4. Максимізація корисності та модель споживчого вибору

4.1 Функція корисності та задача споживчого вибору

Нехай споживач має дохід J, який він повністю витрачає на придбання деяких товарів чи послуг. Ціни цих товарів вважаються заданими. Враховуючи структуру цін, величину доходу та власні уподобання, споживач придбає певну кількість товарів (послуг). Математичну модель поведінки споживача називають моделлю споживчого вибору.

Розглянемо модель з двома видами товарів, тобто будемо вважати, що кількість товарів, придбаних споживачем, визначається вектором $\left(x_1, x_2\right)$, де x_i – кількість одиниць i-го товару, придбаних споживачем, $i=1,2$.

Вибір споживача характеризують *відношенням переваги*, суть якого полягає у наступному. Вважається, що споживач може вибрати з двох наборів товарів, $A=\left(a_1,a_2\right)$ та $B=\left(b_1,b_2\right)$, більш бажаний, або споживач не бачить між ними різниці. Якщо набір товарів $A=\left(a_1,a_2\right)$ є більш бажаним порівняно з набором $B=\left(b_1,b_2\right)$, то використовують позначення $A \succ B$. Якщо $A \prec B$, то набір B є більш бажаним, ніж A. Якщо $A \sim B$, то набори є рівноцінними для споживача.

Відношення переваги має властивості транзитивності та ненасиченості. Нехай $A=\left(a_1,a_2\right)$, $B=\left(b_1,b_2\right)$, $C=\left(c_1,c_2\right)$. Тоді:

1) $A \succ B \wedge B \succ C \Rightarrow A \succ C$ – властивість транзитивності;
2) $a_1 > b_1 \wedge a_2 > b_2 \Rightarrow A \succ| B$ – властивість ненасиченості.

На множині споживчих наборів $\left(x_1,x_2\right)$ визначають функцію $u\left(x_1,x_2\right)$,яку називають *функцією корисності* споживача. Її значення $u\left(x_1,x_2\right)$ на споживчому наборі $\left(x_1,x_2\right)$ дорівнює оцінці цього набору споживачем (рівню задоволення потреб споживача даним набором). Кожний споживач має власну функцію корисності. Якщо набір товарів $A=\left(a_1,a_2\right)$ є більш бажаним для споживача, ніж набір $B=\left(b_1,b_2\right)$, то $u\left(a_1,a_2\right) > u\left(b_1,b_2\right)$, тобто $A \succ B \Rightarrow u\left(A\right) > u\left(B\right)$.

У теорії споживчого вибору вважається, що функція корисності має наступні властивості:

1) $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} > 0, i=1,2$ – зі зростанням споживання товару його корисність зростає;

2) $\lim\limits_{x_i \to 0} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} = \infty$ – невеликий приріст споживання товару при його початковій відсутності суттєво збільшує його корисність;

3) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial {x_i}^2} < 0$, $i=1,2$ – зі зростанням споживання товару швидкість зростання його корисності сповільнюється;

4) $\lim\limits_{x_i \to \infty} \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0$ – при дуже високому рівню споживання товару його подальше збільшення не приводить до збільшення корисності.

Аналогічні поняття та властивості можна визначити для наборів з n товарів чи послуг $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, на яких визначають функцію корисності $u(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Частинну похідну $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ називають *граничною корисністю* i-го товару.

Лінію рівня $u(x_1, x_2) = c = \text{const}$ на площині Ox_1x_2 називають *лінією байдужості*. Для наборів $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ n товарів розглядають *поверхні байдужості* $u(x_1, x_2, ..., x_n) = c = \text{const}$, на яких корисність наборів товарів є сталою. Множину всіх ліній (поверхонь) байдужості називають *картою байдужості*.

Рівняння поверхні байдужості можна записати у диференціальній формі. Оскільки на такій поверхні функція корисності є сталою, то

$$du = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx_i = 0. \qquad (4.1)$$

Умова (4.1) означає, що дотична до поверхні байдужості ортогональна до градієнта функції корисності. З точки зору споживача наявність множини наборів товарів, що мають однакову корисність, означає можливість заміни одного набору товарів рівноцінним йому іншим набором.

Нехай у (4.1) $dx_3 = dx_4 = ... = dx_n = 0$, тоді $\frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 = 0$. Звідси знаходимо:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\partial u / \partial x_1}{\partial u / \partial x_2}. \qquad (4.2)$$

Відношення $\frac{dx_2}{dx_1}$ називають граничною нормою заміни першого товару другим. Вона дорівнює відношенню граничних корисностей першого та другого товарів і показує, скільки потрібно одиниць другого товару, щоб замінити одиницю першого товару.

Бюджетною множиною називають множину наборів товарів, які може придбати споживач, що має певний сталий доход J. Якщо $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ – набор товарів, $P = (p_1, p_2, ..., p_n)$ – вектор – рядок відповідних значень цін, то бюджетна множина $B = \{X : P \cdot X \le J\}$.

4.2 Модель поведінки споживача

Споживач намагається максимізувати свою функцію корисності за умови обмеженості доходу; $u(X) \to \max, X \in B$. За умови використання всього доходу J на придбання наборів товарів споживачу потрібно визначити $\max\limits_{P \cdot X = J} u(X)$. Маємо задачу на умовний екстремум за наявності обмеження $P \cdot X = J$. Вона зводиться до знаходження безумовного екстремуму функції Лагранжа

$$L(X) = u(X) + \lambda(J - P \cdot X), \tag{4.3}$$

де $\lambda = \text{const}$ – множник Лагранжа.

Необхідні умови екстремуму функції (4.3) мають вигляд: $\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, i = 1, 2, ..., n$, $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$. Звідси отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_i} - \lambda p_i = 0,\ i = 1, 2, ..., n; \\ \sum\limits_{j=1}^{n} p_j x_j = J. \end{cases} \tag{4.4}$$

Система (4.4) – це система $n+1$ рівнянь з $n+1$ невідомими $x_1, x_2, ..., x_n, \lambda$. Можна довести, що її розв'язками є координати точки максимуму функції Лагранжа (4.3).

З системи (4.4) випливає, що споживач при фіксованому сталому рівні доходу вибирає оптимальний набір $X^* = \left(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*\right)$ – розв'язок цієї системи таким чином, що у точці X^* відношення граничних корисностей дорівнюють відношенням цін:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} : \frac{\partial u}{\partial x_2} : ... : \frac{\partial u}{\partial x_n} = p_1 : p_2 : ... : p_n.$$

Розв'язавши систему (4.4) відносно координат вектора X^*, отримаємо <u>*функцію індивідуального попиту*</u> у вигляді рівностей $x_i^* = x_i^*\left(p_1, p_2, ..., p_n, J\right)$, $i = 1, 2, ..., n$.

Нехай $P = \left(p_1, p_2, ..., p_n\right)$ – вектор цін на набір товарів $X = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$, J – доход споживача. Функцію $D(P, J)$, що ставить у відповідність парі (P, J) набір товарів X^*, що надає споживачу максимальну корисність при цінах P та доході J, називають <u>*функцією індивідуального попиту*</u>.

Конкретна форма функції індивідуального попиту

$$X^* = \left(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*\right) = D\left(\left(p_1, p_2, ..., p_n\right), J\right)$$

визначається шляхом розв'язання задачі оптимізації функції Лагранжа (4.3) або шляхом статистичної обробки результатів опитувань споживачів.

Функція індивідуального попиту є неперервною та двічі диференційовною за своїми аргументами. Вона є також однорідною функцією нульового степеню, тобто $D(\lambda P, \lambda J) = D(P, J)$.

