Міністерство освіти і науки України
Запорізький національний університет

**О.О. Тітова, С.М. Гребенюк**

# МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

Практикум
для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра
спеціальності «Середня освіта»
предметних спеціальностей: 014.04 – середня освіта (математика),
014.08 – середня освіта (фізика), 014.09 – середня освіта (інформатика)
освітньо-професійних програм : «Середня освіта (математика)»,
«Середня освіта (фізика)», «Середня освіта (інформатика)»

Затверджено
вченою радою ЗНУ
Протокол № від

Запоріжжя
2020

УДК: 517.5(076.5)
Т454

Тітова О.О., Гребенюк С.М. Математичний аналіз : практикум для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра спеціальності «Середня освіта» предметних спеціальностей : 014.04 – середня освіта (математика), 014.08 – середня освіта (фізика), 014.09 – середня освіта (інформатика) освітньо-професійних програм : «Середня освіта (математика)», «Середня освіта (фізика)», «Середня освіта (інформатика)». Запоріжжя : ЗНУ, 2020. 97 с.

У практикуму подано в систематизованому вигляді подано програмний матеріал дисципліни «Математичний аналіз». Наведено приклади розв’язання типових задач математичного аналізу з детальним поясненням. Практикум охоплює всі розділи курсу : «Теорія границь та неперервність функцій», «Диференціальне числення функцій однієї змінної», «Функції багатьох змінних», «Інтегральне числення функцій однієї змінної», «Числові та функціональні ряди», «Кратні, криволінійні та поверхневі інтеграли». Для формування необхідних навичок запропоновано завдання (у кожному 15 варіантів). Надано список рекомендованої літератури. Довідковий матеріал міститься в додатках.

Для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра спеціальності «Середня освіта» предметних спеціальностей : 014.04 – середня освіта (математика), 014.08 – середня освіта (фізика), 014.09 – середня освіта (інформатика) освітньо-професійних програм : «Середня освіта (математика)», «Середня освіта (фізика)», «Середня освіта (інформатика)».

Рецензент
*М.І. Клименко*, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри фундаментальної математики

Відповідальний за випуск
*С.М. Гребенюк*, доктор технічних наук, доцент, завідувач кафедри фундаментальної математики

## ЗМІСТ

# ВСТУП

Математичний аналіз – один із найважливіших розділів класичної математики. Як наука, що досліджує функціональні залежності, він є методологічною основою більшості сучасних математичних дисциплін, тому оволодіння його основами є невід'ємною складовою частиною підготовки майбутніх фахівців, успішна діяльність яких пов'язана з необхідністю застосування сучасних математичних знань.

**Метою** вивчення навчальної дисципліни «Математичний аналіз» є оволодіння студентами систематичними знаннями з основ класичного аналізу дійсних функцій однієї та багатьох змінних, вироблення навичок розв'язання відповідних задач у професійній діяльності.

Основними **завданнями** вивчення дисципліни «Математичний аналіз» є:

– засвоїти внутрішню логіку розвитку поняття числа, функції, теорії границь, теорії диференціального та інтегрального числення функцій однієї змінної;
– засвоїти методи математичного аналізу при розв'язанні конкретних математичних задач;
– оволодіти навичками розв'язання задач, доведення тверджень та теорем, які будуть використані при подальшому вивченні курсів теорії ймовірностей, чисельних методів, рівнянь математичної фізики та ін.;
– виробити вміння застосовувати набуті знання у практичній діяльності вчителя математики, інформатики, фізики.

У результаті вивчення дисципліни студенти повинні досягти таких **результатів навчання:**

**знати:**

– основні поняття та факти теорії границь, неперервних функцій, диференціального та інтегрального числення функцій однієї та багатьох змінних, теорії рядів;
– основні методи розв'язання задач математичного аналізу (теорії границь, неперервних функцій, диференціального та інтегрального числення функцій однієї та багатьох змінних, теорії рядів);
– основні області застосування понять та фактів математичного аналізу у професійній роботі;

**вміти:**

– досліджувати функції однієї та багатьох змінних на неперервність, диференційованість, монотонність, інтегрованість та інші властивості;
– знаходити похідні функцій та невизначені інтеграли;
– застосовувати визначені, кратні, криволінійні та поверхневі інтеграли до обчислення площ фігур, довжин дуг кривих, об'ємів тіл, площ поверхонь, в техніці, векторному аналізі;
– застосовувати похідні функцій однієї та багатьох змінних при розв'язанні задач математики, фізики, інформатики.
– досліджувати основні властивості числових та функціональних послідовностей та рядів;

– застосовувати теорію рядів до розв'язання задач математики, фізики, інформатики.

Згідно з вимогами освітньо-професійних програм студенти повинні досягти таких **компетентностей**:

– здатність до абстрактного та логічного мислення, використання методів аналізу та синтезу, індукції й дедукції, узагальнення і конкретизації;
– здатність працювати незалежно і самостійно;
– здатність до математичного, логічного і алгоритмічного мислення, обґрунтування вибору методів розв'язання задач, інтерпретації отриманих результатів;
– здатність до використання інноваційних методів і сучасних засобів навчання математиці;
– володіння математичним апаратом фізики;
– здатність застосовувати набуті знання в практичних ситуаціях;
– здатність до самовдосконалення та саморозвитку;
– здатність вільно спілкуватися державною мовою (усно та письмово).

**Міждисциплінарні зв'язки.**

Математичний аналіз дає базу для подальшого вивчення курсів диференціальних рівнянь, теорії ймовірностей, чисельних методів, спеціальних курсів. Теореми та твердження математичного аналізу використовують підчас аналізу складності алгоритмів у програмуванні, в чисельних методах. У процесі вивчення курсу математичного аналізу закладаються вміння й навички необхідні при розв'язанні задач фізики, механіки, техніки, економіки та інших галузей науки та техніки.

У навчальному процесі для активізації пізнавальної діяльності студентів, формування у них здатності самостійно розв'язувати достатньо складні проблеми, з метою якісного засвоєння курсу, ефективного його застосування в практичній діяльності кожен студент виконує індивідуальні завдання з обов'язковим контролем їх виконання і виставленням відповідних балів. Індивідуальні завдання охоплюють задачі курсу, передбачають виконання 8 завдань. Кожне завдання містить 15 варіантів.

Розв'язані з детальними поясненнями задачі оформлюють в окремому зошиті. Строк виконання кожного завдання – наступний тиждень після завершення вивчення відповідної теми. Під час захисту індивідуального завдання потрібно пояснити або окремі етапи розв'язання обраних викладачем завдань, або повністю завдання. Максимальна кількість балів дорівнює 20 балів (по 5 балів за 1, 2, 3, 4 завдання) в першому семестрі та 20 балів (по 5 балів за 5, 6, 7, 8 завдання) в другому семестрі. Для зручності виконання цих завдань у практикумі наведено достатню кількість різноманітних задач з їх детальними розв'язаннями та теоретичними обґрунтуваннями.

Практикум створений авторами на основі багаторічного досвіду викладання математичного аналізу студентам математичних спеціальностей. Автори сподіваються, що даний практикум стане корисним студентам, які прагнуть отримати знання з математичного аналізу, а також викладачам для проведення занять та організації самостійної роботи студентів.

## 1. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ МНОЖИН. ПОСЛІДОВНОСТІ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ. ТЕОРІЯ ГРАНИЦЬ ТА НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЙ

***Приклад 1.1.*** Визначити, в якому співвідношенні знаходяться множини $X$ і $Y$ ($X = Y$, $X \subset Y$, $X \supset Y$), якщо $X = A \setminus (B \bigcup C)$, $Y = A \setminus (B \setminus C)$ [4].

***Розв'язання.*** Доведемо спочатку здійсненність висловлювання $x \notin B \bigcup C \Rightarrow x \notin B \setminus C$. Дійсно, нехай $x \notin B \bigcup C$, або $x \in \overline{B \bigcup C}$. Тоді, в силу закону двоїстості, $x \in \overline{B} \bigcap \overline{C}$, а за означенням перетину $x \notin B \wedge x \notin C$. Отже, $x \notin B$. В силу властивостей операцій кон'юнкції і диз'юнкції маємо:

$$x \notin B \Leftrightarrow (x \notin B \vee x \in \varnothing) \Leftrightarrow \big(x \notin B \vee (x \notin C \wedge x \in C)\big) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \big((x \notin B \vee x \notin C) \wedge (x \notin B \vee x \in C)\big) \Rightarrow (x \notin B \vee x \in C) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{(x \in B \wedge x \notin C)} \Leftrightarrow \overline{x \in B \setminus C} \Leftrightarrow x \notin B \setminus C.$$

Отже, $x \in X \Leftrightarrow x \in A \setminus (B \bigcup C) \Leftrightarrow \big(x \in A \wedge x \notin (B \bigcup C)\big) \Rightarrow$

$\Rightarrow \big(x \in A \wedge x \notin B \setminus C\big) \Leftrightarrow x \in A \setminus (B \setminus C)$. Таким чином, $X \subset Y$.

Доведемо, що включення $X \supset Y$ не виконане. Для цього досить навести приклади множин $A, B, C$, для яких $Y$ не є підмножиною $X$. Нехай $A, B, C$ – відрізки числової прямої: $A = [1,4]$; $B = [2,4]$; $C = [3,4]$. Тоді $B \bigcup C = [2,4]$; $B \setminus C = [2,3)$; $A \setminus (B \bigcup C) = [1,2)$, $A \setminus (B \setminus C) = [1,2) \bigcup [3,4]$. Значить, $Y \not\subset X$.

***Приклад 1.2.*** Довести методом математичної індукції справедливість твердження $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ для всіх $n \in N$ [5].

***Розв'язання.*** 1) При $n = 1$ твердження вірне, оскільки $1^2 = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot (2 \cdot 1 + 1)}{6}$.

2) Нехай твердження виконується при $n = k$, тобто вірною є рівність:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

3) Додамо до обох частин рівності $(k+1)^2$, одержимо

$$1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2.$$

Перетворимо праву частину рівності наступним чином:

$$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{k+1}{6}\left(2k^2 + 7k + 6\right) = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

Маємо: $1^2 + 2^2 + \ldots + (k+1)^2 = \dfrac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6}$.

А це означає, що рівність виконується при $n = k + 1$. Таким чином початкова рівність виконується при всіх $n \in N$.

***Приклад 1.3.*** Дослідити послідовність на обмеженість:

а) $x_n = \dfrac{(-1)^n n^2 + 5}{\sqrt{n^4 + 1}}$;  б) $x_n = \dfrac{4 - n^2}{n - 3}$.

***Розв'язання.*** ***а)*** З очевидних нерівностей $\sqrt{n^4+1}>n^2$, $\left|(-1)^n n^2+5\right|\le\left|(-1)^n n^2\right|+5=n^2+5$ випливає, що $|x_n|=\dfrac{\left|(-1)^n n^2+5\right|}{\sqrt{n^4+1}}\le\dfrac{n^2+5}{n^2}=$ $=1+\dfrac{5}{n^2}\le 6$, тобто послідовність обмежена.

***б)*** Сформулюємо заперечення означення обмеженості послідовності: $\forall C>0\ \ \exists n\in N:\ |x_n|>C$. Розглянемо $|x_n|$. Маємо: $|x_n|=\dfrac{n^2\left|\frac{4}{n^2}-1\right|}{n\left|1-\frac{3}{n}\right|}=n\dfrac{\left|1-\frac{4}{n^2}\right|}{\left|1-\frac{3}{n}\right|}$.

Якщо $n\ge 4$, то $\dfrac{4}{n^2}\le\dfrac{1}{4}$, $1-\dfrac{4}{n^2}\ge\dfrac{3}{4}>\dfrac{1}{2}$, $0<1-\dfrac{3}{n}<1$, звідки $|x_n|=n\dfrac{1-\frac{4}{n^2}}{1-\frac{3}{n}}>n\dfrac{\frac{1}{2}}{1}=\dfrac{n}{2}>C$. Для $C>0$ візьмемо $n>2C$, наприклад $n=[2C]+1$, тоді $|x_n|>\dfrac{n}{2}>C$, звідки випливає, що послідовність необмежена.

***<u>Приклад 1.4.</u>*** Дослідити послідовність $x_n=\dfrac{n!}{n^n}$ на монотонність.

***Розв'язання.*** Запишемо вираз для $x_{n+1}$: $x_{n+1}=\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}=\dfrac{n!}{(n+1)^n}=$ $=\dfrac{n!}{n^n}\cdot\dfrac{n^n}{(n+1)^n}=\dfrac{n^n}{(n+1)^n}\cdot x_n$. Оскільки $\dfrac{n^n}{(n+1)^n}=\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n<1$, то $x_{n+1}<x_n$ для всіх $n\in N$, тобто послідовність монотонно спадає.

***<u>Приклад 1.5.</u>*** Знайти $\sup\limits_n\{x_n\}$, $\inf\limits_n\{x_n\}$, $x_n=(-1)^{n-1}\left(2+\dfrac{3}{n}\right)$, граничні точки послідовності, а також $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,x_n$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,x_n$.

***Розв'язання.*** Оскільки значення $(-1)^{n-1}$ залежить від парності $n$, то розглянемо підпослідовності: $x_{2n-1}=2+\dfrac{3}{2n-1}$, $x_{2n}=-2-\dfrac{3}{2n}$. Очевидно, що $x_{2n}<x_{2n-1}$, $x_{2n-1}$ – монотонно спадає, $x_{2n}$ – монотонно зростає.

Отже, маємо: $\sup\limits_n\{x_n\}=x_1=5$, $\inf\limits_n\{x_n\}=x_2=-3{,}5$, граничні точки: $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}=2$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=-2$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,x_n=2$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,x_n=-2$.

***Приклад 1.6.*** Знайти границю послідовності $x_n = \dfrac{(n+1)!}{(n+2)! - n!}$.

***Розв'язання.*** Чисельник і знаменник $x_n$ при $n \to \infty$ нескінченно великі. Запишемо вирази, які містять факторіали, через найменший факторіал і потім скоротимо дріб.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+2)! - n!} = \lim_{x\to\infty} \frac{n!(n+1)}{n!(n+1)(n+2) - n!} = \lim_{x\to\infty} \frac{(n+1)}{(n+1)(n+2) - 1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{n+1}{n^2 + 3n + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{n + 3 + \frac{1}{n}} = \left[\frac{1}{\infty}\right] = 0.$$

***Приклад 1.7.*** Знайти область визначення функції $f(x) = \ln(x-1) + \sqrt[6]{3-x}$.

***Розв'язання.*** Область визначення функції $y = f(x)$ – сукупність усіх значень аргументу, при яких функція існує, тобто при яких можна обчислити її значення. Оскільки в аналітичному виразі для $f(x)$ присутні логарифм і корінь парної степені, то область визначення – це множина значень аргументу $x$, для яких підкореневий вираз є невід'ємним, а підлогарифмічний – додатним.

Таким чином, одержимо систему: $\begin{cases} x - 1 > 0, \\ 3 - x \ge 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ x \le 3. \end{cases}$

Отже, $D(f) = (1;3]$.

***Приклад 1.8.*** Обчислити границі функцій: а) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 2x}$,

б) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x-4} - 1}{x^2 - 25}$, в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x}$, г) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{\arcsin 3x}$, д) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{2}{x^2}\right)^{x^2}$.

***Розв'язання.*** ***а)*** На підставі теорем про границі і властивостей нескінченно малих і нескінченно великих функцій можна зробити висновок: щоб обчислити границю функції при $x \to x_0$, слід у функцію підставити замість аргументу $x$ його граничне значення $x_0$ і обчислити результат [1]. Якщо ж у результаті виходять невизначеності $\left[\frac{0}{0}\right]$, $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, $[0 \cdot \infty]$, $[\infty - \infty]$, $\left[1^\infty\right]$, $\left[\infty^0\right]$, $\left[0^0\right]$, для обчислення границі потрібно проводити перетворення функції, говорять, «звільнятися від невизначеності».

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 2x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 2} \frac{(x-3)(x-2)}{x(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x-3}{x} = -\frac{1}{2}.$$

***б)*** Безпосередня підстановка $x = 5$ приводить до невизначеності $\left[\frac{0}{0}\right]$. Щоб виділити в чисельнику нескінченно малу помножимо чисельник і знаменник дробу на вираз, спряжений до чисельника (позбудемося ірраціональності в чисельнику). Тоді:

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-4}-1}{x^2-25}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 5}\frac{\left(\sqrt{x-4}-1\right)\left(\sqrt{x-4}+1\right)}{\left(x^2-25\right)\left(\sqrt{x-4}+1\right)}=\lim_{x\to 5}\frac{x-5}{\left(x^2-25\right)\left(\sqrt{x-4}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)}{(x-5)(x+5)\left(\sqrt{x-4}+1\right)}=\lim_{x\to 5}\frac{1}{(x+5)\left(\sqrt{x-4}+1\right)}=\frac{1}{20}.$$

***в)*** Безпосередньою підстановкою замість $x$ граничного значення одержимо $\left[\frac{0}{0}\right]$. Перетворимо дріб, застосувавши формулу: $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$, і використаємо першу істотну границю: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, одержимо

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\sin\frac{x}{2}\right)=1\cdot 0=0.$$

***г)*** При обчисленні границь часто буває корисно замінити нескінченно малу в чисельнику чи знаменнику дробу більш простою, еквівалентною їй нескінченно малою функцією. Відомо, що при $x\to 0$ $\sin x\sim x$, $\operatorname{tg} x\sim x$, $\arcsin x\sim x$, $\operatorname{arctg} x\sim x$, $\ln(1+x)\sim x$, $e^x-1\sim x$.

Оскільки при $x\to 0$ функції $\alpha(x)=\operatorname{tg}2x$, $\beta(x)=\arcsin 3x$ – нескінченно малі, то при обчисленні границі $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}2x}{\arcsin 3x}$ замінимо їх еквівалентними: $\operatorname{tg}2x\sim 2x$, $\arcsin 3x\sim 3x$. Тоді $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}2x}{\arcsin 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{3x}=\frac{2}{3}$.

***д)*** При обчисленні даної границі використаємо відому границю: $\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=e$. Маємо наступне:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x^2}\right)^{x^2}=\left[1^\infty\right]=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x^2}\right)^{\frac{x^2\cdot 2}{2}}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{x^2}{2}}\right)^{\frac{x^2}{2}}\right)^2=e^2.$$

***<u>Приклад 1.9.</u>*** Знайти односторонні границі функції $f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ x^2+1, & x\ge 0,\end{cases}$ в точці $x_0=0$.

***Розв'язання.*** Знайдемо ліву границю. При $x<0$ маємо $\lim\limits_{x\to 0-0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}0=0$. Права границя, тобто при $x>0$, буде мати вигляд: $\lim\limits_{x\to 0+0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+1\right)=1$.

***Приклад 1.10.*** Знайти та дослідити точки розриву функції $f(x)=\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$, побудувати графік [8].

***Розв'язання.*** Функція не визначена в точці $x=1$. Обчислимо односторонні границі функції в цій точці, використовуючи символічні записи:

$$f(1-0)=\left[\frac{1}{1+2^{\frac{1}{1-0-1}}}=\frac{1}{1+2^{-\infty}}\right]=1,\ f(1+0)=\left[\frac{1}{1+2^{\frac{1}{1+0-1}}}=\frac{1}{1+2^{\infty}}\right]=0.$$

В точці $x=1$ функція має розрив першого роду, оскільки границі дорівнюють не рівним між собою числам. Графік функції зображено на рис. 1.1.

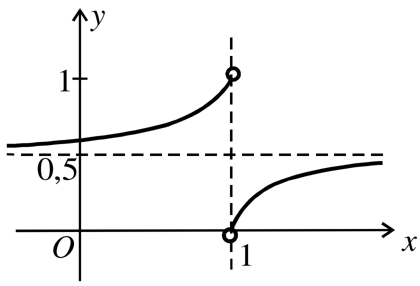


Рис. 1.1 Графік функції $f(x)=\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$

### *Завдання для самостійної роботи*

1. Визначити, в якому співвідношенні ($X=Y$, $X\subset Y$, $X\supset Y$) знаходяться множини $X$ і $Y$.
2. Довести справедливість твердження для всіх $n\in N$.
3. Дослідити послідовність на обмеженість.
4. Дослідити послідовність на монотонність.
5. Знайти $\sup\limits_{n}\{x_n\}$, $\inf\limits_{n}\{x_n\}$, граничні точки $x_n$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,x_n$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,x_n$.
6. Знайти границю послідовності.
7. Знайти область визначення функції.
8. Обчислити границі функцій.
9. Знайти односторонні границі функції $f(x)$ в точці $x_0$.
10. Знайти та дослідити точки розриву функцій, побудувати графік.

ВАРІАНТ 1

1. $X=A\bigcup(B\setminus C)$; $Y=(A\setminus B)\bigcup(A\setminus C)$. 2. $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$.

3. $x_n=\dfrac{2n^2-1}{n^2+2}$. 4. $x_n=\dfrac{20n}{n^2+1}$. 5. $x_n=\cos\dfrac{\pi n}{4}$.

6. $x_n=\dfrac{n\sin(2n+1)!}{n\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$. 7. $y=\arcsin\sqrt{\dfrac{4x-3}{x+2}}$.

8. а) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+7x^2+15x+9}{x^3+8x^2+21x+18}$, б) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$, в) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{\ln tgx}$,

г) $\lim\limits_{x\to 0}(6-5\sec x)^{\operatorname{ctg}2x}$, д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+4+...+(3x-2)}{\sqrt{5x^4+x+1}}$, $x\in N$.

9. $f(x)=\operatorname{arcctg}\dfrac{x}{x^3+8}$, $x_0=-2$. 10. $y=e^{1/(x+4)}$.

ВАРИАНТ 2

1. $X=(A\cap C)\cup(B\cap D)$; $Y=(A\cup B)\cap(C\cup D)$.

2. $1\cdot 2+2\cdot 5+\ldots+n(3n-1)=n^2(n+1)$. 3. $x_n=n^{\cos\pi n}$. 4. $x_n=\dfrac{n+5}{3n+8}$.

5. $x_n=\sin\dfrac{\pi n}{3}$. 6. $x_n=\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+...+\dfrac{1}{n(n+1)}$. 7. $y=7^{\operatorname{tgx}}+\arccos\dfrac{x^2-1}{8}$.

8. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{10}-1}{3x^5-x^3-2}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(e^{x^2}+2\sqrt{x}\right)}{2-\sqrt{\sqrt{x}+4}}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^3}-e^{-7x}+2x}{\sin^2 3x-\operatorname{arctg}x}$,

г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{8}}\left(\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{8}+x\right)\right)^{\operatorname{tg}4x}$, д) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin\left(e^{x-2}-2^{x^2-4}\right)}{x^3-8}$.

