1. Означення та властивості перетворення Лапласа

1.1 Поняття перетворення Лапласа. Оригінал та зображення

Означення 1.1. *Перетворенням Лапласа* функції $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, називають функцію $F(p)$ комплексної змінної p, що визначається рівністю:

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt . \tag{1.1}$$

Функцію $F(p)$ називають *зображенням* функції $f(t)$ при перетворенні Лапласа, а інтеграл у правій частині рівності (1.1) називають *інтегралом Лапласа*.

Розділ математики, що вивчає перетворення Лапласа, його властивості та застосування, називають *операційним численням*, а метод розв'язування рівнянь різноманітних типів за допомогою перетворення Лапласа – *операційним методом*.

Означення 1.2. *Оригіналом* при перетворенні Лапласа називають довільну функцію $f(t)$, що задовольняє наступним умовам:

1) $f(t) = 0$ при $t < 0$;

2) на довільному обмеженому інтервалі $f(t)$ може мати лише скінченне число точок розриву першого роду;

3) $|f(t)|$ зростає не швидше показникової функції, тобто існують такі числа α та $M > 0$, що $|f(t)| < M \cdot e^{\alpha t}$. При цьому найменше з α, для яких виконана остання умова, називають *показником росту* функції $f(t)$.

Найпростішим прикладом оригіналу є функція Хевісайда або одинична функція:

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Легко перевірити, що вона задовольняє всім умовам функції оригінала. Її показником росту є число $\alpha = 0$.

Теорема 1.1. (Теорема існування зображення). Якщо функція $f(t)$ є оригіналом з показником росту α, то інтеграл Лапласа $F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$ є абсолютно збіжним у півплощині $\operatorname{Re} p > \alpha$ комплексної площини p і визначає зображення $F(p)$, що є аналітичною у цій півплощині функцією.

Доведення. Оскільки $f(t)$ є оригіналом з показником росту α, то виконується умова $|f(t)| < M \cdot e^{\alpha t}$. Нехай $p = \sigma + is$. Тоді $\left|e^{-pt}\right| = e^{-\sigma t}$ і $\left|f(t) e^{-pt}\right| \leq M e^{(\alpha - \sigma)t}$. Звідси знаходимо:

$$\int_0^{+\infty}\left|f(t)e^{-pt}\right|dt \le M\int_0^{+\infty} e^{(\alpha-\sigma)t}dt = M\left.\frac{e^{(\alpha-\sigma)t}}{\alpha-\sigma}\right|_0^{+\infty} = \frac{M}{\sigma-\alpha}, \qquad (1.2)$$

оскільки за умовою теореми $\alpha-\sigma<0$, тому $e^{(\alpha-\sigma)t}\to 0$ при $t\to+\infty$. Отже, з нерівності (1.2) випливає, що інтеграл Лапласа є абсолютно збіжним при $\operatorname{Re} p>\alpha$.

Доведемо аналітичність $F(p)$. Для довільної точки півплощини $\operatorname{Re} p>\alpha$ маємо:

$$\frac{\Delta F}{\Delta p} = \frac{F(p+\Delta p)-F(p)}{\Delta p} = \int_0^{+\infty} e^{-pt}f(t)\frac{1}{\Delta p}\left(e^{-\Delta pt}-1\right)dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-pt}f(t)\frac{1}{\Delta p}\left(-\Delta p\cdot t+\frac{(\Delta p\cdot t)^2}{2!}-\frac{(\Delta p\cdot t)^3}{3!}+\ldots\right)dt = -\int_0^{+\infty} e^{-pt}tf(t)dt+\varepsilon,$$

де $\varepsilon = \Delta p\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}t^2\left(\frac{1}{2!}-\frac{\Delta p\cdot t}{3!}+\frac{(\Delta p\cdot t)^2}{4!}-\ldots\right)dt$. Знайдемо оцінку для величини ε:

$$|\varepsilon| \le |\Delta p|\cdot\int_0^{+\infty}\left|e^{-pt}\right|\left|f(t)\right|t^2\left|\left(\frac{1}{2!}-\frac{\Delta p\cdot t}{3!}+\frac{(\Delta p\cdot t)^2}{4!}-\ldots\right)\right|dt <$$

$$< |\Delta p|\left|\int_0^{+\infty} Me^{\alpha t}e^{-\sigma t}t^2\left|\left(\frac{1}{2!}-\frac{\Delta p\cdot t}{3!}+\frac{(\Delta p\cdot t)^2}{4!}-\ldots\right)dt\right|\right.$$

або $|\varepsilon|<|\Delta p|M\int_0^{+\infty} e^{-(\sigma-\alpha-|\Delta p|)t}t^2dt$. Інтегруючи частинами праву частину цієї нерівності, отримаємо:

$$|\varepsilon| < \frac{2M}{\left(\sigma-\alpha-|\Delta p|\right)^3}|\Delta p|.$$

Тому при $\Delta p\to 0$ маємо $|\varepsilon|\to 0$ і знаходимо вираз для $F'(p)$ у вигляді:

$$F'(p) = -\int_0^{+\infty} e^{-pt}t\cdot f(t)dt.$$

Цей інтеграл існує. Дійсно, $\left|tf(t)\right|<Me^{(\alpha+\delta)t}e^{-\delta t}\cdot t$, де δ – досить мале число. Функція $Mte^{-\delta t}$ при $t>0$ має максимум, тому існує таке число $M_1>0$, для якого $Mte^{-\delta t}<M_1$. Тоді $\left|tf(t)\right|<M_1e^{(\alpha+\delta)t}$. Отже, похідна $F'(p)$ існує і тому $F(p)$ є функцією, аналітичною у області $\operatorname{Re} p>\alpha$. Теорему доведено.

Зауважимо, що, хоча теорема 1.1 стверджує збіжність інтеграла лише при $\operatorname{Re} p>\alpha$, найчастіше функція $F(p)$ є визначеною та аналітичною на всій площині, за винятком ізольованих особливих точок.

Теорема 1.2. (Необхідна умова зображення). Якщо функція $F(p)$ є зображенням функції $f(t)$ з показником росту α, то $\lim\limits_{p\to\infty} F(p)=0$.

