системі є єдина особлива точка - на початку координат. Стійкість початку координат в некритичних випадках визначається системою лінійного наближення. Корені характеристичного рівняння при $\alpha < 0$ комплексно-спряжені з від'ємною дійсною частиною - має місце стійкий фокус; при $\alpha > 0$ комплексно-спряжені корені з додатною дійсною частиною - має місце нестійкий фокус.

Каноническая функция Ляпунова указывает на глобальную устойчивость начала координат при

Канонічна функція Ляпунова вказує на глобальну стійкість початку координат при $\alpha \leq 0$

$$\frac{d}{dt}(x^2 + y^2) = -2(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - \alpha),$$

а також на наявність стійкого граничного циклу (коло радіуса $\sqrt{\alpha}$) при $\alpha > 0$. При $\alpha = 0$ з початку координат народжується стійкий граничний цикл, а на початку координат з'являється нестійкий фокус. Збурення (відхилення від початку координат) обмежуються граничним циклом $x^2 + y^2 = \alpha$

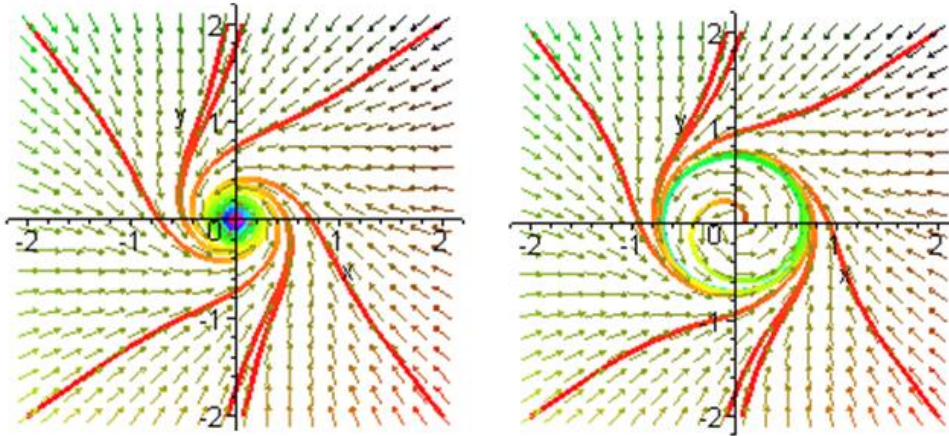


Рис. 1 – випадок м'якої втрати стійкості

Нижче представлена реалізація наближеного методу визначення характеристик автоколивань для системи (1).

```

> restart:
> x:=a*sin(omega*t);
                                x:= a sin(ωt)
> y:=b*sin(omega*t+phi);
                                y:= b sin(ωt + φ)
> EQ1:=diff(x,t)+x*(x^2+y^2)-alpha*x+y;
                                EQ1:= a cos(ωt) ω + a sin(ωt) (a² sin(ωt)² + b² sin(ωt + φ)²) - α a sin(ωt) + b sin(ωt + φ)
> EQ2:=diff(y,t)+y*(x^2+y^2)-alpha*y-x;
                                EQ2:= b cos(ωt + φ) ω + b sin(ωt + φ) (a² sin(ωt)² + b² sin(ωt + φ)²) - α b sin(ωt + φ) - a sin(ωt)
> # получение конечных уравнений, отвечающих периодическому решению системы в характерные моменты времени:
>
> evalm(subs(t=0,EQ1));
                                a ω + b sin(φ)
> #b*sin(phi)=bs;введение замены переменных:
> EQ10:=a*omega+bs;
                                EQ10:= a ω + b s
> evalm(subs(omega*t=Pi/2,EQ1));
                                a (a² + b² cos(φ)²) - α a + b cos(φ)
> #b*cos(phi)=bc;введение замены переменных:
> EQ11:=a*(a^2+bc^2)-alpha*a+bc;
                                EQ11:= a (a² + bc²) - α a + bc
> evalm(subs(t=0,EQ2));
                                b cos(φ) ω + b³ sin(φ)³ - α b sin(φ)
> EQ20:=bc*omega-alpha*bs+bs^3;
                                EQ20:= bc ω - α b s + b s³
> evalm(subs(omega*t=Pi/2,EQ2));
                                -b sin(φ) ω + b cos(φ) (a² + b² cos(φ)²) - α b cos(φ) - a
> EQ21:=-bs*omega+bc*(a^2+bc^2)-alpha*bc-a;
                                EQ21:= -b s ω + b c (a² + bc²) - α b c - a
> #Решение система уравнений относительно неизвестных: a,omega,bs,bc:
> EQ10:=a*omega+bs;
                                EQ10:= a ω + b s
> EQ11:=a*(a^2+bc^2)-alpha*a+bc;
                                EQ11:= a (a² + bc²) - α a + bc
> EQ20:=bc*omega-alpha*bs+bs^3;
                                EQ20:= bc ω - α b s + b s³
> EQ21:=-bs*omega+bc*(a^2+bc^2)-alpha*bc-a;
                                EQ21:= -b s ω + b c (a² + bc²) - α b c - a
> simplify(EQ21*a-EQ11*bc);
                                -a b s ω - a² - b c²
> #bc^2=-a*bs*omega-a^2 - определи bc^2 из последнего уравнения:
> EQ12:=subs(bc^2=-a*bs*omega-a^2,EQ11);
                                EQ12:= -a² b s ω - α a + b c
> #после подстановки bc^2=-a*bs*omega-a^2 в EQ11, последнее переходит в EQ12:
> solve({EQ10=0,EQ12=0},{bc,bs});
                                {bc = -a³ ω² + α a, bs = -a ω}
> # разрешая систему EQ10=0,EQ12=0 , исключаем неизвестные bc,bs:
> bc:=-a^3*omega^2+alpha*a;bs:=-a*omega;
                                bc := -a³ ω² + α a
                                bs := -a ω
> # из уравнения EQ20 определяем круговую частоту:

