Лабораторна робота № 1
Аналіз ризику збитків

Мета: навчитися аналізувати ризики збитків за допомогою кривої щільності розподілу ймовірності збитків.

Завдання: обчислити величини можливих збитків за умовами задачі.

Практичне завдання:

Відомо, що відносні збитки по відношенню до запланованих витрат від даного виду підприємницької діяльності мають таку функцію щільності розподілу ймовірностей $f(x)$.

Встановити формули для обчислення:

1) моди випадкової величини X, що відображає можливі значення відносних збитків;
2) сподіваної величини відносних збитків;
3) середньоквадратичного відхилення;
4) вивести формулу для обчислення ймовірностей попадання випадкової величини X в допустиму, критичну та катастрофічну зони. Обчислити числові значення цих величин при умові, що параметр $b=30$, $x_{ДП}=45\%$, $x_{КР}=60\%$, $x_{КТ}=75\%$.

Варіант 1.

$$f(x)=\begin{cases}8\,xe^{-8x/b}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

Варіант 2.

$$f(x)=\begin{cases}4b\sqrt{x}\,e^{-8x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

Варіант 3.

$$f(x)=\begin{cases}3\sqrt{x}\,e^{-x/2b}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

Варіант 4.

$$f(x)=\begin{cases}4x\,e^{-x/2b}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

Варіант 5.

$$f(x)=\begin{cases}5\,xe^{-(x+b)}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

Варіант 6.

$$f(x)=\begin{cases}9e^{-x^2/b}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

Варіант 7.

$$f(x)=\begin{cases}7xe^{-(x+b)}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

Варіант 8.

$$f(x)=\begin{cases}8xe^{-x/b}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

Варіант 9.

$$f(x)=\begin{cases}9x\,e^{-(x+b)}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

Варіант 10.

$$f(x)=\begin{cases}(x+b)e^{-(x+b)}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

Приклад виконання роботи

Відомо, що відносні збитки (по відношенню до запланованих витрат від даного виду підприємницької діяльності) мають таку функцію щільності розподілу ймовірності:

$$f(x)=\begin{cases}ax^2e^{-x^2/b^2}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}.$$

а) Оскільки при $x\ge 0$, $f'(x)=2axe^{-x^2/b^2}\left(1-x^2/b^2\right)$,

то з рівняння $f'(x)=0$ отримуємо, що модальне значення випадкової величини X (значення, в якому функція щільності ймовірності $f(x)$ досягає свого максимуму) досягається в точці $x=b$, тобто $x^*=Mo(X)=b$.

Розрахунки модального значення можна виконати за допомогою пакету Maple. Похідну від функції щільності розподілу отримаємо за допомогою команди diff:

```
> diff(a*x^2*exp(-x^2/b^2),x);
```

А розв'язок рівняння $f'(x)=0$ – за допомогою команди solve:

```
> solve(2*a*x*exp(-x^2/b^2)-2*a*x^3/b^2*exp(-x^2/b^2)=0,x);
```

Якщо врахувати, що $f(0)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0,$ то схематичному графіку функції щільності $f(x)$ відповідає графік, поданий на рис. 1.

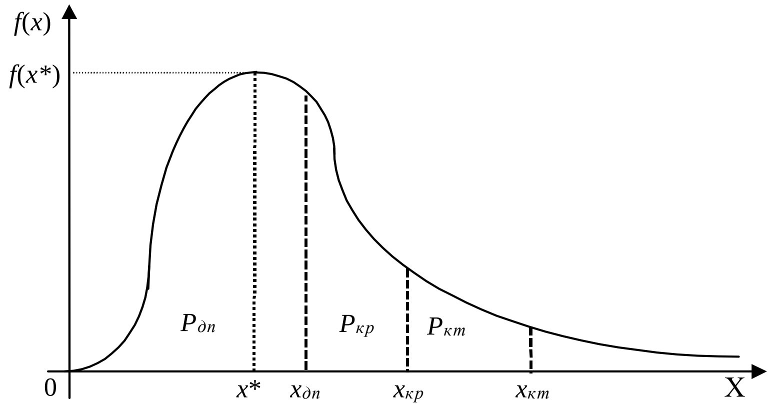

Рис.1. Крива щільності розподілу ймовірності збитків

На рис. 1 позначено найбільш характерні точки щодо величини можливих збитків:

x^* – точка, що відповідає величині найбільш ймовірного (модального) рівня збитків;

$x_{ДП}$ – точка, що відповідає величині можливих збитків, за розмірами рівній величині очікуваного (розрахункового) прибутку. Точки $x = 0$ та $x = x_{ДП}$ визначають межі зони допустимого ризику;

$x_{КР}$ – точка, що відповідає величині збитків, за розмірами рівній величині повної розрахункової суми виручки. Точки $x = x_{ДП}$ та $x = x_{КР}$ визначають межі зони критичного ризику;

$x_{КТ}$ – точка, що відповідає величині збитків, за розмірами рівній величині усього майна підприємця. Точки $x = x_{КР}$ та $x = x_{КТ}$ визначають межі зони катастрофічного ризику.