Доведення. Оскільки $F(p)$ є зображенням функції $f(t)$ з показником росту α, то при $p=\sigma+is$ $|F(p)|=\left|\int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt\right|<\int\limits_0^{+\infty} Me^{(\alpha-\sigma)t}dt=\dfrac{M}{\sigma-\alpha}$. З цієї нерівності випливає, що $\lim\limits_{\operatorname{Re}p\to\infty} F(p)=0$. Оскільки $F(p)$ є аналітичною при $\operatorname{Re}p>\alpha$, то $F(p)\to 0$ при $p\to\infty$ по довільному напрямку. Теорему доведено.

З цієї теореми випливає, що такі функції, як, наприклад, $F(p)=1$, $F(p)=p$ не можуть бути зображеннями при перетворенні Лапласа.

За формулою (1.1) кожному оригіналу ставиться у відповідність функція $F(p)$. Цю відповідність між оригіналом $f(t)$ та його зображенням $F(p)$ записують у вигляді: $f(t)\div F(p)$.

Оскільки оригінал дорівнює нулю при $t<0$, то у подальшому для спрощення записів будь-яку функцію-оригінал, яку можна представити у вигляді $f(t)\cdot\eta(t)$ ($\eta(t)$ – функція Хевісайда), будемо коротко позначати $f(t)$.

Розглянемо приклади знаходження зображення $F(p)$ за заданим оригіналом $f(t)$ при перетворенні Лапласа.

Приклад 1.1. Знайти зображення функції Хевісайда.

Розв'язання. Маємо $F(p)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-pt}dt=\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_0^{b} e^{-pt}dt=\lim\limits_{b\to+\infty}\left(-\dfrac{e^{-pt}}{p}\right)\Bigg|_0^b=\dfrac{1}{p}$.

Таким чином, отримали, що $1=\eta(t)\div\dfrac{1}{p}$.

Приклад 1.2. Знайти зображення функції $f(t)=e^{at}$, $a\in\mathbb{C}$.

Розв'язання. За формулою (1.1) для $\operatorname{Re}(p-a)>0$ знаходимо:

$$F(p)=\int\limits_0^{+\infty} e^{at}\cdot e^{-pt}dt=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_0^{b} e^{-(p-a)t}dt=\frac{1}{a-p}\lim_{b\to+\infty} e^{-(p-a)t}\Big|_0^b=$$
$$=\frac{1}{a-p}\lim_{b\to+\infty}\left(e^{-(p-a)b}-1\right)=\frac{1}{p-a}.$$

Отже, $e^{at}\div\dfrac{1}{p-a}$. При $a=0$ маємо результат, отриманий у прикладі 1.1.

Приклад 1.3. Знайти зображення функції $f(t)=t$.

Розв'язання. Скористаємося формулою (1.1), згідно з якою отримуємо:

$$F(p)=\int\limits_0^{+\infty} te^{-pt}dt=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_0^{b} te^{-pt}dt=\left\|\begin{matrix} u=t;\, dv=e^{-pt}dt; \\ du=dt;\, v=-\dfrac{e^{-pt}}{p}\end{matrix}\right\|=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{te^{-pt}}{p}-\frac{e^{-pt}}{p^2}\right)\Bigg|_0^b=$$

$$=\frac{1}{p^2}.$$

Таким чином, отримали, що $t \div \dfrac{1}{p^2}$.

Знаходження зображення за допомогою формули (1.1) не завжди є легким та зручним. Ефективно вирішити цю задачу допомагає використання властивостей перетворення Лапласа, які ми розглянемо далі.

1.2 Властивості перетворення Лапласа

Теорема 1.3. (Властивість лінійності). Якщо $f(t)\div F(p)$, $g(t)\div G(p)$, то $A\cdot f(t)+B\cdot g(t)\div A\cdot F(p)+B\cdot G(p)$, де A та B – сталі.

Доведення цієї теореми випливає з властивості лінійності для інтегралів. Використовуючи властивість лінійності та знайдене зображення показникової функції e^{at}, знайдемо зображення тригонометричних та показникових функцій.

$$\sin\omega t=\frac{e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}}{2i}\div\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i\omega}-\frac{1}{p+i\omega}\right)=\frac{\omega}{p^2+\omega^2};$$

$$\cos\omega t=\frac{e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}}{2}\div\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i\omega}+\frac{1}{p+i\omega}\right)=\frac{p}{p^2+\omega^2}:$$

$$\mathrm{sh}\omega t=\frac{e^{\omega t}-e^{-\omega t}}{2}\div\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i\omega}-\frac{1}{p+i\omega}\right)=\frac{\omega}{p^2-\omega^2};$$

$$\mathrm{ch}\omega t=\frac{e^{\omega t}+e^{-\omega t}}{2}\div\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i\omega}+\frac{1}{p+i\omega}\right)=\frac{p}{p^2-\omega^2}.$$

Теорема 1.4. (Теорема подібності). Якщо $f(t)\div F(p)$, то для довільної дійсної сталої $\alpha>0$ $f(\alpha t)\div\dfrac{1}{\alpha}F\left(\dfrac{p}{\alpha}\right)$.

Доведення. $f(\alpha t)\div\int\limits_0^{+\infty} f(\alpha t)e^{-pt}dt$. Виконаємо у цьому інтегралі заміну змінної $\alpha t=t_1$. Тоді $dt=\dfrac{dt_1}{\alpha}$. Маємо:

$$f(\alpha t)\div\int\limits_0^{+\infty} f(\alpha t)e^{-pt}dt=\frac{1}{\alpha}\int\limits_0^{+\infty} f(t_1)e^{-\frac{pt_1}{\alpha}}dt_1=\frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

Теорему доведено.

Теорема 1.5. **(Теорема зміщення)**. Якщо $f(t) \div F(p)$, то $e^{at} f(t) \div F(p-a)$, де a – довільна стала.

Доведення. Знайдемо зображення функції $e^{at} f(t)$:

$$e^{at} f(t) \div \int_0^{+\infty} e^{at} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-(p-a)t} dt = F(p-a).$$

Теорему доведено.