4.3 Залежність попиту споживача від зміни доходу

Функцію індивідуального попиту визначають як розв'язок системи (4.4). Розглянемо випадок, коли доход J є змінною величиною, а ціни $p_1, p_2, ..., p_n$ є фіксованими. Тоді компоненти векторної функції D індивідуального попиту $x_j^* = D_j(J)$ залежать лише від змінної J, а їх похідні по J описують характер зміни попиту при зміні доходу. Диференціюючи рівняння (4.4)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} - \lambda p_i = 0, \ i = 1, 2, ..., n; \\ \sum\limits_{j=1}^{n} p_j x_j = J. \end{cases}$$

за змінною J і вважаючи при цьому $x_i = x_i(J)$, $i = 1, 2, ..., n$, $\lambda = \lambda(J)$, отримаємо:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \dfrac{\partial x_j}{\partial J} - p_i \dfrac{\partial \lambda}{\partial J} = 0, i = 1, 2, ..., n; \\ \sum\limits_{j=1}^{n} p_j \dfrac{\partial x_j}{\partial J} = 1. \end{cases} \tag{4.5}$$

Нехай $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = u_{ij}$. Запишемо систему (4.5) у вигляді:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} u_{ij} \cdot \dfrac{\partial x_j}{\partial J} - p_i \dfrac{\partial \lambda}{\partial J} = 0, i = 1, 2, ..., n; \\ \sum\limits_{j=1}^{n} p_j \dfrac{\partial x_j}{\partial J} = 1. \end{cases} \tag{4.6}$$

Якщо функція корисності u є відомою, а ціни p_i, $i = 1, 2, ..., n$ – задані, то система (4.6) – це система лінійних алгебраїчних рівнянь відносно похідних $\dfrac{\partial x_j}{\partial J}$ функцій індивідуального попиту на i-й товар у точці $X^*(J)$. Запишемо цю систему у матричній формі:

$$
\begin{pmatrix}
u_{11}\ u_{12}\ \dots u_{nn} - p_1 \\
u_{21}\ u_{22}\ \dots u_{2n} - p_2 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
u_{n1}\ u_{n2}\ \dots u_{nn} - p_n \\
p_1\ p_2\ \dots\ p_n \quad 0
\end{pmatrix}
\cdot
\begin{pmatrix}
\frac{\partial x_1}{\partial J} \\
\frac{\partial x_2}{\partial J} \\
\dots \\
\frac{\partial x_n}{\partial J} \\
\frac{\partial \lambda}{\partial J}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1
\end{pmatrix}
\qquad (4.7)
$$

Якщо визначник системи (4.7) не дорівнює нулю, її розв’язок – вектор $\left(\frac{\partial x_1}{\partial J},\frac{\partial x_2}{\partial J},\dots,\frac{\partial x_n}{\partial J},\frac{\partial \lambda}{\partial J}\right)$ можна знайти за формулами Крамера. Компоненти цього вектора відображають реакцію споживача на зміну доходу.

4.4 Залежність попиту від зміни цін

Компоненти вектор – функції індивідуального попиту $D_i\left(P,J\right)$, як і у попередньому випадку визначаються з системи рівнянь (4.4). Частинні похідні $\frac{\partial x_i}{\partial p_k}$ можна знайти, диференціюючи ці рівняння по p_k. Позначивши $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = u_{ij}$, у результаті отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно похідних $\frac{\partial x_i}{\partial p_k}$:

$$
\begin{cases}
\sum\limits_{j=1}^{n} u_{ij} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial p_k} - \frac{\partial \lambda}{\partial p_k} \cdot p_i = \lambda \cdot \delta_{ik},\ i = 1,2,\dots,n; \\
\sum\limits_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial x_j}{\partial p_k} = -p_k.
\end{cases}
\qquad (4.8)
$$

Знаходячи ці невідомі величини за формулами Крамера, маємо:

$$
\frac{\partial x_j}{\partial p_k} = \lambda \cdot \frac{\Delta_{kj}}{\Delta} - x_k \cdot \frac{\partial x_j}{\partial J},\ j = 1,2,\dots,n;\ k = 1,2,\dots,n. \qquad (4.9)
$$

У формулах (4.9) Δ – визначник системи (4.8), Δ_{kj} – визначник, який отримуємо з визначника Δ викреслюванням k-го рядка та j-го стовпця. Рівняння (4.9) називають рівнянням Слуцького. З нього випливає, що при зміні ціни k-го товару на малу величину зміна попиту на j-й товар формується як сума двох факторів: ефектів заміщення та доходу. Другий доданок у правій частині (4.9), що дорівнює $-x_k \cdot \frac{\partial x_j}{\partial J}$, називають *ефектом доходу*. Він описує зміну доходу споживача, викликану зміною ціни k-го товару. Перший доданок у правій частині (4.9), що дорівнює $\lambda \cdot \frac{\Delta_{kj}}{\Delta} = c_{kj}$ називають <u>*коефіцієнтом Слуцького*</u>. Він характеризує вплив зміни ціни на викликану цією зміною заміну товарів при придбанні. При зниженні ціни на k-й товар відбувається зростання доходу споживача, частина якого розподіляється на придбання інших товарів. Матриця коефіцієнтів Слуцького є симетричною: $c_{kj} = c_{jk}$. Діагональні коефіцієнти цієї матриці характеризують чистий ефект заміщення та відображають швидкість зміни попиту на k-й товар при малих змінах його ціни та доходу споживача. Ця зміна попиту відбувається таким чином, що корисність вибору споживачем набору товарів залишається незмінною.

Напрям зміни попиту на j-й товар при зміні ціни k-го товару визначається знаком коефіцієнта Слуцького c_{kj}. Якщо $c_{kj} > 0$, то k-й та j-й товари замінюють один одного, при $c_{kj} < 0$ доповнюють один одного, при $c_{kj} = 0$ – є незалежними.

Практичне заняття №5. Аналіз функцій попиту та споживання

Функція попиту відображає залежність попиту $\overline{q} = (q_1, q_2, ..., q_n)$ на деякий набір n товарів від цін на товари цього набору: $q_i = q_i(p_1, p_2, ..., p_n)$, $i = 1, 2, ..., n$. Тут q_i – попит на i-й товар, p_i – його ціна. Функція попиту є вектор – функцією.

Функція споживання описує спільне споживання товарів з деякого набору. Її значення $U = U(q_1, q_2, ..., q_n)$ дорівнює загальним витратам на придбання товарів з набору, функція попиту якого має вигляд: $\overline{q} = (q_1, q_2, ..., q_n)$. Функція споживання є скалярною функцією. Довільна функція n змінних $U = U(q_1, q_2, ..., q_n)$ може бути функцією споживання, якщо вона є опуклою вгору, тобто $d^2U < 0$.

Далі розглядатимемо набори з двох товарів, їх функція попиту – $\overline{q} = (q_1, q_2)$, функція споживання – $U = U(q_1, q_2)$. Лінію рівня цієї функції, тобто лінію $U(q_1, q_2) = C$ називають **лінією байдужості**, множину всіх ліній байдужості – **картою байдужості**.

Співвідношення граничних корисностей товарів A та B, взяте з протилежним знаком , тобто $\left(-\frac{dq_1}{dq_2} \right)$, називають **нормою еквівалентного заміщення** цих товарів. Множину кривих, що визначаються рівністю $-\frac{dq_1}{dq_2} = C = \text{const}$, називають картою переваг.

Оптимальний попит (q_1, q_2) відповідає максимуму функції споживання U та визначається з рівності $dU = 0$.

Задача 1. Залежність витрат споживачів на придбання товарів A та B від їх кількості q_1 та q_2 визначається формулою $U = 90q_1 - q_1^2 + 50q_2 - q_2^2$. Чи може ця функція бути функцією попиту? Якщо так, то побудувати карти байдужості та переваг.

Розв'язання. Знайдемо другий диференціал функції U:

$$d^2U = \frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2}\left(dq_1\right)^2 + 2\frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2}dq_1 dq_2 + \frac{\partial^2 U}{\partial q_2^2}\left(dq_2\right)^2.$$

Запишемо частинні похідні функції $U = U\left(q_1, q_2\right)$ та підставимо їх у вираз для другого диференціалу:

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = 90 - 2q_1,\ \frac{\partial U}{\partial q_2} = 50 - 2q_2,\ \frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial q_2^2} = -2,\ \frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2} = 0.$$

$d^2U = -2\left(dq_1\right)^2 - 2\left(dq_2\right)^2 < 0$, тому задана функція $U = U\left(q_1, q_2\right)$ може бути функцією споживання. Карта байдужості для цієї функції $U\left(q_1, q_2\right) = C$ набуває вигляду:

$$90q_1 - q_1^2 + 50q_2 - q_2^2 = C.$$

Виділивши у лівій частині цієї рівності повні квадрати, отримуємо

$$\left(q_1 - 45\right)^2 + \left(q_2 - 25\right)^2 = \left(C_1\right)^2,$$

тобто множину концентричних кіл з центром у точці $q_1 = 45$, $q_2 = 25$.

