

Практичне заняття на тему «Правила Лопітала»

Правило Лопітала розкриття невизначеностей виду $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Нехай функції $f(x)$ та $g(x)$ є неперервними та диференційованими у околі точки $x = x_0$ і при цьому $f(x_0) = g(x_0) = 0$, а $g'(x) \neq 0$ у околі цієї точки. Якщо існує границя $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$, то існує $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, причому

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l.$$

Правило Лопітала розкриття невизначеностей виду $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

Нехай функції $f(x)$ та $g(x)$ є неперервними та диференційовними у околі точки x_0 (можливо, окрім самої цієї точки), і у цьому околі $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$, причому

$g'(x) \neq 0$. Тоді, якщо існує границя $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$, то існує і

границя $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, причому

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l.$$

Обчислити границі:

1.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 + 2x - 3} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^3 - 1)'}{(x^2 + 2x - 3)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2}{2x + 2} = \frac{3}{4}.$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{\sin x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{3x} - 1)'}{(\sin x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3e^{3x}}{\cos x} = \frac{3}{1} = 3.$$

3.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\operatorname{tg} x} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(\operatorname{tg} x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1/\cos^2 x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cdot \cos^2 x = 0 \cdot 1 = 0. \end{aligned}$$

4.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{\ln x - x + 1} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - x)'}{(\ln x - x + 1)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 1}{\frac{1}{x} - 1} = \left(\frac{1}{0} \right) = \infty.$$

5.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x)'}{(x^3)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \\ &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(3x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{\sqrt{x-1}}{\ln x} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{(\sqrt{x-1})'}{(\ln x)'} = \lim_{x \rightarrow 1+0} \left(\frac{1}{2\sqrt{x-1}} : \frac{1}{x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x}{2\sqrt{x-1}} = +\infty. \end{aligned}$$

7.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{-2ax}}{\ln(1+x)} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ae^{ax} + 2ae^{-2ax}}{\frac{1}{1+x}} = \frac{3a}{1} = 3a.$$

8.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

9.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{1+2x} + 1}{\sqrt{2+x} + x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\frac{2}{3\sqrt[3]{(1+2x)^2}}}{\frac{1}{2\sqrt{2+x}} + 1} = \frac{2}{3} : \frac{3}{2} = \frac{4}{9}.$$

10.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x^2}{\ln \cos(2x - x^2)} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x \cdot \cos 3x^2}{\frac{(2-2x) \cdot \sin(2x - x^2)}{\cos(2x - x^2)}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x \cdot \cos 3x^2 \cdot \cos(2x - x^2)}{2(1-x) \cdot \sin(2x - x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cos 3x^2 \cdot \cos(2x - x^2)}{1-x} \times \\ &\times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(2x - x^2)} = 3 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(2x - x^2)} = \\ &= 3 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(2-2x) \cos(2x - x^2)} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

11.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{tg} x} &= \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{x - \frac{\pi}{2}} : \frac{1}{\cos^2 x} \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{x - \frac{\pi}{2}} = \\ &= \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-2 \cos x \cdot \sin x}{1} = 0.\end{aligned}$$

12.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \operatorname{ctg} 5x &= (0 \cdot \infty) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos 5x}{\sin 5x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x \cos 5x)'}{(\sin 5x)'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - 5x \sin 5x}{5 \cos 5x} = \frac{1}{5}.\end{aligned}$$

13.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-2x} &= (\infty \cdot 0) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^{2x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{2e^{2x}} = \\ &= \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x'}{(e^{2x})'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2e^{2x}} = \left(\frac{1}{\infty}\right) = 0.\end{aligned}$$

14.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}} = (1^\infty) = A.$$

$$\ln A = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln \left((\cos x)^{\frac{1}{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x} =$$

$$= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln(\cos x))'}{x'} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x} = 0.$$

$$A = e^0 = 1.$$

15.

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} (\sin x)^{\operatorname{tg} x} = \lim_{x \rightarrow 0+0} e^{\ln(\sin x)^{\operatorname{tg} x}} = \lim_{x \rightarrow 0+0} e^{\operatorname{tg} x \cdot \ln(\sin x)} =$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\ln \sin x}{\operatorname{ctg} x}}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\ln \sin x}{\operatorname{ctg} x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow 0+0} \left(\frac{\cos x}{\sin x} : \frac{1}{\sin^2 x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0+0} (\cos x \cdot \sin x) = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} (\sin x)^{\operatorname{tg} x} = e^0 = 1.$$

16.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} = \left(\frac{0}{0} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^x - 1 + xe^x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{e^x + e^x + xe^x} = \frac{1}{2}.$$

17.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x)^{\sin x} = (\infty^0) = A.$$

$$\begin{aligned} \ln A &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\ln (\operatorname{ctg} x)^{\sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x \cdot \ln (\operatorname{ctg} x)) = (0 \cdot \infty) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln (\operatorname{ctg} x)}{1/\sin x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{tg} x \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 x} \right) : \left(-\frac{\cos x}{\sin^2 x} \right) \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x \cos x} \cdot \frac{\sin^2 x}{\cos x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos^2 x} = 0. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x)^{\sin x} = A = e^0 = 1.$$

18.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \right)^{\sin x} = (\infty^0) = A.$$

$$\begin{aligned} \ln A &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\ln \left(\frac{1}{x} \right)^{\sin x} \right) = -\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x \cdot \ln x) = (0 \cdot \infty) = \\ &= -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{1/\sin x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/x}{\cos x / \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x \cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 0 \cdot 1 = 0. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \right)^{\sin x} = A = e^0 = 1.$$

Домашнє завдання:

Обчислити вказані границі.

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x^2 - 3)}{x^2 + 3x - 10}$. Відповідь: $\frac{4}{7}$.

2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{a^{\ln x} - x}{\ln x}$. Відповідь: $\ln a - 1$.

3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - 4 \sin^2 \frac{\pi x}{6}}{1 - x^2}$. Відповідь: $\frac{\pi \sqrt{3}}{6}$.

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x - \sin x}$. Відповідь: 2.

5. $\lim_{x \rightarrow a} \arcsin \frac{x - a}{a} \cdot \operatorname{ctg}(x - a)$. Відповідь: $\frac{1}{a}$.

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(a^{\frac{1}{x}} - 1 \right) \cdot x$. Відповідь: $\ln a$.

7. $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln \operatorname{ctg} x)^{\operatorname{tg} x}$. Відповідь: 1.

8. $\lim_{x \rightarrow a} \left(2 - \frac{x}{a} \right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2a}}$. Відповідь: $\frac{2}{\pi}$.