

Практичне заняття на тему «Знаходження асимптот графіків функцій»

1. Дослідження функцій на опуклість

Короткі теоретичні відомості

Асимптотою кривої називають пряму, відстань якої від точки, що лежить на кривій, прямує до нуля при необмеженому віддаленні цієї точки по кривій від початку координат.

Асимптоти можуть бути вертикальними, горизонтальними та похилими.

1. Пряма $x = a$ є **вертикальною асимптотою** графіка функції $y = f(x)$, якщо $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$ або $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty$.

2. Рівняння **похилої асимптоти** має вигляд $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx).$$

Якщо хоча б одна з цих границь не існує або є нескінченною, то крива $y = f(x)$ похилих асимптот не має. 3. Рівняння **горизонтальної асимптоти** має вигляд $y = b$, де

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x).$$

Приклад 1. Знайти асимптоти графіка функції $y = \frac{5x}{x-3}$.

Розв'язання. Графік має вертикальну асимптоту $x = 3$, оскільки $\lim_{x \rightarrow 3 \pm 0} \frac{5x}{x-3} = \pm\infty$. Знайдемо похилі асимптоти, якщо вони існують.

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5}{x-3} = 0.$$

Оскільки $k = 0$, то похилих асимптот для графіка даної функції не існує. Можуть існувати горизонтальні асимптоти. Знаходимо $b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5x}{x-3} = 5$. Отже, пряма $y = 5$ є горизонтальною асимптотою даної функції.

Приклад 2. Знайти асимптоти графіка функції $y = \frac{3x^2}{x-1}$.

Розв'язання. Оскільки $\lim_{x \rightarrow 1 \pm 0} \frac{3x^2}{x-1} = \pm\infty$, то пряма $x = 1$ є вертикальною асимптотою.

Знайдемо похилі асимптоти.

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x}{x-1} = 3,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{3x^2}{x-1} - 3x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x}{x-1} = 3.$$

Отже, пряма $y = kx + b = 3x + 3$ є похилою асимптотою. Горизонтальні асимптоти відсутні ($k \neq 0$).

Приклад 3. Знайти асимптоти кривої $y = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x \rightarrow +0} x \cdot e^{\frac{1}{x}} = (0 \cdot \infty) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -0} x \cdot e^{\frac{1}{x}} = (0 \cdot 0) = 0.$$

Отже, $x = 0$ – вертикальна асимптота.

Знаходимо похилі асимптоти.

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1.$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(x e^{\frac{1}{x}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = 1.$$

Таким чином, пряма $y = x + 1$ є похилою асимптотою. Горизонтальні асимптоти відсутні.

Приклад 4. Знайти асимптоти кривої $y = \sqrt{1 + x^2} + 2x$.

Розв'язання. Оскільки функція є неперервною при всіх дійсних x , то вертикальні асимптоти у її графіку відсутні. Знайдемо похилі асимптоти.

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{\sqrt{1 + x^2}}{x} + 2 \right).$$

Розглянемо окремо випадки, коли $x \rightarrow +\infty$ та $x \rightarrow -\infty$.

При $x \rightarrow +\infty$ маємо:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + 2 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{|x| \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}}{x} + 2 \right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 2 \right) = 3.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_1 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1+x^2} + 2x - 3x) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1+x^2} - x) = (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{1+x^2} - x)(\sqrt{1+x^2} + x)}{\sqrt{1+x^2} + x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + x} = 0.
 \end{aligned}$$

Нехай $x \rightarrow +\infty$.

$$\begin{aligned}
 k_2 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + 2 \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{|x| \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}}{x} + 2 \right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 2 \right) = 1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_2 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{1+x^2} + 2x - x) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{1+x^2} + x) = (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{1+x^2} + x)(\sqrt{1+x^2} - x)}{\sqrt{1+x^2} - x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2} - x} = 0.
 \end{aligned}$$

Таким чином, при $x \rightarrow +\infty$ графік функції має похилу асимптоту $y = 3x$, при $x \rightarrow -\infty$ похила асимптота має вигляд $y = x$. Горизонтальні асимптоти відсутні.

Приклад 5. Знайти асимптоти кривої $y = \sqrt{\frac{x^3}{x-2}}$.

Розв'язання. Область визначення функції знаходимо, розв'язавши нерівність $\frac{x^3}{x-2} \geq 0$.