Для побудови карти переваг $-\frac{dq_1}{dq_2} = C$ знайдемо $\frac{dq_1}{dq_2}$, для чого продиференціюємо рівність $U\left(q_1, q_2\right) = C$ по змінній q_2, вважаючи $q_1 = q_1\left(q_2\right)$:

$$\frac{dU}{dq_2} = \frac{\partial U}{\partial q_1} \cdot \frac{dq_1}{dq_2} + \frac{\partial U}{\partial q_2} = 0.$$

Звідси знаходимо, що $\frac{dq_1}{dq_2} = -\frac{\partial U}{\partial q_2} : \frac{\partial U}{\partial q_1}$ або $\frac{dq_1}{dq_2} = -\frac{50 - 2q_2}{90 - 2q_1} = -\frac{25 - q_2}{45 - q_1}$.

Множина кривих, що утворює карту переваг, визначається рівністю $\frac{25 - q_2}{45 - q_1} = C$ або $q_2 - 25 = C\left(q_1 - 45\right)$. Отримали пучок прямих з центром у точці $q_1 = 45$, $q_2 = 25$.

Задача 2. В умовах попередньої задачі знайти функцію попиту, виходячи з того, що споживач витрачає весь свій бюджет на придбання товарів A та B. Знайти оптимальний попит на ці товари, якщо ціна товару A $p_1 = 50$ грошових одиниць, ціна товару B – $p_2 = 130$ грошових одиниць, бюджет споживання становить $z = 10$ тисяч грошових одиниць.

Розв'язання. Розподіл коштів бюджету споживання на придбання товарів має вигляд: $z = p_1 q_1 + p_2 q_2$. Оптимальний попит $\left(q_1, q_2\right)$ знаходимо з умови $dU = 0$ або $\frac{\partial U}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial U}{\partial q_2}dq_2 = 0$. Для заданої функції споживання $U = 90q_1 - q_1^2 + 50q_2 - q_2^2$ ця рівність набуває вигляду: $\left(90 - 2q_1\right)dq_1 + \left(50 - 2q_2\right)dq_2 = 0$ або $\left(45 - q_1\right)dq_1 + \left(25 - q_2\right)dq_2 = 0$. Змінні величини q_1 та q_2 є залежними, оскільки

$z = p_1q_1 + p_2q_2 = \text{const}$. Звідси визначаємо зв'язок між диференціалами dq_1 та dq_2: $p_1dq_1 + p_2dq_2 = 0 \Rightarrow dq_2 = -\frac{p_1}{p_2}dq_1$. Отже, отримуємо рівність:

$$\left(45 - q_1\right)dq_1 + \left(25 - q_2\right)\left(-\frac{p_1}{p_2}\right)dq_1 = 0.$$

Звідси знаходимо: $q_2 - 25 = \frac{p_2}{p_1}\left(q_1 - 45\right)$. Отримали рівняння прямої, яку називають прямою переваги.

Для знаходження функції попиту $\overline{q} = \left(q_1\left(p_1, p_2\right), q_2\left(p_1, p_2\right)\right)$ розв'яжемо систему, складену з рівняння прямої переваги та рівняння розподілу бюджетних коштів $z = p_1q_1 + p_2q_2$. Отримали систему:

$$\begin{cases} q_2 - 25 = \frac{p_2}{p_1}\left(q_1 - 45\right), \\ p_1q_1 + p_2q_2 = z. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему відносно q_1 та q_2, отримуємо:

$$\begin{cases} q_1 = \dfrac{p_1z + 45p_2^2}{p_1^2 + p_2^2}, \\ q_2 = \dfrac{p_1z - 45p_1p_2}{p_1^2 + p_2^2}. \end{cases}$$

Отримані рівності визначають функцію попиту $\overline{q} = \left(q_1\left(p_1, p_2\right), q_2\left(p_1, p_2\right)\right)$.

Оптимальний попит на товари знаходимо, підставивши у отримані вирази для q_1 та q_2 значення $p_1 = 50$, $p_2 = 130$, $z = 10000$. Отримуємо: $q_1 = 57$ одиниць товару, $q_2 = 55$ одиниць.

Задача 3. В умовах попередньої задачі знайти еластичності попиту $\overline{q}$ за доходом, за ціною та частинні еластичності заміни.

Розв'язання. Еластичність попиту за доходом визначають за формулами: $E_i^z = \frac{\partial q_i}{\partial z} : \frac{q_i}{z}$, $i = 1,2$. Для визначення **еластичності попиту за ціною** використовують формули: $E_{ij}^p = \frac{\partial q_i}{\partial p_j} : \frac{q_i}{p_j}$, $i = 1,2$; $j = 1,2$. При $i = j$ отримуємо **пряму еластичність попиту за ціною**, при $i \neq j$ – **перехресну еластичність**.

Частинні еластичності заміни знаходять за формулами: $S_{ij} = \frac{E_{jj}^p}{k_j} - E_i^z$, де $k_j = \frac{p_jq_j}{z}$ – частка загального доходу z, що витрачається на придбання j-го товару.

Для розрахунку цих показників використовуємо функції попиту $q_1 = q_1\left(p_1, p_2, z\right)$ та $q_2 = q_2\left(p_1, p_2, z\right)$, отримані у задачі 3. Маємо:

$$q_1 = \frac{p_1 z + 45 p_2^2}{p_1^2 + p_2^2},\; q_2 = \frac{p_2 z - 45 p_1 p_2}{p_1^2 + p_2^2},$$

$$E_1^z = \frac{\partial q_1}{\partial z} : \frac{q_1}{z} = \frac{p_1}{p_1^2 + p_2^2} \cdot \frac{\left(p_1^2 + p_2^2\right) z}{p_1 z + 45 p_2^2} = \frac{p_1 z}{p_1 z + 45 p_2^2},$$

$$E_2^z = \frac{\partial q_2}{\partial z} : \frac{q_2}{z} = \frac{p_2}{p_1^2 + p_2^2} \cdot \frac{\left(p_1^2 + p_2^2\right) z}{p_2 z - 45 p_1 p_2} = \frac{p_2 z}{p_2 z - 45 p_1 p_2}.$$

Аналогічним чином за наведеними вище формулами розраховуємо решту показників.

5. Диференціальні моделі економічної динаміки

5.1 Диференціальна модель насичення ринку

Побудуємо модель насичення ринку продукцією деякого підприємства. Нехай $y(t)$ – обсяг виробництва цієї продукції у момент часу t. Будемо вважати, що зі збільшенням виробництва відбувається насичення ринку цією продукцією і її ціна $p(y)$ зменшується за лінійним законом:

$$p(y) = b - ay,\; a > 0,\; b > 0.$$

Швидкість зміни обсягів виробництва прямо пропорційна доходу підприємства від реалізації виробленої продукції з коефіцієнтом пропорційності k:

$$\frac{dy}{dt} = k \cdot p(y) \cdot y = k(b - ay)y. \tag{5.1}$$

Розв’яжемо це диференціальне рівняння, поділивши змінні:

$$\frac{dy}{y(b - ay)} = k \cdot dt$$

Інтегруючи ліву частину цього рівняння по змінній y, праву – по змінній t, отримаємо:

$$y(t) = \frac{b \cdot Ce^{bkt}}{a\left(Ce^{bkt} - 1\right)}.$$

Графіком отриманої функції $y(t)$ є так звана *логістичну крива*. При $t \to +\infty$ $y(t) \to \frac{b}{a}$.

Модель (5.1) є диференціальною, оскільки вона виражається диференціальним рівнянням. До диференціальної моделі виду (5.1) зводиться модель Золотаса динаміки рівня суспільного добробуту, яка описується диференціальним рівнянням:

$$\frac{dW}{dy} = kW(A - W). \tag{5.2}$$

де W – рівень суспільного добробуту, $k > 0$, $A > 0$ – відомі сталі, y – доход на душу населення. Рівняння (5.2) називають *рівнянням Ферхюльста – Перла*. Його розв'язком є логістичну крива $W(y) = \dfrac{A}{1 + Be^{-Aky}}$, де B – стала інтегрування, яка визначається з початкової умови $W(0) = W_0$.