Оскільки $f(x)$ є функцією щільності розподілу ймовірності, то, скориставшись умовою нормування $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, отримуємо:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} ax^2 e^{-x^2/b^2} dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{+\infty} ax^2 e^{-x^2/b^2} dx = 0 + ab^3\sqrt{\pi}/4 \quad \Rightarrow a = 4/b^3\sqrt{\pi},$$

тобто функцію щільності можна записати у такому вигляді:

$$f(x) = \frac{4x^2}{b^3\sqrt{\pi}} e^{-x^2/b^2}.$$

Сподіване значення величини відносних збитків (математичне сподівання випадкової величини X):

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_{0}^{+\infty}\frac{4x^2}{b^3\sqrt{\pi}}e^{-x^2/b^2}dx=\frac{2b}{\sqrt{\pi}}\approx 1{,}1284b\,.$$

У пакеті Maple визначення значення інтегралу відбувається за допомогою команди int:

```
> int((4*x^2)/(b^3*sqrt(Pi))*exp(-x^2/b^2), x=0..infinity );
```

Дисперсія відносних збитків:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx-(M(X))^2=\int_{0}^{+\infty} x^2\frac{4x^2}{b^3\sqrt{\pi}}e^{-x^2/b^2}dx-\frac{4b^2}{\pi}=b^2\left(\frac{3}{2}-\frac{4}{\pi}\right)\approx 0{,}227b^2\,.$$

Середньоквадратичне відхилення відносних збитків:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}\approx 0{,}4762b\,.$$

З урахуванням того, що $b=30\%$, отримуємо:

$$x^*=Mo(X)=b=30\%\,;\;\; M(X)\approx 1{,}128\cdot b=33{,}84\%\,;$$

$$\sigma(X)\approx 0{,}4762\cdot b=14{,}286\%\,.$$

Ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $[\alpha,\beta]$ можна обчислити за формулою:

$$P(\alpha\le x\le\beta)=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{4x^2}{b^3\sqrt{\pi}}e^{-x^2/b^2}dx=F(x)\Big|_{\alpha}^{\beta}=F(\beta)-F(\alpha)\,,$$

де $F(x)=2(\Phi(t)-t\phi(t))\Big|_{t=x\sqrt{2}/b}$, $\phi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}$ – функція Гауса, $\Phi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{t}e^{-t^2/2}dt$ – функція Лапласа (ці функції табульовані, і їх значення можна знайти в довідниках, підручниках з теорії ймовірностей та математичної статистики).

Отже, ймовірності попадання величини відносних збитків відповідно в зони допустиму, критичну та катастрофічну можна обчислити за формулами:

$$P_{дп} = P(0 \le X < x_{дп}) = F(x_{дп}) - F(0) = 2(\Phi(t) - t\phi(t))\Big|_{0}^{t_{дп}},$$

де $t_{дп} = x_{дп}\sqrt{2/b}$;

$$P_{дп} = P(x_{дп} \le X < x_{кр}) = F(x_{кр}) - F(x_{дп}) = 2(\Phi(t) - t\phi(t))\Big|_{t_{дп}}^{t_{кр}},$$

де $t_{кр} = x_{кр}\sqrt{2/b}$;

$$P_{кт} = P(x_{кр} \le X < x_{кт}) = F(x_{кт}) - F(x_{кр}) = 2(\Phi(t) - t\phi(t))\Big|_{t_{кр}}^{t_{кт}},$$

де $t_{кт} = x_{кт}\sqrt{2/b}$.

Враховуючи, що $b = 30\%$, $x_{ДП} = 45\%$, $x_{КР} = 60\%$, $x_{КТ} = 75\%$

$t_{дп} = 45\sqrt{2}/30 \approx 2{,}121$; $t_{кр} = 60\sqrt{2}/30 \approx 2{,}828$; $t_{кт} = 75\sqrt{2}/30 \approx 3{,}536$;

$F(0) = 2(\Phi(0) - 0 \cdot \varphi(0)) = 0;$

$F(x_{дп}) = 2(\Phi(2{,}121) - 2{,}121 \cdot \phi(2{,}121)) = 2(0{,}4830 - 2{,}121 \cdot 0{,}044) = 0{,}7794$;

$F(x_{кр}) = 2(\Phi(2{,}828) - 2{,}828 \cdot \phi(2{,}828)) = 2(0{,}4976 - 2{,}828 \cdot 0{,}0075) = 0{,}9528$;

$F(x_{кт}) = 2(\Phi(3{,}536) - 3{,}536 \cdot \phi(3{,}536)) = 2(0{,}4998 - 3{,}536 \cdot 0{,}0008) = 0{,}9939$,

отримуємо:

$P_{дп} = F(x_{дп}) - F(0) = 0{,}7794$; $P_{кр} = F(x_{кр}) - F(x_{дп}) = 0{,}1734$; $P_{кт} = F(x_{кт}) - F(x_{кр}) = 0{,}041$.

Контрольні питання

1. Що таке економічний ризик?
2. Що є об’єктом ризику?
3. Що є суб’єктом ризику?
4. Які етапи включає політика управління ризиком?
5. Що є областю ризику?