```

Наближене визначення автоколивального режиму модельної динамічної системи. Розглянемо нелінійну динамічну систему, що відповідає умовам теореми Андронова-Хопфа

$$\begin{aligned} \ddot{y} + \tau y + p(V)\dot{y} + f_1(y) &= n\psi; \\ \ddot{\psi} + \tau\psi + p(V)\dot{\psi} + f_2(y) &= -\tilde{m}y, \end{aligned} \quad (1)$$

де $V \in R^1$ - характерний параметр.

Нехай при $V = V_{kp}$ лінійне наближення системи (1) втрачає стійкість – пара власних значень проходить через уявну вісь. Тоді відповідно до теореми Хопфа в системі реалізується замкнена фазова траєкторія або при $V < V_{kp}$, або при $V > V_{kp}$. Умови стійкості «малого» граничного циклу можуть бути визначені опосередковано – якщо він існує при $V < V_{kp}$, то має бути нестійким і зникає при $V = V_{kp}$, а якщо він існує при $V > V_{kp}$, тоді це стійкий граничний цикл, який народжується при $V = V_{kp}$.

Визначимо критичне значення параметра $V = V_{kp} : p^2(V_{kp}) = \tilde{m}n / \tau$, вільний член характеристичного рівняння не обертається в нуль, отже, втрата стійкості пов'язана із проходженням пари комплексно-спряжених коренів через уявну вісь.

Вважаючи, що права частина першого рівняння системи (1) відіграє роль періодичного збурення з невідомою амплітудою й частотою

$$\psi = P_0 \sin(\omega t + \alpha),$$

періодичний відгук будемо шукати у вигляді $y = A \sin \omega t$ (визначенню підлягають величини P_0, ω, α, A). У характерні моменти часу фазові змінні і їхні похідні приймають значення

$$\begin{aligned} \omega t = \pi/2: \quad & y = A; \quad \dot{y} = 0; \quad \ddot{y} = -A\omega^2; \\ & \psi = P_0 \cos \alpha; \quad \dot{\psi} = -P_0 \omega \sin \alpha; \quad \ddot{\psi} = -P_0 \omega^2 \cos \alpha; \\ \omega t = 0: \quad & y = 0; \quad \dot{y} = A\omega; \quad \ddot{y} = 0; \\ & \psi = P_0 \sin \alpha; \quad \dot{\psi} = P_0 \omega \cos \alpha; \quad \ddot{\psi} = -P_0 \omega^2 \sin \alpha. \end{aligned}$$