5.2 Модель природного зростання виробництва продукції

Побудуємо модель динаміки виробництва деякого виду продукції, що продається на ринку за фіксованою ціною p. Нехай $q(t)$ – кількість продукції, реалізованої на ринку на момент часу t. Тоді на цей момент величина доходу підприємства складає $p \cdot q(t)$.Частина цього доходу, $J(t) = mpq(t)$ витрачається на модернізацію та розширення виробництва ($m = \text{const}$ – норма інвестицій, $0 < m < 1$). Якщо вироблена продукція реалізується повністю, то внаслідок розширення виробництва буде отримано приріст доходу, частина якого знову буде спрямована на розширення виробництва. Нехай швидкість зміни обсягу виробництва прямо пропорційна збільшенню інвестицій. Тоді для знаходження $q(t)$ отримуємо диференціальне рівняння:

$$\frac{dq}{dt} = \alpha \cdot J(t) = \alpha \cdot mp \cdot q(t), \tag{5.3}$$

де $\alpha = \text{const}$ – коефіцієнт пропорціональності, $k = \alpha \cdot m \cdot p$ – стала величина. Поділивши у отриманому рівнянні змінні, знаходимо: $\dfrac{dq}{q} = \alpha \cdot dt$. Звідси після інтегрування отримуємо: $q(t) = Ce^{kt}$, де C – стала інтегрування. Її визначають з початкової умови: $q(0) = q_0$. Звідси знаходимо, що $q(t) = q_0 e^{kt}$.

5.3 Моделі динаміки ринкової ціни та виробничих фондів

У моделі динаміки ринкової ціни товару встановлюється зв'язок між зміною ціни $p(t)$ та незадоволеним попитом $d(p) - s(p)$, $d(p) = a - bp$ – величина попиту, $s(p) = \alpha + \beta p$ – величина пропозиції товару за ціною $p(t)$, $a > 0$, $b > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ – відомі сталі. Вважається, що швидкість зміни ціни пропорційна незадоволеному попиту з коефіцієнтом пропорційності $k > 0$:

$$\frac{dp}{dt} = k \cdot \big(d(p) - s(p)\big).$$

Підставивши у цей вираз лінійні залежності для попиту $d(p)$ та пропозиції $s(p)$, отримаємо звичайне лінійне диференціальне рівняння першого порядку:

$$\frac{dp}{dt} + k(b + \beta)p = k(a - \alpha).$$

Його загальний розв'язок має вигляд:

$$p(t) = C \cdot e^{-k(b+\beta)t} + \frac{a-\alpha}{b+\beta}.$$

При $t \to \infty$ $p(t) \to \frac{a-\alpha}{b+\beta}$.

Отримаємо диференціальну модель динаміки основних виробничих фондів на підприємстві. Нехай K – вартість основних виробничих фондів підприємства, μ – коефіцієнт їхнього вибуття, тобто за рік фонди зменшуються на величину μK. Вважаючи, що вибуття виробничих фондів відбувається рівномірно, отримаємо, що за час Δt вони зменшаться на величину $\mu K \cdot \Delta t$. Сталі інвестиції у обсязі J за рік збільшують за час Δt величину фондів на $\rho J \cdot \Delta t$, де $\rho = \text{const}$. Отже, отримуємо рівність:

$$K(t+\Delta t) = K(t) - \mu K \cdot \Delta t + \rho J \cdot \Delta t,$$

звідки отримуємо:

$$\frac{K(t+\Delta t) - K(t)}{\Delta t} = \rho J - \mu K.$$

Перейшовши у останній рівності до границі при $\Delta t \to 0$, отримуємо звичайне лінійне диференціальне рівняння першого порядку відносно невідомої функції $K(t)$:

$$\frac{dK}{dt} = \rho J - \mu K.$$

Його загальний розв’язок має вигляд:

$$K(t) = C \cdot e^{-\mu t} + \frac{\rho J}{\mu}, \tag{5.4}$$

де C – стала інтегрування. Рівність (5.4) характеризує динаміку основних виробничих фондів підприємства. Сталу C визначають з початкової умови $K(0) = K_0$. Тоді $C = K_0 - \frac{\rho J}{\mu}$ і рівність (5.4) набуває вигляду

$$K(t) = \left(K_0 - \frac{\rho J}{\mu}\right) \cdot e^{-\mu t} + \frac{\rho J}{\mu}.$$

5.4 Модель економічного зростання Солоу

Нехай $X = F(K, L)$ – виробнича функція деякої економічної системи, X – обсяг виробництва, K – вартість основних виробничих фондів, L – витрати на оплату праці. Далі розглянемо випадок, коли виробнича функція є функцією Кобба – Дугласа: $X = K^{\alpha} \cdot L^{1-\alpha}$.

У *моделі Солоу* вважається, що швидкість зміни факторів виробництва K та L має вигляд:

$$\begin{cases} \dfrac{dK}{dt} = s \cdot X, \\ \dfrac{dL}{dt} = \lambda \cdot L, \end{cases} \tag{5.5}$$

де s – частка накопичення у доході X від реалізованої продукції, λ – темп зростання оплати праці.

Нехай $k = \dfrac{K}{L}$. Тоді виробнича функція Кобба – Дугласа набуває вигляду:

$$X = K^{\alpha} \cdot L^{1-\alpha} = L \cdot \left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha} = L \cdot k^{\alpha}. \tag{5.6}$$

Підставивши (5.6) у перше з рівнянь системи (5.5), отримаємо:

$$\frac{dK}{dt} = s \cdot L \cdot k^{\alpha}.$$

Враховуючи, що $K = kL$, з останнього рівняння з врахуванням другого рівняння системи (5.5), знаходимо:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{d(k \cdot L)}{dt} = L\frac{dk}{dt} + k\frac{dL}{dt} = L\frac{dk}{dt} + k \cdot \lambda L.$$

Звідси отримуємо, що $\dfrac{dK}{dt} = s \cdot L \cdot k^{\alpha} = L\dfrac{dk}{dt} + k\lambda L$ або

$$\frac{dk}{dt} + \lambda k = s \cdot k^{\alpha}. \tag{5.7}$$

Рівняння (5.7) є рівнянням Бернуллі. Інтегруючи його з допомогою підстановки $k = u(t) \cdot v(t)$, знаходимо загальний розв’язок (5.7) у вигляді:

$$k(t) = e^{-\lambda t}\left(\frac{s}{\lambda}e^{\lambda(1-\alpha)t} + C_1\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = \frac{K(t)}{L(t)}.$$

Отже, знайдено відношення факторів виробництва у момент часу t. Сталу інтегрування C_1 визначають з початкової умови $k(0) = \dfrac{K(0)}{L(0)} = k_0$.

Практичне заняття №6. Найпростіші диференціальні моделі економічних систем

Розв’язати наступні задачі.

1. Нехай $y(t)$ – обсяг виробництва продукції деякого підприємства. Залежність ціни товару від обсягу виробництва має вигляд: $p(y) = b - ay$, $a > 0$, $b > 0$. Швидкість зростання обсягу виробництва є зростаючою функцією прибутку. Валові виробничі витрати описуються залежністю $c(y) = \alpha y + \beta$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Побудувати диференціальну модель для знаходження залежності обсягу виробництва продукції від часу t. (Відповідь: $\dfrac{dy}{dt} = k\big(p(y) \cdot y - c(y)\big)$).

2. Знайти функцію попиту $y(p)$, якщо еластичність попиту за ціною $E_p(y) = -2$.

Розв'язання. $\frac{dy}{dp} \cdot \frac{p}{y} = -2, \frac{dy}{y} = -\frac{2dp}{p} \Rightarrow \ln|y| = \ln p^{-2} + \ln C \Rightarrow y = \frac{C}{p^2}$, де C – довільна стала, що визначається з заданої початкової умови.

3. Знайти функцію попиту $y(p)$, якщо еластичність попиту за ціною $E_p(y) = -1$ і при $y = 2$ ціна $p = 10$. (Відповідь: $y = \frac{20}{p}$).

4. Знайти функцію, що має сталу еластичність k. (Відповідь: $y = Cx^k$).

5. Знайти функцію попиту $y = y(p)$, якщо еластичність попиту за ціною $E_p(y) = \frac{y-100}{y}$, $p = 10$ при $y = 90$, $0 < y < 100$. (Відповідь: $y = 100\left(1 - \frac{1}{p}\right)$).

