1. Загальні принципи економіко-математичного моделювання. Модель Леонтьєва.

1.1 Предмет математичної економіки

Оскільки при прийнятті рішень у економіці можливості проведення експериментів є обмеженими, то важливим методом розробки таких рішень та дослідження економічних систем є економіко-математичне моделювання. *Економко-математичне моделювання* – це процес побудови математичних моделей економічних систем, процесів та явищ. *Модель* – це об’єкт, що заміщує оригінал та відображає найбільш важливі для даного дослідження властивості оригінала. Модель, що є сукупністю математичних співвідношень (рівнянь, нерівностей тощо), називають *математичною.*

Математичною економікою називають розділ науки, що вивчає економічні об’єкти та процеси з допомогою економіко-математичного моделювання.

Процес побудови економіко-математичної моделі є послідовністю наступних етапів.

1. Формулювання предмета та мети дослідження.
2. Виділення елементів об’єкта, важливих для досягнення мети дослідження.
3. Вербальний (словесний) опис взаємозв’язків між виділеними елементами об’єкта моделювання.
4. Введення символічних позначень для врахованих характеристик об’єкта моделювання, формулювання взаємозв’язків між ними у вигляді математичних співвідношень.
5. Проведення розрахунків по побудованій математичній моделі та аналіз отриманого розв’язку.

Слід розрізняти математичну структуру моделі та її змістовну інтерпретацію. Математична структура моделі складається з введених змінних та параметрів, що відображають елементи дослідження, а також рівнянь та нерівностей, що відображають зв’язки між ними.

У моделі розрізняють *екзогенні та ендогенні змінні*. Екзогенні змінні задають поза моделлю, значення ендогенних змінних визначають у ході розрахунків за моделлю.

Математичні моделі різних економічних об’єктів та процесів можуть мати однакову математичну структуру, але при цьому різну економічну інтерпретацію.

Розглянемо два приклади.

Приклад 1. Визначити, яку суму слід покласти на банківський депозит при заданій процентній ставці 20% річних, щоб через рік отримати 20 тисяч грошових одиниць?

Розв’язання. Введемо наступні позначення для змінних математичної моделі: M_0 – початкова сума грошового внеску, M_1 – сума на депозиті через 1 рік, R – річний процентний відсоток. Зв’язок між змінними задачі визначається рівнянням $M_1 = M_0\left(1+\frac{R}{100}\right)$. Це рівняння є математичною моделлю задачі. З неї визначаємо значення M_0: $M_0 = \frac{M_1}{1+\frac{R}{100}} = \frac{12}{1,2} = 10$ (тисяч грошових одиниць).

Приклад 2. Внаслідок технічної модернізації середня продуктивність праці на підприємстві збільшилась на 20% і воно стало виробляти 12 тисяч одиниць продукції щомісячно. Яким був початковий щомісячний обсяг виробництва?

Розв'язання. Нехай Q_0 – початковий обсяг виробництва, Q_1 – обсяг виробництва через 1 місяць, R – річний процент приросту продуктивності праці. Рівняння, що пов'язує між собою змінні задачі, тобто її математична модель, має такий же вигляд, як модель попереднього прикладу: $Q_1 = Q_0\left(1+\frac{R}{100}\right)$. Звідси знаходимо: $Q_0 = \frac{Q_1}{1+\frac{R}{100}} = \frac{12}{1,2} = 10$ (тисяч одиниць продукції).

Отже, одна й та ж математична модель може бути використана для розв'язання різних задач.

1.2 Види економіко-математичних моделей

Існують різні системи класифікації економіко-математичних моделей. За типами об'єктів, що моделюються, розрізняють макроекономічні та мікроекономічні моделі. *Макроекономічні моделі* описують економіку як єдине ціле, пов'язуючи між собою показники, що характеризують її стан: валовий внутрішній продукт, інвестиції, споживання, зайнятість, обсяг грошової маси тощо. *Мікроекономічні моделі* описують взаємодію структурних та функціональних складових економіки та їх поведінку на ринку. Основним об'єктом мікроекономічного моделювання є підприємство.

З точки зору врахування зміни економічних систем у часі розрізняють *статичні та динамічні моделі*. У статичних моделях розглядають стан об'єкта у конкретний момент часу, тут змінні моделі не залежать від часу. У динамічних моделях вони є функціями часу.

З точки зору врахування дії випадкових факторів розрізняють *детерміновані та стохастичні моделі*. У детермінованих моделях зв'язки між змінними розглядаються як функціональні. Стохастичні моделі передбачають наявність дії випадкових факторів на показники, що досліджуються. У таких моделях використовують апарат теорії ймовірностей, математичної статистики та теорії випадкових процесів.

Оптимізаційні моделі передбачають побудову цільової функції, що відображає результат діяльності економічної системи та дослідження цієї функції на екстремум з врахуванням обмежень, накладених на цю систему.

1.3 Статична модель міжгалузевого балансу (модель Леонтьєва).

Розглянемо статичну лінійну модель багатогалузевої економіки. У основу цієї моделі покладено наступні припущення.

1. У економічній системі, що є об'єктом моделювання, виробляються та споживаються n товарів.
2. Кожна галузь виробляє лише один товар, різні галузі виробляють різні товари.
3. Під виробничим процесом у кожній галузі розуміють перетворення деяких товарів у один товар, при цьому витрати сировини на виробництво одиниці товару залишаються незмінними.

Нехай x_i – обсяг виробництва i-го товару за плановий період (рік), a_{ij} – кількість одиниць i-го товару, яку потрібно витратити на виробництво одиниці j-го товару, $i=1,...,n$, $j=1,...,n$. Величина x_i складається з двох частин: обсяг виробництва, що витрачається на виробничі потреби та обсяг виробництва, що витрачається на кінцеве (невиробниче) споживання. Виходячи з припущень моделі 1 – 3, виробниче споживання i-го товару всіма галузями дорівнює $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$, тому чисте виробництво i-го товару, призначене для кінцевого споживання, становить $x_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$, $i=1,...,n$.

Якщо прирівняти чисте виробництво кожного i-го товару та кінцевий попит y_i на цей товар, то отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$x_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = y_i,\ i=1,...,n. \tag{1.1}$$

Систему (1.1) називають *моделлю Леонтьєва* або *статичною лінійною моделлю міжгалузевого балансу*. Величини y_i у системі (1.1) є заданими.

Отже, модель Леонтьєва є системою з n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими. *Сутність моделі Леонтьєва полягає у визначенні обсягів валового виробництва галузей за відомим кінцевим попитом на їх продукцію на основі даних про технологічні можливості галузей, відображених у коефіцієнтах витрат a_{ij} системи (1.1).*

Використовуючи модель Леонтьєва, можна розв'язувати також і обернену задачу: за заданими обсягами валового виробництва кожного товару визначити обсяги його кінцевого споживання.

Величини x_i та y_i можна задавати у вартісних або натуральних одиницях виміру. У відповідності з цим розрізняють натуральний та вартісний міжгалузевий баланси. Далі будемо розглядати вартісний баланс.

Введемо наступні позначення: x_{ij} – кількість продукції i-ої галузі, що використовується для виробничих потреб у j-ій галузі, z_j – умовно чиста продукція j-ої галузі, що включає кінцеве споживання, оплату праці та амортизацію. Принципова схема міжгалузевого балансу наведена у таблиці 1.1.

Таблиця 1.1. Принципова схема міжгалузевого балансу у вартісному виразі

Галузі – виробники	Галузі – споживачі				Кінцевий продукт	Валовий продукт
	1	2	…	n		
1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1n}	y_1	x_1
2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2n}	y_2	x_2
…	…	…	…	…	…	…
n	x_{n1}	x_{n2}	…	x_{nn}	y_n	x_n
Умовно чиста продукція	z_1	z_2	…	z_n	$\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{j=1}^{n} z_j$	
Валовий продукт	x_1	x_2	…	x_n		$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{j=1}^{n} x_j$

Розглянувши схему балансу по стовбцям, робимо висновок, що сума матеріальних витрат будь-якої галузі – споживача та її умовно чистої продукції дорівнює валовій продукції цієї галузі:

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + z_j, \; j = 1, 2, ..., n. \tag{1.2}$$

Аналізуючи схему міжгалузевого балансу по рядкам, ми бачимо, що валова продукція кожної галузі – виробника дорівнює сумі матеріальних витрат її галузей – споживачів та кінцевої продукції даної галузі, призначеної для кінцевого (невиробничого) споживання.:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i, \; i = 1, ..., n. \tag{1.3}$$

Формули (1.3) описують систему з n рівнянь, які називають рівняннями розподілу продукції галузей матеріального виробництва за напрямами використання.

Балансовий характер таблиці 1.1 міжгалузевого балансу виражається у тому, що $\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{j=1}^{n} z_j$, $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{j=1}^{n} x_j$.

Основу математичної моделі міжгалузевого балансу складає *матриця A коефіцієнтів прямих витрат* a_{ij}, $i = 1, ..., n$, $j = 1, 2, ..., n$. Її називають також *технологічною матрицею*. Коефіцієнт прямих витрат a_{ij} показує, яка кількість продукції i-ої галузі потрібна (якщо враховувати лише прямі витрати) для виробництва одиниці продукції j-ої галузі, тому виконується рівність:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}, \; i = 1, ..., n, \; j = 1, 2, ..., n. \tag{1.4}$$

Визначивши коефіцієнти технологічної матриці A, ми тим самим визначаємо коефіцієнти моделі Леонтьєва (1.1). У матричній формі цю модель можна записати у вигляді:

$$X = AX + Y, \tag{1.5}$$

де $X^T = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $Y^T = (y_1, y_2, ..., y_n)$.

Систему (1.5) можна записати у вигляді:

$$(E - A)X = Y, \tag{1.6}$$

де E – одинична матриця.

З (1.6) можна визначити валову продукцією X всіх галузей:

$$X = (E - A)^{-1} Y. \tag{1.7}$$

Тут $(E - A)^{-1}$ – матриця, обернена до $(E - A)^{-1}$. Нехай $B = (E - A)^{-1}$. Тоді (1.7) набуває вигляду $X = BY$, де матрицю $B = (E - A)^{-1}$ називають *матрицею повних витрат*, а її компоненти b_{ij} називають *коефіцієнтами повних витрат*. Вони показують, скільки всього потрібно виробити продукції i-ої галузі для виробництва одиниці продукції j-ої галузі, призначеної для кінцевого споживання.

1.4 Умова продуктивності у моделі Леонтьєва

Планові розрахунки за формулами (1.7) мають сенс у тому випадку, якщо ці розрахунки дозволять отримати розв’язання $x_i \ge 0$, $i = 1, ..., n$.