9. $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{x-1}{x^2-4}$, $x_0=2$. 10. $y=\dfrac{1}{x^2-9}$.

ВАРИАНТ 3

1. $X=A\setminus(B\cup C)$; $Y=(A\setminus B)\setminus C$. 2. $1^2+3^2+\ldots+(2n-1)^2=\dfrac{n(4n^2-1)}{3}$.

3. $x_n=\dfrac{2n-1}{\sqrt{n^2+4}}$. 4. $x_n=\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{\pi n}{2}$. 5. $x_n=\dfrac{4n+4}{3n-1}\cos\pi n$.

6. $x_n=\dfrac{1^2+2^2+...+n^2}{n(2n-1)(n+4)}$. 7. $y=\log_{\frac{1}{3}}\cos\dfrac{2\pi}{x}+\lg\log_5(1-2x)$.

8. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+2}{x^3+2x^2-x-2}$, б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin\left(\sqrt{2x^2-3x-5}-\sqrt{1+x}\right)}{\ln(x-1)-\ln(x+1)+\ln 2}$,

в) $\lim\limits_{x\to\pi/6}\dfrac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1}$, г) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2-x}{x}\right)^{-\frac{1}{\ln(2-x)}}$, д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{3x}-3^{5x}}{\sin 7x-2x}$.

9. $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{x+1}}}$, $x_0=-1$. 10. $y=\cos\dfrac{\pi}{2-x}$.

## ВАРІАНТ 4

1. $X = A \cup (B \setminus C)$; $Y = (A \cup B) \setminus C$.

2. $1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \ldots + (n-1)n = \dfrac{(n-1)n(n+1)}{3}$. 3. $x_n = n^3 - 2n$. 4. $x_n = 3^n - 4n$.

5. $x_n = n^3 \sin\dfrac{\pi n}{2}$. 6. $x_n = \left(\dfrac{n^2 + 2n - 2}{n^2 + n + 11}\right)^{n^2+n}$. 7. $y = \sqrt{x^2 - 4|x| + 5} + \sqrt{4 - |x| - 3x^2}$.

8. а) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}{x^3 + 7x^2 + 16x + 12}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^3+5} - \sqrt[3]{3x^4+2}}{1+3+5+\ldots+(2x-1)}$, $x \in N$

в) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt[3]{16x} - 4}{\sqrt{4+x} - \sqrt{2x}}$, г) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}\left(\pi\left(1 + \frac{x}{2}\right)\right)}{\ln(x+1)}$, д) $\lim\limits_{x\to 0} \left(5 - \dfrac{4}{\cos x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 3x}}$.

9. $f(x) = (1 + |x|)^{\frac{1}{x}}$, $x_0 = 0$.

10. $y = \begin{cases} x, x \le 0, \\ 1 - x, 0 < x < 1, \\ 1/(1-x), x > 1. \end{cases}$

## ВАРІАНТ 5

1. $X = (A \setminus B) \cup C$; $Y = (A \cup C) \setminus B$.

2. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

3. $x_n = \dfrac{1-n}{\sqrt{n^2+1}}$.

4. $x_n = \dfrac{n^2}{2^n}$.

5. $x_n = \sin\dfrac{\pi n}{4}$.

6. $x_n = \dfrac{n^3 + 3^n + n}{2n^2 + 3^{n+2}}$.

7. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+3} + \sqrt{14-x}}$.

8. а) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3 - 3x - 2}{\left(x^2 - x - 2\right)^2}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{1 - 2x + 3x^2} - (1+x)}{\sqrt[3]{x}}$, в) $\lim\limits_{x\to 2\pi} \dfrac{(x - 2\pi)^2}{\operatorname{tg}(\cos x - 1)}$,

г) $\lim\limits_{x\to a} \left(\dfrac{\sin x - \sin a}{x - a}\right)^{\frac{x^2}{a^2}}$, д) $\lim\limits_{x\to 2} \left(2e^{x-2} - 1\right)^{\frac{3x+2}{x-2}}$.

9. $f(x) = \dfrac{1}{x + 2^{1/(4-x)}}$, $x_0 = 4$.

10. $y = \begin{cases} x^2, x < 0, \\ 1, x = 1, \\ \operatorname{tg} x + 1, x > 0. \end{cases}$

## ВАРІАНТ 6

1. $X = (A \setminus B) \cap C$; $Y = (A \cap C) \setminus B$.

2. $1\cdot 2^2 + 2\cdot 3^2 + \ldots + (n-1)n^2 = \dfrac{n\left(n^2 - 1\right)(3n+2)}{12}$. 3. $x_n = n^{\sin\frac{\pi n}{2}}$. 4. $x_n = (-1)^n + 1$.

5. $x_n=\left(2\cos\frac{2\pi n}{3}\right)^n$. 6. $x_n=\frac{n2^n+3^n}{2^{n+5}-3^{n-1}}$. 7. $y=\frac{x+1}{2x-1}+\log_5(\arccos x)+\sqrt{3x-1}$.

8. а) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\left(2x^2-x-1\right)^2}{x^3-2x^2-x+2}$, б) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2-9}}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x\sin x}$,

г) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{1+\ln^2 x}-1}{1+\cos\pi x}$, д) $\lim\limits_{x\to b}\frac{a^x-a^b}{x-b}$.

9. $f(x)=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}x)$, $x_0=\frac{\pi}{2}$. 10. $y=\begin{cases}x\operatorname{arctg}\frac{1}{x}, x\neq 0,\\ a, x=0.\end{cases}$

## ВАРІАНТ 7

1. $X=(A\setminus B)\cap C$; $Y=(A\cap C)\setminus(B\cap C)$.

2. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(n+1)}=\frac{n}{2n+1}$. 3. $x_n=\frac{n^2+4n+8}{(n+3)^2}$. 4. $x_n=\ln\left(\frac{n+7}{n}\right)$.

5. $x_n=\frac{n^2\sin\frac{\pi n}{2}}{n+7}$. 6. $x_n=\frac{10^n+n^{10}-n(n+1)!}{(n+2)!}$. 7. $y=\frac{\sqrt{8-|x|}}{x\left(x^2-4\right)}$.

8. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+3+...+(2x-1)}{x+3}-x\right), x\in N$, б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln 2x-\ln\pi}{\sin\frac{5x}{2}\cos x}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[5]{x}}$, г) $\lim\limits_{x\to 0,5}\frac{(2x-1)^2}{e^{\sin\pi x}-e^{-\sin 3\pi x}}$, д) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos\pi x)^{\frac{1}{x\sin\pi x}}$.

9. $f(x)=x+\left\lfloor x^2\right\rfloor$, $x_0=-10$. 10. $y=e^{1/\sin x}$.

## ВАРІАНТ 8

1. $X=(A\cup B)\cup C$; $Y=(A\setminus C)\cup(B\cup C)$.

2. $\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{n}{4n+1}$. 3. $x_n=\frac{n^2}{n+3}$. 4. $x_n=\frac{4^n}{n!}$

5. $x_n=\frac{(1+\cos\pi n)\sqrt{n}}{\ln 2n}$. 6. $x_n=\frac{\sqrt[n]{n+1}+n\ln n^2}{\sqrt{2n^3+1}}-1$. 7. $y=\arcsin\frac{1}{x^2}-\arccos\frac{x}{3}$.

8. а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{(1+x)^3-(1+3x)}{x+x^5}-x\right)$, б) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\cos 3x-\cos x}{\operatorname{tg}^2 2x}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^{x^2-a^2}-1}{\operatorname{tg}\ln\frac{x}{a}}$,

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4^{5x}-9^{-2x}}{\sin x-\operatorname{tg}x^3}$, д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-7}{x+1}\right)^{1/\left(\sqrt[3]{x}-2\right)}$.

9. $f(x)=\operatorname{sign}\sin x$, $x_0=\pi$.

10. $y=\begin{cases}2\sqrt{x}, 0\le x\le 1,\\ 4-2x, 1<x<2{,}5,\\ 2x-7, 2{,}5\le x<+\infty.\end{cases}$

## ВАРІАНТ 9

1. $X=A\setminus C$; $Y=(A\setminus B)\bigcup(B\setminus C)$.

2. $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\times\ldots\times\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=\frac{n+2}{2n+2}$.

3. $x_n=\sqrt{n^2+1}-n$.

4. $x_n=\sin\frac{\pi n}{2}$.

5. $x_n=7^{n\cos\pi n}$.

6. $x_n=\frac{n!\sqrt{n+5}+5^n(n-1)}{(n-1)!\sqrt{2n^3+7}}$.

7. $y=\sqrt{2x^2-7x+5}+\frac{1}{\sqrt{3x-2-x^2}}$.

8. а) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-5x^2+8x-4}{x^3-3x^2+4}$, б) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{4}}\frac{\sqrt[3]{\frac{x}{16}}-\frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{1}{4}+x}-\sqrt{2x}}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{9\ln(1-2x)}{4\operatorname{arctg}3x}$,

г) $\lim\limits_{x\to\pi/3}\frac{e^{\sin^2 6x}-e^{\sin^2 3x}}{\log_3\cos 6x}$, д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+x3^x-7}{1+x7^x}\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

9. $f(x)=\frac{1}{x-[x]}$, $x_0=2$.

10. $y=\begin{cases}1-x^2, x<0,\\ (x-1)^2, 0\le x\le 2,\\ 4-x, x>2.\end{cases}$

## ВАРІАНТ 10

1. $X=(A\setminus C)\setminus(B\setminus C)$; $Y=A\setminus C$.

2. $1+3+6+\ldots+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

3. $x_n=(n+1)^{\cos 3\pi n}$.

4. $x_n=n^3-3n^2$.

5. $x_n=\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1+\cos\pi n}{2}$.

6. $x_n=\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^2}-\frac{n}{3}$.

7. $y=\log_{\frac{x-4}{x+4}}\frac{x+3}{x-3}$.

8. а) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3-2x-1}{x^4+2x+1}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}$, в) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{2^x-16}{\sin\pi x}$,

г) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\cos\frac{x}{2}}{e^{\sin x}-e^{\sin 4x}}$, д) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2x-1}{x}\right)^{\frac{\ln(3+2x)}{\ln(2-x)}}$.

9. $f(x)=\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{1/x}$, $x_0=0$.

10. $y=\begin{cases}\sin(\pi/x), x\ne 0,\\ 0, x=0.\end{cases}$

## ВАРІАНТ 11

1. $X = A\bigcap(B\bigcap C)$; $Y=(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$. 2. $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{n}{n+1}$.

3. $x_n=\dfrac{n^3+1}{n\left(n^2+n\right)-1}$. 4. $x_n=n^{\cos(\pi n/2)}$. 5. $x_n=(n+1)^{\cos 3\pi n}$.

6. $x_n=\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{(n-1)\cdot n}$ 7. $y=\sin\sqrt{x}+\dfrac{1+x^2}{4-x^2}$

8. а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-2x-15}{x^2-25}$, б) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$,

г) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\operatorname{tg}x}{5^{\sin x}-5^{\sin 4x}}$, д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$.

9. $f(x)=\operatorname{sign}\sin 2x$, $x_0=\pi$. 10. $y=\begin{cases}-x, & x<-1,\\ x^2, & -1\le x\le 2,\\ 1/x, & x>2.\end{cases}$

## ВАРІАНТ 12

1. $X = A\bigcup(B\setminus C)$; $Y=(A\bigcup B)\setminus(A\bigcup C)$.

2. $\underbrace{3+33+333+\ldots+33\ldots3}_{n\text{ доданків}}=\dfrac{10^{n+1}-9n-10}{27}$. 3. $x_n=n^2+(-1)^n n^2$. 4. $x_n=\dfrac{3^n}{n^3}$.

5. $x_n=n^{\cos\frac{\pi n}{2}}$. 6. $x_n=\dfrac{n!\sqrt{n+5}+3^n(n+1)}{(n+1)!\sqrt{2n^3+7}}$. 7. $y=\dfrac{\sqrt{\sin x-0{,}5}}{\sqrt[5]{x-2}}-\log_{12}(x-1)$.

8. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$, б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$, в) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$,

г) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos(x/2)}{3^{\sin x}-3^{\sin 4x}}$, д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+2x^2\right)^{(1/x)}$.

9. $f(x)=\operatorname{sign}\cos 2x$, $x_0=\dfrac{\pi}{4}$ 10. $y=\begin{cases}\cos x, & x<0,\\ \sin x, & 0\le x\le \pi/2,\\ 1, & x>\pi/2.\end{cases}$

## ВАРІАНТ 13

1. $X = A\setminus(B\setminus C)$; $Y=(A\setminus B)\bigcup C$.

2. $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{8}+\ldots+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2n^2}=\operatorname{arctg}\dfrac{n}{n+1}$. 3. $x_n=\dfrac{(-1)^n n-1}{\sqrt{n^2+3}}$.

4. $x_n=\dfrac{2n+(-1)^n}{4n-1}$. 5. $x_n=n^{\cos\pi n}$. 6. $x_n=\dfrac{n2^n+5^n}{2^{n+5}-5^{n-1}}$. 7. $y=\dfrac{\arcsin(x-1)}{\ln x}$.

8. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$, б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$, в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2^x-8}{\sin \pi x}$,

г) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin x}{e^{\sin x}-e^{\sin 3x}}$, д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{2x^2+1}\right)^{x^2}$.

9. $f(x)=\operatorname{sign}\sin 3x$, $x_0=\pi$.

10. $y=\begin{cases}2, & x\le 2,\\ 1+x, & 2<x<4,\\ \sin x, & x\ge 4.\end{cases}$

## ВАРІАНТ 14

1. $X=(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)$; $Y=A\cup B$.

2. $(n^3+5n)\,\vdots\,6$.

3. $x_n=\sqrt{n^3+n^2+1}-\sqrt{n^3-n^2+1}$. 4. $x_n=4^n-3^n$. 5. $x_n=\sin\dfrac{\pi n}{2}$.

6. $x_n=\dfrac{n3^n+5^n}{3^{n+5}-5^{n-1}}$.

7. $y=\sqrt[4]{4-x^2}\cdot\operatorname{tg}x$.

8. а) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2+8x+16}{x^2-4}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$, в) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\operatorname{tg}\pi x}{x+2}$,

г) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\operatorname{tg} x}{e^{\sin x}-e^{\sin 4x}}$, д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-2x+3}{x^2-2x+5}\right)^{x^2-2x}$.

9. $f(x)=\operatorname{sign}\cos x$, $x_0=\dfrac{\pi}{2}$.

10. $y=\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x}}$.

## ВАРІАНТ 15

1. $X=(A\cup B)\cap(\overline{A}\cup\overline{B})$; $Y=A\cup B$.

2. $((2n)^3+20\cdot 2n)\,\vdots\,48$.

3. $x_n=\sqrt{n^2+n+1}-n$.

4. $x_n=(n+1)^{\cos 3\pi n}$.

5. $x_n=(-1)^n+1$.

6. $x_n=\dfrac{n^3+4^n+n}{2n^2+4^{n+2}}$.

7. $y=\dfrac{\sqrt{16-x^2}}{\ln(x-1)^2}$.

8. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^3-3x^2+2x}$ б) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$, в) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sin\pi x}{x+2}$,

г) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\cos(x/2)}{2^{\sin x}-2^{\sin 4x}}$, д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$.

9. $f(x)=\operatorname{sign}\cos 3x$, $x_0=\dfrac{\pi}{6}$.

10. $y=\ln\dfrac{x^2}{(x+1)(x-3)}$.

# 2. ОСНОВИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

При диференціюванні функцій слід використовувати таблицю похідних елементарних функцій та правила диференціювання, їх наведено в додатку А. У прикладах 2.1-2.14 показано основні прийоми диференціювання функцій [1].

***Приклад 2.1.*** $y = 9x^5 - \frac{4}{x^3} + \sqrt[7]{x^3} - 3x + 4$.

***Розв'язання.*** Запишемо функцію, використовуючи властивості степенів, у наступному вигляді: $y = 9x^5 - 4x^{-3} + x^{\frac{3}{7}} - 3x + 4$. Тоді одержимо похідну: $y' = 9 \cdot 5x^4 - 4 \cdot (-3)x^{-4} + \frac{3}{7}x^{-\frac{4}{7}} - 3 = 45x^4 + \frac{12}{x^4} + \frac{3}{7\sqrt[7]{x^4}} - 3$.

***Приклад 2.2.*** $y = \sqrt[4]{\left(2x^2 - 3x + 2\right)^3} - \frac{6}{(x+1)^2}$.

***Розв'язання.*** Маємо $y = \left(2x^2 - 3x + 2\right)^{\frac{3}{4}} - 6(x+1)^{-2}$. Це складена функція. Обчислимо її похідну:

$$y' = \frac{3}{4}\left(2x^2 - 3x + 2\right)^{-\frac{1}{4}} \cdot \left(2x^2 - 3x + 2\right)' - 6 \cdot (-2) \cdot (x+1)^{-3} \cdot (x+1)' =$$

$$= \frac{3}{4}\left(2x^2 - 3x + 2\right)^{-\frac{1}{4}} \cdot (4x - 3) + 12(x+1)^{-3}.$$

***Приклад 2.3.*** $y = \operatorname{tg}^5(x+3) \cdot \arccos 3x^2$.

***Розв'язання.*** Маємо добуток двох складених функцій $u = \operatorname{tg}^5(x+3)$ та $v = \arccos 3x^2$. Тоді за формулою для похідної добутку $(uv)' = u'v + v'u$ маємо наступне:

$$y' = \left(\operatorname{tg}^5(x+3)\right)' \cdot \arccos 3x^2 + \left(\arccos 3x^2\right)' \cdot \operatorname{tg}^5(x+3) =$$

$$= 5\operatorname{tg}^4(x+3) \cdot \frac{1}{\cos^2(x+3)} \cdot \arccos 3x^2 + \frac{-1}{\sqrt{1-9x^4}} \cdot 3 \cdot 2x \cdot \operatorname{tg}^5(x+3).$$

***Приклад 2.4.*** $y = \arcsin^3 4x \cdot \log_2(x+5)$.

***Розв'язання.*** $y' = \left(\arcsin^3 4x\right)' \cdot \log_2(x+5) + \left(\log_2(x+5)\right)' \cdot \arcsin^3 4x =$

$$= 3\arcsin^2 4x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-16x^2}} \cdot 4 \cdot \log_2(x+5) + \frac{1}{(x+5)\ln 2} \cdot \arcsin^3 4x.$$

***Приклад 2.5.*** $y = 3^{-x^4} \cdot \operatorname{ctg} 7x^3$.

***Розв'язання.*** $y' = \left(3^{-x^4}\right)' \cdot \operatorname{ctg} 7x^3 + \left(\operatorname{ctg} 7x^3\right)' \cdot 3^{-x^4} =$

$$=3^{-x^4}\ln 3\cdot\left(-4x^3\right)\cdot\mathrm{ctg}\,7x^3+\frac{-1}{\sin^2 7x^3}\cdot 21x^2\cdot 3^{-x^4}.$$

***Приклад 2.6.*** $y=\sin^2 3x\cdot\mathrm{arctg}\sqrt{x}$.

***Розв'язання.*** $y'=\left(\sin^2 3x\right)'\cdot\mathrm{arctg}\sqrt{x}+\left(\mathrm{arctg}\sqrt{x}\right)'\cdot\sin^2 3x=$

$$=2\sin 3x\cdot\cos 3x\cdot 3\cdot\mathrm{arctg}\sqrt{x}+\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\sin^2 3x.$$

***Приклад 2.7.*** $y=\dfrac{\sqrt{3x^2+2x+5}}{e^{3x}}$.

***Розв'язання.*** Маємо частку двох складених функцій $u=\sqrt{3x^2+2x+5}$ та $v=e^{3x}$. Тоді за формулою для похідної частки $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$ маємо наступне:

$$y'=\frac{\left(\sqrt{3x^2+2x+5}\right)'\cdot e^{3x}-\left(e^{3x}\right)'\cdot\sqrt{3x^2+2x+5}}{\left(e^{3x}\right)^2}=$$

$$=\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{3x^2+2x+5}}\cdot(6x+2)\cdot e^{3x}-e^{3x}\cdot 3\cdot\sqrt{3x^2+2x+5}}{e^{6x}}.$$

***Приклад 2.8.*** $y=\dfrac{\lg\left(x^2-3x+5\right)}{\mathrm{arcctg}^2 5x}$.

***Розв'язання.***

$$y'=\frac{\left(\lg\left(x^2-3x+5\right)\right)'\cdot\mathrm{arcctg}^2 5x-\left(\mathrm{arcctg}^2 5x\right)'\cdot\lg\left(x^2-3x+5\right)}{\left(\mathrm{arcctg}^2 5x\right)^2}=$$

$$=\frac{\dfrac{1}{\left(x^2-3x+5\right)\ln 10}\cdot(2x-3)\cdot\mathrm{arcctg}^2 5x-2\,\mathrm{arcctg}\,5x\cdot\dfrac{-1}{1+25x^2}\cdot 5\cdot\lg\left(x^2-3x+5\right)}{\mathrm{arcctg}^4 5x}.$$

***Приклад 2.9.*** $y=\dfrac{\sqrt{\arcsin 3x}}{\mathrm{sh}^2\,x}$.

***Розв'язання.*** $y'=\dfrac{\left(\sqrt{\arcsin 3x}\right)'\cdot\mathrm{sh}^2\,x-\left(\mathrm{sh}^2\,x\right)'\cdot\sqrt{\arcsin 3x}}{\left(\mathrm{sh}^2\,x\right)^2}=$

$$=\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{\arcsin 3x}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-9x^2}}\cdot 3\cdot\mathrm{sh}^2\,x-2\,\mathrm{sh}\,x\cdot\mathrm{ch}\,x\cdot\sqrt{\arcsin 3x}}{\mathrm{sh}^4\,x}.$$

***<u>Приклад 2.10.</u>*** $y=\dfrac{\ln\left(x^2-5\right)}{(x+3)^7}$.

***Розв'язання.*** $y'=\dfrac{\left(\ln\left(x^2-5\right)\right)'\cdot(x+3)^7-\left((x+3)^7\right)'\cdot\ln\left(x^2-5\right)}{\left((x+3)^7\right)^2}=$

$$=\frac{\dfrac{1}{x^2-5}\cdot 2x\cdot(x+3)^7-7(x+3)^6\cdot\ln\left(x^2-5\right)}{(x+3)^{14}}.$$

***<u>Приклад 2.11.</u>*** $y=\sqrt[7]{\dfrac{x+5}{x-5}}\cdot\operatorname{ch}(3x-4)$.

***Розв'язання.*** При обчисленні похідної спочатку використаємо формулу похідної добутку. При цьому запишемо функцію $u$ у вигляді степеня $u=\sqrt[7]{\dfrac{x+5}{x-5}}=\left(\dfrac{x+5}{x-5}\right)^{\frac{1}{7}}$ і при її диференціюванні використаємо формулу похідної частки. Отже, маємо наступне:

$$y'=\left(\left(\frac{x+5}{x-5}\right)^{\frac{1}{7}}\right)'\cdot\operatorname{ch}(3x-4)+\left(\operatorname{ch}(3x-4)\right)'\cdot\left(\frac{x+5}{x-5}\right)^{\frac{1}{7}}=$$

$$=\frac{1}{7}\cdot\left(\frac{x+5}{x-5}\right)^{-\frac{6}{7}}\cdot\left(\frac{x+5}{x-5}\right)'\cdot\operatorname{ch}(3x-4)+\operatorname{sh}(3x-4)\cdot 3\cdot\left(\frac{x+5}{x-5}\right)^{\frac{1}{7}}=$$

$$=\frac{1}{7}\cdot\left(\frac{x+5}{x-5}\right)^{-\frac{6}{7}}\cdot\frac{1\cdot(x-5)-1\cdot(x+5)}{(x-5)^2}\cdot\operatorname{ch}(3x-4)+\operatorname{sh}(3x-4)\cdot 3\cdot\left(\frac{x+5}{x-5}\right)^{\frac{1}{7}}=$$

$$=\frac{1}{7}\cdot\left(\frac{x+5}{x-5}\right)^{-\frac{6}{7}}\cdot\frac{-10}{(x-5)^2}\cdot\operatorname{ch}(3x-4)+\operatorname{sh}(3x-4)\cdot 3\cdot\left(\frac{x+5}{x-5}\right)^{\frac{1}{7}}.$$

У наступних трьох прикладах використаємо метод логарифмічного диференціювання. Цей метод полягає в тому, що функцію попередньо логарифмують, а потім обчислюють її похідну.