Для визначення параметрів автоколивального режиму маємо систему

$$\begin{cases} -A\omega^2 + \tau A - nP_0 \cos \alpha + f_1(A) = 0; \\ -P_0 \omega^2 \cos \alpha + \tau P_0 \cos \alpha - pP_0 \omega \sin \alpha + \tilde{m}A + f_2(A) = 0; \\ pA\omega = nP_0 \sin \alpha; \\ -P_0 \omega^2 \sin \alpha + \tau P_0 \sin \alpha + pP_0 \omega \cos \alpha = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Після вилучення невідомих P_0, α з перших двох рівнянь системи (2), одержимо співвідношення, що пов'язує між собою усереднену частоту періодичного розв'язку і його амплітуду

$$\omega^2 = \tau + f_1(A)/2A;$$

рівняння, що визначає амплітуду автоколивань

$$(\tilde{m}n - p^2 \tau)A = f_1^2(A)/4A + p^2 f_1(A)/2 - n f_2(A). \quad (3)$$

АНАЛІЗ АВТОКОЛИВАНЬ РІВНЯННЯ ДЮФІНГА

> $\text{Diff}(x, 't') + 2 \cdot \text{gamma} \cdot \text{Diff}(x, t) + \Omega^2 \cdot x^3 = p0 \cdot \sin(\omega t + \phi);$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} x + 2\gamma \left(\frac{\partial}{\partial t} x \right) + \Omega^2 x^3 = p0 \sin(\omega t + \phi)$$

> $x := a \cdot \sin(\omega t);$

$$x := a \sin(\omega t)$$

> $\text{EQ} := \text{diff}(x, 't') + 2 \cdot \text{gamma} \cdot \text{diff}(x, t) + \Omega^2 \cdot x^3 - p0 \cdot \sin(\omega t + \phi) = 0;$

$$\text{EQ} := -a \sin(\omega t) \omega^2 + 2\gamma a \cos(\omega t) \omega + \Omega^2 a^3 \sin(\omega t)^3 - p0 \sin(\omega t + \phi) = 0$$

Система двох кінцевих рівнянь, що визначає параметри автоколивань (a , ϕ):

> $\text{evalm}(\text{subs}(t=0, \text{EQ}));$

$$2\gamma a \omega - p0 \sin(\phi) = 0$$

> $\text{evalm}(\text{subs}(\omega t = \text{Pi}/2, \text{EQ}));$

$$-a \omega^2 + \Omega^2 a^3 - p0 \cos(\phi) = 0$$

Вилучаємо параметр ϕ :

$$(p0^2 = p0 \cdot \sin(\phi)^2 + p0 \cdot \cos(\phi)^2)$$

> $(2 \cdot \text{gamma} \cdot a \cdot \omega)^2 + (-a \cdot \omega^2 + \Omega^2 \cdot a^3)^2 - p0^2 = 0;$

$$4\gamma^2 a^2 \omega^2 + (-a \omega^2 + \Omega^2 a^3)^2 - p0^2 = 0$$

> $4 \cdot \text{gamma}^2 \cdot \text{AA} \cdot \omega^2 + \text{AA} \cdot (-\omega^2 + \Omega^2 \cdot \text{AA})^2 - p0^2 = 0;$

$$4\gamma^2 \text{AA} \omega^2 + \text{AA} (-\omega^2 + \Omega^2 \text{AA})^2 - p0^2 = 0$$

> $\text{collect}(\%, \text{AA});$

$$\Omega^4 \text{AA}^3 - 2\omega^2 \Omega^2 \text{AA}^2 + (\omega^4 + 4\gamma^2 \omega^2) \text{AA} - p0^2 = 0$$

Отримали амплітудно-частотну характеристику:

> $\text{Poly} := \text{expand}((\Omega^4 \cdot \text{AA}^3 - 2 \cdot \omega^2 \cdot \Omega^2 \cdot \text{AA}^2 + (\omega^4 + 4 \cdot \text{gamma}^2 \cdot \omega^2) \cdot \text{AA} - p0^2) / \Omega^4);$

$$\text{Poly} := \text{AA}^3 - \frac{2\omega^2 \text{AA}^2}{\Omega^2} + \frac{\text{AA} \omega^4}{\Omega^4} + \frac{4\text{AA} \gamma^2 \omega^2}{\Omega^4} - \frac{p0^2}{\Omega^4}$$