Невід’ємну матрицю A називають *продуктивною*, якщо існує такий невід’ємний вектор X, що

$$X > AX. \tag{1.8)}$$

Умова (1.8) означає, що для моделі міжгалузевого балансу (1.1) існує вектор Y кінцевої продукції з додатними координатами.

Для того, щоб матриця A прямих витрат у моделі Леонтьєва була продуктивною, необхідно, щоб виконувалася хоча б одна з наступних умов;

1. матриця $(E - A)$ є невід’ємно оборотною, тобто існує обернена матриця $(E - A)^{-1}$, всі елементи якої є невід’ємними;
2. матричний ряд $E + A + A^2 + ... + A^k + ... = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$ є збіжним, причому його сума дорівнює $(E - A)^{-1}$;
3. найбільше за модулем власне значення λ матриці A є меншим за одиницю;
4. всі головні мінори матриці $(E - A)$ є додатними.

Більш простою , але лише достатньою умовою продуктивності матриці A є обмеження на величину найбільшої з сум елементів матриці A у кожному стовбці: якщо сума елементів кожного стовпця матриці A менша за одиницю, то матриця A є продуктивною.

Двоїстою до моделі Леонтьєва $X - AX = Y$ називають систему рівнянь для цін на товари галузей:

$$P - A^T P = \Phi, \tag{1.9}$$

де $P^T = \left(p_1, p_2, ..., p_n\right)$ – вектор цін на товари, A – технологічна матриця, $\Phi^T = \left(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\right)$ – вектор доданої вартості на одиницю товару.

Систему (1.9) називають *__прибутковою__*, якщо всі елементи її розв'язку – вектора P є невід'ємними. Продуктивність матриці A забезпечує прибутковість системи (1.9).

Розглянемо приклад побудови та застосування моделі Леонтьєва.

__Приклад.__ У таблиці наведені дані щодо міжгалузевого балансу економічної системи, що складається з двох галузей, за останній рік у грошових одиницях.

Галузі – виробники	Галузі – споживачі		Кінцевий продукт	Валове виробництво
	A	B		
A	7	21	72	100
B	12	15	123	150

Визначити необхідний обсяг валового виробництва у кожній галузі, якщо кінцеве споживання продукції галузі A повинно збільшитися удвічі, а галузі B – залишитися на попередньому рівні. Знайти умовно чисту продукцію галузей.

Розв'язання. Знайдемо елементи технологічної матриці A – коефіцієнти прямих витрат $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}$. Отримуємо:

$$a_{11} = \frac{x_{11}}{x_1} = \frac{7}{100} = 0,07;\ a_{12} = \frac{x_{12}}{x_2} = \frac{21}{150} = 0,14;\ a_{21} = \frac{x_{21}}{x_1} = \frac{12}{100} = 0,12;$$

$$a_{22} = \frac{x_{22}}{x_2} = \frac{15}{150} = 0,10.$$

Технологічна матриця A має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 0,07 & 0,14 \\ 0,12 & 0,10 \end{pmatrix}.$$

Перевіримо її на продуктивність:

$$a_{11} + a_{21} = 0,07 + 0,12 = 0,19 < 1,\ a_{12} + a_{22} = 0,14 + 0,10 = 0,24 < 1.$$

Отже, матриця A є продуктивною і для довільного вектора Y кінцевого споживання можна знайти вектор валового виробництва X, що забезпечує даний вектор кінцевого споживання. Знайдемо вектор X за формулою (1.7): $X = \left(E - A\right)^{-1} Y$. Вектор Y кінцевого споживання має вигляд:

$$Y = \begin{pmatrix} 72 \cdot 2 = 144 \\ 123 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо матрицю повних витрат $B = \left(E - A\right)^{-1}$:

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,07 & 0,14 \\ 0,12 & 0,10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,93 & -0,14 \\ -0,12 & 0,9 \end{pmatrix}.$$

$$\det\left(E - A\right) = 0,93 \cdot 0,9 - \left(-0,14\right) \cdot \left(-0,12\right) = 0,8202.$$

$$B = \frac{1}{0,8202}\begin{pmatrix} 0,9 & 0,14 \\ 0,12 & 0,93 \end{pmatrix}.$$

Вектор X валового виробництва:

$$X = BY = \begin{pmatrix} 179,0 \\ 160,5 \end{pmatrix}.$$

Щоб знайти умовно чисту продукцію галузей при знайдених обсягах валового виробництва, знайдемо нові значення виробничого споживання:

$x_{ij} = a_{ij} \cdot x_j$, $i = 1,2$; $j = 1,2$, $x_{11} = a_{11} \cdot x_1 = 0,07 \cdot 179 = 12,53$;

$x_{12} = a_{12} \cdot x_2 = 0,14 \cdot 160,5 = 22,47$; $x_{21} = a_{21} \cdot x_1 = 0,12 \cdot 179 = 21,48$;

$x_{22} = a_{22} \cdot x_2 = 0,1 \cdot 160,5 = 16,05$.

Умовно чисту продукцію галузей визначаємо за формулою: $z_j = x_j - x_{1j} - x_{2j}$, $j = 1,2$. Маємо:

$z_1 = 179 - 12,53 - 21,48 = 144,99$ (грошових одиниць);

$z_2 = 160,5 - 22,47 - 16,05 = 121,98$ (грошових одиниць).

1.5 Лінійна модель обміну (міжнародної торгівлі)

З допомогою лінійної моделі обміну або моделі міжнародної торгівлі можна визначити, якими повинні бути співвідношення між національними доходами країн, що торгують між собою, щоб торгівля була збалансованою.

Розглянемо модель міжнародної торгівлі, у якій беруть участь n країн. Нехай x_i – національний дохід i-ої країни, a_{ij} – частка національного доходу j-ої країни, яку вона витрачає на придбання товарів i-ої країни, p_i – загальна виручка від зовнішньої та внутрішньої торгівлі для i-ої країни. Будемо вважати, що країна витрачає весь свій національний дохід на придбання товарів всередині країни та на імпорт з інших країн. Це означає, що $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1,\ j = 1,2,...,n$.

Матрицю A, елементами якої є коефіцієнти a_{ij}, $i = 1,...,n$, $j = 1,...,n$, називають <u>*структурною матрицею торгівлі*</u>. Сума елементів кожного стовпчика цієї матриці дорівнює одиниці.

Нехай на протязі певного фіксованого проміжку часу структура міжнародної торгівлі не змінюється, тобто не змінюється матриця A, можуть змінюватися лише національні доходи країн, що беруть участь у торгівлі. Потрібно визначити, якими повинні бути ці національні доходи, щоб міжнародна торгівля залишалася збалансованою, тобто сума виплат усіх країн дорівнювала б сумарній виручці від внутрішньої та зовнішньої торгівлі.

Для будь-якої i-ої країни виручка від внутрішньої та зовнішньої торгівлі $p_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$, $i = 1,...,n$. У збалансованій системі міжнародної торгівлі відсутній дефіцит, тобто $p_i = x_i$, $i = 1,...,n$. Нехай X – вектор, елементами якого є національні доходи $x_1, x_2, ..., x_n$, а елементами вектора P є величини сумарної виручки $p_1, p_2, ..., p_n$. Оскільки $P = A \cdot X$, то виконується рівність $A \cdot X = X$. Отже, вектор X є власним вектором структурної матриці торгівлі A, який відповідає одиничному власному значенню (рівність $A \cdot X = \lambda \cdot X$ виконується при $\lambda = 1$). Звідси випливає, що баланс у міжнародній торгівлі досягається, якщо одиниця є власним значенням структурної матриці торгівлі, а вектор X – власним вектором, що відповідає цьому власному значенню.

Приклад. Знайти співвідношення національних доходів трьох країн, що торгують між собою, у збалансованій системі міжнародної торгівлі, якщо структурна матриця торгівлі для цих країн має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Перевіримо, чи є $\lambda = 1$ власним значенням матриці A.

$$A - \lambda E = A - E = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Оскільки сума двох останніх рядків отриманої матриці $A - E$ дорівнює першому рядку, помноженому на (–1), то визначник цієї матриці дорівнює нулю, отже, $\lambda = 1$ є власним значенням матриці A. Для знаходження відповідного йому власного вектора X розв'яжемо систему $(A - E)X = 0$, або:

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Методом Гауса знаходимо розв'язки цієї системи: $x_1 = 2{,}25x_3$, $x_2 = 2{,}5x_3$, $x_3 = c$ – довільна додатна константа. Таким чином, збалансованість торгівлі розглянутих трьох країн досягається, якщо їх національні доходи знаходяться у співвідношенні $2{,}25 : 2{,}5 : 1$.

Практичне заняття № 1. Найпростіші фінансові розрахунки.

Розв'язати наступні задачі, пов'язані з фінансовими обчисленнями.

1. Знайти вартість кредиту на суму 1 млн. у.г.о., отриманого на 10 місяців при щомісячній відсотковій ставці 3%. (Відповідь: 300 тис. у.г.о.)

2. На депозит при процентній ставці 10% річних поклали 10 тис. у.г.о. Яка сума буде на депозитному рахунку через 2 роки? (Відповідь: 12100 у.г.о.)

3. За який час депозитний внесок на суму 10 тис. у.г.о. при річній ставці 10% дорівнюватиме 1 млн. у.г.о.? (Відповідь: ≈ 48 років).

4. Комерційний банк придбав державні облігації з терміном погашення 6 місяців на суму 2 млн. у.г.о. По закінченні цього терміну банк повинен отримати за облігаціями 2,175 млн. у.г.о. Визначити розмір річної процентної ставки за облігаціями. (Відповідь:)

5. Кредит у розмірі 300 тис. у.г.о. видано на 90 днів під 20% річних. Знайти доход кредитора. (Відповідь: 15 тис. у.г.о.)

6. Рахунок у банку на суму 200 тис. грн.. під 20% річних відкрито 25 травня. 7 червня на цей рахунок додатково внесли 50 тис. грн.., 10 листопада з нього знято суму 90 тис. грн.., а 1 грудня рахунок було закрито. Знайти загальну суму, отриману при закритті рахунку. (Відповідь: 193638 грн.)

7. Банк виплачує відсотки за депозитами на суму, не меншу, ніж 100 тис. у.г.о. на наступних умовах: на суму, покладену на термін не менше року – 15% річних, не менше 6 місяців – 13% річних, не менше 3 місяців – 12% річних. Яка форма депозиту є найбільш прибутковою для вкладника, якщо сума депозиту становить 100 тис. у.г.о.? (Відповідь: депозит на 1 рік).

8. Вкладник вніс на банківський депозит 5 тис. у.г.о. під 12% річних з виплатою процентів по завершенні терміну депозиту. Знайти суму депозиту через 2 роки. (Відповідь: 6272 у.г.о.)