***<u>Приклад 2.12.</u>*** $y=x^{\sin x}$.

***Розв'язання.*** Для цієї функції $\ln y=\sin x\cdot\ln x$. Обчислимо похідну останньої рівності: $\dfrac{y'}{y}=(\sin x)'\ln x+\sin x(\ln x)'$ або $\dfrac{y'}{y}=\cos x\cdot\ln x+\dfrac{1}{x}\sin x$, звідки $y'=x^{\sin x}\left(\cos x\cdot\ln x+\dfrac{1}{x}\sin x\right)$.

***<u>Приклад 2.13.</u>*** $y=(\arcsin x)^{\ln x}$.

***Розв'язання.*** Застосуємо логарифмування.

$$\ln y = \ln x \cdot \ln(\arcsin x),$$

$$\frac{y'}{y} = (\ln x)' \cdot \ln(\arcsin x) + (\ln(\arcsin x))' \cdot \ln x,$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x} \cdot \ln(\arcsin x) + \frac{1}{\arcsin x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \ln x,$$

$$y' = \left(\frac{1}{x} \cdot \ln(\arcsin x) + \frac{1}{\arcsin x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \ln x\right) \cdot (\arcsin x)^{\ln x}.$$

***Приклад 2.14.*** $y = \dfrac{\sqrt{(x+5)^7}}{(x+2)^2(x+3)}$.

***Розв'язання.*** Застосуємо логарифмування.

$$\ln y = \frac{7}{2}\ln(x+5) - 2\ln(x+2) - \ln(x+3),$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{7}{2(x+5)} - \frac{2}{x+2} - \frac{1}{x+3},$$

$$y' = \left(\frac{7}{2(x+5)} - \frac{2}{x+2} - \frac{1}{x+3}\right) \cdot \frac{\sqrt{(x+5)^7}}{(x+2)^2(x+3)}.$$

### *Завдання для самостійної роботи*

Продиференціювати функції.

ВАРІАНТ 1

1. $y = 2x^5 - \dfrac{4}{x^3} + \dfrac{1}{x} + 3\sqrt{x}$,
2. $y = \sqrt[3]{3x^4 + 2x - 5} + \dfrac{4}{(x-2)^5}$,
3. $y = \sin^3 2x \cos 8x^5$,
4. $y = \operatorname{arcctg}^2 5x \ln(x-4)$,
5. $y = \operatorname{tg}^4 3x \arcsin 2x^3$,
6. $y = (x-3)^4 \arccos 5x^3$,
7. $y = \dfrac{e^{\arccos^3 x}}{\sqrt{x+5}}$,
8. $y = \dfrac{\log_5(3x-7)}{\operatorname{ctg} 7x^3}$,
9. $y = \dfrac{\operatorname{arcctg}^4 5x}{\operatorname{sh}\sqrt{x}}$,
10. $y = \dfrac{9\operatorname{arctg}(x+7)}{(x-1)^2}$,
11. $y = \sqrt[3]{\dfrac{x-3}{x+3}} \arcsin(2x+3)$,
12. $y = (\operatorname{cth} 3x)^{\arcsin x}$,
13. $y = (\arccos(x+2))^{\operatorname{tg} 3x}$,
14. $y = \dfrac{\sqrt{x+7}(x-3)^4}{(x+2)^5}$.

ВАРІАНТ 2

1. $y = 4x^3 - \dfrac{4}{x^4} + \dfrac{3}{x} + \sqrt[5]{x^2}$,
2. $y = \sqrt[3]{3x^4 + 7x - 5} - \dfrac{3}{(x-2)^5}$,
3. $y = \cos^5 2x \operatorname{tg} 8x^5$,
4. $y = \operatorname{arctg}^3 2x \ln(x+5)$,

5. $y=\operatorname{ctg}^5 3x \arcsin 2x^3$,

6. $y=(3x-4)^3 \arccos 3x^2$,

7. $y=\dfrac{(x-4)^2}{e^{\operatorname{arcctg} x}}$,

8. $y=\dfrac{\ln(5x-3)}{4\operatorname{tg}3x^4}$,

9. $y=\dfrac{\operatorname{arctg}^3 2x}{\operatorname{ch}(1/x)}$,

10. $y=\dfrac{8\operatorname{arctg}(2x+3)}{(x+1)^3}$,

11. $y=\sqrt[5]{\dfrac{x-4}{x+4}}\arcsin(x+5)$,

12. $y=(\cos(x+2))^{\ln x}$,

13. $y=(\arcsin 2x)^{\operatorname{ctg}(x+1)}$,

14. $y=\dfrac{(x-3)^5(x+2)^3}{\sqrt{(x-1)^3}}$.

## ВАРІАНТ 3

1. $y=2x^4-\dfrac{5}{x^7}+\dfrac{1}{x}+\sqrt[3]{x}$,

2. $y=\sqrt{(x-4)^5}+5\Big/\left(2x^2+1\right)^2$,

3. $y=\operatorname{tg}^4 x \arcsin 4x^5$,

4. $y=\arccos^4 x \ln(x-4)$,

5. $y=2^{-x^3}\operatorname{arctg} 7x^4$,

6. $y=\operatorname{sh}^3 4x \arccos\sqrt{x}$,

7. $y=\dfrac{e^{-x^3}}{\sqrt{x^2+5x-1}}$,

8. $y=\dfrac{\ln(7x+2)}{5\cos 7x^3}$,

9. $y=\dfrac{\arccos 3x^4}{\operatorname{th}^2 x}$,

10. $y=\dfrac{7\arccos(4x-1)}{(x+2)^4}$,

11. $y=\sqrt[3]{\dfrac{x-2}{x+2}}\arcsin(2x+1)$,

12. $y=(\sin 3x)^{\arccos x}$,

13. $y=(\operatorname{arctg}(x+7))^{\cos 2x}$,

14. $y=\dfrac{\sqrt{(x+7)^5}(x-2)}{(x-4)^2}$.

## ВАРІАНТ 4

1. $y=7\sqrt{x}-\dfrac{2}{x^5}+\dfrac{4}{x}-3x^3$,

2. $y=\sqrt[5]{7x^2-3x+5}-\dfrac{5}{(x-1)^3}$,

3. $y=\arcsin^3 2x \operatorname{ctg} 7x^4$,

4. $y=3^{-x}\sqrt{\arccos 2x}$,

5. $y=(x+6)^5 \operatorname{arcctg} 3x^5$,

6. $y=\operatorname{th}^2\sqrt{x}\operatorname{arcctg} 3x^2$,

7. $y=\dfrac{e^{-\operatorname{ctg} 5x}}{\left(3x^2-4x+2\right)^2}$,

8. $y=\dfrac{\sin^3 5x}{\ln(2x-3)}$,

9. $y=\dfrac{\arcsin 5x^3}{\operatorname{ch}\sqrt{x}}$,

10. $y=\dfrac{6\arcsin(x+5)}{(x-2)^2}$,

11. $y=\sqrt[5]{\dfrac{x-2}{x+2}}\arccos(2x-1)$,

12. $y=(\operatorname{th} 5x)^{\arcsin(x+1)}$,

13. $y=(\operatorname{arctg}(x-3))^{\sin 4x}$,

14. $y=\dfrac{(x-3)^5(x+2)^3}{\sqrt{(x-1)^3}}$.

## ВАРІАНТ 5

1. $y=7x+\dfrac{5}{x^2}-\sqrt[7]{x^4}+\dfrac{6}{x}$,

2. $y=\sqrt[4]{3x^2-x+5}-3/(x-5)^4$,

3. $y=\arccos 3x^2 \operatorname{ctg} 3x$,

4. $y=\operatorname{tg}^4 3x \operatorname{arctg} 7x^2$,

5. $y=3^{\cos x}\ln\left(x^2-3x+7\right)$, 6. $y=\operatorname{cth}^3 5x\arcsin 3x^2$,

7. $y=\dfrac{e^{\cos x}}{\sqrt{7x^2-5x+2}}$, 8. $y=\dfrac{\lg(3x-4)}{\cos^2 3x}$, 9. $y=\dfrac{\arccos 3x}{\operatorname{cth}^3(x+1)}$,

10. $y=\dfrac{3\operatorname{arcctg}(2x-5)}{(x+1)^4}$, 11. $y=\sqrt[7]{\dfrac{x-2}{x+2}}\arccos(2x-1)$, 12. $y=(\operatorname{sh}3x)^{\arcsin 2x}$,

13. $y=(\operatorname{ctg}(3x-2))^{\arcsin 3x}$, 14. $y=\dfrac{(x+2)^7(x-3)^3}{\sqrt{(x+1)^5}}$.

ВАРІАНТ 6

1. $y=5x^2+\dfrac{4}{x^3}-\sqrt[3]{x^4}-\dfrac{5}{x}$, 2. $y=\sqrt{x^4-2x^3+x}-4/(x+2)^3$,

3. $y=\arccos^2 4x\ln(x-3)$, 4. $y=5^{-x^2}\arcsin 3x^3$,

5. $y=\log_2(x-7)\operatorname{arctg}\sqrt{x}$, 6. $y=\operatorname{ch}\dfrac{1}{x}\operatorname{arctg}(7x+2)$,

7. $y=\dfrac{e^{\operatorname{tg}3x}}{\sqrt{3x^2-x+4}}$, 8. $y=\dfrac{\operatorname{tg}^3 2x}{\lg(5x+1)}$, 9. $y=\dfrac{\operatorname{th}3x^5}{\operatorname{arctg}^2 3x}$,

10. $y=\dfrac{2\operatorname{arctg}(3x+2)}{(x-3)^2}$, 11. $y=\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+1}}\arccos(2x+1)$,

12. $y=(\cos 5x)^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}$, 13. $y=(\operatorname{tg}(4x-3))^{\arccos 2x}$, 14. $y=\dfrac{(x-1)^4(x+2)^5}{\sqrt[3]{x-4}}$.

ВАРІАНТ 7

1. $y=\dfrac{6}{x^4}-\dfrac{3}{x}+3x^3-\sqrt{x^7}$, 2. $y=\sqrt[3]{(x-5)^5}+\dfrac{5}{2x^2-4x+7}$,

3. $y=\cos^4 3x\cdot\arcsin 3x^2$, 4. $y=\log_5(x+1)\cdot\operatorname{arctg}^2 x^3$,

5. $y=\sqrt{(x+5)^3}\arccos^4 x$, 6. $y=\operatorname{th}^3 5x\cdot\operatorname{arcctg}(2x-5)$,

7. $y=\dfrac{e^{-\operatorname{tg}x}}{4x^2+7x-5}$, 8. $y=\dfrac{\operatorname{tg}^4 3x}{\lg(x^2-x+4)}$, 9. $y=\dfrac{\sqrt[5]{\operatorname{ch}3x}}{\operatorname{arctg}(x+2)}$,

10. $y=\dfrac{4\lg(3x+7)}{(x-5)^3}$, 11. $y=\sqrt[7]{\dfrac{x+3}{x-3}}\arccos 4x$, 12. $y=(\operatorname{sh}3\mathrm{x})^{\operatorname{arcctg}2x}$,

13. $y=(\lg(8x+3))^{\operatorname{tg}5x}$, 14. $y=\dfrac{\sqrt[5]{(x+2)^3}}{(x-1)^4(x-3)^5}$.

ВАРІАНТ 8

1. $y=\sqrt[3]{x^7}+\dfrac{3}{x}-4x^6+\dfrac{4}{x^5}$, 2. $y=\sqrt[5]{(x+4)^6}-\dfrac{1}{2x^2-3x+7}$,

3. $y=\operatorname{arctg}^3 4x\cdot 3^{\sin x}$, 4. $y=\log_3(x+5)\cdot\arccos 3x$,

5. $y=(x-5)^7 \operatorname{arcctg} 7x^3$,

6. $y=\operatorname{ch}^3 3x\cdot \operatorname{arcctg} 5x^2$,

7. $y=\dfrac{\sqrt[3]{2x^2-3x+1}}{e^{-x}}$,

8. $y=\dfrac{\ln(7x-3)}{3\operatorname{tg}^2 4x}$,

9. $y=\dfrac{\arcsin^3 4x}{\operatorname{sh}(3x+1)}$,

10. $y=\dfrac{\arcsin(3x+8)}{7^{3x}}$

11. $y=\sqrt[5]{\dfrac{x^2+2}{x^2-2}}\arcsin 4x$,

12. $y=(\ln(x+3))^{\sin\sqrt{x}}$,

13. $y=(\sin(7x+4))^{\operatorname{arcctg} x}$,

14. $y=\dfrac{(x-7)\sqrt[10]{3x-1}}{(x+3)^5}$.

## ВАРІАНТ 9

1. $y=7x^2+\dfrac{2}{x^3}-\sqrt[5]{x^4}+\dfrac{3}{x}$,

2. $y=\sqrt[5]{3x^2-x+4}-3/(x-5)^6$,

3. $y=\operatorname{arctg} 3x^2 \operatorname{ctg} 3x$,

4. $y=\operatorname{tg}^4 3x\cdot \arcsin 7x^2$,

5. $y=2^{\cos x}\ln\left(x^2-5x+7\right)$,

6. $y=\operatorname{th}^3 5x\cdot \arcsin 4x^2$,

7. $y=\dfrac{e^{\sin x}}{\sqrt{7x^2-4x+2}}$,

8. $y=\dfrac{\ln(3x+4)}{\operatorname{tg}^2 3x}$,

9. $y=\dfrac{\arccos 3x}{\operatorname{th}^3(x+5)}$,

10. $y=\dfrac{3\operatorname{arctg}(2x+5)}{(x+3)^4}$,

11. $y=\sqrt[9]{\dfrac{x-2}{x+2}}\arccos(4x-1)$,

12. $y=(\operatorname{ch} 3x)^{\arcsin 5x}$,

13. $y=(\cos(3x-2))^{\arcsin x}$,

14. $y=\dfrac{(x+2)^9(x-3)^2}{\sqrt{(x+1)^3}}$.

## ВАРІАНТ 10

1. $y=4x^6+\dfrac{5}{x}-\sqrt[3]{x^7}-\dfrac{7}{x^4}$,

2. $y=\sqrt[3]{4x^2-3x-4}-2/(x-3)^5$,

3. $y=4^{-x}\ln^5(x+2)$,

4. $y=\log_4(x-1)\cdot \arcsin^4 x$,

5. $y=5^{-x^2}\arccos 5x^4$,

6. $y=\operatorname{cth}^2(x+1)\cdot \arccos\dfrac{1}{x}$,

7. $y=\dfrac{e^{\operatorname{ctg} 5x}}{(x+4)^3}$,

8. $y=\dfrac{\operatorname{ctg}^2 5x}{\ln(7x-2)}$,

9. $y=\dfrac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} 2x}}{\operatorname{sh}^2 x}$,

10. $y=\dfrac{3\arcsin(2x-7)}{(x+2)^4}$,

11. $y=\sqrt[7]{\dfrac{x-1}{x+1}}\arccos(3x+1)$,

12. $y=(\operatorname{sh} 3x)^{\operatorname{arctg} 5x}$,

13. $y=(\lg(5x-1))^{\arcsin x}$,

14. $y=\dfrac{(x+2)(x-7)^4}{\sqrt{(x-1)^3}}$.

## ВАРІАНТ 11

1. $y=7x^7+\dfrac{2}{x^5}-\sqrt[9]{x^4}+\dfrac{3}{x}$,

2. $y=\sqrt[3]{3x^2-2x+4}-3/(x+5)^6$,

3. $y=\arccos 3x^2\cdot \operatorname{tg} 3x$,

4. $y=\lg^4 3x\cdot \arcsin 7x^5$,

5. $y=6^{\cos x}\ln\left(x^2-3x+7\right)$,  6. $y=\operatorname{ctg}^3 x\cdot\arcsin 4x^2$,

7. $y=\dfrac{e^x}{\sqrt{7x^2-4x+3}}$,  8. $y=\dfrac{\lg(x+4)}{\operatorname{tg}^2 3x}$,  9. $y=\dfrac{\arccos^2 3x}{\operatorname{th}(x+5)}$,

10. $y=\dfrac{2\ln(2x+5)}{(x+6)^5}$,  11. $y=\sqrt[5]{\dfrac{x-2}{x+2}}\operatorname{arctg}(4x+5)$,  12. $y=(\operatorname{ch}3x)^{\operatorname{ctg}\frac{1}{x}}$,

13. $y=(\operatorname{arctg}5x)^{\lg x}$,  14. $y=\dfrac{(x+2)^3(x+3)^2}{\sqrt{(x+1)^5}}$.

ВАРІАНТ 12

1. $y=7x-\dfrac{3}{x^2}-\sqrt[7]{x^3}+\dfrac{6}{x}$,  2. $y=\sqrt[6]{3x^2-7x+5}-\dfrac{9}{(x+3)^4}$,

3. $y=\arccos 5x^2\cdot tgx$,  4. $y=\operatorname{tg}^7 3x\cdot\operatorname{arctg}7x^3$,

5. $y=3^{\sin x}\ln\left(x^2+x+1\right)$,  6. $y=\operatorname{cth}^3 5x\cdot\arcsin 3\sqrt{x}$,

7. $y=\dfrac{e^{3x}}{\sqrt{3x^2-4x-7}}$,  8. $y=\dfrac{\lg(3x-2)}{\sin^3(5x+1)}$,  9. $y=\dfrac{\operatorname{ch}^2(4x+2)}{\operatorname{arctg}x^3}$,

10. $y=\dfrac{3\ln(5x+7)}{(x-7)^2}$,  11. $y=\sqrt[5]{\dfrac{x-7}{x+7}}\cos\left(2x^3+x\right)$,  12. $y=\left(\operatorname{tg}\sqrt{x}\right)^{\arcsin 5x}$,

13. $y=(\operatorname{arctg}7x)^{\lg(x+1)}$,  14. $y=\dfrac{(x+1)^5(x-5)^3}{\sqrt{(x-1)^7}}$.

ВАРІАНТ 13

1. $y=2x^3-\dfrac{5}{x^6}+\dfrac{1}{x}+\sqrt[5]{x}$,  2. $y=\sqrt{(x-2)^5}+\dfrac{5}{\left(2x^3+1\right)^2}$,

3. $y=\operatorname{ctg}^4 x\cdot\arccos 4x^5$,  4. $y=\arcsin^4 x\cdot\lg(x+1)$,

5. $y=2^{-x^2}\operatorname{arctg}3x^4$,  6. $y=\operatorname{sh}^3 4x\cdot\cos\sqrt{x}$,

7. $y=\dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x^2+x-1}}$,  8. $y=\dfrac{4\log_2(7x+2)}{\cos 7x^3}$,  9. $y=\dfrac{\arcsin 3x^4}{\operatorname{th}^3 x}$,

10. $y=\dfrac{7\arccos(4x-1)}{(x+1)^5}$,  11. $y=\sqrt[6]{\dfrac{x-9}{x+9}}\operatorname{tg}\left(3x^2+2x+1\right)$,

12. $y=(\arcsin 3x)^{\arccos x}$,  13. $y=(\operatorname{arctg}(x+7))^{\ln 2x}$,  14. $y=\dfrac{\sqrt{(x+2)^3}(x-1)^4}{(x+2)^7}$.

ВАРІАНТ 14

1. $y=3x^4-\dfrac{5}{x^9}+\dfrac{2}{x}+\sqrt[3]{x}$,  2. $y=\sqrt{(x-4)^7}+\dfrac{5}{(x+1)^3}$,

3. $y=\operatorname{tg}^5 x\cdot\arcsin 3x$,  4. $y=\arccos^3 x\ln(x+4)$,

5. $y=5^{-x^3}\operatorname{tg}7x^4$,

6. $y=\operatorname{sh}^3 4x\cdot\operatorname{ctg}\sqrt{x}$,

7. $y=\dfrac{e^{x+2}}{\sqrt{2x^2+5x+1}}$,

8. $y=\dfrac{\ln(7x+1)}{5\sin 7x^3}$,

9. $y=\dfrac{\arccos x^2}{\operatorname{tg}^2 x}$,

10. $y=\dfrac{\arccos(x-1)}{(x+2)^8}$,

11. $y=\sqrt[7]{\dfrac{x-4}{x+4}}\operatorname{ctg}(2x+5)$,

12. $y=(\sin 3x)^{\operatorname{arctg} x}$,

13. $y=(\ln(x+7))^{\arccos 2x}$,

14. $y=\dfrac{\sqrt{(x+7)^5}\,(x+3)^2}{(x-7)^3}$.