Дискримінант відповідного полінома

```
> DISC:=expand(discrim(Poly,AA));
```

$$DISC := \frac{4\omega^6 p\theta^2}{\Omega^{10}} - \frac{16\omega^{10} \gamma^2}{\Omega^{12}} - \frac{27p\theta^4}{\Omega^8} + \frac{144p\theta^2 \gamma^2 \omega^4}{\Omega^{10}} - \frac{128\gamma^4 \omega^8}{\Omega^{12}} - \frac{256\omega^6 \gamma^6}{\Omega^{12}}$$

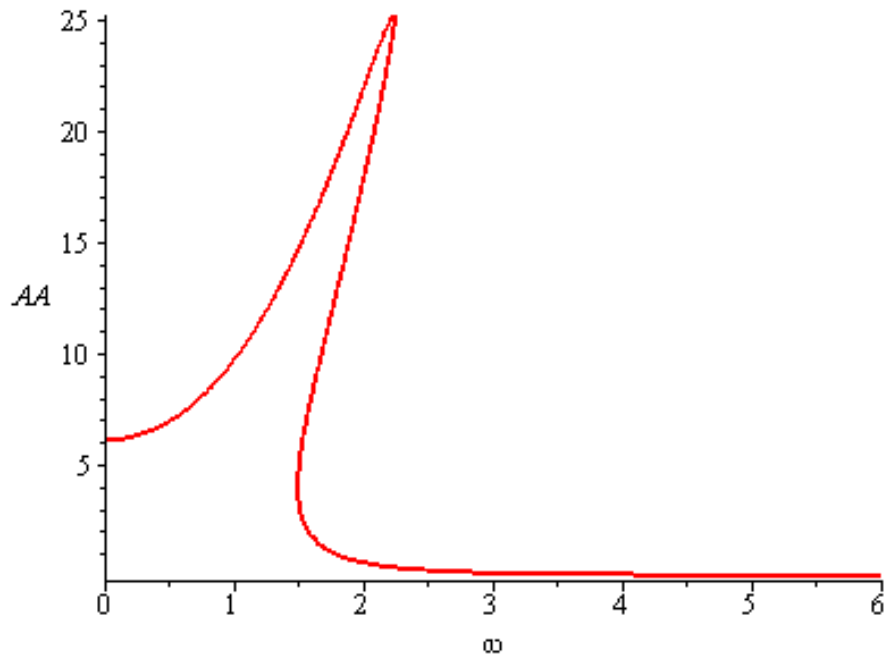
Побудова графіка амплітудно-частотної характеристики при заданому значенні амплітуди зовнішніх збурень

```
>c:=1;m:=3;alpha:=0.8;C:=3/5;
```

```
> with(plots):
```

```
>
```

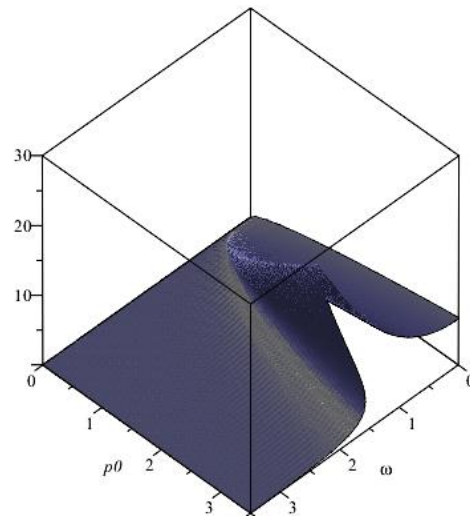
```
implicitplot(subs({gamma=alpha/(2*m),Omega=sqrt(C/m),p0=3},Poly)=0,omega=0..6,AA=0..30,grid=[250,250]);
```



Побудова амплітудно-частотної поверхні для рівняння Дюфінга

```
>
```

```
implicitplot3d(subs({gamma=alpha/(2*m),Omega=sqrt(C/m)},Poly)=0,omega=0..3.5,p0=0..3.5,AA=0..30,grid=[50,50,50]);
```