Використовуючи теорему зміщення, знайдемо зображення функцій $e^{at} \sin bt$, $e^{at} \cos bt$, $e^{at} \operatorname{sh} bt$, $e^{at} \operatorname{ch} bt$. Отримуємо:

$$e^{at} \sin bt \div \frac{b}{(p-a)^2 + b^2}; \; e^{at} \cos bt \div \frac{p-a}{(p-a)^2 + b^2};$$

$$e^{at} \operatorname{sh} bt \div \frac{b}{(p-a)^2 + b^2}; \; e^{at} \operatorname{ch} bt \div \frac{p-a}{(p-a)^2 + b^2}.$$

Приклад 1. 4. Знайти оригінал $f(t)$ за його зображенням $F(p)$, якщо $F(p) = \dfrac{3p-5}{p^2 - 4p + 13}$.

Розв'язання. Запишемо вираз для $F(p)$ у вигляді:

$$F(p) = \frac{3p-5}{p^2 - 4p + 13} = \frac{3(p-2)+1}{(p-2)^2 + 9} = 3 \cdot \frac{p-2}{(p-2)^2 + 3^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{(p-2)^2 + 3^2}.$$

Отримуємо: $F(p) \div 3e^{2t} \cos 3t + \dfrac{1}{3} e^{2t} \sin 3t = f(t)$.

Теорема 1.6. (Теорема запізнення). Якщо $f(t) \div F(p)$, то $f(t-\tau) \div e^{-p\tau} \cdot F(p)$, де $\tau > 0$ – довільна стала.

Доведення. Оскільки $f(t-\tau)$ є оригіналом, то $f(t-\tau) = 0$ при $t < \tau$, тому отримуємо:

$$f(t-\tau) \div \int_0^{+\infty} f(t-\tau) e^{-pt} dt = \int_\tau^{+\infty} f(t-\tau) e^{-pt} dt.$$

Виконаємо заміну $t - \tau = t_1$. Тоді знаходимо, що

$$\int_\tau^{+\infty} f(t-\tau) e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} f(t_1) \cdot e^{-p(t+\tau)} dt_1 = e^{-p\tau} \int_0^{+\infty} f(t_1) e^{-pt_1} dt_1.$$

Звідси випливає, що $f(t-\tau) \div e^{-p\tau} \cdot F(p)$. Теорему доведено.

Ця теорема дає можливість знаходити зображення кусково-неперервних функцій, зокрема, функцій, що описують імпульсні процеси.

Приклад 1.5. Знайти зображення одиничного імпульсу $f(t) = \begin{cases} 0, t < 0; \\ 1, 0 \le t \le \tau; \\ 0, t > \tau. \end{cases}$

Розв'язання. Запишемо функцію $f(t)$ за допомогою функції Хевісайда: $f(t)=\eta(t)-\eta(t-\tau)$. Тоді $f(t)\div\frac{1}{p}-\frac{e^{-p\tau}}{p}$.

Використовуючи теорему запізнення, можна довести, що зображення періодичного оригіналу з періодом T матиме вигляд:

$$F(p)=\frac{1}{1-e^{-pT}}\int_0^T f(t)e^{-pt}dt.$$

Теорема 1.7. (Теорема випередження). Якщо $f(t)\div F(p)$, то для довільної сталої величини $\tau>0$

$$f(t+\tau)\div e^{p\tau}\left(F(p)-\int_0^\tau f(t)e^{-pt}dt\right).$$

Доведення. Маємо: $f(t+\tau)\div\int_0^{+\infty}f(t+\tau)e^{-pt}dt$. Виконавши заміну змінної $t+\tau=t_1$, отримуємо:

$$f(t+\tau)\div e^{p\tau}\int_\tau^{+\infty}f(t_1)e^{-pt_1}dt_1=e^{p\tau}\left(\int_0^{+\infty}f(t_1)e^{-pt_1}dt_1-\int_0^\tau f(t_1)e^{-pt_1}dt_1\right)=$$

$$=e^{p\tau}\left(F(p)-\int_0^\tau f(t)e^{-pt_1}dt\right).$$

Теорему доведено.

1.3 Теореми про диференціювання та інтегрування оригіналів і зображень

Теорема 1.8. (Теорема диференціювання по параметру). Якщо $f(t,x)\div F(p,x)$ і функція $f(t,x)$ при кожному фіксованому значенні x є оригіналом, а функція $F(p,x)$ має частинну похідну по x, то $\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\div\frac{\partial F(p,x)}{\partial x}$.

Приклад 1.6. Знайти зображення функції $f(t)=te^{at}$, де a – довільна стала.

Розв'язання. $e^{at}\div\frac{1}{p-a}$. Диференціюємо по параметру a обидві частини цього співвідношення: $te^{at}\div\frac{1}{(p-a)^2}$.

Теорема 1.9. (Теорема про диференціювання оригіналу). Якщо $f(t)\div F(p)$ і функції $f'(t),\ f''(t),\dots,f^{(n)}(t)$ є оригіналами, то

$$f'(t)\div pF(p)-f(0),$$

$$f''(t) \div p^2F(p) - pf(0) - f'(0),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$f^{(n)}(t) \div p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0).$$

Доведення. Для першої похідної $f'(t)$ маємо:

$$f'(t) \div \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}dt = \begin{Vmatrix} u = e^{-pt}, dv = f'(t)dt, \\ du = -pe^{-pt}dt, v = f(t) \end{Vmatrix} = f(t)e^{-pt}\Big|_0^{+\infty} +$$
$$+p\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt = -f(0) + pF(p).$$

Отже, $f'(t) \div pF(p) - f(0)$. Користуючись цією формулою, знайдемо зображення другої похідної $f''(t) = \left(f'(t)\right)'$:

$$f''(t) \div p\left(pF(p) - f(0)\right) - f'(0) = p^2F(p) - pf(0) - f'(0).$$

Аналогічно знаходимо зображення $f'''(t)$. Застосовуючи формулу для зображення першої похідної $(n-1)$ разів, отримуємо:

$$f^{(n)}(t) \div p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0).$$

Теорему доведено.

Якщо для функції $f(t)$ $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0$, то отримуємо: $f^{(n)}(t) \div p^nF(p)$.

Приклад 1.7. Знайти зображення виразу $x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) + 5$, якщо $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$.

Розв'язання. Нехай $x(t) \div X(p)$. Тоді за теоремою про диференціювання оригіналу отримуємо:

$$x'(t) \div pX(p) - x(0) = pX(p) - 1,$$
$$x''(t) \div p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p) - p - 2.$$

Підставивши ці зображення функції $x(t)$ та її похідних у заданий вираз та враховуючи, що $5 \div \frac{5}{p}$, отримуємо:

$$x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) + 5 \div p^2X(p) - p - 2 + 3\left(pX(p) - 1\right) + 2X(p) + \frac{5}{p} =$$
$$= \left(p^2 + 3p + 2\right)X(p) - p - 5 + \frac{5}{p}.$$

З теореми про диференціювання оригіналу випливають такі наслідки.

