

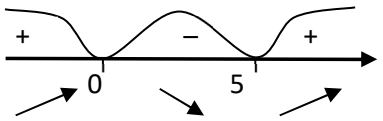
Монотонність функції. Локальний екстремум.
Найбільше і найменше значення функції на відрізку.

Приклад 1. Знайти інтервали монотонності та екстремуми даної функції, користуючись першою похідною: $y = \frac{(x-5)^2}{x^2}$.

Розв'язання. Область визначення даної функції $x \neq 0$. Знаходимо критичні точки, тобто точки, в яких похідна дорівнює 0 або не існує:

$$y' = \frac{\left((x-5)^2\right)' \cdot x^2 - (x-5)^2 \cdot (x^2)'}{(x^2)^2} = \frac{2x^2(x-5) - 2x(x-5)^2}{x^4} = \frac{10(x-5)}{x^3},$$
$$y' = 0 \Rightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x-5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x=5 \end{cases}.$$

Визначаємо інтервали монотонності та точки екстремуму функції, використовуючи знак першої похідної:

Знаки y' :	
Характерні точки	
Напрямки монотонності, extr	
Значення функції в точках extr	∞ 0

Отже, на інтервалі $(-\infty; 0)$ і на $(5; +\infty)$ функція зростає; на інтервалі $(0; 5)$ функція спадає; точка $x = 5$ є точкою мінімуму.

Приклад 2. Дослідити на екстремум функцію $y = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x$.

Розв’язання. Знайдемо похідну $y' = x^2 - 5x + 6$. Вона існує при всіх дійсних x . Прирівнявши похідну до нуля, отримуємо стаціонарні точки $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. Визначаємо інтервали монотонності та екстремуми функції. Для цього використовуємо знак першої похідної (достатню умову монотонності функції на інтервалі та першу достатню умову локального екстремуму):

$$y' = (x - 2)(x - 3).$$

x	$(-\infty; 2)$	2	$(2; 3)$	3	$(3; +\infty)$
$f'(x)$	+		−		+
$f(x)$	↗	max $f_{\max} = \frac{14}{3}$	↘	min $f_{\min} = \frac{9}{2}$	↗

Висновок: На інтервалах $(-\infty; 2)$ та $(3; +\infty)$ функція зростає, на $(2; 3)$ функція спадає, $x = 2$ – точка максимуму, $x = 3$ – точка мінімуму. $f_{\max} = f(2) = \frac{14}{3}$ $f_{\min} = f(3) = \frac{9}{2}$.

Приклад 3. Знайти інтервали монотонності та екстремуми даної функції, користуючись першою похідною: $y = \frac{(x-5)^2}{x^2}$.

Розв'язання. Область визначення цієї функції $x \neq 0$. Знаходимо критичні точки, тобто точки, в яких похідна дорівнює нулю або не існує:

$$y' = \frac{\left((x-5)^2\right)' \cdot x^2 - (x-5)^2 \cdot (x^2)'}{(x^2)^2} = \frac{2x^2(x-5) - 2x(x-5)^2}{x^4} = \frac{10(x-5)}{x^3},$$

$$y' = 0 \Rightarrow \begin{cases} x \neq 0, \\ x - 5 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 0, \\ x = 5. \end{cases}$$

Визначаємо інтервали монотонності та точки екстремуму функції, використовуючи знак першої похідної (достатня умова монотонності функції на інтервалі та перша достатня умови локального екстремуму):

x	$(-\infty; 0)$	$(0; 5)$	5	$(5; +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$		$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\min$ $f_{\min} = 0$	$\nearrow$

Висновок:

На інтервалі $(-\infty; 0)$ і на $(5; +\infty)$ функція зростає;

на інтервалі $(0; 5)$ функція спадає;

точка $x = 5$ є точкою локального мінімуму.

Приклад 4. Дослідити на екстремум функцію $y = x(1 + \sqrt{x})$.

Розв'язання. Похідна має вигляд:

$$y' = 1 + \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{3}{2}\sqrt{x} > 0 \quad \forall x \geq 0.$$

Функція монотонно зростає на своїй області визначення.

Висновок. Точки екстремуму відсутні.

Приклад 5. Дослідити на екстремум функцію $y = (x - 5)e^x$.

Розв'язання. Областю визначення функції є вся числова пряма. Знайдемо похідну та прирівняємо її до нуля. Отримуємо:

$$y' = e^x + (x - 5)e^x = (x - 4)e^x.$$

$$y' = 0 \Rightarrow x = 4.$$

При $x < 4$ $y'(x) < 0$, при $x > 4$ $y'(x) > 0$, тому $x = 4$ є точкою мінімуму.

Висновок. На $(-\infty; 4)$ функція спадає, на $(4; +\infty)$ функція зростає, $x = 4$ – точка мінімуму,
 $y_{\min} = -e^4$.

Приклад 6. Дослідити на екстремум функцію $y = x\sqrt{1-x^2}$.