9. Підприємство отримало у банку кредит на суму 5 млн. у.г.о. терміном на 5 років. Відсоткова ставка за кредитом складає 10,5% для першого року, для другого року вона збільшується на 1,5%, для третього та решти років вона зростає на 0,75% щорічно. Визначити суму боргу, що повинна бути повернута через 5 років. (Відповідь: 10, 643 млн. у.г.о.)

10. На суму 600 тис. у.г.о. щоквартально нараховуються складні відсотки за річною ставкою 12% річних на протязі 14 місяців. Знайти суму нарахувань. (Відповідь: 88,75 тис. у.г.о.)

11. Знайти нинішню вартість 20 тис. у.г.о., які будуть отримані через 4 роки, якщо процентна ставка складає 8% річних).

12. Яку суму необхідно помістити на депозит, щоб через 4 роки отримати 4 тис. у.г.о. при процентній ставці 13% річних? (Відповідь: 2,85 тис. у.г.о.)

13. На початковий капітал 500 тис. у.г.о. неперервно нараховуються складні відсотки – 8% річних на протязі 4 років. Знайти загальну суму нарахуванью (Відповідь: 180,245 у.г.о.)

14. Товар продають по 100 у.г.о. за одиницю. Витрати на придбання одиниці товару складають 75 у.г.о. знайти суму прибутку та рентабельність реалізації одиниці товару. (Відповідь: 25 у.г.о., $\approx 33\%$).

15. Виручка від реалізації товару становить 2550 у.г.о. Якими повинні бути витрати, щоб рентабельність склала 25%? (Відповідь: 2000 у.г.о.)

16. Прибуток підприємства складає 5 млн. у.г.о., рентабельність дорівнює 25%. Знайти витрати. (Відповідь: 20 млн. у.г.о.)

17. Готується видання книги. Орієнтовна ціна реалізації складе 10 у.г.о., загальні постійні витрати на видання всього тиражу складають 200 тис. у.г.о. Змінні витрати на 1 примірник складають 6 у.г.о. При якому тиражу видання книги буде беззбитковим? (Відповідь: 50 тис. примірників)

Практичне заняття № 2. Побудова найпростіших економіко-математичних моделей.

Побудувати економіко-математичні моделі для наступних задач.

Задача 1. У деякій галузі 4 підприємства випускають 3 види продукції. У матриці $A(4\times 3)$ задано обсяги виробництва продукції на кожному заводі у першому кварталі, у матриці $B(4\times 3)$ – у другому кварталі. Знайти: а) обсяги виробництва продукції кожного виду за перше півріччя; б) приріст обсягів виробництва продукції у першому кварталі порівняно з другим кварталом, якщо

$$A=\begin{pmatrix}2&3&7\\1&2&2\\4&1&5\\2&1&3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3&0&2\\2&4&1\\4&3&2\\5&2&4\end{pmatrix}.$$

Відповідь: а) $A+B$; б) $B-A$.

Задача 2. Підприємство виробляє 3 види продукції. Його виробнича програма характеризується вектором $A=\begin{pmatrix}100 & 200 & 100\end{pmatrix}$. Ціга реалізації одиниці продукції i-го типу у j-му регіоні задана матрицею $B(3\times 4)$, де b_{ij} – ціна реалізації продукції i-го типу у j-му регіоні. Знайти матрицю C виручки підприємства по регіонам, якщо

$$B=\begin{pmatrix}2&3&1&5\\1&3&2&2\\2&4&2&4\end{pmatrix}.$$

Відповідь: $C=A\cdot B=\begin{pmatrix}600 & 1300 & 700 & 1300\end{pmatrix}$.

Задача 3. Підприємство виробляє 3 типи продукції, використовуючи 4 види ресурсів. Норми витрат i-го типу ресурсів на виробництво одиниці j-го виду продукції задані у матриці витрат $A(4\times 3)$. Вектор X визначає обсяги виробництва продукції кожного типу. Визначити матрицю S повних витрат ресурсів кожного виду на виробництво всієї продукції, якщо

$$A=\begin{pmatrix}2&5&3\\0&1&8\\1&3&1\\2&2&3\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}100 & 80 & 110\end{pmatrix}.$$

Відповідь: $S = A \cdot X^T = \begin{pmatrix} 930 \\ 960 \\ 450 \\ 690 \end{pmatrix}.$

Задача 4. В умовах попередньої задачі задано вектор $P = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 10 & 10 \end{pmatrix}$, елемент p_i якого дорівнює вартості i-го типу ресурсів. Знайти повну вартість витрачених ресурсів.

Відповідь: $c = P \cdot S = 39900$ (у.г.о.).

Задача 5. Для виробництва 4 видів продукції підприємство використовує 3 види ресурсів. Витрати ресурсів на виробництво одиниці продукції, запас ресурсів кожного виду та прибуток від реалізації одиниці продукції кожного виду наведені у таблиці. Побудувати економіко-математичну модель для розробки оптимального плану виробництва продукції.

Ресурси	Витрати ресурсів на одиницю продукції				Запас ресурсів
	Товар 1	Товар 2	Товар 3	Товар 4	
Сировина	3	5	2	4	60
Робочий час	22	14	18	30	400
Час роботи обладнання	10	14	8	16	128
Прибуток, у.г.о.	30	25	8	16	

Розв'язання. Нехай x_i – запланований обсяг виробництва i-го товару, $i = 1,2,3,4$. Потрібно побудувати оптимальний план виробництва продукції, що максимізує прибуток підприємства. Цільова функція задачі має вигляд:

$f = 30x_1 + 25x_2 + 8x_3 + 16x_4 \to \max$.

Обмеження задачі:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 \le 60, \\ 22x_1 + 14x_2 + 18x_3 + 30x_4 \le 400, \\ 10x_1 + 14x_2 + 8x_3 + 16x_4 \le 128, \\ x_1 \ge 0,\, x_2 \ge 0,\, x_3 \ge 0,\, x_4 \ge 0. \end{cases}$$

Задача 6. На двох автоматичних лініях виготовляють вироби трьох типів, дані про які наведено у таблиці. Побудувати математичну модель завантаження автоматичних ліній, що мінімізує загальні витрати. План повинен бути виконаний не пізніше, ніж за 15 діб.

Виріб	Продуктивність лінії, од./добу		Витрати на роботу ліній, у.г.о./добу		План, од.
	1	2	1	2	
A	4	3	400	300	50
B	6	5	100	200	40
C	8	2	300	400	50

Розв'язання. Нехай x_{1i}, x_{2i}, x_{3i} – відповідно кількість виробів A, B та C, що виготовляються на i-й лінії, $i = 1,2$. Цільовою функцією задачі є мінімум витрат:

$$z = 400x_{11} + 300x_{12} + 100x_{21} + 200x_{22} + 700x_{31} + 400x_{32} \to \min.$$

Обмеження на змінні моделі мають вигляд:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} = 50, \\ x_{21} + x_{22} = 40, \\ x_{31} + x_{32} = 50, \\ \dfrac{x_{11}}{4} + \dfrac{x_{21}}{6} + \dfrac{x_{31}}{8} \le 15, \\ \dfrac{x_{12}}{3} + \dfrac{x_{22}}{5} + \dfrac{x_{32}}{2} \le 15, \\ x_{ij} \ge 0, i = 1,2,3; j = 1,2. \end{cases}$$

Задача 7. На обробку надійшла партія зі 150 дошок, довжина кожної з яких дорівнює 7,5м, для виготовлення комплектів з 4 дошок. Кожний комплект складається з 1 дошки довжиною 3м, 2 дошок довжиною 2м та 1 дошки довжиною 1,5м. Скласти план розпилювання дошок, що максимізує кількість їх комплектів.

Розв'язання. Всі можливі спсоби розпилювання дошок представимо у вигляді матриці A, елементи якої a_{ij} дорівнюють кількості дошок j-го типу, отриманих внаслідок розпилювання i-м способом. При цьому вважаємо, що дошка довжиною 3м – це дошка 1-го типу, дошка довжиною 2м – дошка 2-го типу, довжиною 1,5м – 3-го типу. Транспонована матриця A:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Нехай x_i – кількість дошок, розпиляних i-м способом, $i = 1,2,...,8$, b_k – кількість дошок k-го типу у комплекті, $\overline{x} = \left(x_1\ x_2\ ...\ x_8\right)$, $\overline{b} = \left(b_1\ b_2\ b_3\right) = \left(1\ \ 2\ \ 1\right)$, c – кількість комплектів. Обмеження моделі мають вигляд:

$$\sum_{i=1}^{8} x_i = 150,\ \overline{x} \cdot A = c \cdot \overline{b} = \left(c \quad 2c \quad c\right).$$

Цільова функція $z = c \to \max$.

Задача 8. Раціон для харчування корів на фермі складається з 2 видів кормів: A та B. Один кілограм корму A коштує 80 у.г.о. і містить 1 одиницю жирів, 3 одиниці білків, 1 одиницю вуглеводнів, 2 одиниці нітратів. Один кілограм корму B коштує 10 у.г.о. і містить 3 одиниці жирів, 1 одиницю білків, 8 одиниць вуглеводнів та 4 одиниці нітратів. Побудувати модель для визначення найдешевшого раціону, що містить не менше 6 одиниць жирів, 9 одиниць білків, 8 одиниць вуглеводнів та не більше 16 одиниць нітратів.

Розв'язання. Нехай x_1 – кількість кормів A у раціоні, x_2 – кількість кормів B. Цільова функція виражає вартість раціону:

$$z = 80x_1 + 10x_2 \to \min.$$

Обмеження на змінні моделі мають вигляд:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 6, \\ 3x_1 + x_2 \geq 9, \\ x_1 + 8x_2 \geq 8, \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 16, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Практичне заняття №3. Модель Леонтьєва.

Задача 1. Діяльність економічної системи, що складається з двох галузей, на протязі останнього року характеризується наступними даниими, наведеними у таблиці (в умовних грошових одиницях). Знайти технологічну матрицю A цієї економічної системи.

Галузі – виробники	Галузі – споживачі		Валовий обсяг виробництва
	A	*B*	
A	100	160	500
B	275	40	400

Розв'язання. Елементи a_{ij} матриці A дорівнюють кількості продукції i-ї галузі, що витрачається на виробництво одиниці продукції j-ї галузі. Отримуємо:

$$a_{11} = \frac{100}{500} = 0,2,\ a_{12} = \frac{160}{400} = 0,4,\ a_{21} = \frac{275}{500} = 0,55,\ a_{22} = \frac{40}{400} = 0,1.$$

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 \\ 0,55 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

Задача 2. З'ясувати, чи є продуктивною технологічна матриця $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0 \\ 0,1 & 0 & 0,3 \\ 0,6 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}$. **Відповідь**: так.