Наслідок 1. Якщо $f'(t)$ є оригіналом, а функція $F(p)$ аналітична при $p \to \infty$, то $\lim\limits_{p\to\infty} pF(p) = f(0)$.

Наслідок 2. Якщо $f'(t)$ є оригіналом і існує границя функції $f(t)$ при $t \to \infty$, то $\lim\limits_{p\to 0} pF(p) = \lim\limits_{t\to\infty} f(t)$.

Теорема 1.10. (Теорема про диференціювання зображення). Якщо $f(t) \div F(p)$, то $F'(p) \div -tf(t)$, $F''(p) \div t^2 f(t)$, …, $F^{(n)}(p) \div (-1)^n t^n f(t)$.

Доведення. Оскільки функція $F(p)$ є аналітичною у півплощині $\operatorname{Re} p > \alpha$, то у неї існують похідні довільних порядків. Тому, диференціюючи зображення $F(p) = \int\limits_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$ по p, отримаємо:

$$F'(p) = \int\limits_0^{+\infty} \left(f(t) e^{-pt} \right)'_p dt = \int\limits_0^{+\infty} f(t)(-t) e^{-pt} dt \div -tf(t).$$

Тоді $F''(p) \div (-t)(-t) f(t) = t^2 f(t)$, кожне диференціювання $F(p)$ по p відповідає множенню оригіналу попередньої похідної на $(-t)$, тому отримуємо: $F^{(n)}(p) \div (-1)^n t^n f(t)$. Теорему доведено.

Приклад 1.8. Знайти зображення функції $f(t) = t^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Розв'язання. Раніше ми отримали, що $t \div \dfrac{1}{p^2}$. Тоді $-t^2 \div \left(\dfrac{1}{p^2} \right)' = -\dfrac{2}{p^3}$, тому $t^2 \div \dfrac{2}{p^3}$. Продовжуючи диференціювання, отримаємо, що $t^n \div \dfrac{n!}{p^{n+1}}$.

Теорема 1.11. (Теорема про інтегрування оригіналу). Якщо $f(t) \div F(p)$, то $\int\limits_0^t f(\tau) d\tau \div \dfrac{F(p)}{p}$.

Доведення. Нехай $\varphi(t) = \int\limits_0^t f(\tau) d\tau$ і $\varphi(t) \div \Phi(p)$. За теоремою про диференціювання оригіналу $\varphi'(t) \div p\Phi(p) - \varphi(0) = p\Phi(p)$, оскільки $\varphi(0) = 0$. З співвідношень $\varphi'(t) = f(t) \div F(p)$ випливає, що $F(p) = p\Phi(p)$, звідки $\Phi(p) = \dfrac{F(p)}{p}$, тобто $\int\limits_0^t f(\tau) d\tau \div \dfrac{F(p)}{p}$. Теорему доведено.

Приклад 1.9. Знайти зображення функції $\varphi(t) = \int\limits_0^t \tau \cdot \cos 2\tau d\tau$.

Розв'язання. Знайдемо зображення підінтегральної функції $t\cos 2t$. Маємо $\cos 2t \div \frac{p}{p^2+4}$. За теоремою про диференціювання зображення знаходимо

$$t\cos 2t \div -\left(\frac{p}{p^2+4}\right)' = -\frac{4-p^2}{\left(p^2+4\right)^2} = \frac{p^2-4}{\left(p^2+4\right)^2}.$$

Тоді за теоремою про інтегрування оригіналу отримуємо:

$$\int_0^t \tau \cdot \cos 2\tau d\tau \div \frac{p^2-4}{p\left(p^2+4\right)^2}.$$

Теорема 1.12. (Теорема про інтегрування зображення). Якщо $f(t) \div F(p)$ і інтеграл $\int_p^\infty F(q)dq$ збіжний, то $\int_p^\infty F(q)dq \div \frac{f(t)}{t}$.

Доведення. Враховуючи співвідношення $F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$ і змінюючи порядок інтегрування по t та q, отримуємо:

$$\int_p^\infty F(q)dq = \int_p^\infty \left(\int_0^{+\infty} f(t)e^{-qt}dt\right)dq = \int_0^{+\infty}\left(\int_p^\infty e^{-qt}dq\right)f(t)dt = \int_0^{+\infty}\left(-\frac{e^{-qt}}{t}\right)\Bigg|_p^\infty f(t)dt =$$
$$= \int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{t}e^{-pt}dt \div \frac{f(t)}{t}.$$

Теорему доведено.

Приклад 1.10. Знайти зображення функції $\frac{e^t-1}{t}$.

Розв'язання. Оскільки $e^t - 1 \div \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}$, то за теоремою 1.12 отримуємо:

$$\frac{e^t-1}{t} \div \int_p^\infty\left(\frac{1}{q-1}-\frac{1}{q}\right)dq = \ln\frac{q-1}{q}\Bigg|_p^\infty = -\ln\frac{p-1}{p} = \ln\frac{p}{p-1}.$$

1.4 Зображення згортки функцій. Формула Дюамеля

<u>**Означення 1.3**</u>. *Згорткою* неперервних функцій $f(t)$ та $g(t)$, $t \geq 0$, називають інтеграл $f * g = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$.

Зауважимо, що дія згортки є комутативною: $f * g = g * f$. Крім того, згортка неперервних функцій також є неперервною.

Теорема 1.13. Якщо функції $f(t)$ та $g(t)$ є оригіналами, то їх згортка також є оригіналом.

Доведення. Покажемо, що функція $f*g$ задовольняє всім трьом умовам оригіналу. З неперервності $f(t)$ та $g(t)$ випливає неперервність згортки цих функцій.

Оскільки $f(t)$ та $g(t)$ є оригіналами, то вони тотожно дорівнюють нулю при $t<0$ і підінтегральний вираз у формулі згортки $f*g=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$ тотожно дорівнює нулю при $t<0$, тому $f*g=0$ при $t<0$.