6. Різницеві рівняння та їх застосування до розв'язання задач економічної динаміки

6.1 Основні поняття та означення теорії різницевих рівнянь

Різницевим оператором Δ називають оператор, що переводить послідовність x_n у послідовність y_n за правилом

$$y_n = \Delta x_n = x_{n+1} - x_n, \; n = 1, 2, \ldots \tag{6.1}$$

Вираз Δx_n називають *різницею першого порядку*.

Різницевим рівнянням називають рівняння, що містить невідому послідовність та її різниці. *Розв'язком різницевого рівняння* називають будь-яку послідовність, при підстановці якої у різницеве рівняння для довільного натурального n отримуємо тотожність.

Різницею другого порядку називають вираз

$$\Delta^2 x_n = \Delta x_{n+1} - \Delta x_n. \tag{6.2}$$

Оскільки $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$, $\Delta x_{n+1} = x_{n+2} - x_{n+1}$, то

$$\Delta^2 x_n = x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n. \tag{6.3}$$

За індукцією можна визначити різницю m-го порядку:

$$\Delta^m x_n = \Delta^{m-1} x_{n+1} - \Delta^{m-1} x_n. \tag{6.4}$$

Використовуючи метод математичної індукції, можна довести формулу:

$$\Delta^m x_n = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} C_m^k x_{n+k}. \tag{6.5}$$

Виконується також рівність:

$$x_{n+m} = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \Delta^k x_n. \tag{6.6}$$

У формулах (6.5) та (6.6) $C_m^k = \dfrac{m!}{k!(m-k)!}$ – біноміальні коефіцієнти.

<u>*Лінійним різницевим рівнянням*</u> називають рівняння виду

$$a_0(n)\Delta^m x_n + a_1(n)\Delta^{m-1}x_n + \ldots + a_m(n)x_n = f(n), \tag{6.7}$$

де x_n – невідома послідовність, $a_0, a_1, \ldots, a_m, f$ – задані функції натурального аргументу n. Число m (старший порядок різниці) називають <u>*порядком різницевого рівняння*</u>. Використовуючи формулу (6.5), лінійне різницеве рівняння можна записати у вигляді:

$$c_0(n)x_{n+m} + c_1(n)x_{n+m-1} + \ldots + c_m(n)x_n = f(n). \tag{6.8}$$

Якщо $f(n)=0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, то рівняння (6.7) або (6.8) називають <u>*лінійним однорідним різницевим рівнянням m-го порядку*</u>.

Розглянемо різницеве рівняння першого порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$y_{n+1} + a \cdot y_n = b, \tag{6.9}$$

де y_n, y_{n+1} – члени невідомої числової послідовності.

Різницеві рівняння є дискретним аналогом диференціальних рівнянь, тому математичні моделі, у яких використовуються різницеві рівняння, відносяться до дискретних моделей. Методи розв’язання лінійних різницевих рівнянь аналогічні методам розв’язання лінійних диференціальних рівнянь.

Загальний розв’язок рівняння (6.9) будемо шукати у вигляді: $y_n = y_n^o + \tilde{y}_n$, де y_n^o – загальний розв’язок відповідного однорідного різницевого рівняння ($f(n)=0$, $\tilde{y}_n$ – частинний розв’язок заданого неоднорідного різницевого рівняння.

Загальний розв’язок однорідного рівняння y_n^o шукаємо у вигляді: $y_n^o = C \cdot \lambda^n$, де C – довільна стала. Підставивши y_n^o у рівняння $y_{n+1} + a \cdot y_n = 0$, знаходимо:

$$C \cdot \left(\lambda^{n+1} + a \cdot \lambda^n\right) = 0 \Rightarrow a + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -a.$$

Тут λ фактично є коренем характеристичного рівняння $\lambda + a = 0$, отриманого аналогічно такому рівнянню для диференціального рівняння $y' + ay = 0$ (у різницевому рівнянні y_{n+m} замінюємо на λ^m).

Отже, $y_n^o = C \cdot (-a)^n$.

Частинний розв’язок $\tilde{y}_n$ неоднорідного різницевого рівняння (6.9) шукаємо за виглядом його правої частини $f(n)$. Оскільки у даному випадку $f(n) = b = \text{const}$, то $\tilde{y}_n = A = \text{const}$. Знайдемо сталу A, підставивши $\tilde{y}_n = A$ у рівняння. Маємо:

$$A + a \cdot A = b \Rightarrow A = \frac{b}{1+a} = \tilde{y}_n.$$

Таким чином, ми отримали розв’язок різницевого рівняння (6.9) у вигляді:

$$y_n = y_n^o + \tilde{y}_n = C \cdot (-a)^n + \frac{b}{1+a}.$$

Розглянемо лінійне неоднорідне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами, що має вигляд:

$$y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = b. \tag{6.10}$$

Тут p, q та b – задані сталі.

Структура загального розв'язку рівняння (6.10) також визначається рівністю $y_n = y_n^o + \tilde{y}_n$. Характеристичне рівняння має вигляд: $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$. Можливими є наступні випадки.

1. Корені λ_1 та λ_2 характеристичного рівняння є дійсними, причому $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тоді загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $y_n^o = C_1 \cdot \lambda_1^n + C_2 \cdot \lambda_2^n$.

2. Корені λ_1 та λ_2 характеристичного рівняння є дійсними, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Загальний розв'язок однорідного рівняння $y_n^o = \left(C_1 n + C_2\right) \cdot \lambda^n$.

3. Корені характеристичного рівняння комплексні: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$. Тоді маємо: $y_n^o = \left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\right)^n \left(C_1 \cos n\varphi + C_2 \sin n\varphi\right)$, $\varphi = \arg\left(\lambda_2\right)$.

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння (6.10) у відповідності до його правої частини шукаємо у вигляді: $\tilde{y}_n = B = \text{const}$. Підставивши $\tilde{y}_n$ у рівняння, знаходимо: $B + pB + qB = b$, звідки $B = \dfrac{b}{1+p+q}$. Отже, розв'язком рівняння (6.10) є послідовність $y_n = y_n^o + \dfrac{b}{1+p+q}$, де y_n^o визначається у залежності від вигляду коренів характеристичного рівняння.

Прикладом економіко-математичної моделі, що приводиться до розв'язання лінійного різницевого рівняння, є так звана *павутиноподібна модель ринку*.

Нехай деяке виробниче підприємство визначає пропозицію свого товару у поточному періоді на основі цін, що склалися у попередньому періоді: $s_n = s\left(p_{n-1}\right)$. Попит на товар залежить від ціни товару у поточному періоді: $d_n = d\left(p_n\right)$. Будемо вважати функції попиту та пропозиції лінійними, тобто

$$s_n = m + l \cdot p_{n-1},\ d_n = a - b \cdot p_n,\ a > m > 0,\ l > 0,\ b > 0.$$

Знайдемо ціну рівноваги з умови $d_n = s_n$. Тоді $a - b \cdot p_n = m + l \cdot p_{n-1}$. Замінивши номер $n-1$ члена послідовності на n, отримуємо лінійне неоднорідне різницеве рівняння першого порядку відносно ціни p_n:

$$b \cdot p_{n+1} + l \cdot p_n = a - m.$$

Розв'язком цього лінійного різницевого рівняння є послідовність $p_n = C \cdot \left(-\dfrac{l}{b}\right)^n + \dfrac{a-m}{b+l}$.

З отриманого розв'язку випливає, що при $l < b$ $p_n \to p_0 = \dfrac{a-m}{b+l}$, якщо $n \to \infty$. Це значення p_0 є ціною рівноваги для даного товару. Якщо $l > b$, то з часом ціна p_n буде віддалятися від ціни рівноваги p_0. Для випадку $l = b$ спостерігаємо циклічні коливання ціни p_n у n-му періоді часу відносно значення p_0.