Звідси знаходимо: $x \in (-\infty; 0] \cup (2; +\infty)$. Оскільки $\lim_{x \rightarrow 2+0} \sqrt{\frac{x^3}{x-2}} = +\infty$, то пряма $x = 2$ є вертикальною асимптотою.

Знаходимо похилі асимптоти.

Розглянемо окремо випадки $x \rightarrow +\infty$ та $x \rightarrow -\infty$.

Нехай $x \rightarrow +\infty$. Маємо:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \cdot \sqrt{\frac{x}{x-2}}}{x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x}{x-2}} = 1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_1 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - k_1 x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\frac{x^3}{x-2}} - x \right) = (\infty - \infty) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(|x| \sqrt{\frac{x}{x-2}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{\frac{x}{x-2}} - 1 \right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(\sqrt{\frac{x}{x-2}} - 1 \right) \left(1 + \sqrt{\frac{x}{x-2}} \right)}{1 + \sqrt{\frac{x}{x-2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x}{x-2}}{1 + \sqrt{\frac{x}{x-2}}} = 1.
 \end{aligned}$$

Таким чином, існує похила асимптота

$$y = k_1 x + b_1 = x + 1.$$

Нехай $x \rightarrow -\infty$.

$$\begin{aligned} k_2 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \cdot \sqrt{\frac{x}{x-2}}}{x} = \\ &= - \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{x}{x-2}} = -1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_2 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - k_2 x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{\frac{x^3}{x-2}} + x \right) = (\infty - \infty) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(|x| \sqrt{\frac{x}{x-2}} + x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(1 - \sqrt{\frac{x}{x-2}} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(1 - \sqrt{\frac{x}{x-2}} \right) \left(1 + \sqrt{\frac{x}{x-2}} \right)}{1 + \sqrt{\frac{x}{x-2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{-2x}{x-2}}{1 + \sqrt{\frac{x}{x-2}}} = -1. \end{aligned}$$

Отже, існує похила асимптота $y = -x - 1$.

Приклад 6. Знайти асимптоти кривої $y = x + 2\operatorname{arctg} x$.

Розв'язання. Оскільки функція визначена на всій числовій прямій і неперервна, то вертикальні асимптоти відсутні. Перевіримо наявність похилих асимптот.

Оскільки $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \operatorname{arctg} x = \pm \frac{\pi}{2}$, то доцільно окремо розглянути випадки $x \rightarrow +\infty$ та $x \rightarrow -\infty$.

При $x \rightarrow +\infty$ отримуємо:

$$k_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 2\operatorname{arctg} x}{x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2\operatorname{arctg} x}{x} \right) = 1.$$

$$b_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - k_1 x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 2\operatorname{arctg} x - x) =$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Отже, пряма $y = x + \pi$ є похилою асимптотою при $x \rightarrow +\infty$.

При $x \rightarrow -\infty$ знаходимо:

$$k_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{2 \operatorname{arctg} x}{x} \right) = 1,$$

$$\begin{aligned} b_2 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (f - k_2 x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 2 \operatorname{arctg} x - x) = \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = 2 \cdot \left(-\frac{\pi}{2} \right) = -\pi. \end{aligned}$$

Пряма $y = x - \pi$ – похила асимптота при $x \rightarrow -\infty$.

Приклад 7. Знайти асимптоти кривої $y = x^2 e^{-x}$.

Розв’язання. При $x \rightarrow +\infty$ $y \rightarrow 0$, отже, $y = 0$ – горизонтальна асимптота. Оскільки функція визначена та неперервна на всій числовій прямій, то вертикальні асимптоти відсутні. Визначимо, чи існують похилі асимптоти.

$$\frac{x}{k} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{e^x}.$$

Остання границя дорівнює нулю при $x \rightarrow +\infty$ і є нескінченною при $x \rightarrow -\infty$. Отже, похилих асимптот графік цієї функції не має.

Приклад 8. Знайти асимптоти графіка функції $y = \ln(4 - x^2)$.

Розв'язання. Область визначення функції знаходимо з нерівності $4 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 4 \Leftrightarrow |x| < 2$. Область визначення функції $D(y) = (-2; 2)$.

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} \ln(4 - x^2) = \lim_{x \rightarrow -2+0} \ln(4 - x^2) = -\infty.$$

Прямі $x = 2$ та $x = -2$ є вертикальними асимптотами. Інших асимптот для цього графіка не існує.