Доведемо, що функція $\varphi(t)=f*g$ задовольняє третю умову оригіналу, тобто $|\varphi(t)|\le K\cdot e^{\beta t}$. Оскільки $f(t)$ та $g(t)$ є оригіналами, то існують дійсні константи α_1 та α_2, такі, що $|f(t)|\le M_1e^{\alpha_1 t}$, $|g(t)|\le M_2e^{\alpha_2 t}$. Нехай $\alpha=\max(\alpha_1,\alpha_2)$. Тоді $|f(\tau)\cdot g(t-\tau)|\le M_1M_2e^{\alpha\tau}e^{\alpha(t-\tau)}=M_1M_2e^{\alpha t}=Ke^{\alpha t}$, де $K=M_1M_2$. Звідси випливає, що $|\varphi(t)|\le\int_0^t|f(\tau)\cdot g(t-\tau)|d\tau\le\int_0^t Ke^{\alpha\tau}d\tau=Kte^{\alpha t}$.

Оскільки $\forall t\ge 0\;\; t<e^t$, то $|\varphi(t)|\le Ke^{(\alpha+1)t}=Ke^{\beta t}$, де $\beta=\alpha+1$. Таким чином, згортка $\varphi(t)=f*g$ є оригіналом. Теорему доведено.

Теорема 1.14. (Теорема про множення зображень). Якщо $f(t)\div F(p)$, а $g(t)\div G(p)$, то $F(p)\cdot G(p)\div f(t)*g(t)$, де $f(t)*g(t)=\int_0^t f(\tau)\cdot g(t-\tau)d\tau$ – згортка функцій $f(t)$ і $g(t)$.

Доведення. Функція $f*g$ є оригіналом. За означенням перетворення Лапласа маємо:

$$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\div\int_0^{+\infty}\left(\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right)e^{-pt}dt=\int_0^{+\infty}e^{-pt}dt\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

Змінивши порядок інтегрування у отриманому повторному інтегралі, після підстановки $t_1=t-\tau$ отримуємо:

$$\int_0^{+\infty}e^{-pt}dt\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau=\int_0^{+\infty}f(\tau)d\tau\int_\tau^{+\infty}e^{-pt}g(t-\tau)dt=$$
$$=\int_0^{+\infty}f(\tau)e^{-p\tau}d\tau\int_0^{+\infty}g(t_1)e^{-pt_1}dt_1=F(p)\cdot G(p).$$

Теорему доведено.

З теореми 1.14 випливає, що, коли $f*g\div F(p)\cdot G(p)$ і $f'(t)$ є оригіналом, то виконується *формула Дюамеля*:

$$pF(p)G(p)\div\int_0^t f'(\tau)g(t-\tau)d\tau+f(0)g(t). \tag{12.3}$$

Дійсно, вираз $pF(p)G(p)$ можна записати у вигляді:

$$pF(p)G(p)=(pF(p)-f(0))G(p)+f(0)G(p)\div f'(t)*g(t)+f(0)g(t).$$

Приклад 1.11. Знайти оригінал, зображенням якого є функція $F(p)=\dfrac{3p^2}{\left(p^2+1\right)^2}$.

Розв'язання. Запишемо задане зображення $F(p)$ у вигляді:

$$F(p)=3p\cdot\frac{1}{p^2+1}\cdot\frac{p}{p^2+1}.$$

Застосуємо формулу Дюамеля, згідно з якою виконується співвідношення:

$$3p\cdot\frac{1}{p^2+1}\cdot\frac{p}{p^2+1}\div 3\int_0^t\cos\tau\cdot\cos(t-\tau)d\tau+\sin 0\cdot\cos t=$$

$$=\frac{3}{2}\int_0^t\left(\cos(2t-\tau)+\cos t\right)d\tau=\frac{3}{2}\left(\frac{\sin t}{2}+\frac{\sin t}{2}+t\cos t\right)=\frac{3}{2}(\sin t+t\cos t).$$

1.5 Зображення степеневої функції з довільним показником степеня

Раніше (приклад 1.8) було знайдено зображення степеневої функції $t^n\div\dfrac{n!}{p^{n+1}}$ для натуральних показників степеня $n\in\mathbb{N}$. Отримаємо формулу для зображення оригіналу t^k, де k – довільне додатне число (при $k<0$ t^k має нескінченний розрив при $t=0$). Для цього спочатку познайомимось з важливою спеціальною функцією – гамма – функцією Ейлера. Вона визначається невласним інтегралом:

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}dt.$$

Можна перевірити, що цей невласний інтеграл є збіжним при $x>0$.

До найважливіших властивостей гамма – функції відносять рекурентну формулу $\Gamma(x)=(x-1)\Gamma(x-1)$, що виконується при $x>1$. Оскільки виконується рівність $\Gamma(1)=\int_0^{+\infty}e^{-t}dt=1$, то за рекурентною формулою можна обчислити значення гамма – функції для довільного натурального аргументу. Маємо:

$$\Gamma(n)=(n-1)\Gamma(n-1)=(n-1)(n-2)\Gamma(n-2)=...=$$
$$=(n-1)(n-2)...\cdot 2\cdot 1\cdot\Gamma(1)=(n-1)!$$

Обчисливши відповідний невласний інтеграл, можна знайти значення $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$, що часто зустрічається при розв'язанні задач, пов'язаних з гамма –

функцією: $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$. Застосуємо гамма – функцію для знаходження зображення степеневої функції t^k:

$$t^k \div \int_0^{+\infty} t^k e^{-pt}dt = \left\| \begin{matrix} pt = t_1, \\ pdt = dt_1 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{p^{k+1}}\int_0^{+\infty} t_1^k e^{-t_1}dt_1 = \frac{\Gamma(k+1)}{p^{k+1}}.$$

Отже, отримали формулу: $t^k \div \frac{\Gamma(k+1)}{(k+1)!}$. Наприклад, при $k=\frac{1}{2}$ отримуємо: $\sqrt{t} \div \frac{\sqrt{\pi}}{2p\sqrt{p}}$, при $k=-\frac{1}{2}$ маємо: $\frac{1}{\sqrt{t}} \div \sqrt{\frac{\pi}{p}}$. Можна довести, що інтеграл Лапласа для функції t^k збігається при $k>-1$, хоча для значень $-1<k<0$ t^k має нескінченний розрив при $t=0$.