Розв'язання. Область визначення функції – це відрізок $[-1; 1]$. Похідна має вигляд:

$$y' = \left(x\sqrt{1-x^2} \right)' = \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Знаходимо стаціонарні точки функції: $y' = 0 \Rightarrow 1 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

x	$\left[-1; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right]$
$f'(x)$	$-$		$+$		$-$
$f(x)$	$\searrow$	$\min$ $f_{\min} = -\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\max$ $f_{\max} = \frac{1}{2}$	$\searrow$

Висновок. На $\left[-1; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ та $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right]$ функція спадає, на $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ зростає, $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ – точка мінімуму, $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ – точка максимуму, $f_{\min} = -\frac{1}{2}$, $f_{\max} = \frac{1}{2}$.

Приклад 7. Знайти найбільше та найменше значення функції на зазначеному відрізку:

$$y = \frac{1}{2} \cos 2x + \sin x, \quad x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

Розв'язання. Знайдемо критичні точки функції:

$$y' = \frac{1}{2}(\cos 2x)' + (\sin x)' = \frac{1}{2}(-\sin 2x) \cdot 2 + \cos x = \cos x - \sin 2x,$$

$$y' = 0, \quad \cos x - \sin 2x = 0 \quad \Leftrightarrow \cos x - 2 \cos x \cdot \sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \cos x \cdot (1 - 2 \sin x) = 0,$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ 1 - 2 \sin x = 0; \end{array} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{array} \right.$$

Інтервалу $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ належать тільки точки $x = \frac{\pi}{6}$ і $x = \frac{\pi}{2}$.

Знаходимо значення функції в критичних точках та на кінцях інтервалу:

$$y(0) = \frac{1}{2}, \quad y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{4}, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Відповідь: $\min_{\left[0; \frac{\pi}{2}\right]} y = y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}, \quad \max_{\left[0; \frac{\pi}{2}\right]} y = y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{4}.$

Приклад 8. Дослідити на опуклість функцію

$$y = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 12$$

та знайти її точки перегину.

Розв'язання. Областю визначення функції є вся числова пряма. Знаходимо похідні:

$$y' = 12x^3 - 24x^2 + 12x,$$

$$y'' = 36x^2 - 48x + 12.$$

Розв'язуємо рівняння $y'' = 0$. Отримуємо:

$$y'' = 36x^2 - 48x + 12 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0, \quad D = 16 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 4,$$

$$x_1 = \frac{4-2}{6} = \frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{4+2}{6} = 1.$$

Знайшли два корені рівняння $y'' = 0$: $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = 1$.

Отже, $y'' = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x - 1)$.

x	$\left[-\infty; \frac{1}{3}\right)$	$\frac{1}{3}$	$\left(\frac{1}{3}; 1\right)$	1	$(1; +\infty]$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cup$	Точка перегину	$\cap$	Точка перегину	$\cup$

Точки $x_1 = \frac{1}{3}$ та $x_2 = 1$ розділяють числову пряму на 3 проміжки: $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$ та $(1; +\infty)$.

З'ясуємо знак другої похідної $y''(x)$ на кожному з цих проміжків. Отримуємо: на $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$ $y'' > 0$, тут функція є опуклою вниз; на $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$ $y'' < 0$, функція опукла вгору; на проміжку $(1; +\infty)$ $y'' > 0$, функція опукла вниз.

Отже, при переході аргументу x через точки x_1 та x_2 $y''(x)$ змінює знак, тому точки з абсцисами $x_1 = \frac{1}{3}$ та $x_2 = 1$ є точками перегину функції.

Приклад 9. Дослідити на опуклість криву $y = \sqrt[3]{x^5}$ та знайти її точки перегину.

Розв'язання. Область визначення функції: $x \in \mathbb{R}$. Знайдемо другу похідну заданої функції $y = x^{\frac{5}{3}}$.

$$y' = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}, \quad y'' = \frac{5}{3} \cdot \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{10}{9\sqrt[3]{x}}.$$

x	$[-\infty; 0)$	0	$(0; +\infty)$
$f''(x)$	$-$	Не існує	$+$
$f(x)$	$\cap$	Точка перегину	$\cup$

$y''(x) \neq 0, x \in \mathbb{R}$, проте у точці $x_0 = 0$ друга похідна не існує. При цьому $y'' < 0$ при $x < 0$, тут функція є опуклою вгору; $y'' > 0$ при $x > 0$, функція опукла вниз. . Отже, у точці з абсцисою $x_0 = 0$ функція має перегин.

Приклад 10. Дослідити на опуклість функцію $y = xe^x$.

Розв'язання. Область визначення функції – вся числова пряма. Знаходимо y''_x .

$$y' = e^x + xe^x = e^x(x+1)$$

$$y'' = e^x(x+1) + e^x = e^x(x+2).$$

x	$[-\infty; -2)$	-2	$(-2; +\infty)$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cap$	Точка перегину	$\cup$

Друга похідна змінює знак у точці $x = -2$. При $x < -2$ $y'' < 0$, тут функція є опуклою вгору, при $x > -2$ $y'' > 0$, тому тут функція опукла вниз.