Задача 3. У таблиці наведено дані міжгалузевого балансу за звітний період у умовних грошових одиницях. Знайти необхідний обсяг валового виробництва для кожної галузі, якщо за планом кінцеве споживання у енергетиці повинно збільшитися у 2 рази, а у машинобудуванні рівень кінцевого споживання повинен зрости на 20 %.

Галузі – виробники	Галузі – споживачі		Фактичне кінцеве споживання	Валовий обсяг виробництва
	Енергетика	Машинобудування		
Енергетика	100	160	240	500
Машинобудування	275	40	85	400

Відповідь: $X^T = \begin{pmatrix} 945,6 & 691,2 \end{pmatrix}$.

Задача 4. Задано технологічну матрицю (матрицю прямих витрат) $A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,5 \\ 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}$. Знайти: а) вектор валового виробництва X, що забезпечує планове кінцеве споживання $Y = \begin{pmatrix} 400 \\ 500 \end{pmatrix}$; б) приріст ΔX валового виробництва, що забезпечує збільшення кінцевого споживання на $\Delta Y = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \end{pmatrix}$.

Відповідь: а) $X = \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \end{pmatrix}$; б) $\Delta X = \begin{pmatrix} 184 \\ 132 \end{pmatrix}$.

Задача 5. На плановий період відомі наведені у таблиці коефіцієнти прямих витрат та величина кінцевого споживання у промисловості, сільському господарстві та інших галузях. Знайти обсяги валового виробництва продукції у галузях та міжгалузеві постачання.

Галузі – виробники	Галузі – споживачі			Кінцеве споживання (у.г.о.)
	Промисловість	Сільське господарствр	Інші галузі	
Промисловість	0,3	0,25	0,2	56
Сільське господарство	0,15	0,12	0,03	20
Інші галузі	0,1	0,05	0,08	12

Відповідь: $X = \begin{pmatrix} 102,2 \\ 41,0 \\ 26,4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 30,7 & 10,3 & 5,3 \\ 15,3 & 4,9 & 0,8 \\ 10,2 & 2,1 & 2,1 \end{pmatrix}$.

Задача 6. Чистою продукцією галузі називають різницю між її валовою продукцією та продукцією всіх галузей, витраченою на виробництво у даній галузі. В умовах попередньої задачі знайти чисту продукцію для промисловості, сільського господарства та інших галузей.

Відповідь: $\begin{pmatrix} 46,0 & 23,7 & 18,2 \end{pmatrix}$.

Задача 7. У таблиці наведено дані про діяльність економічної системи, що складається з двх галузей, а також план виробництва продукції для кінцевого споживання Y_1 у майбутньому періоді (в у.г.о.). Знайти матриці прямих та повних витрат, а також обсяг валового виробництва продукції у плановому періоді, що забезпечує виробництво продукції кінцевого споживання Y.

Галузі – виробники	Галузі – споживачі		Чиста продукція	План кінцевого споживання, Y
	A	B		
A	80	120	300	350
$\vert B$	70	30	200	300

Відповідь: $A=\begin{pmatrix}0,16 & 0,4\\ 0,14 & 0,1\end{pmatrix}$, $S=\begin{pmatrix}1,29 & 0,57\\ 0,20 & 1,20\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}622,5\\ 430,0\end{pmatrix}$.

2. Поняття еластичності та її застосування. Співвідношення між сумарними, середніми та граничними величинами

2.1 Поняття та властивості еластичності

Еластичність характеризує відносну зміну економічного показника під дією одиничної відносної зміни фактора, від якого він залежить за умови незмінності решти факторів, що впливають на досліджуваний показник. Іншими словами, еластичність показує, на скільки процентів зміниться досліджуваний показник, якщо фактор, від якого він залежить, збільшиться на 1%.

Нехай досліджується залежність економічного показника y від фактора x, значення якого впливають на значення y. Розглянемо випадок, коли спостерігається функціональна залежність $y=y(x)$. Швидкість зміни величини y відносно зміни величини x визначається похідною $\frac{dy}{dx}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$, проте її застосування у економічних дослідженнях здебільшого є незручним, оскільки величина похідної залежить від обраних одиниць виміру x та y. Тому для вивчення впливу зміни величини x на величину y у економіці застосовують не абсолютні, а відносні (процентні) зміни величин, що досліджуються. Зв'язок між змінами відносних величин оцінюють за допомогою еластичності.

<u>*Еластичністю*</u> функції $y=y(x)$ відносно змінної x називають границю відношення відносних змін величин y та x:

$$E_x(y)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y/y}{\Delta x/x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{x}{y}\right). \tag{2.1}$$

Формулу (2.1) можна записати у вигляді:

$$E_x(y)=\frac{d(\ln y)}{d(\ln x)}. \tag{2.2}$$

Якщо еластичність визначають наближено за дискретним набором даних, наприклад, заданих у вигляді таблиці, то замість (2.1) та (2.2) для обчислення еластичності у точці (x_1, y_1) використовують формулу:

$$E_x(y)=\frac{y_2-y_1}{y_1}:\frac{x_2-x_1}{x_1}=\frac{\Delta y_1}{y_1}:\frac{\Delta x_1}{x_1}. \tag{2.3}$$

Еластичність, обчислену за формулою (2.3), називають <u>*кінцевою еластичністю*</u>.

У економічних дослідженнях використовують також середню (дугову) еластичність:

$$E_x(y)=\frac{y_2-y_1}{(y_1+y_2)/2}:\frac{x_2-x_1}{(x_1+x_2)/2}, \tag{2.4}$$

а також логарифмічну еластичність

$$E_x(y)=\frac{\Delta(\ln y)}{\Delta(\ln x)}=\frac{\ln y_2-\ln y_1}{\ln x_2-\ln x_1}=\ln\left(\frac{y_2}{y_1}\right):\ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right). \tag{2.5}$$

З означення еластичності (2.1) випливають основні властивості цього показника.

1. $E_{ax}(by)=E_x(y)$, тобто еластичність не залежить від одиниць виміру показників x та y.

2. Еластичності взаємно обернених функцій є взаємно оберненими величинами: $E_x(y)=\dfrac{1}{E_y(x)}$.

3. Еластичність добутку двох функцій дорівнює сумі їх еластичностей: $E_x(u\cdot v)=E_xu+E_xv$.

4. Еластичність частки функцій дорівнює різниці їх еластичностей: $E_x\left(\dfrac{u}{v}\right)=E_xu-E_xv$.

5. Еластичність суми двох функцій знаходять за формулою:

$$E_x(u+v)=\frac{d(u+v)}{dx}\cdot\frac{x}{u+v}=\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}\right)\cdot\frac{x}{u+v}=\frac{u\cdot E_xu+v\cdot E_xv}{u+v}.$$

Приклад. Знайти еластичність степеневої функції $y=x^k$.

Розв'язання. $E_x\left(x^k\right)=\dfrac{d\left(x^k\right)}{dx}\cdot\dfrac{x}{x^k}=kx^{k-1}\cdot x^{1-k}=k$.

2.2 Види еластичності у економічних дослідженнях

Розглянемо основні показники еластичності, що використовуються у економічних дослідженнях.

1. *Еластичність попиту за ціною (пряма еластичність)* визначається за формулою $E_p(q)=\dfrac{dq/q}{dp/p}=\dfrac{dq}{dp}\cdot\dfrac{p}{q}$, де p – ціна одиниці товару, q – величина попиту на нього. Вона показує відносну зміну у відсотках величини попиту на товар при зміні ціни цього товару на 1% та характеризує реакцію споживачів на зміну ціни товару.

2. *Перехресну еластичність попиту за ціною* знаходять за формулою $E_{p_j}(q_i)=\dfrac{dq_i/q_i}{dp_j/p_j}=\dfrac{dq_i}{dp_j}\cdot\dfrac{p_j}{q_i}$. Вона показує відносну процентну зміну величини q_i

попиту на i-й товар при зміні ціни p_j на j-й товар, що заміщує чи доповнює i-й товар у споживанні, на 1%.

3. <u>*Еластичність попиту за доходом*</u> обчислюють за формулою: $E_l(q)=\dfrac{dq/q}{dl/l}=\dfrac{dq}{dl}\cdot\dfrac{l}{q}$, l – середня величина доходу споживачів. Вона характеризує відносну процентну зміну величини попиту на товар при збільшенні доходу споживачів на 1%. Додатна еластичність попиту за доходом спостерігається для нормальних (якісних) товарів, від'ємна – для малоцінних (низькоякісних).

4. <u>*Цінова еластичність ресурсів*</u> $E_p(R)=\dfrac{dR/R}{dp/p}=\dfrac{dR}{dp}\cdot\dfrac{p}{R}$ характеризує відносну зміну у відсотках величини R попиту на певний ресурс при зміні ціни цього ресурсу на 1%.

5. <u>*Еластичність заміщення при виробництві одного ресурсу іншим*</u> $E_{R_j}(R_i)=\dfrac{dR_i}{dR_j}\cdot\dfrac{R_j}{R_i}$ показує, на скільки процентів зміниться кількість R_i i-го ресурсу при збільшенні кількості R_j j-го ресурсу на 1%, так, що при цьому загальний обсяг виробництва не змінюється.

2.3 Сумарні, середні та граничні величини у економіці

<u>*Сумарною величиною*</u> називають будь-яку функцію $F(x)$ незалежної змінної x. Прикладами сумарних величин у економіці є дохід або витрати як функції обсягу виробництва, обсяг виробництва як функція витрат праці тощо.

<u>*Середню величину*</u> ($AF(x)$) визначають як відношення сумарної величини до незалежної змінної: $AF(x)=\dfrac{F(x)}{x}=\bar{F}$. Приклади середніх величин – середня виручка, середні витрати, середній дохід.

Гранична (маржинальна) величина $MF(x)$ визначається як похідна сумарної величини $F(x)$ за змінною x: $MF(x)=\dfrac{dF}{dx}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta F}{\Delta x}$ у випадку, якщо сумарна величина змінюється неперервно. Якщо сумарна величина є дискретною, то маржинальна величина $MF(x)$ визначається як відношенні зміни $\Delta F(x)$ до зміни незалежної змінної Δx: $MF(x)=\dfrac{\Delta F(x)}{\Delta x}$. У цьому випадку маржинальну величину можна розглядати як зміну сумарної величини, викликану зміною аргументу на одиницю. Прикладами маржинальних величин у економіці є маржинальний прибуток, маржинальні витрати тощо.

Практичне заняття № 4. Сумарні, середні та граничні величини. Поняття еластичності

Розв’язати наступні задачі.

Задача 1. Залежність між виробничиими витратами y (у.г.о.) та обсягом виробленої продукції x (у.г.о.) визначається функцією $y = 50x - 0,05x^3$. Знайти середні та граничні витрати, якщо обсяг виробництва складає 10 у.г.о.

Відповідь: 45 у.г.о., 35 у.г.о.