1.6 Зображення деяких спеціальних функцій

Розглянемо перетворення Лапласа для деяких спеціальних функцій.

Функцію $\operatorname{erf} t = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-u^2}du$ називають *інтегралом ймовірностей*. Ряд для функції e^{-u^2} $e^{-u^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{u^{2n}}{n!}$ є рівномірно збіжним на всій числовій прямій. У результаті його інтегрування у межах від 0 до t отримуємо рівномірно збіжний ряд для інтегралу ймовірностей:

$$\operatorname{erf} t = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-u^2}du = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{t^{2n+1}}{n!\cdot(2n+1)}.$$

При великих значення аргументу t здебільшого використовують функцію $\operatorname{Erf} t = 1-\operatorname{erf} t = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_t^{+\infty} e^{-u^2}du$.

Знайдемо зображення інтегралу ймовірностей, для чого спочатку визначимо зображення функції $f(t)=e^{-t^2}$.

$$e^{-t^2} \div \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cdot e^{-pt}dt = e^{\frac{p^2}{4}}\cdot\int_0^{+\infty} e^{-\left(t+\frac{p}{2}\right)^2}dt = \left\| \begin{matrix} t+\dfrac{p}{2}=\tau, \\ dt = d\tau \end{matrix} \right\| = e^{\frac{p^2}{4}}\int_{p/2}^{\infty} e^{-\tau^2}d\tau =$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{\frac{p^2}{4}}\cdot \operatorname{Erf}\left(\frac{p}{2}\right).$$

Тоді, за теоремою інтегрування оригіналу, для інтегралу ймовірностей $\operatorname{erf} t$ отримуємо:

$$\operatorname{erf} t = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-u^2}du \div \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{p}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot e^{\frac{p^2}{4}}\cdot \operatorname{Erf}\left(\frac{p}{2}\right) = \frac{1}{p}\cdot e^{\frac{p^2}{4}}\cdot \operatorname{Erf}\left(\frac{p}{2}\right).$$

Знайдемо зображення при перетворенні Лапласа *функцій Бесселя*. Нагадаємо, що функція Бесселя першого роду порядку ν $J_\nu(t)$ визначається як степеневий ряд, що є розв'язком *диференціального рівняння Бесселя*:

$$t^2x''(t)+t\cdot x'(t)+\left(t^2-\nu^2\right)x(t)=0.$$

Цей ряд має вигляд: $x(t)=J_\nu(t)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{k!\cdot\Gamma(k+\nu+1)}\left(\dfrac{t}{2}\right)^{2k+\nu}$. Функція $J_\nu(t)$ є неперервною функцією, визначеною на всій числовій прямій, якщо $\nu\in\mathbb{Z}$. Якщо $\nu\notin\mathbb{Z}$, то $J_\nu(t)$ визначена додатних значень аргументу t. При $\nu=n\in\mathbb{N}$ отримуємо $J_n(t)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{k!\cdot(n+k)!}\left(\dfrac{t}{2}\right)^{n+2k}$. Для цілих від'ємних значень порядку ν $J_{-n}(t)=(-1)^nJ_n(t)$. Для обчислення функцій Бесселя першого роду $J_\nu(t)$ можна використовувати рекурентну формулу: $J_{\nu+1}(t)=J_{\nu-1}(t)-2J'_\nu(t)$.

Використовуючи означення функції $J_n(t)$, можна довести, що вона є оригіналом. Знайдемо її перетворення Лапласа. Спочатку знайдемо зображення функції $J_0(t)$. Ця функція задовольняє рівняння Бесселя при $\nu=0$:

$$tJ_0''(t)+J_0'(t)+tJ_0(t)=0.$$

Нехай $J_0(t)\div L_0(p)$. Оскільки $J_0(0)=1$, $J_0'(0)=0$, то, за теоремою про диференціювання оригіналу, маємо: $J_0'(t)\div pL_0(p)-1$, $J_0''(t)\div p^2L_0(p)-p$. За теоремою про диференціювання зображення маємо:

$$tJ_0(t)\div -L_0'(p),\ tJ_0''(t)=-\left(p^2L_0(p)-p\right)'=-2pL_0(p)-p^2L_0'(p)+1.$$

Застосувавши перетворення Лапласа до рівняння Бесселя при $\nu=0$ отримуємо:

$$-2pL_0(p)-p^2L_0{}'(p)+1+pL_0(p)-1-L_0'(p)=0,$$

Це рівняння можна записати у вигляді: $\dfrac{dL_0}{L_0}=-\dfrac{pdp}{p^2+1}$. Інтегруючи цю рівність, отримуємо: $L_0(p)=\dfrac{C}{\sqrt{p^2+1}}$.

Сталу C у останній рівності знаходимо, використовуючи наслідок з теореми про диференціювання оригіналу: $\lim\limits_{p\to\infty}pF(p)=\lim\limits_{t\to0+0}f(t)$. Маємо:

$$\lim_{p\to\infty}\frac{Cp}{\sqrt{p^2+1}}=C=\lim_{t\to0+0}J_0(t)=J_0(0)=1.$$

Таким чином, отримали зображення $J_0(t)\div\dfrac{1}{\sqrt{p^2+1}}$.

Оскільки $J_0'(t) = -J_1(t)$, то $J_1(t) \div -\frac{p}{\sqrt{p^2+1}} + 1 = \frac{\sqrt{p^2+1}-p}{\sqrt{p^2+1}}$.

Використовуючи рекурентну формулу для функцій Бесселя $J_n(t)$, з допомогою методу математичної індукції можна довести, що

$$J_n(t) \div \frac{\left(\sqrt{p^2+1}-p\right)^n}{\sqrt{p^2+1}}.$$

Таким чином, отримали зображення функцій Бесселя $J_n(t)$ при перетворенні Лапласа.

1.7 Таблиця оригіналів та зображень при перетворенні Лапласа

Для подальшого використання наведемо таблицю оригіналів та зображень при перетворенні Лапласа.