6.2 Лінійні системи різницевих рівнянь зі сталими коефіцієнтами

Лінійною називають систему різницевих рівнянь відносно m невідомих послідовностей $x_{1,n}$, $x_{2,n},\ldots,x_{m,n}$ (n – номер члена послідовності):

$$\begin{cases} x_{1,n+1} = a_{11}x_{1,n} + a_{12}x_{2,n} + \ldots + a_{1m}x_{m,n} + f_1(n), \\ x_{2,n+1} = a_{21}x_{1,n} + a_{22}x_{2,n} + \ldots + a_{2m}x_{m,n} + f_2(n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_{m,n+1} = a_{m1}x_{1,n} + a_{m2}x_{2,n} + \ldots + a_{mm}x_{m,n} + f_m(n). \end{cases} \tag{6.11}$$

Перейдемо до матричних позначень:

$$X_n = \begin{pmatrix} x_{1,n} \\ x_{2,n} \\ \ldots \\ x_{m,n} \end{pmatrix},\ B_n = \begin{pmatrix} f_1(n) \\ f_2(n) \\ \ldots\ldots \\ f_m(n) \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} \end{pmatrix}.$$

Систему (6.11) запишемо у матричній формі:

$$X_{n+1} = A \cdot X_n + B_n. \tag{6.12}$$

Загальний розв'язок системи (6.12) будемо шукати у вигляді: $X_n = X_n^o + \tilde{X}_n$, де X_n^o – загальний розв'язок відповідної однорідної системи, $\tilde{X}_n$ – частинний розв'язок (6.12). Для розв'язання лінійної однорідної системи різницевих рівнянь використовують <u>*метод Ейлера*</u>, згідно з яким фундаментальну систему розв'язків системи $X_{n+1} = A \cdot X_n$ шукають серед векторних послідовностей виду $X_n = D \cdot \lambda^n$, де D – деякий вектор. Підставивши $X_n = D \cdot \lambda^n$ у матричну рівність $X_{n+1} = A \cdot X_n$, отримуємо:

$$D \cdot \lambda^{n+1} = A \cdot D \cdot \lambda^n, \tag{6.13}$$

звідки знаходимо, що $A \cdot D = \lambda \cdot D$. Це означає, що векторна послідовність $X_n = D \cdot \lambda^n$ є розв'язком лінійної однорідної системи різницевих рівнянь $X_{n+1} = A \cdot X_n$ тоді і лише тоді, коли λ є власним значенням матриці A, а D – відповідним йому власним вектором.

Власні значення матриці A визначаються як корені многочлена $P(\lambda) = \det(A - \lambda E)$, де E – одинична матриця. Цей многочлен називають характеристичним многочленом для системи різницевих рівнянь (6.12), а рівняння $P(\lambda) = 0$ – її характеристичним рівнянням.

Якщо всі власні значення $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ матриці A є дійсними і різними (всі корені характеристичного рівняння дійсні та прості), то фундаментальну систему розв'язків утворюють векторні послідовності $D_1\lambda_1^n$, $D_2\lambda_2^n$, …, $D_m\lambda_m^n$. Тут D_i – власний вектор матриці A, що відповідає власному значенню λ_i, $i = 1,2,\ldots,m$. Загальний розв'язок лінійної однорідної системи різницевих рівнянь у цьому випадку має вигляд: $X_n^o = C_1D_1\lambda_1^n + C_2D_2\lambda_2^n + \ldots + C_mD_m\lambda_m^n$.

6.3 Динамічна модель Леонтьєва

У моделі Леонтьєва міжгалузевого балансу $X = AX + Y$, розглянутій раніше, всі її елементи вважалися сталими, середніми за деякий період часу. На практиці обсяг виробництва у період часу $n+1$ визначається значеннями X_n та Y_n, що були досягнуті у періоді n. Тому розглядається динамічна модель Леонтьєва у вигляді:

$$X_{n+1} = AX_n + Y_n. \tag{6.14}$$

Векторне рівняння (6.14) є системою m лінійних різницевих рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Постановка задачі: для заданого вектора кінцевого споживання Y_n та матриці прямих витрат A визначити вектор валового виробництва X_m.

Приклад. Визначити вектор валового виробництва X_m у динамічній моделі Леонтьєва, якщо технологічна матриця $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}$, вектор кінцевого споживання $Y_n = \begin{pmatrix} 2^n \\ 2^n \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Будемо шукати розв'язок системи $X_{n+1} = AX_n + Y_n$ лінійних різницевих рівнянь зі сталими коефіцієнтами у вигляді $X_n = X_n^o + \tilde{X}_n$, де X_n^o – загальний розв'язок однорідної системи, $\tilde{X}_n$ – частинний розв'язок заданої системи. Характеристичне рівняння має вигляд:

$$\begin{vmatrix} 0,2-\lambda & 0,3 \\ 0,3 & 0,2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Його корені $\lambda_1 = -0,1$, $\lambda_2 = 0,5$. Знайдемо відповідні власні вектори. При $\lambda_1 = -0,1$ отримуємо рівняння для координат α_1 та α_2 власного вектора:

$$0,3\alpha_1 + 0,3\alpha_2 = 0,$$

звідки $\alpha_1 = -\alpha_2$, наприклад, $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 1$.

Для $\lambda_2 = 0,5$ маємо:

$$-0,3\alpha_1 + 0,3\alpha_2 = 0.$$

Звідси отримуємо $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$.

Отже, власні вектори $D_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $D_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Тоді $X_n^o = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot (-0,1)^n + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (0,5)^n$, C_1 та C_2 – довільні сталі.

Частинний розв'язок заданої системи будемо шукати за виглядом правої частини цієї системи: $\tilde{X}_n = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \cdot 2^n$, $\tilde{X}_{n+1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \cdot 2^{n+1}$. Підставивши ці вирази у задану неоднорідну систему, отримуємо:

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}\cdot 2^{n+1}=\begin{pmatrix}0,2 & 0,3\\ 0,3 & 0,2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}\cdot 2^n+\begin{pmatrix}2^n\\ 2^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,2\alpha_1+0,3\alpha_2+1\\ 0,3\alpha_1+0,2\alpha_2+1\end{pmatrix}\cdot 2^n.$$

Після скорочення обох частин цієї рівності на 2^n, отримуємо систему рівнянь відносно α_1 та α_2:

$$\begin{cases}2\alpha_1=0,2\alpha_1+0,3\alpha_2+1,\\ 2\alpha_2=0,3\alpha_1+0,2\alpha_2+1.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-1,8\alpha_1+0,3\alpha_2=-1,\\ 0,3\alpha_1-1,8\alpha_2=-1.\end{cases}\Rightarrow \alpha_1=\alpha_2=\frac{2}{3}.$$

Отже, $\tilde{X}_n=\begin{pmatrix}2/3\\ 2/3\end{pmatrix}\cdot 2^n$, загальний розв'язок системи (вектор валового виробництва) X_n у розглянутій динамічній моделі Леонтьєва матиме вигляд:

$$X_n=C_1\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}\cdot(-0,1)^n+C_2\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\cdot(0,5)^n+\begin{pmatrix}2/3\\ 2/3\end{pmatrix}\cdot 2^n.$$

Значення сталих C_1 та C_2 можна знайти, знаючи вектор валового виробництва у перші два роки.

7. Моделі аналізу економічного ризику

7.1 Загальні принципи кількісної оцінки економічного ризику

Під <u>*економічним ризиком*</u> розуміють рівень невизначеності, пов'язаний з майбутніми результатами економічної діяльності. Величина економічного ризику прямо пропорційна величині можливих втрат та ймовірності їх настання, тому у кількісному виразі найпростішу оцінку ризику можна здійснити за формулою:

$$W=x\cdot p, \tag{7.1}$$

де W – величина ризику, x – максимально можливі втрати, p – їх ймовірність.

Кращою у порівнянні з (7.1) кількісною оцінкою ризику є його визначення як математичного сподівання можливих збитків:

$$W=\sum_{i=1}^{n}x_i p_i, \tag{7.2}$$

де x_i – можливі суми збитків у грошовому виразі, p_i – ймовірності їх отримання, $i=1,2,...,n$, $\sum_{i=1}^{n}p_i=1$. При використанні формули (7.2) прибуток розглядається як від'ємний збиток.

Приклад 1. Підприємство починає виробництво нового товару. Можливі три варіанти попиту на нього: у першому варіанті збитки складають 700 тис. у.г.о. з ймовірністю $0,4$, для другого варіанту попиту сума можливих збитків 500 тис. у.г.о., їх ймовірність дорівнює 0,5, прибуток можливий лише для третього варіанту попиту, тут сума прибутку складе 1000 тис. у.г.о. з ймовірністю 0,1. Оцінити величину ризику початку виробництва нового товару.