ВАРІАНТ 15

1. $y=x^5+\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^5}+\sqrt[3]{x^8}$,

2. $y=\sqrt[5]{5+x-7x^2}-\dfrac{3}{(x-1)^6}$,

3. $y=\cos^3 x\cdot\operatorname{arctg}5x^2$,

4. $y=\ln(x+1)\cdot\operatorname{arctg}^5 x$,

5. $y=\sqrt[9]{x-3}\arcsin 2x$,

6. $y=\operatorname{ctg}^3 x\cdot\operatorname{arctg}(5x+1)$,

7. $y=\dfrac{e^{x+4}}{(3x+5)^4}$,

8. $y=\dfrac{\sin^3(x-1)}{\operatorname{tg}(4x+5)}$,

9. $y=\dfrac{\sqrt{2^{2x+5}}}{\operatorname{arctg}^2 5x}$,

10. $y=\dfrac{\operatorname{ch}(x^2+x)}{(x+1)^5}$,

11. $y=\sqrt[4]{\dfrac{x-5}{x+5}}\sin(3x^2+7x+1)$,

12. $y=(\cos\sqrt{x+5})^{\cos 3x}$,

13. $y=(\sin(2x+5))^{\operatorname{arcctg} x}$,

14. $y=\dfrac{\sqrt[3]{(x-2)^5}}{(x-5)^2(x+1)^3}$.

## 3. ТЕОРЕМИ ПРО ДИФЕРЕНЦІЙОВАНІ ФУНКЦІЇ

***<u>Приклад 3.1.</u>*** Знайти похідну функції $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t. \end{cases}$

***Розв'язання.*** При обчисленні похідної використаємо формулу для диференціювання функцій, заданих параметрично [6]: $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$. Маємо: $x'_t = -a\sin t$, $y'_t = a\cos t$, тоді $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{a\cos t}{-a\sin t} = -\mathrm{ctg}\, t$.

***<u>Приклад 3.2.</u>*** Знайти похідну функції $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

***Розв'язання.*** Функцію задано неявно. Продиференцюємо обидві частини рівності. Маємо: $\left(\dfrac{x^2}{a^2}\right)' + \left(\dfrac{y^2}{b^2}\right)' = 1'$, або $\dfrac{2x}{a^2} + \dfrac{2yy'}{b^2} = 0$, звідки $y' = -\dfrac{b^2 x}{a^2 y}$.

***<u>Приклад 3.3.</u>*** Знайти похідну третього порядку функції $y = x\sin x$.

***Розв'язання.*** Поступово обчислимо похідні:
$y' = \sin x + x\cos x$, $y'' = 2\cos x - x\sin x$, $y''' = -3\sin x - x\cos x$.

***<u>Приклад 3.4.</u>*** Обчислити границі: а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$, б) $\lim\limits_{x\to 0+0} x^x$.

***Розв'язання.*** ***а)*** Функції $f(x) = 1-\cos x$ і $\varphi(x) = x^2$, а також функції $f(x) = \sin x$ і $\varphi(x) = 2x$, в околі точки $x = 0$ диференційовані, неперервні в точці $x = 0$, $f(0) = \varphi(0) = 0$, тому для знаходження границі можна застосувати правило Лопіталя [6]: $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$. Маємо:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)'}{\left(x^2\right)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)'}{(2x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}.$$

***б)*** При обчисленні границі показниково-степеневої функції, тобто функції виду $y = f(x)^{\varphi(x)}$ при $x \to x_0$ досить знайти границю при $x \to x_0$ функції $\ln y = \varphi(x)\ln f(x)$. Тоді, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} \ln y = A$, то $\lim\limits_{x\to x_0} y = e^A$.

Нехай $y = x^x$, тоді $\ln y = x\ln x$ і $\lim\limits_{x\to 0+0} \ln y = \lim\limits_{x\to 0+0} x\ln x = [0\cdot\infty] =$

$$= \lim_{x\to 0+0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to 0+0} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 0+0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+0} (-x) = 0.$$

Отже, $\lim\limits_{x\to 0+0} y = \lim\limits_{x\to 0+0} x^x = e^0 = 1$.

***<u>Приклад 3.5.</u>*** Розкласти функцію $f(x)=e^{2x-x^2}$ за формулою Маклорена до члена з $x^5$ [6].

***Розв'язання.*** *<u>I спосіб.</u>* Будемо застосовувати формулу Маклорена із залишковим членом у формі Пеано, що має вигляд:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o\left(x^n\right).$$

Очевидно, що $f(0)=1$. Обчислимо похідні функції в нулі до п'ятого порядку включно:

$f'(x)=2e^{2x-x^2}(1-x)$, $\qquad f'(0)=2$,

$f''(x)=4e^{2x-x^2}(1-x)^2-2e^{2x-x^2}$, $\qquad f''(0)=2$,

$f'''(x)=8e^{2x-x^2}(1-x)^3-12e^{2x-x^2}(1-x)$, $\qquad f'''(0)=-4$,

$f^{(4)}(x)=16e^{2x-x^2}(1-x)^4-48e^{2x-x^2}(1-x)^2+12e^{2x-x^2}$, $\qquad f^{(4)}(0)=-20$,

$f^{(5)}(x)=32e^{2x-x^2}(1-x)^5-160e^{2x-x^2}(1-x)^3+120e^{2x-x^2}(1-x)$, $\quad f^{(5)}(0)=-8$.

Підставляючи значення у формулу Маклорена, отримаємо

$$e^{2x-x^2}=1+\frac{2}{1!}x+\frac{2}{2!}x^2+\frac{-4}{3!}x^3+\frac{-20}{4!}x^4+\frac{-8}{5!}x^5+o\left(x^5\right)=$$

$$=1+2x+x^2-\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{6}x^4-\frac{1}{15}x^5+o\left(x^5\right).$$

*<u>II спосіб.</u>* Застосовуємо стандартне розвинення

$$e^t=1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\ldots+\frac{t^n}{n!}+o\left(t^n\right).$$

Для функції $f(x)=e^{2x-x^2}$ маємо $t=2x-x^2$, $n=5$, тому $e^{2x-x^2}=$

$$=1+\frac{2x-x^2}{1!}+\frac{\left(2x-x^2\right)^2}{2!}+\frac{\left(2x-x^2\right)^3}{3!}+\frac{\left(2x-x^2\right)^4}{4!}+\frac{\left(2x-x^2\right)^5}{5!}+o\left(\left(2x-x^2\right)^5\right).$$

Із властивостей нескінченно малих отримаємо $o\left(\left(2x-x^2\right)^5\right)=o\left(x^5\right)$, для многочленів $p_n(x)$ степеня $n>5$ сума $p_n(x)+o\left(x^5\right)=o\left(x^5\right)$. Тому розкриваємо дужки, враховуючи тільки доданки зі степенями, що не перевищують 5. Одержимо: $e^{2x-x^2}=1+\left(2x-x^2\right)+\frac{1}{2}\left(4x^2-4x^3+x^4\right)+\frac{1}{6}\left(8x^3-12x^4+6x^5+\ldots\right)+$

$$+\frac{1}{24}\left(16x^4-32x^5+\ldots\right)+\frac{1}{120}\left(32x^5+\ldots\right)+o\left(x^5\right)=$$

$$=1+2x+x^2-\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{6}x^4-\frac{1}{15}x^5+o\left(x^5\right).$$

***<u>Приклад 3.6.</u>*** Дослідити функцію $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$ та побудувати її графік.

***Розв'язання.*** При дослідженні функції потрібно з'ясувати такі її характеристики [6, 8].

1). Область визначення функції.

2). Парність, непарність, періодичність функції.

3). Нулі функції.

4). Асимптоти графіка функції.

5). Проміжки монотонності і екстремуми функції.

6). Проміжки випуклості, увігнутості і точки перегину графіка функції.

Якщо зазначених пунктів дослідження недостатньо для побудови графіка, є сенс додатково обчислити її значення в декількох точках області визначення.

Дослідимо задану функцію відповідно до запропонованої схеми.

1). Функція існує при всіх значеннях $x$, крім $x=-1$, при якому знаменник дробу обертається в нуль. Таким чином, функція визначена в інтервалах $(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$.

2). Оскільки $f(-x)=\dfrac{(-x)^3}{2(-x+1)^2}=\dfrac{-x^3}{2(1-x)^2}$, то функція ні парна, ні непарна, графік її не симетричний. Функція не періодична, $f(x+T)\neq f(x)$, $T>0$.

3). Точку перетину з віссю $Oy$ визначимо, поклавши $x=0$. Тоді $y(0)=0$, отже, точка $(0,0)$ належить графіку функції. Точки перетину з віссю $Ox$ знайдемо, поклавши $y=0$. Розв'язуючи рівняння $\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}=0$, одержуємо $x=0$.

4). Оскільки вертикальні асимптоти функція може мати лише в точках розриву, обчислимо односторонні границі функції при $x\to-1$:

$$\lim_{x\to-1-0}\frac{x^3}{2(x+1)^2}=\left[\frac{-1}{+0}\right]=-\infty, \qquad \lim_{x\to-1+0}\frac{x^3}{2(x+1)^2}=\left[\frac{-1}{+0}\right]=-\infty.$$

Тобто, пряма $x=-1$ є вертикальною асимптотою графіка. Рівняння похилої асимптоти знайдемо у вигляді $y=kx+b$.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{2x(x+1)^2}=\frac{1}{2},$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{2x(x+1)^2}-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x^2-x}{2(x+1)^2}=-1.$$

Отже, пряма $y=0{,}5x-1$ є похилою асимптотою графіка функції.

5). Обчислимо похідну: $y' = \dfrac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3}$. Похідна дорівнює нулю в точках $x_1 = 0$, $x_2 = -3$. Похідна не існує в точці $x = -1$, але варто пам'ятати, що ця точка не належить області визначення функції. Розіб'ємо область визначення отриманими точками на проміжки і дослідимо знак першої похідної в кожному проміжку. Результат відобразимо на схемі (рис. 3.1).

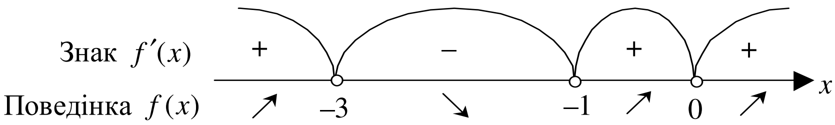


Рис. 3.1.

Функція зростає на проміжках $(-\infty;-3)$ і $(-1;+\infty)$, спадає на проміжку $(-3;-1)$. У точці $x = -3$ функція має максимум: $y_{\max}(-3) = -\dfrac{27}{8}$.

6). Обчислимо другу похідну: $y'' = \dfrac{3x}{(x+1)^4}$. Визначаємо критичні точки другого роду, поклавши чисельник і знаменник дробу рівними нулю. Одержимо $x_1 = 0$, $x_2 = -1$. Точка $x_2 = -1$ не може бути критичною, оскільки вона не належить області визначення.

Розіб'ємо область визначення одержаними точками на проміжки і дослідимо знак другої похідної на кожному проміжку. Результат зобразимо на схемі (рис. 3.2).

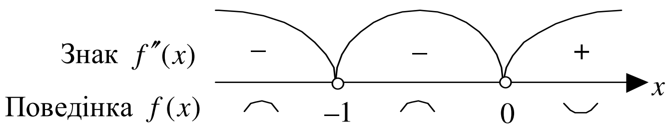


Рис. 3.2.

Графік функції опуклий на проміжках $(-\infty;-1)$ і $(-1;0)$ і вгнутий на проміжку $(0;+\infty)$. При $x = 0$ друга похідна дорівнює нулю і при переході через цю точку змінює знак. Це означає, що точка $x = 0$ є точкою перегину.

Побудову графіка починаємо з зображення його асимптот і всіх точок, одержаних у процесі дослідження.

Графік функції зображено на рис. 3.3.

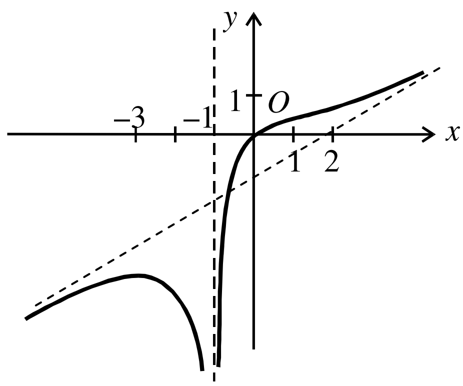


Рис. 3.3.

### *Завдання для самостійної роботи*

1. Знайти похідну функції, яку задано параметрично.
2. Знайти похідну функції, яку задано неявно.

3. Знайти похідну вказаного порядку.
4. Обчислити границі.
5. Розкласти функцію за формулою Маклорена.
6. Дослідити функцію та побудувати її графік.

## ВАРІАНТ 1

1. $\begin{cases} x = 2t^2; \\ y = 3t^3. \end{cases}$ 2. $x = y + \operatorname{arctg} y$. 3. $y = x\sin^2 x,\ n = 4$.

4. а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+2x)}{\operatorname{tg} 3x + \arcsin 4x}$, б) $\lim\limits_{x\to 0} (\sin x)^{x^2}$.

5. $y = e^{7x}$ до $x^3$. 6. а) $y = x^2 + \dfrac{2}{x}$; б) $y = e^{-\frac{1}{x}}$.

## ВАРІАНТ 2

1. $\begin{cases} x = t - \sin t; \\ y = 1 - \cos t. \end{cases}$ 2. $e^x + e^y - 2^{xy} - 1 = 0$. 3. $y = \sqrt[5]{x^3},\ n = 3$.

4. а) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1 - x^5}{\ln\left(x^4\right) + \sin(x-1)}$, б) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2}$.

5. $y = \sin 3x$ до $x^5$. 6. а) $y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$; б) $y = x - \ln(x+1)$.

## ВАРІАНТ 3

1. $\begin{cases} x = \ln t; \\ y = t^2 - 1. \end{cases}$ 2. $x^4 + y^4 = x^2 y^2$. 3. $y = \dfrac{x^3}{x-1},\ n = 3$.

4. а) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2 - 16}{\sin(4-x) + \operatorname{arctg}(x-4)}$, б) $\lim\limits_{x\to 1} (\cos(x-1))^{1/\left(x^2-1\right)}$.

5. $y = \cos 2x$ до $x^4$. 6. а) $y = 6x^2 - x^4$; б) $y = \ln\left(x^2 + 1\right)$.

## ВАРІАНТ 4

1. $\begin{cases} x = t\cos t; \\ y = t\sin t. \end{cases}$ 2. $y = 5x + \operatorname{arctg} y$. 3. $y = e^x \sin x,\ n = 4$.

4. а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{\ln\left(1 + x^5 + x^7\right)}$, б) $\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{arctg} x)^{\sqrt{x}}$.

5. $y = \ln(1+3x)$ до $x^5$. 6. а) $y = \dfrac{x^4 - 3}{x}$; б) $y = x^2 \cdot e^{-x^2}$.

## ВАРІАНТ 5

1. $\begin{cases} x = \ln\left(1 + t^2\right); \\ y = t^2. \end{cases}$ 2. $y^2 = x\sin y$. 3. $y = 3x^2 \sin x,\ n = 5$.

4. а) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3 - 27}{\operatorname{arctg}(3-x) + 4\sin\left(x^2 - 9\right)}$, б) $\lim\limits_{x\to 0} \left(e^x - 1\right)^x$.

5. $y=\dfrac{1}{2x+1}$ до $x^4$.

6. а) $y=\dfrac{16}{x^2(x-4)}$; б) $y=x+\dfrac{\ln x}{x}$.

## ВАРІАНТ 6

1. $\begin{cases} x=\ln t; \\ y=\dfrac{1}{1-t}. \end{cases}$

2. $y\sin y-\cos(x-y)=0$.

3. $y=4x^2\cos x$, $n=5$.

4. а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sec^2 x-2\operatorname{tg}x}{1+\cos 4x}$,

б) $\lim\limits_{x\to1}\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$.

5. $y=\dfrac{1}{1-3x}$ до $x^4$.

6. а) $y=\dfrac{x}{5+x^2}$; б) $y=x^2\cdot e^{-x}$.

## ВАРІАНТ 7

1. $\begin{cases} x=3\cos t; \\ y=3\sin t. \end{cases}$

2. $xy=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$.

3. $y=7xe^{2x}$, $n=5$.

4. а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{ch}x-1}{1-\cos x}$,

б) $\lim\limits_{x\to0}\left(x^{\sin x}\right)$.

5. $y=e^{2x}$ до $x^5$.

6. а) $y=\dfrac{8}{x^2-4}$; а) $y=xe^{-x}$.

## ВАРІАНТ 8

1. $\begin{cases} x=t-\cos 2t; \\ y=\sin 3t. \end{cases}$

2. $3^x+3^y=\sin y$.

3. $y=x\cdot 2^{2x}$, $n=6$.

4. а) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6}$,

б) $\lim\limits_{x\to0}\left(1+x^2\right)^{1/x}$.

5. $y=\sin 4x$ до $x^5$.

6. а) $y=1/\left(x^2+3\right)$; б) $y=\ln\sin x$.

## ВАРІАНТ 9

1. $\begin{cases} x=3t; \\ y=2\ln 3t. \end{cases}$

2. $x\sin y+y\sin x=0$.

3. $y=x\ln(2x+1)$, $n=5$.

4. а) $\lim\limits_{x\to0}(1-\cos x)\operatorname{ctg}x$

б) $\lim\limits_{x\to0}\left(1+3x^2\right)^{1/x}$

5. $y=\cos 3x$ до $x^4$.

6. а) $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$; б) $y=x\sin x$.

## ВАРІАНТ 10

1. $\begin{cases} x=\arcsin t; \\ y=\sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

2. $x^3=\dfrac{x-y}{x+y}$.

3. $y=x\sin^2 x$, $n=4$.

4. а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$,

б) $\lim\limits_{x\to0}(\operatorname{arctg}2x)^{\sqrt{x}}$.

5. $y=\ln(1+4x)$ до $x^5$.

6. а) $y=3x+1/x^3$; б) $y=(\ln x)/x$.

## ВАРІАНТ 11

1. $\begin{cases} x = e^{-3t}; \\ y = e^{3t}. \end{cases}$ 2. $3^x + 3^y = \cos y$. 3. $y = 7xe^{2x}$, $n = 6$.

4. а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^{\sin 4x}\right)$.

5. $y = e^{7x}$ до $x^3$ 6. а) $y = x^2 + 1/x^2$; б) $y = x^3 \cdot e^{-x}$.

## ВАРІАНТ 12

1. $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t; \\ y = 3t. \end{cases}$ 2. $\sin(xy) + \cos y = 0$. 3. $y = \sin^3 x$, $n = 4$.

4. а) $\lim\limits_{x\to 0}(1 - \cos x)\operatorname{ctg} x$, б) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^{2x^2}$.

5. $y = \sin 3x$ до $x^5$. 6. а) $y = \frac{x^3}{3 - x^2}$; б) $y = \frac{1}{e^x - 1}$.

## ВАРІАНТ 13

1. $\begin{cases} x = 5t^2 + t; \\ y = \ln t. \end{cases}$ 2. $x \ln y + \frac{y^2}{x} = 3$. 3. $y = x\cos^2 x$, $n = 4$.

4. а) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$, б) $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{arctg} x)^{\sqrt{3x}}$.

5. $y = \ln(1 + 3x)$ до $x^5$. 6. $y = \frac{1}{x} + 4x^2$; б) $y = x + e^{-x}$.

## ВАРІАНТ 14

1. $\begin{cases} x = \cos 2t; \\ y = \sin^2 t. \end{cases}$ 2. $e^x \sin y - e^{-y}\cos x = 0$. 3. $y = x\cos 2x$, $n = 5$.

4. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^{\sin 3x}\right)$.

5. $y = \frac{1}{2x+1}$ до $x^4$. 6. а) $y = x + \frac{4}{x+2}$; б) $y = x + e^{1/x}$.

## ВАРІАНТ 15

1. $\begin{cases} x = \cos^3 t; \\ y = \sin^3 t. \end{cases}$ 2. $\ln x + e^{-\frac{y}{x}} = 5$. 3. $y = x\sin 3x$, $n = 5$.

4. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-0,5x^2}}{x^4}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin 5x)^{x^2}$.

5. $y = \frac{1}{1-3x}$ до $x^4$. 6. а) $y = \frac{x^4}{x^3 - 1}$; б) $y = e^{2x - x^2}$.

## 4. ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

***Приклад 4.1*.** Знайти і зобразити область визначення функції $z = \arcsin(2x - y)$ [2].

***Розв'язання.*** Функцію визначено для всіх значень $x$, $y$, при яких існує арксинус. Очевидно, що це ті $x$ і $y$, при яких $|2x - y| \le 1$. Отже, область визначення даної функції зобразимо точками площини $xOy$, які є розв'язками системи: $\begin{cases} 2x - y \le 1, \\ 2x - y \ge -1. \end{cases}$ Таким чином, одержимо частину площини між двома прямими (рис. 4.1).

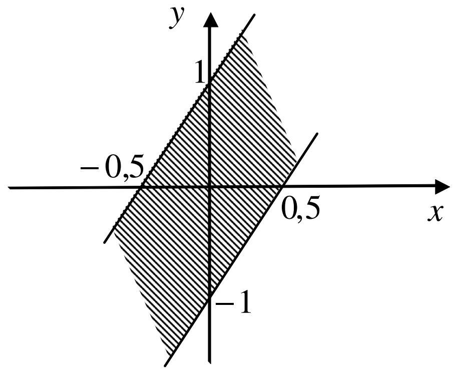

Рис.4.1.

***Приклад 4.2*.** Знайти диференціали 1-го і 2-го порядків функції $u = \sin\left(x^2 + 3yz + 10y^5 + z^3 + 5\right)$ [2].