№	$f(t)$	$F(p)$	№	$f(t)$	$F(p)$
1	1	$\frac{1}{p}$	10	$e^{at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}$
2	e^{at}	$\frac{1}{p-a}$	11	$e^{at}\cos\omega t$	$\frac{p}{(p-a)^2+\omega^2}$
3	t	$\frac{1}{p^2}$	12	$e^{at}\operatorname{sh}\omega t$	$\frac{\omega}{(p-a)^2-\omega^2}$
4	$t^n,\ n\in\mathbb{N}$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	13	$e^{at}\operatorname{ch}\omega t$	$\frac{p-a}{(p-a)^2-\omega^2}$
5	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	14	$t\sin\omega t$	$\frac{2\omega p}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}$
6	$\cos\omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$	15	$t\cos\omega t$	$\frac{p^2-\omega^2}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}$
7	$\operatorname{sh}\omega t$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$	16	$t\operatorname{sh}\omega t$	$\frac{2\omega p}{\left(p^2-\omega^2\right)^2}$
8	$\operatorname{ch}\omega t$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$	17	$t\operatorname{ch}\omega t$	$\frac{p^2+\omega^2}{\left(p^2-\omega^2\right)^2}$
9	$t^k,\ k>-1$	$\frac{\Gamma(k+1)}{(k+1)!}$	18	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$

2. Знаходження оригіналу за заданим зображенням

2.1 Елементарний метод знаходження оригіналу за заданим зображенням

У багатьох випадках зображення вдається перетворити до такого вигляду, коли відповідний оригінал легко знаходиться за допомогою властивостей перетворення Лапласа і таблиці зображень. Зокрема, для цього використовують метод розкладу зображення на елементарні дроби.

Приклад 2.1. Знайти оригінал для функції $F(p)=\dfrac{5(p-9)}{p(p-1)(p^2+9)}$.

Розв'язання. Представимо задане зображення $F(p)$ у вигляді суми елементарних дробів:

$$\frac{5(p-9)}{p(p-1)(p^2+9)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p-1}+\frac{Cp+D}{p^2+9}.$$

Приводячи суму дробів у правій частині цієї рівності до спільного знаменника та прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях p, отримуємо значення невідомих коефіцієнтів A, B, C та D і зображення $F(p)$ у вигляді:

$$\frac{5(p-9)}{p(p-1)(p^2+9)}=\frac{5}{p}-\frac{4}{p-1}-\frac{p}{p^2+9}+\frac{4}{p^2+9}.$$

Використавши теорему лінійності та таблицю зображень, знаходимо оригінал:

$$F(p)\div f(t)=5-4e^t-\cos 3t+\frac{4}{3}\sin 3t.$$

Приклад 2.2. Знайти оригінал для функції $F(p)=\dfrac{1}{(p^2+1)^2}$.

Розв'язання. Скористаємося теоремою 1.13 про множення зображень, згідно з якою маємо:

$$\frac{1}{(p^2+1)^2}=\frac{1}{p^2+1}\cdot\frac{1}{p^2+1}\div\sin t*\sin t=\int_0^t\sin(t-\tau)\sin\tau d\tau=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^t(\cos t-\cos(2\tau-t))d\tau=\frac{1}{2}t\cos t+\frac{1}{4}\sin(2\tau-t)\Big|_0^t=\frac{1}{2}(t\cos t-\sin t).$$

2.2 Теорема Рімана – Мелліна.

У загальному випадку розв'язання задачі знаходження оригінала за заданим зображенням ґрунтується на теоремі обернення (теоремі Рімана – Мелліна).

Теорема 2.1. (Теорема Рімана – Мелліна). Якщо функція $f(t)$ є оригіналом, а $F(p)$ – її зображення, то у кожній точці неперервності функції $f(t)$ справедлива *формула обернення Рімана – Мелліна*:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}F(p)e^{pt}dp, \tag{2.1}$$

де інтегрування здійснюється по довільній прямій $\operatorname{Re}p=\gamma$, $\gamma>\alpha$ (α – показник росту функції $f(t)$ і інтеграл розглядається у розумінні головного значення.

Доведення. Як відомо з теорії інтегралів Фур'є, для абсолютно і інтегровної і кусково-гладкої функції $f(t)$ виконується рівність:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ist}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-isu}f(u)du\right)ds, \tag{2.2}$$

де зовнішній інтеграл розглядається як головне значення.

Розглянемо функцію $\varphi(t)=e^{-\sigma t}f(t)$, $\sigma>\alpha$. Для неї справедлива формула (2.2), тобто $\varphi(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ist}\Phi(s)ds$, де $\Phi(s)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ist}\varphi(t)dt$. Оскільки $f(t)=0$ при $t<0$, то $\Phi(s)=\int_{0}^{+\infty}e^{-ist}\varphi(t)dt$. Тоді отримуємо:

$$\int_{0}^{+\infty}e^{ist}\varphi(t)dt=\int_{0}^{+\infty}e^{-ist}e^{-\sigma t}f(t)dt=\int_{0}^{+\infty}f(t)e^{-(\sigma+is)t}dt.$$

Позначимо $p=\gamma+is$, $F(p)=\int_{0}^{+\infty}f(t)e^{-pt}dt$. Оскільки $\Phi(s)=F(p)$, то

$$\varphi(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ist}F(\gamma+is)ds.$$

Тому $f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{(\gamma+si)t}F(\sigma+is)ds$. Це означає, що виконується рівність $f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}F(p)e^{pt}dp$. Теорему доведено.

2.3 Теореми розвинення

Безпосереднє застосування формули (2.1) часто пов'язане з технічними труднощами, тому на практиці для знаходження оригіналу користуються теоремами розвинення, що ґрунтуються на теоремі Рімана – Мелліна.

Теорема 2.2. **(Перша теорема розвинення)**. Якщо функція $F(p)$ є однозначною та має скінченне число особливих точок p_1, $p_2,\ldots$, p_n, то функція

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}\left(e^{p_k t}F(p_k)\right) \tag{2.3}$$

є оригіналом, що має зображення $F(p)$.

Доведення. Нехай $F(p)$ – функція, що є аналітичною у всій комплексній площині за винятком скінченного числа особливих точок та задовольняє умові $\lim\limits_{p\to\infty}F(p)=0$. Виберемо пряму, вздовж якої здійснюється у інтегрування у формулі (2.1) (пряма $\operatorname{Re}p=s$) так, щоб всі особливі точки функції $F(p)$ були розташовані ліворуч від цієї прямої. У такому випадку інтеграл (2.1) можна обчислити з допомогою леми Жордана, відомої з курсу теорії функції комплексної змінної: якщо функція $F(p)\to 0$ при $p\to\infty$, то інтеграл $\int\limits_{C_R}F(p)e^{pt}dp$, взятий по дузі C_R кола $|p|=R$, такий, що на цій дузі $\operatorname{Re}p<s$, при $t>0$ прямує до нуля, якщо $R\to\infty$.