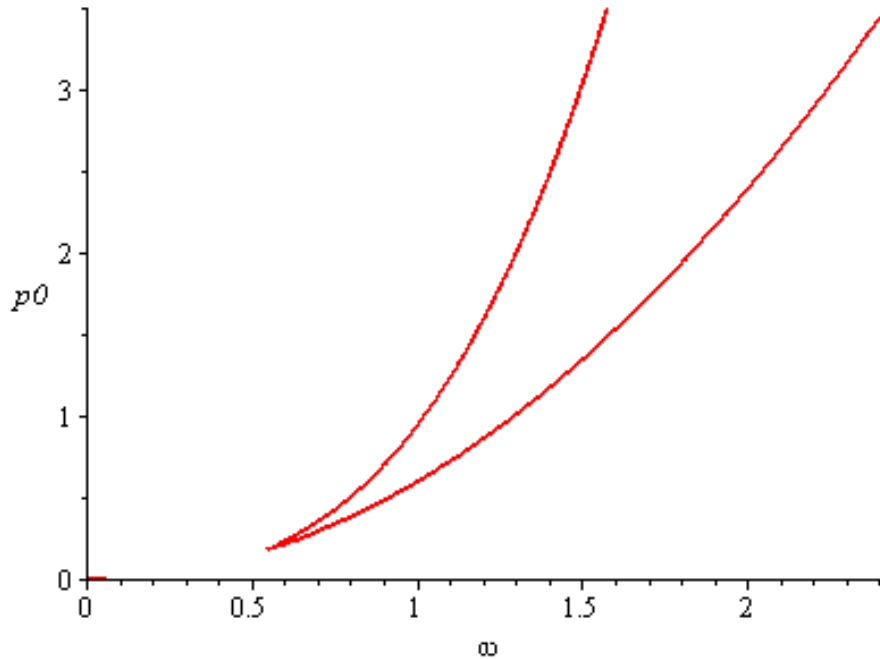


Біфуркаційна множина параметрів (ω , ρ_0) (визначає області з трьома граничними циклами та одним).

Визначається проекцією амплітудно-частотної поверхні на площину параметрів (ω , ρ_0):

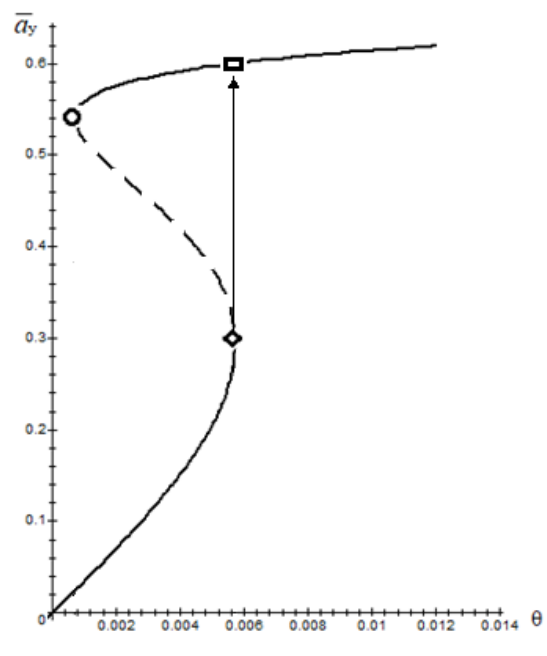
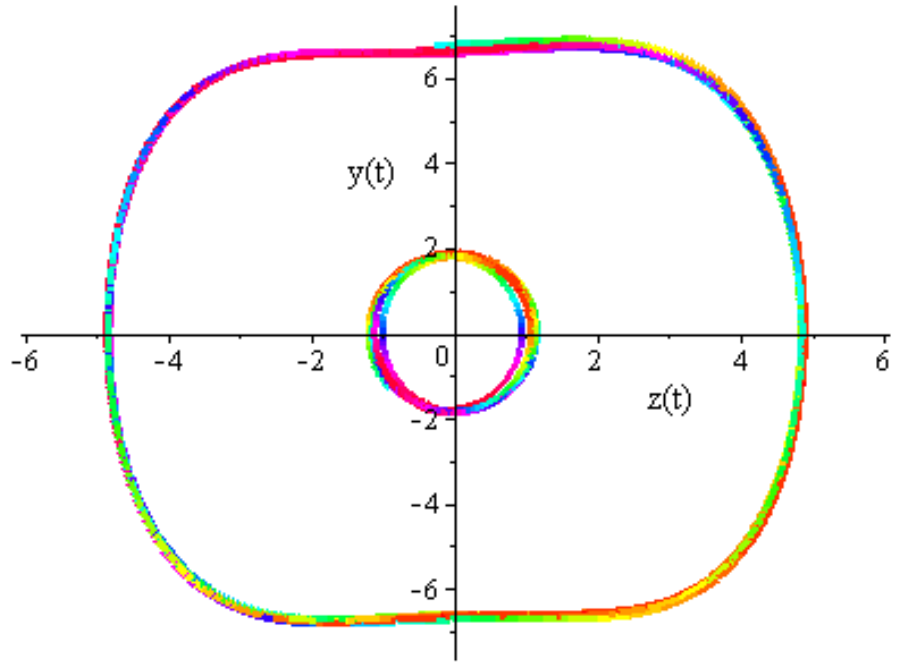
>

```
implicitplot(subs({gamma=alpha/(2*m), Omega=sqrt(C/m)}, D
ISC)=0, omega=0..3, rho0=0..3.5, grid=[250, 250]);
```