Задача 2. Функція виробничих витрат підприємства має вигляд:

$$y(x) = 0,1x^3 - 1,2x^2 + 5x + 250.$$

Знайти середні та граничні виробничі витрати. Обчислити їх значення, якщо обсяг виробництва x дорівнює 10 у.г.о.

Відповідь: 28 у.г.о., 11 у.г.о.

Задача 3. Залежність обсягу u (одиниць) продукції, виробленого бригадою робітників, від часу t (год.) визначається рівністю $u(t) = -\frac{5}{6}t^3 + \frac{15}{2}t^2 + 100t$, $0 \le t \le 8$. Знайти продуктивність праці бригади робітників та швидкість її зміни через 1 годину після початку роботи та за 1 годину до її завершення.

Відповідь: $u'(1) = 112,5$ од./год., $u''(1) = 10$ од./год.^{2}, $u'(7) = 82,5$ од./год., $u''(7) = -20$ од./год.^{2}

Задача 4. Залежність між собівартістю одиниці продукції y (у.г.о.) та її валовим обсягом виробництва x (у.г.о.) визначається рівністю $y = 80000 - 500x$. Знайти еластичність собівартості за обсягом виробництва для обсягу виробництва 60 у.г.о.

Відповідь: $E_x(y) = \frac{x}{x - 160}$, $E_{60}(y) = -0,6$

Задача 5. Залежність між попитом q та ціною p одиниці продукції підприємства визначається співвідношенням $q = 18 - \sqrt{p}$. Знайти еластичність попиту за ціною. З’ясувати, при яких значеннях ціни попит є нейтральним, еластичним та нееластичним.

Відповідь: $p = 144$, $0 < p < 144$, $144 < p < 324$.

Задача 6. Функції попиту та пропозиції на деякий товар мають вигляд:

$$q = \frac{p+8}{p+2},\ s = p + 0,5,$$

де p – ціна одиниці товару, q – величина попиту, s – пропозиції. Знайти: а) ціну рівноваги, яка урівноважує попит та пропозицію на ринку; б) еластичність попиту та пропозиції для цієї ціни; в) зміну попиту при збільшенні ціни на 5% у порівнянні з ціною рівноваги.

Відповідь: а) $p = 2$у.г.о.; б) $E_2(q) = -0,3$, $E_2(s) = 0,8$; в) зменшиться на $5 \cdot 0,3 = 1,5\%$.

Задача 7. Як пов'язані між собою граничні та середні повні витрати підприємства, якщо еластичність повних витрат дорівнює 1.

Розв'язання. Нехай x – обсяг виробництва на підприємстві, $y(x)$ – повні витрати, тоді середні витрати $\overline{y} = \frac{y}{x}$, $\frac{dy}{dx}$ – граничні витрати. Еластичність повних витрат:

$$E_x(y) = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} = 1.$$

З цієї рівності випливає, що $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$, тобто граничні витрати дорівнюють середнім витратам.

Задача 8. Задано функцію $y(x)$ повних витрат підприємства на виробництво x одиниць продукції. Визначити зв'язок між еластичностями повних та середніх витрат.

Відповідь: $E_x(\overline{y}) = E_x(y) - 1$.

Задача 9. Залежність між виробничими витратами y (у.г.о.) та обсягом виробництва x (у.г.о.) є функцією $y = 10x - 0,04x^3$. Визначити середні та граничні витрати при $x = 5$ у.г.о.

Відповідь: 9 у.г.о., 7 у.г.о.

Задача 10. Залежність повних витрат y (у.г.о.) від обсягу виробництва x (у.г.о.) є функцією $y = x^3 - 2x^2 + 96$. При якому обсязі виробництва граничні та середні витрати співпадають? Знайти еластичності повних та середніх витрат при заданому обсязі виробництва.

Відповідь: $x = 4$ у.г.о., $E_4(y) = 1$, $E_4(\overline{y}) = 1$.

Задача 11. Знайти еластичність попиту q (одиниць) на товар при заданій його ціні p (у.г.о.), якщо а) $q + 10p = 50$, $p = 3$; б) $5q + 3p = 70$, $p = 10$; в) $p^2 + p + 4q = 26$, $p = 2$.

Відповідь: а) –1,5; б) –0,75; в) –0,5.

Задача 12. Залежність споживання y від доходу споживача x має вигляд: $y = \frac{ax}{x+b}$. Показати, що еластичність споживання за доходом залежить від значення параметра a та прямує до нуля при необмеженому зростанні доходу.

3. Макроекономічні виробничі функції

3.1 Поняття виробничої функції

Виробничою функцією називають функцію, що установлює взаємозв'язок між факторами виробництва (працею та капіталом) та його результатом на певному рівні економічної діяльності (підприємство, ринок, галузь, економіка).

Нехай X – обсяг виробництва у економічній системі, що є об'єктом дослідження, K – основний капітал (інвестиції у засоби виробництва), L –

витрати праці. Діяльність цієї економічної системи можна описати з допомогою виробничої функції $X = F\left(K, L\right)$, яка у загальному випадку є нелінійною.

Виробничу функцію $X = F\left(K, L\right)$ називають неокласичною, якщо вона є диференційовною та задовольняє наступні умови:

1) $F\left(0, L\right) = F\left(K, 0\right) = 0$ – при відсутності хоча б одного з факторів виробництва (праці чи капіталу) виробництво є неможливим;

2) $\frac{\partial F}{\partial K} > 0, \frac{\partial F}{\partial L} > 0$ – зростання обсягів виробництва супроводжується зростанням витрат ресурсів;

3) $\frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0, \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0$ – при збільшенні витрат ресурсів швидкість зростання виробництва сповільнюється;

4) $\lim\limits_{K \to +\infty} F\left(K, L\right) = \lim\limits_{L \to +\infty} F\left(K, L\right) = +\infty$ – при необмеженому зростанні одного з факторів виробництва обсяг виробництва необмежено зростає;

Виробничу функцію виду

$$X = A \cdot K^{\alpha_1} \cdot L^{\alpha_2} \tag{3.1}$$

називають *мультиплікативною виробничою функцією*.

Коефіцієнт A у (3.1) називають *коефіцієнтом нейтрального технічного прогресу*, $\alpha_1 > 0$ та $\alpha_2 > 0$ – *коефіцієнти еластичності відповідно за капіталом та за працею*.

Окремим випадком мультиплікативної виробничої функції є виробнича функція Кобба – Дугласа:

$$X = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{1-\alpha}. \tag{3.2}$$

3.2 Характеристики виробничої функції

Частинні похідні виробничої функції $X = F\left(K, L\right)$ за аргументами K та L називають *граничними ефективностями факторів виробництва*. Вони дорівнюють приросту обсягу виробництва на одиницю приросту відповідного фактора виробництва, капіталу (виробничих фондів) чи праці.

Частинна похідна $\frac{\partial F}{\partial K}$ – *гранична ефективність виробничих фондів (гранична фондовіддача)*.

Частинна похідна $\frac{\partial F}{\partial L}$ – *гранична продуктивність праці*.

Для мультиплікативної виробничої функції гранична фондовіддача $\frac{\partial F}{\partial K} = A \cdot \alpha_1 \cdot K^{\alpha_1 - 1} \cdot L^{\alpha_2}$, середня фондовіддача $\frac{X}{K} = A \cdot K^{\alpha_1 - 1} L^{\alpha_2}$. Таким чином, гранична фондовіддача пропорційна середній фондовіддачі з коефіцієнтом пропорційності α_1. Аналогічно можна показати, що гранична продуктивність праці пропорційна середній продуктивності праці з коефіцієнтом пропорційності α_2. Маємо:

$$\frac{\partial X}{\partial K}=\alpha_1\frac{X}{K},\frac{\partial X}{\partial L}=\alpha_1\frac{X}{L}. \tag{3.3}$$

З рівностей (3.3) випливає, що при $\alpha_1<1$, $\alpha_2<1$ граничні віддачі факторів менші , ніж середні.

При $\alpha_1<1$, $\alpha_2<1$ для мультиплікативної виробничої функції виконується третя умова неокласичної функції: $\frac{\partial^2 F}{\partial K^2}<0, \frac{\partial^2 F}{\partial L^2}<0$, тобто зі зростанням витрат ресурсу його гранична віддача зменшується. Можна довести, що мультиплікативна виробнича функція має й інші властивості неокласичної функції, тобто вона є неокласичною.

Розглянемо економічну інтерпретацію параметрів A, α_1 та α_2 мультиплікативної виробничої функції (3.1). Коефіцієнт $A>0$ нейтрального технічного прогресу залежить від рівня розвитку технологій у конкретній економічній системі. Коефіцієнт α_1 еластичності виробництва за капіталом показує на скільки відсотків зріс обсяг виробництва, якщо вартість виробничих фондів зросла на 1%, коефіцієнт α_2 еластичності виробництва за працею показує на скільки відсотків зріс обсяг виробництва, якщо вартість витрат на оплату праці зросла на 1%.

Для обчислення α_1 та α_2 можна використати формулу (2.2), згідно з якою маємо:

$$\alpha_1=\frac{\partial(\ln X)}{\partial(\ln K)}=\alpha_K,\ \alpha_2=\frac{\partial(\ln X)}{\partial(\ln L)}=\alpha_L.$$

Якщо $\alpha_1>\alpha_2$, то зростання виробництва є інтенсивним, при $\alpha_1<\alpha_2$ спостерігається екстенсивне зростання.

Розглянемо темп зростання обсягу виробництва у період часу $t+1$ порівняно з періодом часу t:

$$\frac{X_{t+1}}{X_t}=\left(\frac{K_{t+1}}{K_t}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{L_{t+1}}{L_t}\right)^{\alpha_2}.$$

Піднісши обидві частини цієї рівності до степеню $\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}$, знаходимо:

$$\left(\frac{X_{t+1}}{X_t}\right)^{\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}}=\left(\frac{K_{t+1}}{K_t}\right)^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}}\cdot\left(\frac{L_{t+1}}{L_t}\right)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}}.$$

Ввівши позначення $\alpha=\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}$, $\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}=1-\alpha$, отримаємо:

$$\left(\frac{X_{t+1}}{X_t}\right)^{\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}}=\left(\frac{K_{t+1}}{K_t}\right)^{\alpha}\cdot\left(\frac{L_{t+1}}{L_t}\right)^{1-\alpha}. \tag{3.4}$$

У правій частині рівності (3.4) маємо зважену середню геометричну темпів зростання витрат ресурсів, де ваговими коефіцієнтами α та $1-\alpha$ є відносні коефіцієнти еластичності факторів $\dfrac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}$ та $\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}$.