Розв'язання. Для оцінки економічного ризику використаємо формулу (7.2), згідно з якою отримуємо:

$$W = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 .$$

Тут $x_1 = 700$, $p_1 = 0,4$, $x_2 = 500$, $p_2 = 0,5$, $x_3 = -1000$, $p_3 = 0,1$. Тоді величина ризику збитків у грошовому вимірі складе:

$$W = 700 \cdot 0,4 + 500 \cdot 0,5 + \left(-1000\right) \cdot 0,1 = 450 \text{(тис. у.г.о.)}.$$

Формули (7.1) та (7.2) дозволяють оцінювати ризик у абсолютному виразі. Частіше застосовується оцінка економічного ризику у відносному виразі, тобто ризик оцінюється як величина можливих втрат, поділена на величину деякої бази. У якості цієї бази можуть виступати обсяг власних коштів, капітал підприємства тощо. Якщо у якості бази прийняти обсяг власних коштів або вартість майна підприємства, то максимальну величину збитків, поділену на цю базу, називають коефіцієнтом ризику банкрутства.

Приклад 2. Два підприємці розпочали гру на фондовій біржі. Перший підприємець, маючи власних 10 тис. у.г.о., взяв кредит 40тис. у.г.о. від 10 % річних і вклав усі кошти у акції одного з підприємств. Другий підприємець вклав у ці ж акції власні 50 тис. у.г.о. Ймовірність 20%-го зростання вартості цих акцій становить 0,4, ймовірність того, що вона залишиться незмінною, дорівнює 0,2, з ймовірністю 0,4 можливе 50%-ве зниження вартості цих акцій. Оцінити ризик кожного з підприємців у відносному виразі, прийнявши за базу вкладений власний капітал.

Розв'язання. Знайдемо математичне сподівання збитків кожного з підприємців, тобто оцінку ризику підприємців у абсолютному виразі.

Абсолютний ризик першого підприємця:

$$W_1 = -50 \cdot 1,2 \cdot 0,4 - 50 \cdot 1,0 \cdot 0,2 - 50 \cdot 0,6 \cdot 0,4 + 10 + 40 + 4 = 8 \text{ (тис. у.г.о.)}$$

Величина абсолютного ризику для другого підприємця:

$$W_2 = -50 \cdot 1,2 \cdot 0,4 - 50 \cdot 1,0 \cdot 0,2 - 50 \cdot 0,6 \cdot 0,4 + 50 = 4 \text{ (тис. у.г.о.)}$$

Величини ризику w_1 та w_2 в умовному виразі для першого та другого підприємців складають: $w_1 = \frac{8}{10} = 0,8$; $w_2 = \frac{4}{50} = 0,08$, $w_1 > w_2$. Коефіцієнт ризику банкрутства для першого підприємця становить $\frac{24}{10} = 2,4$, для другого – $\frac{20}{50} = 0,4$.

7.2 Платіжна матриця та критерії прийняття рішень в умовах ризику

Розрізняють 3 основні типи інформаційних умов, у яких можуть прийматися економічні рішення:

1) *детерміновані умови*, коли наперед відомий результат реалізації кожного варіанту рішення;

2) *умови ризику* (стохастичні умови), коли для кожної альтернативи можна вказати всі можливі наслідки її реалізації та ймовірності цих наслідків;

3) *умови невизначеності*, коли неможливо оцінити наслідки реалізації рішення або ймовірність цих наслідків.

Інформацію, необхідну для прийняття рішення в умовах ризику, заносять у платіжну матрицю. *Платіжною матрицею* називають таблицю, у якій для кожного варіанту рішення (альтернативи) A_i, $i=1,2,...,n$, та кожного можливого стану зовнішнього середовища S_j, $j=1,2,...,m$, ймовірність настання якого дорівнює p_j, вказуються виграші (прибутки) x_{ij}, $i=1,2,...,n$, $j=1,2,...,m$, суб'єкта прийняття рішення. Наведемо загальний вигляд платіжної матриці.

	S_1 (p_1)	S_2 (p_2)	$\dots$	S_m (p_m)
A_1	x_{11}	x_{12}	$\dots$	x_{1m}
A_2	x_{21}	x_{22}	$\dots$	x_{2m}
$\dots$	$\dots$	...	$\dots$	$\dots$
A_n	x_{n1}	x_{n2}	$\dots$	x_{nm}

Критерій прийняття рішення (вибору оптимальної альтернативи) за максимумом математичного сподівання виграшу називають *критерієм Байєса*. При використанні даного критерію для кожної альтернативи A_i визначається математичне сподівання виграшу $M\left(X_i\right)=\sum_{j=1}^{n} x_{ij} p_j$. Кращою вважається альтернатива, для якої ця величина є максимальною.

Приклад 1. Підприємство планує перехід до масового виробництва нового товару. Можливі альтернативи, прогнозовані терміни настання масового попиту на цей товар та величини прибутку (у у.г.о.) наведені у платіжній матриці. Використавши критерій Байєса, визначити оптимальний термін переходу до масового виробництва нового товару.

Альтернатива	Прогнозовані терміни настання масового попиту та їх ймовірності		
	Негайно (0,2)	Через 1 рік (0,5)	Через 2 роки (0,3)
Перейти негайно	16	6	–6
Перейти через 1 рік	5	12	2
Перейти через 2 роки	0	2	6

Розв'язання. Для кожної альтернативи знаходимо математичне сподівання прибутку:

$M_1 = 16\cdot 0,2 + 6\cdot 0,5 + \left(-6\right)\cdot 0,3 = 4,4$ (у.г.о.).

$M_2 = 5\cdot 0,2 + 12\cdot 0,5 + 2\cdot 0,3 = 7,6$ (у.г.о.).

$M_3 = 0\cdot 0,2 + 2\cdot 0,5 + 6\cdot 0,3 = 2,8$ (у.г.о.).

$M_{\max} = M_2 = 7,6$ у.г.о.

Отже, за критерієм Байєса оптимальною альтернативою є перехід на масове виробництво нового товару через 1 рік.

Ризик окремої альтернативи часто оцінюється можливими коливаннями її результатів відносно прогнозованого результату її реалізації (математичного сподівання результату). Для оцінки таких коливань використовують дисперсію або середнє квадратичне відхилення виграшу при виборі відповідної альтернативи. Найменш ризикованою вважається альтернатива з мінімальною дисперсією.

Приклад 2. Приймається рішення про вибір одного з двох інвестиційних проектів з виробництва нового товару: P_1 або P_2. Інформація для аналізу (можливі значення прибутку у у.г.о. для ймовірних станів попиту на новий товар) наведена у платіжній матриці. Потрібно вибрати найменш ризикований проект.

Проект	Стан попиту на новий товар	
	Високий (0,8)	низький (0,2)
P_1	300	–500
P_2	425	–1000

Розв'язання. Знайдемо дисперсію виграшу для кожної з альтернатив. Для цього спочатку знайдемо математичні сподівання виграшу для кожного з проектів:

$M_1 = 300 \cdot 0,8 - 500 \cdot 0,2 = 140$ (у.г.о.),

$M_2 = 425 \cdot 0,8 - 1000 \cdot 0,2 = 140$ (у.г.о.).

Оскільки $M_1 = M_2$, то критерій Байєса для вибору оптимальної альтернативи застосувати не можна.

Дисперсію для i-ої альтернативи (i-го проекту) обчислимо за формулою:

$$\sigma_i^2 = \sum_{j=1}^{n} \left(x_{ij} - M_i\right)^2 \cdot p_j = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^2 p_j - \left(M_i\right)^2 .$$

Дисперсія проекту P_1: $\sigma_1^2 = 300^2 \cdot 0,8 + \left(-500\right)^2 \cdot 0,2 - 140^2 = 102400$;

Дисперсія проекту P_2: $\sigma_2^2 = 425^2 \cdot 0,8 + \left(-1000\right)^2 \cdot 0,2 - 140^2 = 324900$.

Найменшим є значення дисперсії для проекту P_1, отже, він є найменш ризиковим.