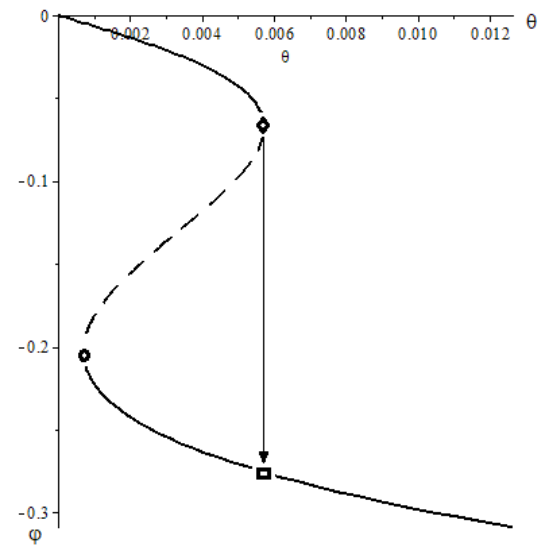


Чисельне інтегрування рівняння Дюфінга (перевірка наявності стійких граничних циклів):

```
> DEplot([D(z)(t)=y(t),D(y)(t)=-alpha*(y(t))/m-
C*(z(t))^3/m+3*sin(1.7*t)],
[z(t),y(t)],t=30..45,[[z(0)=0.5,y(0)=0],[z(0)=0,y(0)=1]
],stepsize=.005,
scene=[z(t),y(t)],z(t)=-5.5..5.5,y(t)=-
7..7.,linecolour=sin(t*Pi/2));
```

a)



б)

Рис.11. Графіки рівноважних кривих $a_y(\theta)$, $\varphi(\theta)$ при $V = 18$ м/с, які свідчать про можливість стрибкоподібного переходу з одного стійкого кругового режиму (ромб) до другого (прямокутник):

а) рівноважна крива $a_y(\theta)$ та чергування стійкості; б) рівноважна крива $\varphi(\theta)$ та чергування стійкості;

Рівноважні криві $a_y(\theta)$, $\varphi(\theta)$, як згадувалось вище, мають «синхронізовані» точки повороту, в цих точках відбувається чергування змін властивостей стійкості (відбувається дивергентна втрата стійкості, або поновлюється стійкість). Стійкість точок на рівноважній кривій легко відслідковувати починаючи зі стаціонарного стану, властивість стійкості якого нам відома при певних значеннях параметрів керування, наприклад, стаціонарного стану, що відповідає прямолінійному руху ($V = 18$ м/с, $\theta = 0$) – він стійкий, це впливає з лінійної теорії ($V_{кр1} > 18$ м/с). При $\theta > 0$ вже круговий стаціонарний стан залишається стійким (скоріше не може відбутися дивергентна втрата стійкості), поки не реалізується кратний режим, що якраз відбувається в точках повороту. Таким чином, опорядковано можна дослідити ділянки стійких стаціонарних станів та нестійких (позначено пунктиром). Тоді зрозуміло, що при малих варіаціях параметра θ в околі $0,006$ рад будуть відбуватися кінцеві стрибки параметрів стаціонарного стану. На практиці це буде пов'язане з викидами напівпричепа на кут порядку 10 град під час прямолінійного руху зі швидкістю близькою до критичної швидкості $V_{кр1}$.