При $\alpha_1+\alpha_2>1$ обсяг виробництва зростає швидше, ніж у середньому зростають фактори виробництва:

$$\frac{X_{t+1}}{X_t}>\left(\frac{X_{t+1}}{X_t}\right)^{\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}}=\left(\frac{K_{t+1}}{K_t}\right)^{\alpha}\cdot\left(\frac{L_{t+1}}{L_t}\right)^{1-\alpha},$$

тобто темп зростання виробництва більший, ніж середній темп зростання факторів. Отже, при $\alpha_1+\alpha_2>1$виробнича функція характеризує зростаючу економічну систему.

3.3 Ізокванти та ізокліналі

Ізоквантою виробничої функції $X=F\left(K,L\right)$ називають лінію рівня цієї функції на координатній площині OKL. Отже, рівняння ізокванти має вигляд: $F\left(K,L\right)=X_0=\text{const}$.

Для мультиплікативної виробничої функції рівняння ізокванти має вигляд:

$$A\cdot K^{\alpha_1}\cdot L^{\alpha_2}=X_0=\text{const}.$$

Звідси знаходимо:

$$K^{\alpha_1}=\frac{X_0}{A\cdot L^{\alpha_2}}=\frac{X_0}{A}L^{-\alpha_2}\Rightarrow K=\left(\frac{X_0}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha_1}}L^{-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}=C\cdot L^{-\lambda},\lambda=\frac{\alpha_2}{\alpha_1}.$$

Отримали рівняння гіперболи, асимптотами якої є осі координат.

Для різних значень K та L, розташованих на одній ізокванти, обсяг виробництва є сталим, тобто тут ресурси K та L заміняють один одного.

Оскільки на ізокванті $F\left(K,L\right)=X_0=\text{const}$, то на цій кривій маємо:

$$dF=\frac{\partial F}{\partial K}dK+\frac{\partial F}{\partial L}dL=0. \tag{3.5}$$

Частинні похідні $\dfrac{\partial F}{\partial K}>0$, $\dfrac{\partial F}{\partial L}>0$, тому у рівності (3.5) диференціали dK та dL мають різні знаки. Якщо $dL<0$, тобто скорочуються витрати праці, то для збереження виробництва на сталому рівні потрібно, щоб витрати капіталу $dK>0$. Зменшення витрат праці на величину $\left|dL\right|$ повинно компенсуватися збільшенням інвестицій у виробничі фонди на величину $\left|dK\right|$.

Відношення модулів диференціалів факторів виробництва називають граничною нормою заміщення одного фактора іншим:

$s_K=\dfrac{\left|dK\right|}{\left|dL\right|}=-\dfrac{dK}{dL}=\dfrac{\partial F/\partial L}{\partial F/\partial K}$ – гранична норма заміщення праці капіталом;

$$s_L = \frac{|dL|}{|dK|} = -\frac{dL}{dK} = \frac{\partial F / \partial K}{\partial F / \partial L}$$ – гранична норма заміщення капіталу працею.

При цьому $s_K \cdot s_L = 1$.

Знайдемо граничні норми заміщення для мультиплікативної виробничої функції.

$$\frac{\partial F}{\partial L} = A \cdot K^{\alpha_1} \cdot \alpha_2 \cdot L^{\alpha_2 - 1}, \ \frac{\partial F}{\partial K} = A \cdot \alpha_1 \cdot K^{\alpha_1 - 1} \cdot L^{\alpha_2}.$$

Тоді $s_K = \dfrac{\partial F / \partial L}{\partial F / \partial K} = \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot \dfrac{K}{L}$, $s_L = \dfrac{\partial F / \partial K}{\partial F / \partial L} = \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} \cdot \dfrac{L}{K}$.

Лінії найбільшого зростання виробничої функції називають її *ізокліналями*. Оскільки напрям найбільшого зростання функції збігається з напрямом її градієнта, а градієнт функції є ортогональним до її ліній рівня, то ізокліналі виробничої функції є ортогональними до її ізоквант.

Градієнт виробничої функції $\operatorname{grad} X = \left(\dfrac{\partial F}{\partial K}, \dfrac{\partial F}{\partial L} \right)$, то рівняння ізокліналі у диференціальній формі можна записати у вигляді:

$$\frac{dK}{\partial F / \partial K} = \frac{dL}{\partial F / \partial L}. \tag{3.6}$$

Знайдемо ізокліналі мультиплікативної виробничої функції. Підставивши вирази для частинних похідних

$$\frac{\partial F}{\partial L} = A \cdot K^{\alpha_1} \cdot \alpha_2 \cdot L^{\alpha_2 - 1} = \alpha_2 \cdot \frac{X}{L}, \ \frac{\partial F}{\partial K} = A \cdot \alpha_1 \cdot K^{\alpha_1 - 1} \cdot L^{\alpha_2} = \alpha_1 \cdot \frac{X}{K}$$

у (3.6), отримаємо диференціальне рівняння:

$$\frac{K \cdot dK}{\alpha_1} = \frac{L \cdot dL}{\alpha_2}.$$

Інтегруючи ліву частину рівняння за змінною K, а праву частину – за змінною L, отримуємо рівняння ізокліналей у вигляді:

$$\frac{K^2}{2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \cdot \frac{L^2}{2} + C \Leftrightarrow K = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2} L^2 + a},$$

де $a = K_0^2 - \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} L_0^2$, (K_0, L_0) – координати точки, через яку проходить ізокліналь.

При $a = 0$ рівняння ізокліналі – це рівняння прямої $K = \sqrt{\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}} \cdot L$.

3.4 Масштаб та ефективність виробництва

Перейдемо у мультиплікативній виробничій функції до безрозмірних величин. Нехай X_0, K_0, L_0 – значення обсягу виробництва та витрат ресурсів (виробничих факторів) у базовому році. Тоді мультиплікативну виробничу функцію у відносних показниках можна записати у наступному вигляді:

$$\frac{X}{X_0} = \left(\frac{K}{K_0}\right)^{\alpha_1} \cdot \left(\frac{L}{L_0}\right)^{\alpha_2}. \tag{3.7}$$

Позначимо $\frac{X}{X_0} = \tilde{X}$, $\frac{K}{K_0} = \tilde{K}$, $\frac{L}{L_0} = \tilde{L}$. Тоді рівність (3.7) можна записати у вигляді:

$$\tilde{X} = \tilde{K}^{\alpha_1} \tilde{L}^{\alpha_2}. \tag{3.8}$$

Знайдемо ефективність економічної системи, діяльність якої описується виробничою функцією (3.8). Під *ефективністю* розуміють відношення результату до витрат, понесених на його отримання. У виробничій функції присутні два види витрат: витрати праці $\tilde{L}$ та витрати капіталу $\tilde{K}$. У відповідності з цим розрізняють два частинних показники ефективності: $\frac{\tilde{X}}{\tilde{K}}$ – *фондовіддача*; $\frac{\tilde{X}}{\tilde{L}}$ – *продуктивність праці*.

Узагальненим показником економічної ефективності є зважена середня геометрична частинних показників, яку називають *коефіцієнтом економічної ефективності*:

$$E = \left(\frac{\tilde{X}}{\tilde{K}}\right)^{\alpha} \cdot \left(\frac{\tilde{X}}{\tilde{L}}\right)^{1-\alpha}, \tag{3.9}$$

де $\alpha = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}$, $1 - \alpha = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$. Вагові коефіцієнти α та $1-\alpha$ називають *відносними еластичностями*.

З допомогою коефіцієнта економічної ефективності виробничу функцію (3.8) можна записати у вигляді:

$$\tilde{X} = E \cdot \tilde{K}^{\alpha} \cdot \tilde{L}^{1-\alpha}. \tag{3.10}$$

У (3.10) коефіцієнт E не є сталою величиною: $E = E\left(\tilde{K}, \tilde{L}\right)$.

Під *масштабом виробництва* M розуміють середню величину витрачених ресурсів:

$$M = \tilde{K}^{\alpha} \cdot \tilde{L}^{1-\alpha}. \tag{3.11}$$

З (3.10) та (3.11) випливає, що обсяг виробництва $\tilde{X}$ дорівнює добутку коефіцієнта економічної ефективності на масштаб виробництва.

3.5 Однорідні виробничі функції. Виробничі функції зі сталою еластичністю

Виробничу функцію $X = F\left(K, L\right)$ називають *однорідною виробничою функцією степеня* γ, якщо

$$F\left(\lambda K, \lambda L\right) = \lambda^{\gamma} F\left(K, L\right). \tag{3.12}$$

Наприклад, мультиплікативна виробнича функція є однорідною виробничою функцією степеня $\gamma = \alpha_1 + \alpha_2$, оскільки

$$F(\lambda K, \lambda L) = A\lambda^{\alpha_1} K^{\alpha_1} \lambda^{\alpha_2} L^{\alpha_2} = \lambda^{\alpha_1+\alpha_2} AK^{\alpha_1} L^{\alpha_2} = \lambda^{\alpha_1+\alpha_2} F(K, L).$$

Отримаємо вираз для граничної норми s_K заміщення праці капіталом для однорідної виробничої функції. У цьому випадку $F(K,L) = L^\gamma \cdot F\left(\frac{K}{L}, 1\right) = L^\gamma f(k)$, де $k = \frac{K}{L}$ – фондоозброєність, $f(k) = F\left(\frac{K}{L}, 1\right)$. Знайдемо частинні похідні $\frac{\partial F}{\partial L}$ та $\frac{\partial F}{\partial K}$. Враховуючи, що $k = \frac{K}{L}$, знаходимо:

$$\frac{\partial F}{\partial L} = \gamma \cdot L^{\gamma-1} f(k) - L^\gamma f'(k) \cdot \frac{K}{L^2} = L^{\gamma-1}\left(\gamma f(k) - k \cdot f'(k)\right),$$

$$\frac{\partial F}{\partial K} = L^\gamma \cdot f'(k) \cdot \frac{1}{L} = L^{\gamma-1} f'(k).$$

Отже, гранична норма заміщення праці капіталом має вигляд:

$$s_K = \frac{\partial F / \partial L}{\partial F / \partial K} = \frac{\gamma \cdot f(k)}{f'(k)} - k. \quad (3.13)$$

Отже, гранична норма s_K заміщення праці капіталом є функцією лише фондоозброєності.

Для однорідних виробничих функцій вводиться поняття еластичності заміщення праці капіталом:

$$\sigma_K = \frac{dk / k}{ds_K / s_K}. \quad (3.14)$$

Ця величина вказує, на скільки % потрібно змінити фондоозброєність, щоб досягти зміни граничної норми заміщення праці капіталом на 1%. Аналогічно вводиться поняття еластичності σ_L заміщення капіталу працею. Можна показати, що $\sigma_K = \sigma_L = \sigma$. Покажемо, що для мультиплікативних виробничих функцій $\sigma = 1$. У цьому випадку обсяг виробництва $X = F(K,L) = A \cdot K^{\alpha_1} \cdot L^{\alpha_2}$, $\frac{\partial F}{\partial K} = \alpha_1 \frac{X}{K}$, $\frac{\partial F}{\partial L} = \alpha_2 \frac{X}{L}$, $s_K = \frac{\partial F / \partial L}{\partial F / \partial K} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} k$, $k = \frac{K}{L}$, $\frac{ds_K}{dk} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$, $\sigma_K = \frac{dk}{k} \cdot \frac{s_k}{ds_K} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \cdot \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = 1$.