***Розв'язання.*** Обчислимо частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos\left(x^2 + 3yz + 10y^5 + z^3 + 5\right) \cdot 2x,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \cos\left(x^2 + 3yz + 10y^5 + z^3 + 5\right) \cdot \left(3z + 50y^4\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \cos\left(x^2 + 3yz + 10y^5 + z^3 + 5\right) \cdot \left(3y + 3z^2\right).$$

Тоді диференціал першого порядку матиме наступний вигляд:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz = \cos\left(x^2 + 3yz + 10y^5 + z^3 + 5\right) \cdot 2xdx + \cos\left(x^2 + 3yz + \right.$$

$$\left. + 10y^5 + z^3 + 5\right) \cdot \left(3z + 50y^4\right)dy + \cos\left(x^2 + 3yz + 10y^5 + z^3 + 5\right) \cdot \left(3y + 3z^2\right)dz =$$

$$= \cos\left(x^2 + 3yz + 10y^5 + z^3 + 5\right) \cdot \left(2xdx + \left(3z + 50y^4\right)dy + \left(3y + 3z^2\right)dz\right).$$

Далі обчислимо частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\sin\left(x^2 + 3yz + 10y^5 + z^3 + 5\right) \cdot (2x)^2 + 2 \cdot \cos\left(x^2 + 3yz + 10y^5 + z^3 + 5\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\sin\left(x^2 + 3yz + 10y^5 + z^3 + 5\right) \cdot \left(3z + 50y^4\right)^2 +$$

$$+ 200y^3 \cdot \cos\left(x^2 + 3yz + 10y^5 + z^3 + 5\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\sin\left(x^2 + 3yz + 10y^5 + z^3 + 5\right) \cdot \left(3y + 3z^2\right)^2 +$$

$$+6z\cdot\cos\left(x^2+3yz+10y^5+z^3+5\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\sin\left(x^2+3yz+10y^5+z^3+5\right)\cdot\left(3z+50y^4\right)\cdot 2x,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=-\sin\left(x^2+3yz+10y^5+z^3+5\right)\cdot 2x\cdot\left(3y+3z^2\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=-\sin\left(x^2+3yz+10y^5+z^3+5\right)\cdot\left(3y+3z^2\right)\cdot\left(3z+50y^4\right)+$$

$$+3\cos\left(x^2+3yz+10y^5+z^3+5\right).$$

Підставимо одержані похідні у формулу для диференціала другого порядку і одержимо вираз для диференціала другого порядку нашої функції:

$$d^2u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(dx)^2+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(dy)^2+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(dz)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}dxdy+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}dxdz+2\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}dydz=$$

$$=\left(-\sin\left(x^2+3yz+10y^5+z^3+5\right)\cdot(2x)^2+2\cdot\cos\left(x^2+3yz+10y^5+z^3+5\right)\right)(dx)^2+$$

$$+\left(-\sin\left(x^2+3yz+10y^5+z^3+5\right)\cdot\left(3z+50y^4\right)^2+\right.$$

$$\left.+200y^3\cdot\cos\left(x^2+3yz+10y^5+z^3+5\right)\right)(dy)^2+$$

$$+\left(-\sin\left(x^2+3yz+10y^5+z^3+5\right)\cdot\left(3y+3z^2\right)^2+\right.$$

$$\left.+6z\cdot\cos\left(x^2+3yz+10y^5+z^3+5\right)\right)(dz)^2-$$

$$-2\sin\left(x^2+3yz+10y^5+z^3+5\right)\cdot\left(3z+50y^4\right)\cdot 2xdxdy-$$

$$-2\sin\left(x^2+3yz+10y^5+z^3+5\right)\cdot 2x\cdot\left(3y+3z^2\right)dxdz+$$

$$+2\left(-\sin\left(x^2+3yz+10y^5+z^3+5\right)\cdot\left(3y+3z^2\right)\cdot\left(3z+50y^4\right)+\right.$$

$$\left.+3\cos\left(x^2+3yz+10y^5+z^3+5\right)\right)dydz.$$

***<u>Приклад 4.3</u>*.** Обчислити наближено значення функції $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ у точці $A(0{,}95;1{,}02)$ [2].

***Розв'язання.*** Знайдемо значення функції $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ у точці, яка розташована достатньо близько до точки $A(0{,}95;1{,}02)$ і яка дає достатньо просте значення функції, тобто в точці $(1;1)$. Маємо наступне: $z=\operatorname{arctg}\frac{1}{1}=\frac{\pi}{4}\approx 0{,}785$.

Знайдемо приріст функції $\Delta z$ при $\Delta x=-0{,}05$, $\Delta y=0{,}02$:

$$\Delta z\approx dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y=-\frac{y}{x^2+y^2}\Delta x+\frac{x}{x^2+y^2}\Delta y=\frac{1\cdot 0{,}05+1\cdot 0{,}02}{2}=0{,}035.$$

Таким чином, $\operatorname{arctg}\dfrac{1{,}02}{0{,}95} = z + \Delta z \approx 0{,}785 + 0{,}035 = 0{,}82$.

***<u>Приклад 4.4</u>.*** Знайти похідну функції $u = (x + 2y)^z$ у точці $M(1;1;1)$ за напрямком вектору $\bar{n} = \bar{i} + 2\bar{j} - 2\bar{k}$ [2].

***Розв'язання.*** Обчислимо частинні похідні функції $u$ першого порядку:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = z \cdot (x + 2y)^{z-1}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = z \cdot (x + 2y)^{z-1} \cdot 2, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = (x + 2y)^z \cdot \ln(x + 2y).$$

Вираз для похідної функції за напрямком вектора $\bar{n}$ має вигляд:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M \cdot \cos\alpha + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M \cdot \cos\beta + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M \cdot \cos\gamma,$$

де $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_M = 1 \cdot 3^0 = 1$, $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \dfrac{1}{3}$,

$\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_M = 1 \cdot 3^0 \cdot 2 = 2$, $\cos\beta = \dfrac{2}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \dfrac{2}{3}$,

$\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_M = 3^1 \cdot \ln 3 = 3\ln 3$, $\cos\gamma = \dfrac{-2}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \dfrac{-2}{3}$.

Таким чином, маємо: $\dfrac{\partial u}{\partial n} = 1 \cdot \dfrac{1}{3} + 2 \cdot \dfrac{2}{3} + 3\ln 3 \cdot \left(-\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{5}{3} - 2\ln 3$.

***<u>Приклад 4.5</u>.*** Дослідити функцію $u = 4 - x^2 - 2y^2 - 3z^2 + 6x - 2y + 9z$ на локальний екстремум.

***Розв'язання.*** Знайдемо стаціонарні точки цієї функції, використовуючи необхідну умову екстремуму.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} -2x + 6 = 0, \\ -4y - 2 = 0, \\ -6z + 9 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 3, \\ y = -0{,}5, \\ z = 1{,}5. \end{cases}$$

Тобто стаціонарна точка $M(3;-0{,}5;1{,}5)$.

Перевіримо достатні умови екстремуму, використаємо критерій Сильвестра [2]. Складемо матрицю із частинних похідних другого порядку у точці $M$.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -4, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -6, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 0.$$

Таким чином, маємо матрицю: $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$. Обчислимо головні мінори цієї матриці:

$$\Delta_1 = |-2| = -2,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 8,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -48.$$

Оскільки в т. $M(3;-0{,}5;1{,}5)$ $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0$, то другий диференціал є від'ємно визначеною квадратичною формою, і в стаціонарній точці буде локальний максимум. Відповідне максимальне значення функції:

$$u = u(M) = 4 - 9 - 2 \cdot \frac{1}{4} - 3 \cdot \frac{9}{4} + 18 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 9 \cdot \frac{3}{2} = 20{,}25.$$

***<u>Приклад 4.6</u>.*** Знайти найменше і найбільше значення функції $z = f(x, y)$ в області $D$.

а) $z = 3xy$, $D: x^2 + y^2 \le 4$;

б) $z = x^3 + y^3 - 6xy$, $D: x \ge 0, y \ge 0, x + y \le 5$.

***Розв'язання. а)*** Знайдемо стаціонарні точки функції $z$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 3y = 0, \\ 3x = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

Точка $M(0;0)$ – стаціонарна точка. Вона належить області $D$.

Далі знаходимо точки умовного екстремуму, при умові, що ці точки належать границі області $D$, тобто колу $x^2 + y^2 = 4$. Складемо функцію Лагранжа: $F(x, y, \lambda) = 3xy + \lambda(x^2 + y^2 - 4)$. Знайдемо локальний екстремум цієї функції. Запишемо необхідну умову екстремуму:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 3y + 2x\lambda = 0, \\ 3x + 2y\lambda = 0, \\ x^2 + y^2 - 4 = 0. \end{cases}$$

Розв'язуємо останню систему і одержимо стаціонарні точки:

$$M_1\left(\sqrt{2}; \sqrt{2}\right) \text{ при } \lambda = -\frac{3}{2}, \qquad M_2\left(-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right) \text{ при } \lambda = \frac{3}{2},$$

$$M_3\left(\sqrt{2}; -\sqrt{2}\right) \text{ при } \lambda = \frac{3}{2}, \qquad M_4\left(-\sqrt{2}; -\sqrt{2}\right) \text{ при } \lambda = -\frac{3}{2}.$$

Знайдемо значення функції $z = f(x; y)$ в точка $M$, $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$, порівняємо ці значення між собою і виберемо найбільше та найменше.

$z(M) = 0$, $z(M_1) = 6$, $z(M_2) = -6$, $z(M_3) = -6$, $z(M_4) = 6$.

Таким чином,

$$\max_D z = z\left(\sqrt{2}; \sqrt{2}\right) = z\left(-\sqrt{2}; -\sqrt{2}\right) = 6, \quad \min_D z = z\left(-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right) = z\left(\sqrt{2}; -\sqrt{2}\right) = -6.$$

***б)*** Знайдемо стаціонарні точки функції $z$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x^2 - 6y = 0, \\ 3y^2 - 6x = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - 2y = 0, \\ y^2 - 2x = 0. \end{cases}$$

Із останньої системи одержимо стаціонарні точки: $M_1(0;0)$, $M_2(2;2)$. Ці точки належать області $D$ (рис. 4.2).

Оскільки контур області $D$ складається з трьох відрізків прямих, то далі будемо знаходити екстремуми функції на кожному з цих відрізків.

1) Відрізок $OA$: На цьому відрізку $y = 0$, $x \in [0;5]$, $z = x^3$, $z' = 3x^2$, $3x^2 = 0$, $x = 0$ – стаціонарна точка, яка співпадає з т. $M_1$, яка в свою чергу, співпадає з т. $O(0;0)$.

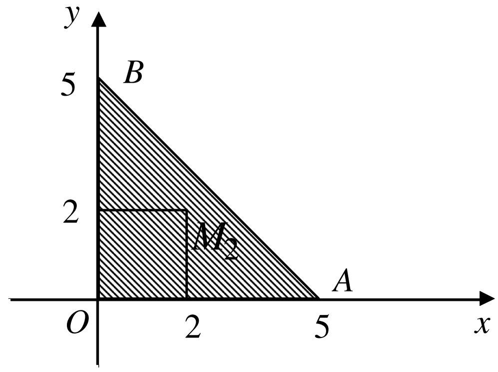


Рис. 4.2.

2) Відрізок $OB$: На цьому відрізку $x = 0$, $y \in [0;5]$, $z = y^3$, $z' = 3y^2$, $3y^2 = 0$, $y = 0$. Аналогічно до випадку 1) одержали т. $O(0;0)$.

3) Відрізок $AB$: На цьому відрізку $y = 5 - x$, $x \in [0;5]$,

$$z = x^3 + (5 - x)^3 - 6x(5 - x) = x^3 + (5 - x)^3 - 30x + 6x^2,$$

$$z' = 3x^2 + 3(5 - x)^2 \cdot (-1) - 30 + 12x,$$

стаціонарні точки:

$$3x^2 - 3(5 - x)^2 + 12x - 30 = 0, \quad 14x = 35, \quad x = 2{,}5, \quad y = 5 - 2{,}5 = 2{,}5.$$

Одержимо точку $K(2{,}5;2{,}5)$.

Далі знайдемо значення функції $z = f(x, y)$ в одержаних стаціонарних точках, в точках умовних екстремумів на контурах і в точках перетину контурів. Виберемо з цих значень найбільше і найменше.

$$z(O) = z(0;0) = 0,$$

$$z(M_2) = z(2;2) = 8 + 8 - 24 = -8,$$

$$z(K) = z(2{,}5;2{,}5) = \frac{125}{8} + \frac{125}{8} - 6 \cdot \frac{25}{4} = -\frac{25}{4},$$

$$z(A) = z(5;0) = 125,$$

$$z(B) = z(0;5) = 125.$$

Таким чином, $\max\limits_{D} z = z(5;0) = z(0;5) = 125$, $\min\limits_{D} z = z(2;2) = -8$.

***<u>Приклад 4.7</u>.*** Визначити умовний екстремум функції $u = x - y + 2z$ при умові $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ [2].

***Розв'язання.*** Побудуємо функцію Лагранжа:

$$F(x, y, z, \lambda) = x - y + 2z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 4).$$

Дослідимо цю функцію на локальний екстремум. Знайдемо стаціонарні точки:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 1 + 2\lambda x = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = -1 + 2\lambda y = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} = 2 + 2\lambda z = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2\lambda}, \\ y = \dfrac{1}{2\lambda}, \\ z = -\dfrac{1}{\lambda}, \\ \dfrac{1}{4\lambda^2} + \dfrac{1}{4\lambda^2} + \dfrac{4}{4\lambda^2} - 4 = 0. \end{cases}$$

Одержимо $\lambda = \pm\dfrac{\sqrt{6}}{4}$. Таким чином, маємо стаціонарні точки:

при $\lambda = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$: $M_1\left(-\dfrac{2}{\sqrt{6}}; \dfrac{2}{\sqrt{6}}; -\dfrac{4}{\sqrt{6}}\right)$

при $\lambda = -\dfrac{\sqrt{6}}{4}$: $M_2\left(\dfrac{2}{\sqrt{6}}; -\dfrac{2}{\sqrt{6}}; \dfrac{4}{\sqrt{6}}\right)$

Далі знайдемо частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2\lambda, \ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2\lambda, \ \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 2\lambda, \ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0, \ \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} = 0, \ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} = 0.$$

Таким чином маємо матрицю: $\begin{pmatrix} 2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda \end{pmatrix}$. Обчислимо головні мінори цієї матриці:

$$\Delta_1 = |2\lambda| = 2\lambda, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{vmatrix} = 4\lambda^2, \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda \end{vmatrix} = 8\lambda^3.$$

Оскільки для т. $M_1\left(-\dfrac{2}{\sqrt{6}}; \dfrac{2}{\sqrt{6}}; -\dfrac{4}{\sqrt{6}}\right)$ значення $\lambda = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$, то $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0$, тому другий диференціал є додатньо визначеною квадратичною формою, і в стаціонарній точці буде мінімум. Відповідне мінімальне значення функції: $u = u(M_1) = -2\sqrt{6}$.

Оскільки для т. $M_2\left(\frac{2}{\sqrt{6}};-\frac{2}{\sqrt{6}};\frac{4}{\sqrt{6}}\right)$ значення $\lambda=-\frac{\sqrt{6}}{4}$, то $\Delta_1<0$, $\Delta_2>0$, $\Delta_3<0$, тому другий диференціал є від'ємно визначеною квадратичною формою, і в стаціонарній точці буде максимум. Відповідне максимальне значення функції: $u=u(M_2)=2\sqrt{6}$.

***<u>Приклад 4.8</u>.*** Із усіх прямокутних трикутників із заданою площею $S$ потрібно знайти такий, гіпотенуза якого найкоротша.

***Розв'язання.*** Нехай $x$ та $y$ – катети трикутника, $z$ – гіпотенуза. Оскільки за теоремою Піфагора $z^2=x^2+y^2$, то задача зводиться до знаходження найменшого значення функції $x^2+y^2$ при умові $\frac{xy}{2}=S$, тобто $xy-2S=0$. Маємо задачу на умовний екстремум.

Побудуємо функцію Лагранжа: $F=x^2+y^2+\lambda(xy-2S)$. Із необхідної умови екстремуму маємо систему:

$$\begin{cases}2x+\lambda y=0,\\ 2y+\lambda x=0,\\ xy-2S=0.\end{cases}$$

Одержуємо розв'язок при умові, що $x>0$ та $y>0$:

$$\lambda=-2,\; x=y=\sqrt{2S}.$$

При $\lambda=-2$ другий диференціал є додатньо визначеною квадратичною формою (переконайтесь самостійно), і в стаціонарній точці буде мінімум.

Таким чином, гіпотенуза має найменше значення, якщо катети трикутника рівні між собою.

## *Завдання для самостійної роботи*

1. Знайти і зобразити область визначення функції.
2. Знайти диференціали 1-го і 2-го порядків функції.
3. Обчислити наближено значення функції $z=f(x,y)$ в точці $A$.
4. Знайти похідну функції $u(x,y,z)$ у точці $M$ за напрямком вектору $\bar{n}$.
5. Дослідити функцію на локальний екстремум.
6. Знайти найменше і найбільше значення функції $z=f(x,y)$ в області $D$.
7. Визначити умовний екстремум функції.
8. Текстова задача.

ВАРІАНТ 1

1. $z=\frac{\sqrt{y^2-2x+4}}{2y}$. 2. $z=\operatorname{arctg}\frac{x^2}{y}$. 3. $z=\sqrt[3]{2x^2-3xy}$, $A(3{,}94;2{,}01)$.

4. $u=(x^2+y^2+z^2)^{3/2}$, $M(1,1,1)$, $\bar{n}=\bar{i}-\bar{j}+\bar{k}$.

5. $z = xy + \frac{50}{x} + \frac{50}{y},\ x > 0,\ y > 0.$ 6. $z = x^2 - xy + y^2,\ D: |x| + |y| \le 1.$

7. $u = x - 2y + 2z$ при $x^2 + y^2 + z^2 = 1.$

8. На параболі $x^2 + 4y = 0$ знайти точку, найменш віддалену від прямої $3x - 6y + 4 = 0$.

ВАРІАНТ 2

1. $z = \ln\left(9 - y^2 - x^2\right) + \sqrt{\ln x}.$ 2. $z = \ln \operatorname{arctg} \frac{x}{y}.$

3. $z = 5 + 2xy - x^2,\ A(1{,}98; 3{,}92).$ 4. $u = x + \ln\left(z^2 + y^2\right), M(2,1,1), \bar{n} = -2\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}.$

5. $z = -3x^4 - 3y^4 + 12x + 12y.$ 6. $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y, D: x^2 + y^2 \le 25.$

7. $z = xy$ при $x^2 + y^2 = 8.$

8. На еліпсі $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ знайти точки, найменш та найбільш віддалені від прямої $3x + y - 9 = 0.$

ВАРІАНТ 3

1. $z = \frac{1}{\sqrt{x + y}} + \sqrt{x - y}.$ 2. $z = \arccos\sqrt{\frac{x}{y}}.$ 3. $z = \ln\left(2x^2 + 2y^2\right),\ A(0{,}48; 0{,}54).$

4. $u = x^2 y - \sqrt{xy + z^2}, M(1{,}5; -2), \bar{n} = 2\bar{j} - 2\bar{k}.$

5. $z = 4(x - y) - x^2 - y^2.$ 6. $z = x^2 + y^2 + 2, D: \begin{cases} 2x + y \le 1, \\ x \ge 0,\ y \ge 0. \end{cases}$

7. $u = x^2 + y^2 + z^2$ при $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1.$

8. Знайти найбільший об'єм паралелепіпеду при даній сумі $12a$ його ребер.

ВАРІАНТ 4

1. $z = \frac{e^{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}}{\sqrt{x + y}}.$ 2. $z = \operatorname{arctg}\sqrt{x^y}.$ 3. $z = 3x^2 - xy + x + y,\ A(1{,}06; 2{,}92).$

4. $u = y\ln\left(1 + x^2\right) - \operatorname{arctg} z, M(0,1,1), \bar{n} = 2\bar{i} - 3\bar{j} - 2\bar{k}.$

5. $z = 2xy - e^{-\left(x^2 + y^2\right)}.$ 6. $z = xy + 2x + 2y, D: 0 \le y \le 2x \le 4.$

7. $z = x^2 + 12xy + 2y^2$ при $4x^2 + y^2 = 25.$

8. З усіх прямокутних паралелепіпедів, що мають дану діагональ, знайти той, об'єм котрого найбільший.

ВАРІАНТ 5

1. $z = \ln y + \ln \sin x.$ 2. $u = y^{\frac{x}{z}}.$ 3. $z = \sqrt{x + 7y},\ A(1{,}94; 1{,}03).$

4. $u = x(\ln y - \operatorname{arctg} z), M(-2, 1, -1), \bar{n} = 8\bar{i} + 4\bar{j} + 8\bar{k}.$

5. $z = xy + \ln\left(x^2 + y^2\right)$. 6. $z = x^3 + y^3 - 3xy, D: \begin{cases} x \ge 0,\ y \ge 0, \\ x + y \le 3. \end{cases}$

7. $z = 3x^2 + 4xy + y^2$ при $x^2 + y^2 = 1$.

8. Серед прямокутних паралелепіпедів з площею поверхні $S$, знайти такий, що має найбільший об'єм.

ВАРІАНТ 6

1. $z = \arcsin(x - y)$. 2. $u = z^{\frac{y}{x}}$. 3. $z = e^{4x^2 - y^2}$, $A(0{,}98;2{,}03)$.

4. $u = \ln\left(3 - x^2\right) + xy^2 z, M(1, 3, 2), \bar{n} = -\bar{i} + 2\bar{j} - 2\bar{k}$.

5. $z = 3\ln\frac{x}{6} + 2\ln y + \ln(12 - x - y)$.

6. $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x + 5$, $D$ – обмежена прямими $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 6$.

7. $z = \frac{x}{3} + \frac{y}{5}$ при $x^2 + y^2 = 1$.

8. На площині $x + y - 2z = 0$ знайти точку, сума квадратів відстаней від котрої до площин $x + 3z = 6$ та $y + 3z = 2$ була б найменшою.

ВАРІАНТ 7

1. $z = \sqrt{y^2 - x^2}$. 2. $u = (xy)^z$. 3. $z = x^2 + 2y\sin(xy)$, $A(0{,}05;1{,}96)$.

4. $u = \sin(x + 2y) + \sqrt{xyz}, M\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, 3\right), \bar{n} = 4\bar{i} + 3\bar{j}$.

5. $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$. 6. $z = x^2 + y^2 - 6x + 4y + 2, D: \begin{cases} 0 \le x \le 4, \\ -8 \le y \le 2. \end{cases}$

7. $u = 2x + y - 2z$ при $x^2 + y^2 + z^2 = 36$.

8. Вікно має форму прямокутника, що завершений півколом уверх. Визначити розміри вікна так, щоб при даному периметрі $l$ воно пропускало більше світла.

ВАРІАНТ 8

1. $z = \ln x + \ln\cos y$. 2. $u = 2^{\arcsin\sqrt{\frac{y}{x}}}$. 3. $z = \ln\left(3x^2 - 2xy\right)$, $A(1{,}03;0{,}98)$.

4. $u = x^2 y^2 z^2 - \ln(z - 1), M(1, 1, 2), \bar{n} = 5\bar{i} - 6\bar{j} + 2\sqrt{5}\bar{k}$.

5. $z = 3xy - x^2 - 4y^2 + 4x - 6y - 1$. 6. $z = x^3 + 6y(y - x), D: 0 \le y \le x \le 2$.

7. $z = \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{4}{\sqrt{y}}$ при $2x + 4y = 1$.

8. Знайти найменшу відстань від точки $A(1, 0)$ до еліпсу $4x^2 + 9y^2 = 36$.

ВАРІАНТ 9

1. $z = \frac{\ln x}{\sqrt{x^2 + y^2 - 6}}$. 2. $u = y^{z^x}$. 3. $z = x^2 + 3xy - 6y$, $A(3{,}96;1{,}03)$.

4. $u = x^3 + \sqrt{y^2 + z^2}$, $M(1, -3, 4)$, $\bar{n} = \bar{j} - \bar{k}$.