Для кожної можливої альтернативи можна визначити її ризик відносно сподіваного прибутку. Мірою такого ризику є коефіцієнт варіації прибутку: $CV = \frac{\sigma}{m}$, де CV – коефіцієнт варіації прибутку, σ – середнє квадратичне відхилення прибутку, m – його математичне сподівання. Чим меншим є значення коефіцієнту варіації прибутків, тим альтернатива є ближчою до оптимальної з точки зору співвідношення ризику та прибутку.

Приклад 3. Існує можливість виробництва та реалізації двох товарів. Інформація для прийняття рішення наведена у таблиці.

Товари	Результат 1		Результат 2	
	ймовірність	Прибуток (у.г.о.)	ймовірність	Прибуток (у.г.о.)
T_1	0,5	210	0,5	110
T_2	0,99	151	0,01	51

Вибрати альтернативу, оптимальну з точки зору співвідношення ризику та прибутку.

Розв'язання. Обчислиме математичне сподівання та дисперсію прибутку для кожної з альтернатив (кожного виду товару).

$$M_1 = 210 \cdot 0,5 + 110 \cdot 0,5 = 160 \text{ (у.г.о.)},$$

$$\sigma_1^2 = 210^2 \cdot 0,5 + 110^2 \cdot 0,5 - 160^2 = 2500,\ \sigma_1 = 50 \text{ у.г.о.}$$

$$M_2 = 151 \cdot 0,99 + 51 \cdot 0,01 = 150 \text{ (у.г.о.)},$$

$$\sigma_2^2 = 151^2 \cdot 0,99 + 51^2 \cdot 0,01 - 150^2 = 99,\ \sigma_2 = 9,9 \text{ у.г.о.}$$

Знаходимо коефіцієнт варіації прибутку для кожної з альтернатив:

$$CV_1 = \frac{50}{160} \approx 0,31,\ CV_2 = \frac{9,9}{150} \approx 0,07,\ CV_2 < CV_1.$$

З точки зору співвідношення ризику та прибутку оптимальною є альтернатива виробництва товару T_2.

7.3 Застосування леми Маркова та нерівності Чебишева для оцінювання ризику

Лема Маркова. Якщо випадкова величина X не набуває від'ємних значень, то $\forall \alpha > 0$ виконується нерівність:

$$P(X > \alpha) \le \frac{M(X)}{\alpha}. \tag{7.3}$$

У (7.3) $P(X > \alpha)$ – ймовірність того, що випадкова величина X прийме значення, що перевищує α, $M(X)$ – математичне сподівання випадкової величини X. Застосування леми Маркова дозволяє у багатьох випадках наближено оцінити ймовірність збитків.

Розглянемо таке застосування для оцінки кредитоспроможності позичальника. Його фінансовий стан можна оцінити з допомогою коефіцієнта поточної ліквідності (КПЛ) – відношення ліквідних активів підприємства до його боргів. При КПЛ≥ 2 позичальник має стійкий фінансовий стан, при КПЛ<1 для нього існує загроза банкротства.

Приклад 1. КПЛ підприємства позичальника на протязі тривалого часу дорівнює 1,8. Оцінити ймовірність повернення цим підприємством кредиту.

Розв'язання. Для оцінки ймовірності повернення кредиту застосуємо лему Маркова. Розглянемо КПЛ підприємства як випадкову величину, математичне сподівання $M(X)$ якої дорівнює 1,8. Приймемо за α значення КПЛ = 2, що відокремлює платоспроможні підприємства від неплатоспроможних.

$$P(X > 2) \le \frac{1,8}{2} = 0,9,$$

тобто ймовірність повернення кредиту становить менше 90%.

<u>*Нерівність Чебишева*</u> дозволяє визначити верхню межу ймовірності того, що випадкова величина X відхилиться у обидві сторони від свого математичного сподівання на величину, що перевищує задане число $\varepsilon > 0$:

$$P\left(\left|X - M(X)\right| > \varepsilon\right) \le \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}, \qquad (7.4)$$

де σ^2 – дисперсія випадкової величини X.

Якщо потрібно оцінити ймовірність відхилення випадкової величини лише у одну сторону, наприклад, у більшу сторону, тобто $P\left(\left(X - M(X)\right) > \varepsilon\right)$, то нерівність Чебишева використовують у вигляді:

$$P\left(\left(X - M(X)\right) > \varepsilon\right) \le \frac{\sigma^2}{2\varepsilon^2}. \qquad (7.5)$$

Приклад 2. У банку є 2 підприємства – позичальники, значення КПЛ яких за останні 3 квартали склали для першого підприємства – 1,5; 1,3; 1,7, для другого – відповідно 1,6; 1,4; 1,5. Оцінити ймовірність того, що у поточному кварталі підприємства ліквідують заборгованість перед банком.

Розв'язання. Оцінимо ймовірності того, що значення КПЛ цих підприємств у поточному кварталі перевищить 2. Для цього використаємо нерівність Чебишева. Нехай випадкова величина X відповідає КПЛ. Оцінимо математичні сподівання цієї величини для обох підприємств як середні арифметичні значення їх КПЛ. Маємо:

$$M(X_1) = \frac{1,5 + 1,7 + 1,3}{3} = 1,5, \; M(X_2) = \frac{1,6 + 1,4 + 1,5}{3} = 1,5.$$

Застосування леми Маркова дає однакову оцінку ймовірності повернення боргів: $P(X_1 > 2) = P(X_2 > 2) \le \frac{1,5}{2} = 0,75$, тобто ця ймовірність не перевищує 75%. Уточнимо цю оцінку з допомогою нерівності Чебишева, для чого знайдемо оцінки дисперсій цих випадкових величин.

$$\sigma_1^2 = \frac{(1,6-1,5)^2 + (1,3-1,5)^2 + (1,7-1,5)^2}{3} = 0,027,$$

$$\sigma_2^2 = \frac{(1,6-1,5)^2 + (1,4-1,5)^2 + (1,5-1,5)^2}{3} = 0,007.$$

Для повернення боргу потрібно, щоб $X_1 > 2$, $X_2 > 2$, тобто

$$X_1 - M(X_1) = X_1 - 1,5 > 0,5; X_2 - M(X_2) = X_2 - 1,5 > 0,5.$$

Застосувавши нерівність Чебишева у формі (7.5), отримуємо:

$$P\left((X_1 - 1,5) > 0,5\right) \le \frac{0,027}{2 \cdot (0,5)^2} \approx 0,05, \; P\left((X_2 - 1,5) > 0,5\right) \le \frac{0,007}{2 \cdot (0,5)^2} \approx 0,01.$$

Отже, ймовірність ліквідації заборгованості перед банком у поточному кварталі для першого підприємства не перевищує 5%, для другого – 1%.

Перелік літератури

1. Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных В.И. Математические методы в экономике. – М.: Дело и сервис, 2004. – 368 с.
2. Колемаев В.А. Математическая экономика. – М.:ЮНИТИ, 2005. – 399 с.
3. Экономико – математическое моделирование / под ред. И.Н. Дрогобыцкого. – М.: Экзамен, 2004. – 800 с.
4. Ашманов С.А. Введение в математическую экономику. – М.: Наука, 1984. – 296 с.
5. Ланкастер К. Математическая экономика. – М.: Советское радио, 1972.
6. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. – М.: Прогресс, 1975. – 605 с.
7. Колемаев В.А., Малыхин В.И., Калинина В.Н. Математическая экономика в примерах и задачах. – М.: ГАУ, 1996.
8. Хазанова Л.Э. Математическое моделирование в экономике. – М.: Бег, 1996.
9. Гераськин М.И. Математическая экономика. – Самара: Изд-во СГАУ, 2011. – 176 с.
10. Орлова И.В., Половников В.А. Экономико-математические методы и модели: компьютерное моделирование. – М.: Вузовский учебник, 2007. – 365 с.
11. Монахов А.В. Математические методы анализа экономики. –С.-Пб: Питер, 2002. – 176 с.
12. Кігель В.Р. Математичні методи ринкової економіки. – К.: Кондор, 2003. – 158с.
13. Трояновский В.М. Математическое моделирование в менеджменте. – М.: РДЛ, 2003. – 256 с.
14. Шелобаев С.И. Математические методы и модели в экономике, финансах и бизнесе. – М.: ЮНИТИ, 2001. – 367 с.