Виробничі функції, для яких еластичність заміщення є сталою ($\sigma = \mathrm{const}$), називають CES – функціями.

Оскільки у цьому випадку $\sigma = \frac{dk / k}{ds / s} = \mathrm{const}$, то маємо: $\frac{ds}{s} = \frac{dk}{\sigma \cdot k} \Rightarrow \ln s = \frac{1}{\sigma} \ln k + \ln C$. З останньої рівності знаходимо, що гранична норма заміщення у даному випадку має вигляд: $s = C \cdot k^{\frac{1}{\sigma}}$, де C – стала.

Підставивши отриманий вираз для s у (3.13), знайдемо вираз для CES – функції. Маємо: $C\cdot k^{\frac{1}{\sigma}}=\dfrac{\gamma\cdot f(k)}{f'(k)}-k$. Звідси знаходимо, що $\dfrac{f'(k)}{f(k)}=\dfrac{\gamma}{Ck^{\frac{1}{\sigma}}+k}$. Інтегруючи обидві частини останньої рівності, отримуємо (C_1 – стала інтегрування):

$$\ln f=\frac{\gamma\sigma}{\sigma-1}\ln\left(C_1\left(C+k^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)\right).$$

Звідси вираз для $f(k)$ має вигляд:

$$f(k)=C_1\left(k^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}+C\right)^{\frac{\gamma\sigma}{\sigma-1}}.$$

Враховуючи, що $k=\dfrac{K}{L}$, $f=\dfrac{X}{L^{\gamma}}$, знаходимо вираз для виробничої CES – функції у вигляді:

$$X=C_1\left(K^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}+CL^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)^{\frac{\gamma\sigma}{\sigma-1}}.$$

Ввівши позначення $\rho=\dfrac{1-\sigma}{\sigma}$, $\dfrac{1}{C+1}=\alpha<1$, $C_1(C+1)^{-\frac{1}{\rho}}=A$, отримуємо вираз для CES – функції через K та L у вигляді:

$$X=F(K,L)=A\cdot\left(\alpha K^{-\rho}+(1-\alpha)L^{-\rho}\right)^{\frac{\gamma}{\rho}}. \tag{3.15}$$

При $\gamma=1$ та $\sigma\to1$ CES – функція прямує до виробничої функції Кобба – Дугласа.

Крім розглянутої мультиплікативної виробничої функції у економічних дослідженнях часто зустрічаються <u>*лінійна виробнича функція*</u> $X=A\cdot K+B\cdot L$, а також <u>*виробнича функція типу «витрати – випуск»*</u> $X=\min\left\{\dfrac{K}{A},\dfrac{L}{B}\right\}$, де A та B – відомі константи.

Ввівши у мультиплікативну виробничу функцію множник $e^{\lambda t}$, де λ – темп зростання функції за рахунок інтенсивних факторів (вдосконалення технології, підвищення кваліфікації працівників тощо), отримуємо <u>*виробничу функцію Тінбергена*</u>: $X=A\cdot K^{\alpha}\cdot L^{\beta}\cdot e^{\lambda t}$. При дослідженнях впливу факторів виробництва на його обсяг зустрічаються також інші типи виробничих функцій.

3.6 Побудова виробничих функцій. Метод найменших квадратів (МНК).

Для побудови виробничих функцій використовують статистичні дані про обсяги та фактори виробництва. Розглянемо найпростіший випадок, коли виробнича функція визначає залежність обсягу виробництва y лише від одного фактора виробництва x, тобто вона має вигляд $y=y(x)$. Припускається, що між змінними y та x існує зв’язок, на який накладається дія випадкових факторів, тобто між цим змінними існує статистичний зв’язок. Наявність такого зв’язку проявляється у тому, що зміна значень однієї змінної приводить до зміни математичного сподівання іншої змінної. Формулу $\tilde{y} = \tilde{y}(x)$, що встановлює статистичний зв’язок між змінними y та x, називають *рівнянням регресії*. Найбільш простою є лінійна регресія, що описується рівнянням $\tilde{y} = a_0 + a_1 x$.

Основним методом побудови рівнянь регресії є *метод найменших квадратів* (МНК). Спочатку встановлюється критерій близькості між точками (x_i, y_i), встановленими у результаті спостереження, та точками $(x_i, a_0 + a_1 x_i)$, ординати яких обчислюються за рівнянням лінійної регресії $\tilde{y} = a_0 + a_1 x$:

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - a_0 - a_1 x_i \right)^2 \to \min. \qquad (3.16)$$

У (3.16) a_0 та a_1 – невідомі параметри рівняння лінійної регресії, тобто досліджуємо на мінімум функцію (3.16) двох змінних a_0 та a_1. Застосування необхідної умови екстремуму цієї функції – рівності нулю її частинних похідних дозволяє отримати систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих параметрів регресії a_0 та a_1:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} y_i - n a_0 - a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i - a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0. \end{cases} \qquad (3.17)$$

Введемо позначення: $\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$, $\overline{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i$. Розв’язавши систему (3.17), отримаємо значення параметрів регресії:

$$a_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\overline{x} \cdot \overline{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\left(\overline{x}\right)^2}, \quad a_0 = \overline{y} - a_1 \overline{x}. \qquad (3.18)$$

Приклад. Маємо статистичні дані про вартість x основних виробничих фондів підприємств галузі та валовим річним обсягом y виробництва на цих підприємствах, наведених у таблиці 3.1. Знайти виробничу функцію для даної галузі у вигляді рівняння лінійної регресії $\tilde{y} = a_0 + a_1 x$.

Розв’язання. Для знаходження параметрів a_0 та a_1.рівняння лінійної регресії використаємо дані таблиці 3.1 та формули (3.18). підставивши дані таблиці у формули (3.18), отримуємо:

Таблиця 3.1. Статистичні дані про вартість x основних виробничих фондів підприємств галузі та валовим річним обсягом y виробництва на цих підприємствах

Вартість основних виробничих фондів x, млн. г.о.	Валовий річний обсяг виробництва y, млн. г.о.	x^2	xy	$\tilde{y} = a_0 + a_1 x$
12	28	144	336	15
16	40	256	640	24
25	38	625	950	43
38	65	1444	2470	70
43	80	1849	3440	81
55	101	3025	5555	106
60	95	3600	5700	117
80	125	6400	10000	159
91	183	8281	16653	183
100	245	10000	24500	202
$\sum = 520$	$\sum = 1000$	$\sum = 35624$	$\sum = 70244$	$\sum = 1000$

$a_0 = -10,24$, $a_1 = 2,12$. Рівняння лінійної регресії має вигляд: $\tilde{y} = -10,24 + 2,12 \cdot x$. Значення $\tilde{y}$ для відповідних значень x наведено у останньому стовпці таблиці 3.1.

3.7 Побудова нелінійних моделей

Для моделювання зв'язку між змінними x та y можна використовувати нелінійні залежності, наприклад, _параболу другого порядку_ $\tilde{y} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, _гіперболу_ $\tilde{y} = a_0 + \dfrac{a_1}{x}$, _показникову функцію_ $\tilde{y} = a_0 \cdot a_1^x$, _логарифмічну функцію_ $\tilde{y} = a_0 + a_1 \ln x$, _логістичну криву_ $\tilde{y} = \dfrac{b}{1 + e^{a_0 + a_1 x}}$ тощо. Всі наведені тут залежності є лінійними за своїми параметрами або такими, що зводяться до лінійних. Для залежностей, що є лінійними за своїми параметрами, можна безпосередньо застосувати МНК та мінімізувати суму квадратів відхилень:

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \tilde{y}\left(x_i, a_0, a_1, ..., a_k \right) \right)^2 \to \min . \tag{3.19}$$

Параметри регресії a_0, a_1, …, a_k знаходимо з необхідної умови екстремуму функції $Q\left(a_0, a_1, ..., a_k\right)$:

$$\frac{\partial Q}{\partial a_i} = 0, i = 1, 2, ..., k. \tag{3.20}$$

Для визначення коефіцієнтів a_0, a_1, a_2 параболи $\tilde{y} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ з (3.20) отримуємо систему лінійних рівнянь МНК:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} y_i - na_0 - a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i - a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i - a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i - a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 - a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^4 = 0. \end{cases} \qquad (3.21)$$

Рівняння МНК для отримання коефіцієнтів a_0, a_1 гіперболічної регресійної залежності $\tilde{y} = a_0 + \frac{a_1}{x}$ знайдемо, замінивши у системі (3.17) рівнянь для коефіцієнтів лінійної регресії x на $\frac{1}{x}$:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} y_i - na_0 - a_1 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{x_i} - a_0 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} - a_1 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2} = 0. \end{cases} \qquad (3.22)$$

Для визначення параметрів a_0, a_1 показникової залежності $\tilde{y} = a_0 \cdot a_1^x$ її попередньо логарифмують: $\ln \tilde{y} = \ln a_0 + x \cdot \ln a_1$. Ввівши позначення $\alpha_0 = \ln a_0$, $\alpha_1 = \ln a_1$, $z = \ln \tilde{y}$, отримаємо систему рівнянь для визначення невідомих параметрів α_0 та α_1:

$$\begin{cases} n\alpha_0 + \alpha_1 \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} z_i, \\ \alpha_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + \alpha_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i z_i. \end{cases} \qquad (3.23)$$

Тут $z_i = \ln y_i$. З (3.23) знаходимо α_0 та α_1, далі $a_0 = e^{\alpha_0}$, $a_1 = e^{\alpha_1}$.

Зв'язок між змінними x та y вимірюється через їх кореляцію. Виміряти кореляцію між змінними x та y – означає визначити, наскільки зміна y залежить від зміни x. Для кількісної оцінки кореляції між показниками x та y використовують *лінійний коефіцієнт кореляції*:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{\sqrt{\left(n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right)\left(n\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2\right)}}.$$

Лінійний коефіцієнт кореляції $r \in [-1; 1]$. При $r = 0$ лінійна залежність між змінними x та y відсутня. При наближенні $|r|$ до 1 залежність $y(x)$ стає близькою до лінійної. При $r > 0$ збільшення x супроводжується збільшенням y, при $r < 0$ характер залежності є протилежним: зростання x супроводжується спаданням y.