5. $z = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y$.  6. $z = x^2 + y^2 - 4xy + 3$, $D: \begin{cases} 0 \le x \le 4, \\ 0 \le y \le 4. \end{cases}$

7. $z = xy^2$ при $x + 2y = 1$.

8. З усіх прямокутних трикутників з даною гіпотенузою $l$ знайти трикутник найбільшого периметру.

ВАРІАНТ 10

1. $z = \ln\left(x^2 - 2y + 4\right) + \sqrt{x}$. 2. $u = (1 + xy)^y$. 3. $z = \arcsin\left(xy^2\right) + 10x^2$, $A(3{,}99; 0{,}01)$.

4. $u = \dfrac{\sqrt{x}}{y} - \dfrac{yz}{x + \sqrt{y}}$, $M(4, 1, -2)$, $\bar{n} = 2\bar{i} + \bar{k}$.  5. $z = 1 - 5x^2 - y^2 - 4xy - 4x - 2y$.

6. $z = 2x + y^2 - 2xy$, $D$ – обмежена лініями $y = x^2$, $y = 4$ та віссю $OY(x \ge 0)$.

7. $z = \dfrac{x - y - 4}{\sqrt{2}}$ при $x^2 + y^2 = 1$.

8. Знайти найкоротшу відстань від точки $(1, 5)$ до параболи $y^2 = x$.

ВАРІАНТ 11

1. $z = \sqrt{9 - y^2 - x^2} + \sqrt{xy}$.  2. $u = z^{y^x}$.  3. $z = e^{x^2 - 2xy}$, $A(0{,}05; 2{,}97)$.

4. $u = \sqrt{xy} + \sqrt{9 - z^2}$, $M(1, 1, 0)$, $\bar{n} = -2\bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}$.

5. $z = x^2 + xy + y^2 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$, $x > 0$, $y > 0$.

6. $z = 3xy$, $D: x^2 + y^2 \le 2$.  7. $z = \cos^2 x + \cos^2 y$ при $x - y = \dfrac{\pi}{4}$.

8. На параболі $2x^2 - y = 0$ знайти точку, котра лежить найближче до прямої $9x - 7y + 16 = 0$.

ВАРІАНТ 12

1. $z = \arccos(x + 2y)$.  2. $z = \ln \operatorname{tg}(x + y)$. 3. $z = x^2 - y^2 + 6x + 3y$, $A(2{,}02; 2{,}97)$.

4. $u = 2\sqrt{x + y} + y \operatorname{arctg} z$, $M(3, -2, 1)$, $\bar{n} = 4\bar{i} - 3\bar{k}$.

5. $z = 3x^2 + 3xy + y^2 - 6x - 2y + 1$.

6. $z = \dfrac{xy}{2}\left(1 - \dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{4}\right)$, $D: \begin{cases} x \ge 0, \ y \ge 0, \\ \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{4} \le 1. \end{cases}$  7. $z = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ при $x + y = 2$.

8. Визначити розміри циліндричної посудини найбільшої місткості за даною площею поверхні $S$.

ВАРІАНТ 13

1. $z = \dfrac{\ln(2x)}{\sqrt{x^2 + y^2 - 25}}$.  2. $u = (1 + zx)^{xy}$.  3. $z = \sqrt{x^3 + y^2 + xy}$, $A(2{,}06; 1{,}96)$.

4. $u = z^2 + 2\operatorname{arctg}(x - y), M(1, 2, -1), \ \bar{n} = \bar{i} + 2\bar{j} - 2\bar{k}.$

5. $z = xy - x^2 - 2y^2 + x + 10y - 8.$

6. $z = x^2 - 2xy + 3,$ $D$ обмежена параболою $y = 4 - x^2$ та віссю $OX$.

7. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$ при $x + y + 3 = 0$.

8. При яких розмірах прямокутна ванна даної місткості має найменшу площу поверхні.

## ВАРІАНТ 14

1. $z = \ln(y^2 - 3x + 6).$ 2. $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x^2}{y}.$ 3. $z = 2 + \arcsin\dfrac{x}{y},\ A(0{,}04;3{,}96).$

4. $u = \ln(x^2 + y^2) + xyz,\ M(1, -1, 2), \bar{n} = \bar{i} - \bar{j} + 5\bar{k}.$

5. $z = 2x^3 + 2y^3 + x^2y + xy^2 - 9x - 9y$.

6. $z = x^2 - y^2,\ D: |x| + |y| \le 1.$ 7. $u = x - y + z$ при $x^2 + y^2 + z^2 = 1.$

8. На параболі $x^2 + y = 0$ знайти точку, яка найменше віддалена від прямої $3x - 6y + 8 = 0.$

## ВАРІАНТ 15

1. $z = \ln(x^2 + y^2 - 3) + \sqrt{\ln y}$. 2. $z = \ln\operatorname{arcctg}\dfrac{y}{x}.$

3. $z = 3x^2 + 2y^2 - xy$, $A(-0{,}98;2{,}97)$. 4. $u = xy - \dfrac{x}{z},\ M(-4, 3, -1), \bar{n} = 5\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}.$

5. $z = 4x^4 + y^3 - \ln x - 3\ln y$. 6. $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y,\ D: x^2 + y^2 \le 25.$

7. $z = 2xy$ при $x^2 + y^2 = 16.$

8. На еліпсі $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ знайти точки, які найменше і найбільше віддалені від прямої $x + 3y - 9 = 0.$

# 5. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

***Приклад 5.1***. Обчислимо інтеграли з використанням таблиці основних інтегралів (додаток Б) та властивостей невизначеного інтегралу, цей метод називають безпосереднім інтегруванням [7]:

***а)*** $\int (3x^2 - 2x + 4)dx = 3\int x^2 dx - 2\int x dx + 4\int dx =$

$$= 3 \cdot \frac{x^3}{3} - 2 \cdot \frac{x^2}{2} + 4x + C = x^3 - x^2 + 4x + C.$$

***б)*** $\int \frac{x^2 - 6x + x\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} dx = \int (x^{\frac{1}{2}} - 6x^{-\frac{1}{2}} + 1)dx =$

$$= \int x^{\frac{1}{2}} dx - 6\int x^{-\frac{1}{2}} dx + \int dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - 12x^{\frac{1}{2}} + x + C.$$

***в)*** $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.$

***г)*** $\int \frac{dx}{3x^2 + x^4} = -\frac{1}{3}\int \frac{x^2 - (3 + x^2)}{x^2(3 + x^2)} dx =$

$$= -\frac{1}{3}\int \frac{dx}{3 + x^2} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3x} + C.$$

***д)*** $\int \operatorname{th}^2 x dx = \int \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} dx = \int \frac{\operatorname{ch}^2 x - 1}{\operatorname{ch}^2 x} dx = \int \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\right) dx = x - \operatorname{th} x + C.$

***е)*** $\int (3^x + 5^x)^2 dx = \int (3^{2x} + 2 \cdot 15^x + 5^{2x})dx = \int 9^x dx + 2\int 15^x dx + \int 25^x dx =$

$$= \frac{9^x}{\ln 9} + \frac{2 \cdot 15^x}{\ln 15} + \frac{25^x}{\ln 25} + C.$$

***є)*** $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 9x^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{9} - x^2}} = \frac{1}{3} \arcsin \frac{x}{\frac{1}{3}} + C = \frac{1}{3} \arcsin 3x + C.$

***ж)*** $\int \cos(3x + 2)dx = \frac{1}{3}\sin(3x + 2) + C.$

***з)*** $\int \frac{7 + x}{3x^2 + 1} dx = \int \frac{7}{3x^2 + 1} dx + \int \frac{x}{3x^2 + 1} dx = \frac{7}{3}\int \frac{dx}{x^2 + \frac{1}{3}} + \frac{1}{3}\int \frac{xdx}{x^2 + \frac{1}{3}} dx =$

$$= \frac{7}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \operatorname{arctg}\left(x\sqrt{3}\right) + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \ln\left(x^2 + \frac{1}{3}\right) + C.$$

***Приклад 5.2***. Обчислити інтеграли: а) $\int e^{x^2} 2x dx$, б) $\int \cos^3 x dx$,

в) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}}$, г) $\int 2^{\cos x} \sin x dx$, д) $\int \frac{dx}{(1 + x^2)\operatorname{arctg}^5 x}$.

***Розв'язання.*** При інтегруванні зручно використовувати властивість інваріантності диференціалу; наведемо, наприклад, такі формули [7]:

$$d(x^n)=nx^{n-1}dx,\qquad d(\ln x)=\frac{dx}{x},\qquad d(\operatorname{tg} x)=\frac{dx}{\cos^2 x},$$

$$d(\sin x)=\cos x dx,\qquad d(\cos x)=-\sin x dx,\qquad d(e^x)=e^x dx,$$

$$d(\arcsin x)=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\quad d(\arccos x)=\frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}},\quad d(\operatorname{arctg} x)=\frac{dx}{1+x^2}$$

Використаємо їх при інтегруванні:

***а)*** $\int e^{x^2}2xdx=\int e^{x^2}d(x^2)=e^{x^2}+C.$

***б)*** $\int \cos^3 xdx=\int \cos^2 x\cos xdx=\int (1-\sin^2 x)d(\sin x)=$

$$=\int d(\sin x)-\int \sin^2 xd(\sin x)=\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+C.$$

***в)*** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}=\int \frac{d(x-1)}{\sqrt{(x-1)^2+4}}=\ln(x-1+\sqrt{x^2-2x+5})+C.$

***г)*** $\int 2^{\cos x}\sin xdx=-\int 2^{\cos x}d(\cos x)=-\frac{2^{\cos x}}{\ln 2}+C.$

***д)*** $\int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg}^5 x}=\int \operatorname{arctg}^{-5} xd(\operatorname{arctg} x)=\frac{\operatorname{arctg}^{-4} x}{-4}+C.$

***<u>Приклад 5.3</u>.*** Проінтегрувати функції, які містять квадратний тричлен:

а) $\int \frac{dx}{x^2-6x+10}$, б) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$, в) $\int \frac{3x-2}{x^2+4x+3}dx$, г) $\int \frac{3x-2}{\sqrt{x^2+4x+3}}dx$.

***Розв'язання.*** Для того, щоб проінтегрувати функції, які містять квадратний тричлен, потрібно спочатку виділити квадрат двочлена із квадратного тричлена [1]. Нагадаємо цей алгоритм.

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(\underline{x^2+2\cdot x\cdot\frac{b}{2a}+\frac{b^2}{4a^2}}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)=$$

$$=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c.$$

***а)*** $\int \frac{dx}{x^2-6x+10}=\int \frac{dx}{x^2-6x+9+1}=\int \frac{dx}{(x-3)^2+1}=\int \frac{d(x-3)}{(x-3)^2+1}=$

$$=\operatorname{arctg}(x-3)+C.$$

***б)*** $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}=\int \frac{dx}{\sqrt{4-1-2x-x^2}}=\int \frac{dx}{\sqrt{4-(x+1)^2}}=\int \frac{d(x+1)}{\sqrt{4-(x+1)^2}}=$

$$=\arcsin\frac{x+1}{2}+C.$$

***в)*** $\int \frac{3x-2}{x^2+4x+3}dx = \int \frac{3x-2}{x^2+4x+4-1}dx = 3\int \frac{x-2/3}{(x+2)^2-1}dx =$

$$= 3\int \frac{x+2-2-\frac{2}{3}}{(x+2)^2-1}d(x+2) = 3\int \frac{x+2}{(x+2)^2-1}d(x+2) + 3\cdot\left(-\frac{8}{3}\right)\int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2-1} =$$

$$= 3\cdot\frac{1}{2}\ln\left|(x+2)^2-1\right| - 8\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+2-1}{x+2+1}\right| + C = \frac{3}{2}\ln\left|x^2+4x+3\right| - 4\ln\left|\frac{x+1}{x+3}\right| + C.$$

***г)*** $\int \frac{3x-2}{\sqrt{x^2+4x+3}}dx = \int \frac{3x-2}{\sqrt{x^2+4x+4-1}}dx = 3\int \frac{x-2/3}{\sqrt{(x+2)^2-1}}dx =$

$$= 3\int \frac{x+2-2-\frac{2}{3}}{\sqrt{(x+2)^2-1}}d(x+2) = 3\int \frac{x+2}{\sqrt{(x+2)^2-1}}d(x+2) + 3\cdot\left(-\frac{8}{3}\right)\int \frac{d(x+2)}{\sqrt{(x+2)^2-1}} =$$

$$= 3\sqrt{(x+2)^2-1} - 8\ln\left|x+2+\sqrt{(x+2)^2-1}\right| + C.$$

***<u>Приклад 5.4</u>.*** Обчислити інтеграли:

а) $\int x\ln x dx$, б) $\int (x+5)\sin\frac{x}{2}dx$, в) $\int e^{2x}\sin 3x dx$.

***Розв'язання.*** Використаємо метод інтегрування частинами, який спирається на рівність

$$\int u dv = uv - \int v du, \qquad (5.1)$$

яку називають формулою інтегрування частинами [7].

Застосування формули (5.1) доцільно у тих випадках, коли підінтегральний вираз $f(x)dx$ вдається представити у вигляді добутку двох множників $u$ і $dv$ таким чином, щоб інтегрування виразів $dv$ та $vdu$ стало задачею більш простою, ніж інтегрування початкового виразу. Іноді для обчислення інтегралу формулу інтегрування частинами доводиться застосовувати декілька разів.

***а)*** $\int x\ln x dx = \begin{vmatrix} u=\ln x, & du=\frac{dx}{x} \\ dv = xdx, & v=\frac{x^2}{2} \end{vmatrix} = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C.$

***б)*** $\int (x+5)\sin\frac{x}{2}dx = \begin{vmatrix} u=x+5, & du=dx \\ dv=\sin\frac{x}{2}dx, & v=-2\cos\frac{x}{2} \end{vmatrix} = (x+5)\left(-2\cos\frac{x}{2}\right) +$

$$+2\int\cos\frac{x}{2}dx = (x+5)\left(-2\cos\frac{x}{2}\right) + 2\cdot 2\sin\frac{x}{2} + C.$$

***в)*** $I = \int e^{2x}\sin 3x dx = \begin{vmatrix} e^{2x}=u, & du=2e^{2x}dx, \\ dv=\sin 3x dx, & v=\int \sin 3x dx = -\frac{1}{3}\cos 3x \end{vmatrix} =$

$$=-\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x+\frac{2}{3}\int e^{2x}\cos 3x dx=$$

$$=\left|\begin{matrix} u=e^{2x}, & du=2e^{2x}dx, \\ dv=\cos 3x dx, & v=\frac{1}{3}\sin 3x \end{matrix}\right|=-\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x-\frac{2}{3}\int e^{2x}\sin 3x dx\right).$$

Таким чином $I=-\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x+\frac{2}{9}e^{2x}\sin 3x-\frac{4}{9}I$,

$$I=\frac{1}{13}e^{2x}(2\sin 3x-3\cos 3x)+C.$$

***<u>Приклад 5.5</u>*.** Обчислити інтеграли:

а) $\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$, б) $\int\frac{x^4+1}{(x-1)(x^4-1)}dx.$, в) $\int\frac{x^2}{\left(x^2+2x+2\right)^2}dx.$

***Розв'язання.*** Підінтегральні функції є дробами. Нагадаємо, що раціональний дріб $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ називають правильним, якщо степені многочленів $n$ і $m$ задовольняють нерівність $n<m$. З курсу алгебри відомо, що будь-який правильний дріб можна подати єдиним способом у вигляді суми елементарних раціональних дробів: $\frac{A}{(x-a)^n}$; $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$, $p^2-4q<0$. Тому інтегрування раціональних дробів зводиться до розкладу раціональної функції на елементарні дроби та до інтегрування елементарних дробів та многочленів [7].

***а)*** Підінтегральна функція – неправильний дріб. Поділивши многочлен $P_5(x)=x^5+x^4-8$ на многочлен $Q_3(x)=x^3-4x$, одержимо частку $T(x)=x^2+x+4$ та залишок $R(x)=4x^2+16x-8$. Отже, $\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}=x^2+x+4+4\frac{x^2+4x-2}{x^3-4x}$. Многочлен $Q_3(x)=x(x-2)(x+2)$ має дійсні корені першої кратності $x_1=0,\ x_2=2,\ x_3=-2.$ Тому розклад останнього дробу має вигляд $\frac{x^2+4x-2}{x^3-4x}=\frac{x^2+4x-2}{x(x-2)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2}$. З рівності дробів маємо рівність: $x^2+4x-2=A(x^2-4)+Bx(x+2)+Cx(x-2).$

$x=0$: $\quad -2=-4A$, тобто $A=\frac{1}{2}$;

$x=2$: $\quad 10=8B$, тобто $B=\frac{5}{4}$;

$x=-2$: $\quad -6=8C$, тобто $C=-\frac{3}{4}$.

Таким чином, $\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}=x^2+x+4+\frac{2}{x}+\frac{5}{x-2}-\frac{3}{x+2}$,

$$\int\frac{x^5+x^4-5}{x^3-4x}dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+2\ln|x|+5\ln|x-2|-3\ln|x+2|+C.$$

***б)*** $\int\frac{x^4+1}{(x-1)(x^4-1)}dx.$ Знаменник $Q(x)=(x-1)^2(x+1)(x^2+1)$ має дійсний корінь $x_1=-1$ другої кратності, дійсний корінь $x_2=-1$ першої кратності та $x_{3,4}=\pm i$ комплексні корені першої кратності. Тому розклад підінтегральної функції має вигляд: $\frac{x^4+1}{(x-1)^2(x+1)(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+1}+\frac{Dx+E}{x^2+1}.$ Зауважимо, що кількість невизначених коефіцієнтів співпадає з найбільшим показником степеня змінної $x$ в знаменнику правильного раціонального дробу. З рівності дробів випливає рівність многочленів:

$$x^4+1=A(x^4-1)+B(x+1)(x^2+1)+C(x-1)^2(x^2+1)+(Dx+E)(x-1)^2(x+1).$$

$$\begin{aligned}
&x=1: && B=0{,}5;\\
&x=-1: && C=0{,}25;\\
&x=i: && 2=(Di+E)(-1-2i+1)(i+1)=(Di+E)(2-2i),\\
& && 1=(Di+E)(1-i)=Di+D+E-Ei=(D+E)+i(D-E).
\end{aligned}$$

Прирівнюючи дійсні та уявні частини, одержуємо $\begin{cases}D+E=1,\\ D-E=0,\end{cases}$ звідки $D=0{,}5,$ $E=0{,}5.$ Для знаходження коефіцієнта $A$ скористаємося методом невизначених коефіцієнтів, прирівнюючи коефіцієнти при $x^4$ в обох частинах тотожності: $x^4$: $1=A+C+D$. Звідки $A=1-(C+D)=0{,}25$. Таким чином:

$$\frac{x^4+1}{(x-1)^2(x+1)(x^2+1)}=\frac{0{,}25}{x-1}+\frac{0{,}5}{(x-1)^2}+\frac{0{,}25}{x+1}+\frac{0{,}5x+0{,}5}{x^2+1},$$

$$\int\frac{(x^4+1)dx}{(x-1)^2(x+1)(x^2+1)}=\frac{1}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{2(x-1)}+\frac{1}{4}\ln|x+1|+\frac{1}{2}\int\frac{0{,}5d(x^2+1)}{x^2+1}+$$

$$+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C=\frac{1}{4}\ln\left|x^4-1\right|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2(x-1)}+C.$$

***в)*** При інтегруванні дробів при великих степенях знаменника доцільно використати метод Остроградського, суть якого полягає в наступному. Інтеграл представляють у вигляді:

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}+\int\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}dx, \tag{5.2}$$

де $Q_1(x)=НСД(Q(x),Q'(x))$, $Q_2(x)=Q(x)/Q_1(x)$, $P_1(x)$ – многочлен з невизначеними коефіцієнтами степеня на 1 менше, ніж $Q_1(x)$, $P_2(x)$ – многочлен з невизначеними коефіцієнтами степеня на 1 менше, ніж $Q_2(x)$. Рівність (5.2) диференцюють і знаходять невизначені коефіцієнти.

Представимо інтеграл у вигляді:

$$\int \frac{x^2}{\left(x^2+2x+2\right)^2}dx = \frac{Ax+B}{x^2+2x+2} + \int \frac{Cx+D}{x^2+2x+2}dx.$$

Продиференцюємо останню рівність:

$$\frac{x^2}{\left(x^2+2x+2\right)^2} = \frac{A\left(x^2+2x+2\right)-(2x+2)(Ax+B)}{\left(x^2+2x+2\right)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+2}.$$

Із цієї рівності одержимо: $A=0$, $B=1$, $C=0$, $D=1$. Таким чином,

$$\int \frac{x^2}{\left(x^2+2x+2\right)^2}dx = \frac{1}{x^2+2x+2} + \int \frac{dx}{x^2+2x+2} = \frac{1}{x^2+2x+2} + \operatorname{arctg}(x+1) + C.$$

***Приклад 5.6*.** Обчислити інтеграли: а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x+2)}$, б) $\int \frac{dx}{x+2\sqrt{x^3}+\sqrt[3]{x^4}}$,

в) $\int \frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}$, г) $\int \frac{3\operatorname{sh}x+2\operatorname{ch}x}{5\operatorname{sh}x+4\operatorname{ch}x}dx$.

***Розв'язання.*** Використаємо метод заміни змінної. Нехай на деякому проміжку визначена складена функція $f(\varphi(x))$ і функція $t=\varphi(x)$ неперервна на цьому проміжку. Тоді:

$$\int f(t)dt = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx \tag{5.3}$$

Формулу (5.3) називають формулою заміни змінної при інтегруванні [7].