Виберемо контур, що складається з відрізка AB прямої $\operatorname{Re}p=s$ та дуги C_R, радіус якої R візьмемо достатньо великим, щоб всі особливі точки p_1, $p_2,\ldots$, p_n функції $F(p)$ попали всередину цього контуру. За основною теоремою про лишки, відомою з курсу теорії функції комплексної змінної, отримуємо:

$$\int\limits_{AB}F(p)e^{pt}dp+\int\limits_{C_R}F(p)e^{pt}dp=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}\left(F(p)e^{pt}\right)\Big|_{p=p_k}.$$

При $t>0$ за лемою Жордана $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{C_R}F(p)e^{pt}dp=0$, тому з останньої рівності при $R\to\infty$ отримуємо:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{s-i\infty}^{s+i\infty}F(p)e^{pt}dp=f(t)=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}\left(F(p)e^{pt}\right)\Big|_{p=p_k},$$

тобто отримали формулу (2.3).

З першої теореми розвинення випливає, що у випадку, коли $F(p)=\dfrac{Q(p)}{R(p)}$ – правильний раціональний дріб, то оригіналом для нього буде функція

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n_k-1)!}\lim_{p\to p_k}\left((p-p_k)^{n_k}\frac{Q(p)}{R(p)}e^{pt}\right)^{(n_k-1)}. \tag{2.4}$$

У формулі (2.4) p_k – полюси порядку n_k функції $F(p)$. Якщо всі ці полюси (нулі знаменника $R(p)$) є простими, то оригіналом для $F(p)$ є функція

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{Q(p_k)}{R'(p_k)}e^{p_k t}\ . \tag{2.5}$$

Формулу (2.5) можна записати також у вигляді:

$$\begin{aligned} f(t)=&\frac{Q(p_1)\cdot e^{p_1 t}}{(p_1-p_2)(p_1-p_3)...(p_1-p_n)}+\frac{Q(p_2)\cdot e^{p_2 t}}{(p_2-p_1)(p_2-p_3)...(p_2-p_n)}+\\ &+...+\frac{Q(p_n)\cdot e^{p_n t}}{(p_n-p_1)(p_n-p_2)...(p_n-p_{n-1})}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Приклад 2.3. Знайти оригінал $f(t)$ для функції $F(p)=\dfrac{3p}{(p+1)^2(p-2)^2}$.

Розв’язання. Функція $F(p)$ має полюси $p_1=-1$ та $p_2=2$ другого порядку, тому застосуємо формулу (2.4):

$$\begin{aligned} f(t)&=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{p\to-1}\left(\frac{3pe^{pt}}{(p-2)^2}\right)'+\frac{1}{(2-1)!}\lim_{p\to2}\left(\frac{3pe^{pt}}{(p+1)^2}\right)'=\\ &=3\lim_{p\to-1}\frac{e^{pt}\left((1+pt)(p-2)-2p\right)}{(p-2)^3}+3\lim_{p\to2}\frac{e^{pt}\left((1+pt)(p+1)-2p\right)}{(p+1)^3}=\\ &=\frac{1}{9}\left((6t-1)e^{2t}-(3t-1)e^{-t}\right). \end{aligned}$$

Приклад 2.4. Знайти оригінал $f(t)$ для функції $F(p)=\dfrac{1}{p^4-1}$.

Розв’язання. Знаменник функції $F(p)$ має лише прості корені $p_1=-1$, $p_2=1$, $p_3=-i$, $p_4=i$. Тому за формулою (2.6) маємо:

$$\begin{aligned} f(t)&\div\frac{e^{-t}}{(-1+i)(-1-i)(-1-1)}+\frac{e^{t}}{(1+1)(1+i)(1-i)}+\frac{e^{it}}{(i+1)(i-1)(i+i)}+\\ &+\frac{e^{-it}}{(-i+1)(-i-1)(-i-i)}=-\frac{e^{-t}}{4}+\frac{e^{t}}{4}+\frac{ie^{it}}{4}-\frac{ie^{-it}}{4}=\frac{1}{2}(\operatorname{sh}t-\sin t). \end{aligned}$$

Теорема 2.3. **(Друга теорема розвинення)**. Якщо функція $F(p)$ є аналітичною у околі нескінченно віддаленої точки $p=\infty$ і її розвинення у ряд Лорана має вигляд $F(p)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{c_n}{p^{n+1}}$, то функція $f(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n\dfrac{t^n}{n!}$ є оригіналом для зображення $F(p)$.

Приклад 2.5. Знайти оригінал $f(t)$ для функції $F(p)=\dfrac{1}{p}\sin\dfrac{1}{p}$.

Розв’язання. Знайдемо розвинення зображення $F(p)$ у ряд Лорана:

$$F(p)=\frac{1}{p}\sin\frac{1}{p}=\frac{1}{p}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!\cdot p^{2n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!\cdot p^{2n+2}}\div\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n+1}}{((2n+1)!)^2}.$$

Оригінал $f(t)$ за заданим зображенням $F(p)$ можна знайти за допомогою теореми Ефроса.

Теорема 2.4. (Теорема Ефроса). Нехай $f(t)\div F(p)$, а $\Phi(p)$ та $q(p)$ є аналітичними функціями, такими, що $\Phi(p)e^{-\tau q(p)}\div\varphi(t,\tau)$. Тоді виконується рівність:

$$F(q(p))\cdot\Phi(p)\div\int_0^{\infty}f(\tau)\cdot\varphi(t,\tau)d\tau. \tag{2.7}$$

Зокрема, якщо $\Phi(p)=\frac{1}{\sqrt{p}}$, $q(p)=\sqrt{p}$, то $\varphi(t,\tau)=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{\tau^2}{4t}}$. Тому, якщо $F(p)\div f(t)$, то, за теоремою Ефроса, оригінал для функції $\frac{F(\sqrt{p})}{\sqrt{p}}$ визначається рівністю:

$$\frac{F(\sqrt{p})}{\sqrt{p}}\div\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^{\infty}f(\tau)e^{-\frac{\tau^2}{4t}}d\tau. \tag{2.8}$$