3.8 Лінійна множинна регресія

Значення економічних величин здебільшого визначаються впливом не одного, а кількох факторів, тобто розглядається модель деякої економічної величини y у вигляді функції m незалежних змінних $x_1, x_2, ..., x_m$: $\tilde{y} = f\left(x_1, x_2, ..., x_m\right)$.

Розглянемо модель лінійної залежності: $\tilde{y} = a_0 + a_1 x_1 + ... + a_m x_m$, тобто *лінійну множинну регресію*. Відхилення значення y_i залежної змінної у i-му спостереженні, $i = 1, 2, ..., n$. від значення $\tilde{y}_i$, знайденого при значеннях x_{i1}, x_{i2},…, x_{im}, позначимо ε_i:

$$\varepsilon_i = y_i - a_0 - a_1 x_{i1} - a_2 x_{i2} - ... - a_m x_{im} = y_i - a_0 - \sum_{j=1}^{n} a_j x_{ij} .$$

У відповідності з МНК параметри a_0, a_1,…, a_m лінійної моделі знаходять так, щоб сума $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = Q \to \min$, тобто:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - a_0 - \sum_{j=1}^{n} a_j x_{ij} \right)^2 \to \min . \qquad (3.24)$$

Функція Q, що мінімізується, є квадратичною відносно величин a_j, $j = 0, 1, 2, ..., n$. Необхідною умовою її мінімуму є рівність нулю всіх її частинних похідних за a_j. Частинні похідні квадратичної функції є лінійними функціями, тому, прирівнюючи їх до нуля, отримуємо систему $m+1$ лінійних алгебраїчних рівнянь з $m+1$ невідомими a_0, a_1,…, a_m. Розглянемо задачу визначення цих коефіцієнтів у матричній формі.

Суму квадратів відхилень ε_i можна записати у вигляді добутку вектора – рядка $\varepsilon^T = \left(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n\right)$ на вектор – стовпчик ε. Цей вектор – стовпчик можна записати у вигляді: $\varepsilon = y - X \cdot a$, де y – вектор – стовпчик значень y, $y^T = \left(y_1, y_2, ..., y_n\right)$, a – вектор – стовпчик коефіцієнтів моделі, $a^T = \left(a_0, a_1, .., a_m\right)$, X – матриця розмірності $n \times (m+1)$, у якій кожен з n рядків – це спостереження вектора значень незалежної змінної:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & ... & x_{1m} \\ 1 & x_{21} & ... & x_{2m} \\ . & . & . & . \\ 1 & x_{n1} & ... & x_{nm} \end{pmatrix}$$

Тоді $Q = \varepsilon^T \cdot \varepsilon = \left(y - Xa\right)^T \left(y - Xa\right) = \left(y^T - a^T X^T\right)^T \left(y - Xa\right) = y^T y -$
$-a^T X^T y - y^T Xa + a^T X^T Xa = y^T y - 2a^T X^T y + a^T X^T Xa.$

Тут при перетвореннях було використано рівність $a^T X^T y = y^T Xa$. Тоді з рівності $\frac{\partial Q}{\partial a} = -2X^T y + 2\left(X^T X\right)a = 0$. Звідси знаходимо невідомий вектор коефіцієнтів множинної лінійної регресії у вигляді:

$$a = \left(X^T X\right)^{-1} X^T y. \qquad (3.25)$$

Формулу (3.25) використовують для розрахунку коефіцієнтів лінійної множинної регресії.

Практичне заняття № 5. Виробничі функції

Задача 1. Для лінійної виробничої функції $X = a \cdot K + b \cdot L$, $a > 0$, $b > 0$, побудувати ізокванти та ізокліналі. Знайти норми заміщення праці капіталом s_K та капіталу працею s_L.

Розв'язання. Знайдемо рівняння ізоквант: $X = X_0 = \text{const}$. Звідси отримуємо:

$$a \cdot K + b \cdot L = X_0 \Rightarrow L = \frac{1}{b}\left(X_0 - aK\right) = c - \frac{a}{b}K, \; c = \text{const}.$$

Таким чигом, рівняння ізоквант має вигляд: $L = c - \frac{a}{b}K$. Це сімейство паралельних прямих з кутовим коефіцієнтом $-\frac{a}{b}$.

Рівняння ізокліналей у диференціальній формі має вигляд: $\frac{dK}{\partial F/\partial K} = \frac{dL}{\partial F/\partial L}$, де $F\left(K, L\right) = a \cdot K + b \cdot L$. Тоді $\frac{\partial F}{\partial K} = a$, $\frac{\partial F}{\partial L} = b$ і рівняння ізокліналей набувають вигляду: $\frac{dK}{a} = \frac{dL}{b}$, звідки $a \cdot dL - b \cdot dK = 0$ або $aL - bK = C \Rightarrow L = \frac{b}{a}K + C_1$, $C_1 = \text{const}$ – довільна стала. Отже, рівняння ізокліналей – це рівняння паралельних прямих з кутовим коефіцієнтом $\frac{b}{a}$. Ізокванти ортогональні ізокліналям.

Норма заміщення праці капіталом $s_K = \frac{\partial F/\partial L}{\partial F/\partial K} = \frac{b}{a}$, норма заміщення капіталу працею $s_L = \frac{\partial F/\partial K}{\partial F/\partial L} = \frac{a}{b} = \frac{1}{s_K}$.

Задача 2. Визначити граничну фондовіддачу та граничну продуктивність праці у економічній системі, функціонування якої описується виробничою функцією $X = F\left(K, L\right) = 1500 \cdot K^{0,3} \cdot L^{0,7}$, якщо вартість основних виробничих фондів $K = 3200$ у.г.о., витрати на оплату праці $L = 1000$ у.г.о.

Розв'язання. Гранична фондовіддача $\frac{\partial F}{\partial K} = 1500 \cdot 0,3 \cdot K^{-0,7} \cdot L^{0,7} = 450 \cdot \left(\frac{L}{K}\right)^{0,7}$. При $K = 3200$, $L = 1000$ $\frac{\partial F}{\partial K} = 450 \cdot \left(\frac{5}{16}\right)^{0,7} \approx 199,346$. Гранична продуктивність праці $\frac{\partial F}{\partial L} = 1500 \cdot 0,7 \cdot K^{0,3} \cdot L^{-0,3} = 1050 \cdot \left(\frac{K}{L}\right)^{0,3}$. При $K = 3200$, $L = 1000$ гранична продуктивність праці $\frac{\partial F}{\partial L} = 1050 \cdot (3,2)^{0,3} \approx 1488,45$.

Задача 3. Для виробничої функції $X = 1200 \cdot K^{0,4} \cdot L^{0,6}$ визначити еластичність виробництва за працею та за капіталом.

Розв'язання. Еластичність виробництва за капіталом $E_K = \frac{\partial(\ln X)}{\partial(\ln K)}$, еластичність виробництва за працею $E_L = \frac{\partial(\ln X)}{\partial(\ln L)}$. Для заданої виробничої функції $\ln X = \ln 1200 + 0,4 \ln K + 0,6 \ln L$. Тоді $E_K = 0,4$, $E_L = 0,6$.

Задача 4. Виробнича функція має вигляд: $X = 0,931 \cdot K^{0,539} \cdot L^{0,594}$. За деякий період часу обсяг виробництва збільшився у 4,08 рази, основні виробничі фонди – у 6,62 рази, кількість працівників – у 1,79 рази. Яка частина зростання обсягу виробництва пояснюється зростанням його масштабу, а яка – зростанням його ефективності?

Розв'язання. Запишемо задану мультиплікативну виробничу функцію у безрозмірних величинах. Отримуємо: $\tilde{X} = \tilde{K}^{0,539} \cdot \tilde{L}^{0,594}$, де $\tilde{X} = \frac{X}{X_0}$, $\tilde{K} = \frac{K}{K_0}$, $\tilde{L} = \frac{L}{L_0}$ – відношення значень відповідних показників у періоді часу, що є об'єктом дослідження, до їх значень у базовому періоді часу, тобто $\tilde{X} = 4,08$, $\tilde{K} = 6,62$, $\tilde{L} = 1,79$. Тоді $\tilde{X} = E \cdot M$, де M – масштаб виробництва, E – його економічна ефективність. Масштаб виробництва (середню вартість витрачених ресурсів) визначаємо за формулою $M = \tilde{K}^{\alpha} \cdot \tilde{L}^{1-\alpha}$, де $\alpha = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}$, $\alpha_1 = 0,539$, $\alpha_2 = 0,594$. Тоді $\alpha = \frac{0,539}{0,539 + 0,594} = 0,476$. Обчислимо масштаб виробництва: $M = 6,62^{0,476} \cdot 1,79^{(1-0,476)} = 2,459 \cdot 1,356 = 3,336$. Знаходимо економічну ефективність виробництва: $E = \frac{\tilde{X}}{M} = \frac{4,08}{3,336} = 1,223$. Отже, обсяг виробництва збільшився у 3,336 рази за рахунок зростання масштабу виробництва та у 1,223 рази – за рахунок підвищення його економічної ефективності.

Задача 5. Записати рівняння ізокліналей для виробничої функції з попереднього прикладу.

Розв'язання. Задана виробнича функція має вигляд $X = 0,931 \cdot K^{0,539} \cdot L^{0,594}$. Диференціальне рівняння ізокліналей:

$$\frac{dK}{\partial F/\partial K} = \frac{dL}{\partial F/\partial L}.$$

Знайдемо частинні похідні $\frac{\partial F}{\partial K}$ та $\frac{\partial F}{\partial L}$:

$$\frac{\partial F}{\partial K} = 0,931 \cdot 0,539 \cdot K^{0,539-1} \cdot L^{0,594} = 0,502 \cdot K^{-0,461} \cdot L^{0,594} \;;$$

$$\frac{\partial F}{\partial L} = 0,931 \cdot 0,594 \cdot K^{0,539} \cdot L^{0,594-1} = 0,553 \cdot K^{0,539} \cdot L^{-0,406} \;.$$

Підставивши знайдені частинні похідні у диференціальне рівняння ізокліналей, отримуємо:

$$\frac{dK \cdot K^{0,461}}{0,502 \cdot L^{0,594}} = \frac{dL \cdot L^{0,406}}{0,553 \cdot K^{0,539}}.$$

Звідси, розділивши змінні, знаходимо:

$$0,502 \cdot L \cdot dL = 0,553 \cdot K \cdot dK.$$

Інтегруємо ліву частину останньої рівності по змінній L, праву – по K:

$$0,502 \cdot \frac{L^2}{2} = 0,553 \cdot \frac{K^2}{2} + C.$$

Запишемо цю рівність у вигляді: $\frac{L^2}{0,553} - \frac{K^2}{0,502} = C^2$. Отримали рівняння сімейства гіпербол, що є ізокліналями заданої виробничої функції.