***а)*** $$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x+2)} = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x}=t \\ x=t^2 \\ dx=2tdt \end{array} \right| = \int \frac{2tdt}{t\left(t^2+2\right)} = 2\int \frac{dt}{t^2+2} = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}} + C =$$

$$= \sqrt{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{2}} + C.$$

***б)*** Інтеграл $I = \int \frac{dx}{x+2\sqrt{x^3}+\sqrt[3]{x^4}}$ є інтегралом виду $\int R\left(x; \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{P_1}; \ldots; \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{P_n}\right)dx$ при $P_1=\frac{3}{2}$; $P_2=\frac{4}{3}$; $\lambda=6$, який обчислюють за допомогою заміни $\frac{ax+b}{cx+d}=t^{\lambda}$ ($\lambda$ – спільний знаменник чисел $P_1,\ldots,P_n$) [7]. Зробимо заміну $x=t^6$, тоді $dx=6t^5dt$,

$$I = \int \frac{6t^5dt}{t^6+2t^9+t^8} = \int \frac{6dt}{2t^4+t^3+t} = 6\int \frac{dt}{t(2t^3+t^2+1)} = 6\int \frac{dt}{t(t+1)(2t^2-t+1)}.$$

Підінтегральну функцію представимо у вигляді:

$$\frac{1}{t(t+1)(2t^2-t+1)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t+1}+\frac{Ct+D}{2t^2-t+1}.$$

В попередніх прикладах приділено достатньо уваги інтегруванню раціональних дробів, тому обмежимося наведенням відповіді $(t=\sqrt[6]{x})$:

$$I=\ln|x|-\frac{3}{2}\ln(1+\sqrt[6]{x})-\frac{9}{4}\ln(1-\sqrt[6]{x}+2\sqrt[3]{x})+\frac{3}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{1-4\sqrt[6]{x}}{\sqrt{7}}+C.$$

***в)*** Використаємо універсальну тригонометричну підстановку [7]:

$$I=\int\frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}=\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t\right|=\int\frac{\dfrac{2dt}{1+t^2}}{\dfrac{4\cdot 2t}{1+t^2}+3\cdot\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+5}=$$

$$=\int\frac{dt}{(t+2)^2}=\frac{-1}{t+2}+C=\frac{-1}{\operatorname{tg}(x/2)+2}+C.$$

***г)*** Представимо чисельник підінтегральної функції у вигляді лінійної комбінації знаменника і похідної знаменника:

$$3\operatorname{sh}x+2\operatorname{ch}x=\alpha(5\operatorname{sh}x+4\operatorname{ch}x)+\beta(5\operatorname{ch}x+4\operatorname{sh}x).$$

Для $\alpha$ і $\beta$ одержимо систему рівнянь: $\begin{cases}5\alpha+4\beta=3,\\4\alpha+5\beta=2,\end{cases}$ звідки $\alpha=7/9$, $\beta=-2/9$. Інтеграл представимо комбінацією двох більш простих інтегралів:

$$\int\frac{3\operatorname{sh}x+2\operatorname{ch}x}{5\operatorname{sh}x+4\operatorname{ch}x}dx=\frac{7}{9}\int dx-\frac{2}{9}\int\frac{d(5\operatorname{sh}x+4\operatorname{ch}x)}{5\operatorname{sh}x+4\operatorname{ch}x}=\frac{7}{9}x-\frac{2}{9}\ln|5\operatorname{sh}x+4\operatorname{ch}x|+C.$$

### *Завдання для самостійної роботи*

1-14. Знайти невизначені інтеграли (безпосереднє інтегрування).
15-18. Проінтегрувати функції, які містять квадратний тричлен.
19-29. Знайти невизначені інтеграли.

ВАРІАНТ 1

1. $\int\frac{3+\sqrt[3]{x^2}-2x}{\sqrt{x}}dx$, 2. $\int\sqrt{3+x}dx$, 3. $\int\frac{dx}{3-x}$, 4. $\int\sin(2-3x)dx$,

5. $\int\frac{\sqrt{3}dx}{9x^2-3}$, 6. $\int\frac{2xdx}{\sqrt{5-4x^2}}$, 7. $\int\frac{dx}{\sqrt{2-5x^2}}$, 8. $\int e^{2x-7}dx$,

9. $\int\frac{dx}{(2x+1)\sqrt[3]{\ln^2(2x+1)}}$, 10. $\int\sin^4 2x\cos 2x dx$, 11. $\int\frac{\sqrt{\operatorname{tg}^3 x}}{\cos^2 x}dx$,

12. $\int\frac{\operatorname{arctg}^6 3x}{1+9x^2}dx$. 13. $\int\frac{xdx}{e^{3x^2+4}}$, 14. $\int\frac{x-1}{7x^2+4}dx$, 15. $\int\frac{dx}{4x^2-5x+4}$,

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{4+8x-x^2}}$, 17. $\int \frac{x+1}{2x^2+3x-4}dx$, 18. $\int \frac{2x-13}{\sqrt{3x^2-3x-16}}dx$, 19. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x}}$,

20. $\int (x^2-5)\cos 4x dx$, 21. $\int e^x \cos x dx$, 22. $\int \frac{x-1}{x^2+6x+8}dx$, 23. $\int \frac{(x^5-1)dx}{(x+1)^2(x^2+9)^2}$,

24. $\int \frac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x^2(x^2+4x+40)^2}dx$, 25. $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{(x-1)^6(x+2)^4}}$, 26. $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$,

27. $\int x^{-2/3}(1+x^{1/3})^{-3}dx$, 28. $\int \frac{\operatorname{ctg}^3 x+\operatorname{ctg} x}{4+\operatorname{tg}^2 x}dx$, 29. $\int \frac{\operatorname{ch} x+\operatorname{sh} x}{2\operatorname{sh} x-\operatorname{ch} x}dx$.

## ВАРИАНТ 2

1. $\int \frac{2x^2+3\sqrt{x}-1}{2x}dx$, 2. $\int \sqrt[3]{1+x}dx$, 3. $\int \frac{dx}{3x+9}$, 4. $\int \sin(3-2x)dx$,

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+3}}$, 6. $\int \frac{xdx}{\sqrt{5-3x^2}}$, 7. $\int \frac{dx}{2x^2-5}$, 8. $\int e^{3+5x}dx$, 9. $\int \frac{\sqrt[3]{\ln^2(1-x)}}{x-1}dx$,

10. $\int \frac{\cos 2x}{\sin^3 2x}dx$, 11. $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{\operatorname{tg}^3 x}}$, 12. $\int \frac{\sqrt[3]{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$, 13. $\int \frac{xdx}{e^{x^2+3}}$, 14. $\int \frac{1-2x}{5x^2-1}dx$,

15. $\int \frac{dx}{x^2-4x+10}$, 16. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-4x+1}}$, 17. $\int \frac{x+6}{3x^2+x+1}dx$, 18. $\int \frac{x-3}{\sqrt{2x^2-4x-1}}dx$,

19. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$, 20. $\int x^4 \sin 2x dx$, 21. $\int \frac{x^3-2x^2+4}{x^3(x-2)^2}dx$, 22. $\int \frac{dx}{(x^2+4x+5)(x^2-4x+3)}$,

23. $\int \frac{3x-5}{(x^2+x+4)^3}dx$, 24. $\int e^{2x}\sin 2x dx$, 25. $\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[5]{x}}dx$, 26. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-3x+2}}$,

27. $\int \sqrt[5]{\frac{x}{x+1}}\cdot\frac{dx}{x^3}$, 28. $\int \operatorname{ctg}^4 x dx$, 29. $\int \frac{\operatorname{ch} x+4\operatorname{sh} x}{2\operatorname{sh} x-3\operatorname{ch} x}dx$.

## ВАРИАНТ 3

1. $\int \frac{3\sqrt{x}+4x^2-5}{2x^2}dx$, 2. $\int \sqrt[3]{(1+x)^2}dx$, 3. $\int \frac{dx}{2-3x}$, 4. $\int \sin(5-3x)dx$, 5. $\int \frac{dx}{9x^2+1}$,

6. $\int \frac{3xdx}{4x^2+1}$, 7. $\int \frac{dx}{\sqrt{7x^2-3}}$, 8. $\int e^{2-3x}dx$, 9. $\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt[3]{\ln^2(-x)}}$, 10. $\int \frac{\sin 3x}{\cos^4 3x}dx$,

11. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \operatorname{ctg}^4 x}$, 12. $\int \frac{\arccos^2 3x}{\sqrt{1-9x^2}}dx$, 13. $\int \frac{x^2dx}{e^{x^3+1}}$, 14. $\int \frac{2x+1}{5x^2+1}dx$,

15. $\int \frac{dx}{2x^2-7x+1}$, 16. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-2x^2}}$, 17. $\int \frac{2x-1}{3x^2-2x+6}dx$, 18. $\int \frac{x-1}{3x^2-x+5}dx$,

19. $\int\frac{\sin x dx}{1+3\cos x}$, 20. $\int(x^2+1)\cos x dx$, 21. $\int\frac{dx}{(x+2)^2(x-1)}$, 22. $\int\frac{3x+1}{(x^2+x+4)^3}dx$,

23. $\int\frac{(2x^3-3x^2+2x-1)dx}{(x^2+4x+29)(x^2+12x+61)}$, 24. $\int e^{2x}\cos 2x dx$, 25. $\int\frac{\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}}dx$,

26. $\int x\sqrt{x^2+5x+6}dx$, 27. $\int x^{1/2}\left(1+2x^{1/3}\right)^{-2}dx$, 28. $\int\cos^8 x dx$, 29. $\int\frac{\operatorname{ch}x-4\operatorname{sh}x}{2\operatorname{sh}x+3\operatorname{ch}x}dx$.

ВАРИАНТ 4

1. $\int\frac{2x^3-\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}}dx$, 2. $\int\frac{dx}{\sqrt{1+x}}$, 3. $\int\frac{dx}{1-4x}$, 4. $\int\cos(2+3x)dx$, 5. $\int\frac{9dx}{\sqrt{9x^2-3}}$,

6. $\int\frac{4x dx}{\sqrt{3-4x^2}}$, 7. $\int\frac{dx}{5x^2+2}$, 8. $\int e^{2x+1}dx$, 9. $\int\frac{dx}{(1-x)\sqrt{\ln^3(1-x)}}$, 10. $\int\frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}}dx$,

11. $\int\frac{\operatorname{ctg}^5 2x}{\sin^2 2x}dx$, 12. $\int\frac{\operatorname{arctg}^3 2x}{1+4x^2}dx$, 13. $\int e^{\cos x}\sin x dx$, 14. $\int\frac{x+3}{\sqrt{x^2+4}}dx$,

15. $\int\frac{dx}{2x^2+x-6}$, 16. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+8}}$, 17. $\int\frac{x dx}{2x^2+x+5}$, 18. $\int\frac{2x+1}{\sqrt{1+x-3x^2}}dx$,

19. $\int\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$, 20. $\int\operatorname{arctg}(7x+2)dx$, 21. $\int\frac{7x-5}{x^3+x^2-6x}dx$, 22. $\int\frac{\left(3x^3+2x^2+1\right)dx}{x(x+1)^2\left(x^2+4\right)}$,

23. $\int\frac{(3x-1)dx}{\left(x^2+16\right)^3}$, 24. $\int e^{3x}\sin x dx$, 25. $\int\frac{\sqrt{x-2}-\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2}}dx$, 26. $\int\frac{x+3}{\sqrt{4x^2+4x+3}}dx$,

27. $\int x^{1/2}\left(1+x^{1/3}\right)^{-2}dx$, 28. $\int\frac{2\cos x-3\sin x}{2\sin x+3\cos x}dx$, 29. $\int\frac{\operatorname{ch}x+2}{2\operatorname{sh}x+3\operatorname{ch}x}dx$.

ВАРИАНТ 5

1. $\int\frac{\sqrt[4]{x}-2x+5}{x^2}dx$, 2. $\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x)^3}}$, 3. $\int\frac{dx}{2+3x}$, 4. $\int\cos(3+2x)dx$, 5. $\int\frac{dx}{\sqrt{3-9x^2}}$,

6. $\int\frac{2x dx}{\sqrt{8x^2-9}}$, 7. $\int\frac{dx}{2x^2+3}$, 8. $\int e^{7x-2}dx$, 9. $\int\frac{\ln^3(1-x)}{x-1}dx$, 10. $\int\frac{\sin x}{\cos^5 x}dx$,

11. $\int\frac{\operatorname{tg}^3 4x}{\cos^2 4x}dx$, 12. $\int\frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg}^2 3x}}{1+9x^2}dx$, 13. $\int e^{2x^3-1}x^2dx$, 14. $\int\frac{3x-2}{2x^2+7}dx$,

15. $\int\frac{dx}{5x^2+2x+7}$, 16. $\int\frac{dx}{\sqrt{2+8x-2x^2}}$, 17. $\int\frac{x+5}{x^2+x-2}dx$, 18. $\int\frac{2x+5}{\sqrt{3x^2+8x+9}}dx$,

19. $\int\frac{x dx}{\sqrt{x+1}}$, 20. $\int x\arcsin x dx$, 21. $\int\frac{x dx}{x^2+5x+8}$, 22. $\int\frac{dx}{(x+1)\left(x^2+1\right)\left(x^3+1\right)}$,

23. $\int\frac{(x^3+2x-1)dx}{x^2(x^2+2x+5)^2}$, 24. $\int e^{3x}\cos x dx$, 25. $\int x^2\sqrt[3]{(x+1)^2}dx$, 26. $\int\frac{dx}{x-\sqrt{x^2-x+1}}$,

27. $\int x^{1/4}\left(1+x^{1/3}\right)^{-2}dx$, 28. $\int\frac{\sin 2x dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$, 29. $\int\frac{\operatorname{sh}x+2}{2\operatorname{sh}x+5\operatorname{ch}x}dx$.

## ВАРІАНТ 6

1. $\int\frac{2x^3-\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}}dx$, 2. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{2+x}}$, 3. $\int\frac{dx}{2-5x}$, 4. $\int\sin(4-2x)dx$, 5. $\int\frac{dx}{7x^2-4}$,

6. $\int\frac{4xdx}{\sqrt{4x^2+3}}$, 7. $\int\frac{dx}{\sqrt{5x^2+1}}$, 8. $\int e^{5x-7}dx$, 9. $\int\frac{\sqrt{\ln(2x-1)}}{2x-1}dx$, 10. $\int\cos^7 2x\sin 2x dx$,

11. $\int\frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg}5x}}{\cos^2 5x}dx$, 12. $\int\frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg}^3 x}$, 13. $\int\frac{\sin x}{e^{\cos x}}dx$, 14. $\int\frac{5-x}{3x^2+1}dx$,

15. $\int\frac{dx}{2x^2-2x+1}$, 16. $\int\frac{dx}{\sqrt{3+2x-2x^2}}$, 17. $\int\frac{3x-2}{5x^2-3x+2}dx$, 18. $\int\frac{2x-10}{\sqrt{1+x-x^2}}dx$,

19. $\int e^{3x^2-5}xdx$, 20. $\int x^2e^{2x}dx$, 21. $\int\frac{dx}{x^2+4x+14}$, 22. $\int\frac{x^3+2x^2+3x+4}{x^4+x^3+2x^2}dx$,

23. $\int\frac{(x-1)dx}{(x^2-2x+5)^3}$, 24. $\int e^x\sin 2x dx$, 25. $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(x+2)^5(x-1)^3}}$, 26. $\int\frac{(x^3-2x^2+1)dx}{\sqrt{x^2-7x+10}}$,

27. $\int\frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$, 28. $\int\frac{3\cos x+7\sin x}{5\sin x+2\cos x}dx$, 29. $\int\frac{\operatorname{sh}x-2}{2\operatorname{sh}x+\operatorname{ch}x}dx$.

## ВАРІАНТ 7

1. $\int\left(\sqrt[3]{x}-\frac{2\sqrt[4]{x}}{x}+3\right)dx$, 2. $\int(1-4x)^7dx$, 3. $\int\frac{dx}{3x-2}$, 4. $\int\cos(5-2x)dx$, 5. $\int\frac{3dx}{\sqrt{7x^2-4}}$,

6. $\int\frac{xdx}{\sqrt{9-8x^2}}$, 7. $\int\frac{dx}{5x^2-4}$, 8. $\int e^{5x+7}dx$, 9. $\int\frac{\sqrt[3]{\ln(3x+1)}}{3x+1}dx$, 10. $\int\frac{\cos x dx}{\sin x+2}$,

11. $\int\frac{\sqrt[3]{\operatorname{ctg}^2 x}}{\sin^2 x}dx$, 12. $\int\frac{\arccos 3x}{\sqrt{1-9x^2}}dx$, 13. $\int e^{7x^2+2}xdx$, 14. $\int\frac{5+x}{3x^2+1}dx$,

15. $\int\frac{dx}{2x^2-11x+2}$, 16. $\int\frac{dx}{\sqrt{2-2x-3x^2}}$, 17. $\int\frac{x+4}{2x^2-6x-8}dx$, 18. $\int\frac{2x-8}{\sqrt{1-x+x^2}}dx$,

19. $\int\frac{3x^2dx}{x^6-25}$, 20. $\int 2^{-x}xdx$, 21. $\int\frac{xdx}{2x^2-x+1}$, 22. $\int\frac{(3x^2+4x-1)dx}{(x^2+4x+29)^2}$,

23. $\int\frac{(x^3-2x^2+x+6)dx}{x(x-1)^2(x^2+4x+5)}$, 24. $\int e^x\cos 2x dx$, 25. $\int\frac{dx}{2\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}}$, 26. $\int\frac{(x^2+4x)dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$,

27. $\int\sqrt[3]{x+2x^3}\,dx$, 28. $\int\frac{\sin x dx}{\sqrt{1+4\cos x+\cos^2 x}}$, 29. $\int\frac{\operatorname{sh} x}{2\operatorname{sh} x+\operatorname{ch} x}dx$.

## ВАРІАНТ 8

1. $\int\frac{2x^3-\sqrt{x^5}+1}{\sqrt{x}}dx$, 2. $\int(1+4x)^5\,dx$, 3. $\int\frac{dx}{2x+3}$, 4. $\int\cos(7x+3)dx$, 5. $\int\frac{dx}{5x^2+3}$,

6. $\int\frac{\sqrt{3}x dx}{\sqrt{3x^2-2}}$, 7. $\int\frac{dx}{\sqrt{9-2x^2}}$, 8. $\int e^{7-2x}dx$, 9. $\int\frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)}$, 10. $\int\frac{\cos x}{3-\sin x}dx$,

11. $\int\frac{dx}{\sin^2 x\operatorname{ctg}^3 x}$, 12. $\int\frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg}^2 x}}{1+x^2}dx$, 13. $\int e^{3-x^2}x dx$, 14. $\int\frac{2x-5}{\sqrt{7x^2+3}}dx$,

15. $\int\frac{dx}{2x^2+x+2}$, 16. $\int\frac{dx}{\sqrt{1+x-x^2}}$, 17. $\int\frac{x+4}{2x^2-7x+1}dx$, 18. $\int\frac{3x+4}{\sqrt{x^2+6x+13}}dx$,

19. $\int\frac{\sin 2x}{3+\sin^2 x}dx$, 20. $\int\operatorname{arctg}2x dx$, 21. $\int\frac{dx}{6x^2+6x+19}$, 22. $\int\frac{(x+2)dx}{(x-1)^2x(x^2+4)}$,

23. $\int\frac{x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}{x^2(x^2+2x+10)^2}dx$, 24. $\int e^{2x}\cos 3x dx$, 25. $\int\frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx$,

26. $\int\frac{(x^3-x-1)dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$, 27. $\int\sqrt[3]{x-x^3}\,dx$, 28. $\int\frac{dx}{2\sin^2 x+7\cos^2 x}$, 29. $\int\frac{\operatorname{th} x}{2\operatorname{sh} x+\operatorname{ch} x}dx$.

## ВАРІАНТ 9

1. $\int\frac{3x^2-\sqrt[5]{x}+2}{x}dx$, 2. $\int(1-3x)^4\,dx$, 3. $\int\frac{dx}{3x-4}$, 4. $\int\sin(8x-3)dx$, 5. $\int\frac{dx}{5x^2-3}$,

6. $\int\frac{2x dx}{\sqrt{x^2-2}}$, 7. $\int\frac{dx}{\sqrt{9x^2+2}}$, 8. $\int e^{3-4x}dx$, 9. $\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt[3]{\ln(x+1)}}$, 10. $\int\frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos x+3}}$,

11. $\int\frac{dx}{\cos^2 3x\operatorname{tg}^4 3x}$, 12. $\int\frac{\arcsin^5 2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$, 13. $\int e^{4x^2+5}x dx$, 14. $\int\frac{2x-3}{\sqrt{x^2+9}}dx$,

15. $\int\frac{dx}{3x^2-12x+3}$, 16. $\int\frac{dx}{\sqrt{5x^2-10x+4}}$, 17. $\int\frac{5x-2}{2x^2-5x+2}dx$, 18. $\int\frac{3x-1}{\sqrt{2x^2-5x+1}}dx$,

19. $\int\frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$, 20. $\int x^2\ln x dx$, 21. $\int\frac{(9x+13)dx}{(x+3)(x^2+2x+3)}$, 22. $\int\frac{(x^4-1)dx}{(x^2+9)(x^3+x^2)}$,

23. $\int\frac{(3x+1)dx}{(x^2-4x+5)^3}$, 24. $\int e^{2x}\sin 3x dx$, 25. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{4x^2+4x+1}-\sqrt{2x+1}}$,

26. $\int x^2\sqrt{x^2+4}\,dx$, 27. $\int\frac{dx}{x^3\sqrt[3]{2-x^3}}$, 28. $\int\frac{(1+\cos x)^2dx}{1+\sin x}$, 29. $\int\frac{\operatorname{ch} x+1}{2\operatorname{sh} x-5\operatorname{ch} x}dx$.

## ВАРІАНТ 10

1. $\int \frac{2x^3-\sqrt{x}+4}{x^2}dx$, 2. $\int\sqrt{1+3x}dx$, 3. $\int\frac{dx}{4-3x}$, 4. $\int\sin(3+4x)dx$, 5. $\int\frac{dx}{\sqrt{3-5x^2}}$,

6. $\int\frac{2xdx}{\sqrt{7-2x^2}}$, 7. $\int\frac{dx}{5x^2-4}$, 8. $\int e^{10x+2}dx$, 9. $\int\frac{\sqrt[5]{\ln^2(x+1)}}{x+1}dx$, 10. $\int\frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x+1}}dx$,

11. $\int\frac{\sqrt{\operatorname{ctg}7x}}{\sin^2 7x}$, 12. $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin^4 x}$, 13. $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}e^{\arcsin x}}$, 14. $\int\frac{3x-2}{3x^2+1}dx$,

15. $\int\frac{dx}{2x^2+3x}$, 16. $\int\frac{dx}{\sqrt{2x+3-x^2}}$, 17. $\int\frac{4x-1}{4x^2-4x+5}dx$, 18. $\int\frac{5x+2}{\sqrt{x^2+3x-4}}dx$,

19. $\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}}$, 20. $\int(x+2)\cos 3xdx$, 21. $\int\frac{20dx}{(x+4)(x^2+4x+20)}$, 22. $\int e^{2x+1}\sin xdx$,

23. $\int\frac{dx}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+2x+5\right)^2}$, 24. $\int\frac{\left(x^3-2x^2+3x-1\right)dx}{\left(x^2+8x+17\right)\left(x^2+6x+34\right)}$, 25. $\int x^{-1/2}\left(1+x^{1/4}\right)^{-10}dx$,

26. $\int\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}dx$, 27. $\int\frac{(x^3-6x^2+11x-6)dx}{\sqrt{x^2+4x+3}}$, 28. $\int\frac{(\sin 2x)^2dx}{\left(\sin^3 x+\cos^3 x\right)^2}$, 29. $\int\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{sh}x-\operatorname{ch}x}dx$.

## ВАРІАНТ 11

1. $\int\frac{\sqrt[6]{x^5}-5x^2+3}{x}dx$, 2. $\int\sqrt{5-4x}dx$, 3. $\int\frac{dx}{3x+4}$, 4. $\int\sin(3-4x)dx$,

5. $\int\frac{dx}{\sqrt{5x^2+3}}$, 6. $\int\frac{xdx}{2x^2-7}$, 7. $\int\frac{dx}{3x^2-7}$, 8. $\int e^{2x-10}dx$, 9. $\int\frac{\sqrt{\ln^5(x+1)}}{(x+1)}dx$,

10. $\int\frac{\cos xdx}{\sqrt{(\sin x-4)^3}}$, 11. $\int\frac{\sqrt[5]{\operatorname{ctg}3x}}{\sin^2 3x}dx$, 12. $\int\frac{\arccos^3 2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$, 13. $\int e^{5x^2-3}xdx$,

14. $\int\frac{x-1}{5-2x^2}dx$, 15. $\int\frac{dx}{x^2-5x+6}$, 16. $\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2-8x+3}}$, 17. $\int\frac{x-4}{\sqrt{2x^2-x+7}}dx$,

18. $\int\frac{x+1}{2x^2+x+1}dx$, 19. $\int\frac{1+x}{1+\sqrt{x}}dx$, 20. $\int(x^2-2x+3)\ln(x+1)dx$, 21. $\int\frac{dx}{\left(x^2+16\right)^3}$,

22. $\int\frac{(x+5)dx}{(x+2)^2\left(x^4-1\right)}$, 23. $\int\frac{(3x+4)dx}{4x^2-12x+13}$, 24. $\int e^{2x+1}\cos xdx$, 25. $\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx$,

26. $\int\frac{\left(1-x+x^2\right)dx}{\sqrt{1+x-x^2}}$, 27. $\int\frac{dx}{x\sqrt[6]{x^6+1}}$, 28. $\int\frac{5\sin x-3\cos x}{7\sin x+2\cos x}dx$, 29. $\int\frac{\operatorname{sh}x-1}{2\operatorname{sh}x+5\operatorname{ch}x}dx$.

## ВАРІАНТ 12

1. $\int\left(x\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}+1\right)dx$, 2. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{5+3x}}$, 3. $\int\frac{dx}{4x-12}$, 4. $\int\cos(4x+3)dx$, 5. $\int e^{4x+3}dx$,

6. $\int \frac{xdx}{3x^2+8}$, 7. $\int \frac{dx}{3x^2+7}$, 8. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-7x^2}}$, 9. $\int \frac{\sqrt[7]{\ln^2(x+1)}}{(x+1)}dx$, 10. $\int \frac{\sin 3x}{\cos^2 3x}dx$,

11. $\int \frac{\operatorname{tg}^4 7x}{\cos^2 7x}dx$, 12. $\int \frac{\operatorname{arctg}^7 3x}{1+9x^2}dx$, 13. $\int e^{\sin x}\cos x dx$, 14. $\int \frac{2x+3}{1-3x^2}dx$,

15. $\int \frac{dx}{2x-3-4x^2}$, 16. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}$, 17. $\int \frac{x+1}{3x^2-2x-3}dx$, 18. $\int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-3x+4}}dx$,

19. $\int \frac{1+x}{1-\sqrt{x}}dx$, 20. $\int \arccos(x-2)dx$, 21. $\int \frac{(2x^3+3)dx}{(4x^2-1)(x^2+6x)}$, 22. $\int \frac{\left(x^2+1\right)dx}{x^2\left(x^2-6x+58\right)^2}$,

23. $\int \frac{x^4+4x^3+3x^2+12x+20}{x^2+4x+5}dx$, 24. $\int e^{4x}\sin 4x dx$, 25. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-7)^7(x-5)^5}}$,

26. $\int x\sqrt{x^2+2x+2}dx$, 27. $\int \frac{\sqrt[3]{x}dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}$, 28. $\int \frac{\sin x \sin 2x dx}{\sin x+\cos x}$, 29. $\int \frac{3\operatorname{sh} x}{2\operatorname{sh} x+\operatorname{ch} x}dx$.

## ВАРІАНТ 13

1. $\int \left(x^2-\frac{\sqrt[6]{x}}{x}-3\right)dx$, 2. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-4x)^5}}$, 3. $\int \frac{dx}{5-3x}$, 4. $\int \cos(3-4x)dx$, 5. $\int \frac{\sqrt{5}dx}{\sqrt{3-4x^2}}$,

6. $\int \frac{2xdx}{3x^2-7}$, 7. $\int \frac{dx}{6x^2-7}$, 8. $\int e^{4x+5}dx$, 9. $\int \frac{\sqrt{\ln^3(x+1)}}{x+1}dx$, 10. $\int \frac{\sin 5x}{\sqrt{\cos 5x}}dx$,

11. $\int \frac{\operatorname{ctg}^5 6x}{\sin^2 6x}dx$, 12. $\int \frac{\arccos 4x}{\sqrt{1-16x^2}}dx$, 13. $\int e^{3x^2+4}x dx$, 14. $\int \frac{2x+3}{5x^2+2}dx$,

15. $\int \frac{dx}{3x^2-8x-3}$, 16. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-x+4}}$, 17. $\int \frac{4x+8}{4x^2+6x-13}dx$, 18. $\int \frac{4x+1}{\sqrt{2+x-x^2}}dx$,

19. $\int e^{-x^4}x^3dx$, 20. $\int x^3 \operatorname{arctg} x dx$, 21. $\int \frac{x+1}{2x-x^2}dx$, 22. $\int \frac{\left(x^2-5\right)dx}{\left(x^2-4x+5\right)\left(x^2+9\right)}$,

23. $\int \frac{dx}{(x-2)^3\left(x^2-2x+2\right)^2}$, 24. $\int e^{4x}\cos x dx$, 25. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}$, 26. $\int \frac{2x^2-3x}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx$,

27. $\int x^{-2/3}\left(1+x^{1/3}\right)^{-3}dx$, 28. $\int \frac{dx}{3-4\sin 2x+2\cos^2 x}$, 29. $\int \frac{3\operatorname{ch} x}{2\operatorname{sh} x+3\operatorname{ch} x}dx$.

## ВАРІАНТ 14

1. $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}-2x^5+3}{x}dx$, 2. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-4x)^2}}$, 3. $\int \frac{dx}{4-7x}$, 4. $\int \cos(2+5x)dx$, 5. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-9}}$,

6. $\int \frac{2xdx}{\sqrt{4x^2+5}}$, 7. $\int \frac{dx}{7x^2+6}$, 8. $\int e^{6x-1}dx$, 9. $\int \frac{dx}{(x+5)\sqrt[5]{\ln(x+5)}}$, 10. $\int \frac{\cos 4x}{\sin^3 4x}dx$,

11. $\int\frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg}^5 4x}}{\cos^2 4x}dx$, 12. $\int\frac{\arcsin^4 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$, 13. $\int e^{\sin x+1}\cos x dx$, 14. $\int\frac{x-3}{4x^2+1}dx$,

15. $\int\frac{dx}{8-2x-x^2}$, 16. $\int\frac{dx}{\sqrt{2+4x-3x^2}}$, 17. $\int\frac{5x+1}{x^2-4x+1}dx$, 18. $\int\frac{5x-3}{\sqrt{2x^2+4x-5}}dx$,

19. $\int 2^{x^2}x dx$, 20. $\int x^2\operatorname{arctg}4x dx$, 21. $\int\frac{dx}{x^2-8x+14}$, 22. $\int\frac{(x+1)dx}{x(x^4+6x^2+8)}$,

23. $\int\frac{(x^3-6)dx}{x^4+6x^2+8}$, 24. $\int e^{5x}\sin 5x dx$, 25. $\int\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}dx$, 26. $\int\frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$,

27. $\int x^{1/2}\left(1+x^{1/3}\right)^{-2}dx$, 28 $\int\frac{dx}{4+\operatorname{tg}x+4\operatorname{ctg}x}$, 29. $\int\frac{3}{2\operatorname{sh}x+3\operatorname{ch}x}dx$.

## ВАРІАНТ 15

1. $\int\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{x}+2x^3-4\right)dx$, 2. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{2-5x}}$, 3. $\int\frac{dx}{5x-3}$, 4. $\int\cos(3x+5)dx$, 5. $\int\frac{dx}{2x^2+7}$,

6. $\int\frac{xdx}{\sqrt{3x^2+8}}$, 7. $\int\frac{dx}{\sqrt{7-3x^2}}$, 8. $\int e^{5-2x}dx$, 9. $\int\frac{\sqrt{\ln^7(x+1)}}{x+1}dx$, 10. $\int\sin^3 4x\cos 4x dx$,

11. $\int\frac{ctg^4 3x}{\sin^2 3x}dx$, 12. $\int\frac{\arcsin^3 2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$, 13. $\int e^{4-x^2}x dx$, 14. $\int\frac{x-3}{1-4x^2}dx$,

15. $\int\frac{dx}{5x-x^2-6}$, 16. $\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+2x+4}}$, 17. $\int\frac{xdx}{2x^2+2x+5}$, 18. $\int\frac{3x+2}{\sqrt{4+2x-x^2}}dx$,

19. $\int e^{x^2-2}x dx$, 20. $\int x^3\sin 5x dx$, 21. $\int\frac{(x-1)dx}{x^3+x}$, 22. $\int\frac{dx}{x^2\left(x^2+4\right)^2}$,

23. $\int\frac{dx}{\left(x^2-2x+2\right)^3}$, 24. $\int x^2 e^x\sin x dx$, 25. $\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}$, 26. $\int\frac{\left(x^3+2x^2+x-1\right)dx}{\sqrt{x^2+2x-1}}$,

27. $\int\frac{xdx}{\sqrt[4]{x^3(x-4)}}$, 28. $\int\frac{dx}{4+\operatorname{ctg}x-4\operatorname{tg}x}$, 29. $\int\frac{7}{2\operatorname{sh}x-4\operatorname{ch}x}dx$.

# 6. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ РІМАНА. ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ

***Приклад 6.1*****.** Знайти значення інтегралу.

$$\text{а) } \int_2^3 \frac{dx}{x^2-2x-8}, \quad \text{б) } \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}dx, \quad \text{в) } \int_{1/e}^{e} |\ln x| dx.$$

***Розв'язання. а)*** Якщо функція $f(x)$ неперервна на сегменті $[a;b]$, то для будь-якої її первісної $F(x)$ має місце формула Ньютона-Лейбніца [7]

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \tag{6.1}$$

$$\int_2^3 \frac{dx}{x^2-2x-8} = \int_2^3 \frac{d(x-1)}{(x-1)^2-9} = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{(x-1)-3}{(x-1)+3}\right|\Bigg|_2^3 = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-4}{x+2}\right|\Bigg|_2^3 =$$

$$= \frac{1}{6}\left(\ln\left|\frac{3-4}{3+2}\right| - \ln\left|\frac{2-4}{2+2}\right|\right) = \frac{1}{6}\left(\ln\frac{1}{5} - \ln\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6}\ln\frac{2}{5}.$$

***б)*** Якщо функція $f(x)$ неперервна на сегменті $[a;b]$, а функція $x=\varphi(t)$ неперервна та диференційована на сегменті $[\alpha;\beta]$, $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \tag{6.2}$$

Маємо $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}dx = \left| \begin{matrix} e^x-1=t^2, & e^x dx = 2tdt, \\ dx = \dfrac{2tdt}{t^2+1}, & \begin{matrix} x=0 \Leftrightarrow t=0 \\ x=\ln 2 \Leftrightarrow t=1 \end{matrix} \end{matrix} \right| =$

$$= 2\int_0^1 \frac{(t^2+1)-1}{t^2+1}dt = 2(t - \operatorname{arctg} t)\Big|_0^1 = \frac{4-\pi}{2}.$$

***в)*** Якщо функції $u=u(x)$ та $v=v(x)$ неперервні разом зі своїми похідними на $[a;b]$, то має місце формула інтегрування частинами [7]:

$$\int_a^b udv = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b vdu. \tag{6.3}$$

Оскільки $|\ln x| = \begin{cases} -\ln x, x\in[1/e;1]; \\ \ln x, x\in[1;e], \end{cases}$ то $\displaystyle\int_{1/e}^{e} |\ln x| dx = \int_{1/e}^{1} (-\ln x)dx + \int_1^e \ln x dx =$

$$= \left| \begin{matrix} u = \ln x \\ dv = dx \end{matrix} \right| = (-x\ln x + x)\Big|_{1/e}^{1} + (x\ln x - x)\Big|_1^e = 2(1-e^{-1}).$$

***Приклад 6.2***. Обчислити площу фігури, яка обмежена графіками функцій $y^2 = 2x+1,\ x-y-1=0$.

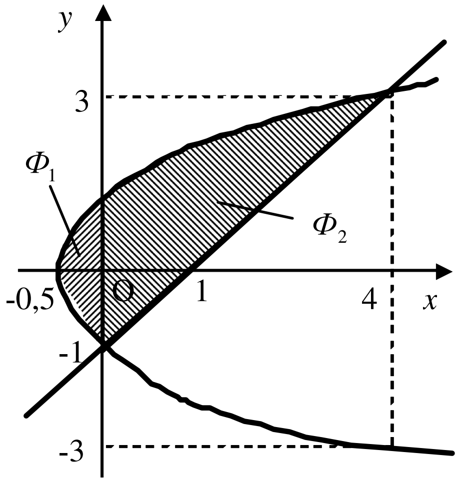

Рис. 6.1

***Розв'язання.*** Побудуємо криві, які обмежують фігуру (рис. 6.1). Розв'язавши систему рівнянь $\begin{cases} y^2 = 2x+1; \\ x-y-1=0, \end{cases}$ знайдемо точки перетину параболи та прямої: (0;-1) і (4;3). $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$. Враховуючи, що фігура $\Phi_1$ симетрична відносно осі $OX$, її площу знайдемо як $2\int\limits_{-0,5}^{0}\sqrt{2x+1}dx$. Площу фігури $\Phi_2$ знайдемо як $\int\limits_{0}^{4}\left(\sqrt{2x+1}-(x-1)\right)dx$. Маємо:

$$S = 2\int\limits_{-0,5}^{0}\sqrt{2x+1}dx + \int\limits_{0}^{4}\left(\sqrt{2x+1}-(x-1)\right)dx =$$

$$= 2\cdot\frac{1}{2}\int\limits_{-0,5}^{0}(2x+1)^{\frac{1}{2}}d(2x+1) + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{4}(2x+1)^{\frac{1}{2}}d(2x+1) - \frac{(x-1)^2}{2}\Bigg|_0^4 =$$

$$= \frac{2}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{-0,5}^{0} + \frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^4 - \frac{9}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot 27 - \frac{1}{3} - \frac{9}{2} + \frac{1}{2} = 5\frac{1}{3}\ \text{(кв.од.)}$$

***Приклад 6.3***. Обчислити довжину дуги кривої

а) $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t,\ 0 \le t \le 2\pi$;  б) $\rho = a\sin^3\frac{\varphi}{3}$.

***Розв'язання. а)*** Крива є астроїдою (рис. 6.2) Використаємо формулу для знаходження довжини дуги кривої, яку задано параметрично [7]: $l = \int\limits_{t_1}^{t_2}\sqrt{(x')^2+(y')^2}dt$. Враховуючи симетричність, одержуємо:

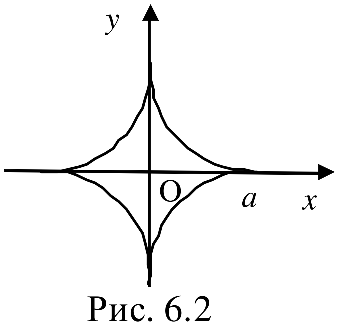

Рис. 6.2

$$l = 4\int\limits_{0}^{\pi/2}\sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t}dt =$$

$$= 12a\int\limits_{0}^{\pi/2}\sin t\cos t dt = 6a\sin^2 t\Bigg|_0^{\pi/2} = 6a.$$

***б)*** Для знаходження довжини дуги, заданої в полярних координатах, використаємо формулу [7]: $l = \int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\rho^2(\varphi)+\rho'^2(\varphi)}d\varphi$. Оскільки $\rho \ge 0$, то $\sin\frac{\varphi}{3} \ge 0$.

Звідси $0 \le \varphi \le 3\pi$. При зміні $\varphi$ від 0 до $3\pi/2$ довжина радіус-вектора $\rho$ зростає від 0 до $a$, а кінець радіус-вектора описує дугу $OAMB$ (рис. 6.3). При зміні $\varphi$ від $3\pi/2$ до $3\pi$ величина $\rho$ зменшується від $a$ до 0, при цьому описується дуга $BCAO$, симетрична дузі $OAMB$ відносно прямої $\varphi = \pm\pi/2$. Обчислимо похідну: $\rho'(\varphi) = a\sin^2\frac{\varphi}{3}\cos\frac{\varphi}{3}$, значення кореня: $\sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)} = a\sin^2\frac{\varphi}{3}$ і довжину кривої:

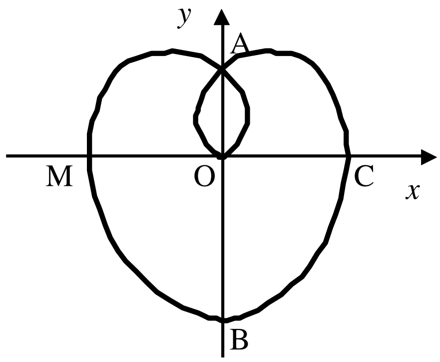

Рис. 6.3

$$l = a\int\limits_a^{3\pi}\sin^2\frac{\varphi}{3}d\varphi = \frac{a}{2}\int\limits_0^{3\pi}\left(1-\cos\frac{2\varphi}{3}\right)d\varphi = \frac{a}{2}\left(\varphi - \frac{3}{2}\sin\frac{2\varphi}{3}\right)\Bigg|_0^{3\pi} = \frac{3a\pi}{2}.$$

***Приклад 6.4***. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо вісі $OX$ фігури, обмеженої графіками функцій $xy = a^2$, $y = 0$, $x = a$, $x = 2a$ $(a > 0)$.

***Розв'язання.*** Нехай функція $y = y(x)$ неперервна і невід'ємна на сегменті $[a;b]$. Об'єм тіла утвореного обертанням навколо осі $OX$ криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y(x)$, відрізками прямих $x = a$ та $x = b$ і відрізком осі $OX$, дорівнює [7]: $V = \pi\int\limits_a^b y^2(x)dx.$

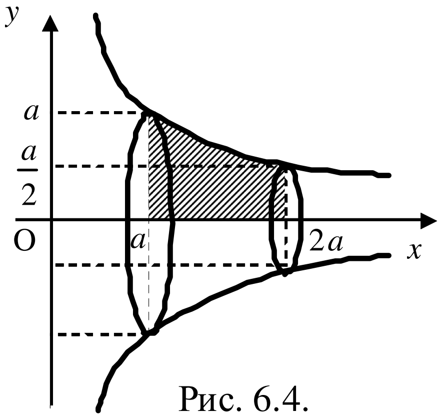

Рис. 6.4.

На рис. 6.4 заштриховано криволінійну трапецію, яку обертають навколо осі $OX$. Тоді одержимо об'єм:

$$V = \pi\int\limits_a^{2a} y^2(x)dx = \pi\int\limits_a^{2a}\frac{a^4}{x^2}dx = \pi a^4\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_a^{2a} =$$

$$= \pi a^4\left(-\frac{1}{2a} + \frac{1}{a}\right) = \frac{\pi a^3}{2}\text{ (куб. од.).}$$

***Завдання для самостійної роботи***

1. Знайти значення інтегралу.
2. Обчислити площу фігури, яка обмежена графіками функцій.
3. Обчислити довжину дуги кривої.
4. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо вісі ($Ox - Vx$, $Oy - Vy$) фігури, яка обмежена графіками функцій.

ВАРІАНТ 1

1. а) $\int\limits_0^{\pi}\left(8x^2 + 16x + 17\right)\cos 4x dx$, б) $\int\limits_{\arcsin\frac{1}{\sqrt{37}}}^{\pi/4}\frac{6tgxdx}{3\sin 2x + 5\cos^2 x}$, в) $\int\limits_2^9\frac{xdx}{\sqrt[3]{x-1}}$.

2. $y = \mathrm{arctg}\sqrt{x}$, $y + x^2 = 0$, $x = 1$.

3. а) $x=a(sht-t)$, $y=a(cht-1)$, $0\le y\le 7a$, $x\ge 0$ б) $\rho=\dfrac{a}{\cos^4\dfrac{\varphi}{4}}$ (довжина петлі)

4. $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$, $x^2-\dfrac{y^2}{15}=1$, $x\ge 1$. Знайти $Vx$.

ВАРІАНТ 2

1. а) $\int\limits_{-3}^{0}\left(x^2+6x+9\right)\sin 2x dx$, б) $\int\limits_{0}^{\pi/4}\dfrac{2\operatorname{tg}^2 x-11\operatorname{tg}x-22}{4-\operatorname{tg}x}dx$, в) $\int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}\dfrac{xdx}{\sqrt{x^4-x^2-1}}$.

2. $y=\dfrac{10}{x^2+4}$, $y=\dfrac{x^2+5x+4}{x^2+4}$.

3. а) $x=\int\limits_0^t\cos\varphi^2 d\varphi$, $y=\int\limits_0^t\sin\varphi^2 d\varphi$, $0\le t\le t_0$ (клотоїда), б) $\rho=a\sin^4\dfrac{\varphi}{4}$.

4. $y=x\sqrt{\dfrac{3+3x}{3-x}}$, $0\le x\le 2$, $y=6$, $x=0$. Знайти $Vy$.

ВАРІАНТ 3

1. а) $\int\limits_{0}^{\pi/4}\left(x^2+17{,}5\right)\sin 2x dx$, б) $\int\limits_{-\operatorname{arctg}(1/3)}^{0}\dfrac{3\operatorname{tg}x+1}{2\sin 2x-5\cos 2x+1}dx$, в) $\int\limits_{0}^{\sqrt{5}/2}\dfrac{dx}{\sqrt{(5-x^2)^3}}$.

2. $y=2x^2e^x$, $y=-x^3e^x$.

3. а) $x=\sin^4 t$, $y=\cos^2 t$, $0\le t\le\dfrac{\pi}{2}$, б) $\rho=\dfrac{a}{\sin^3\dfrac{\varphi}{3}}$ (довжина петлі).

4. $y^2(x-a)+x^2(x+a)=0$, $0\le x\le\dfrac{a}{2}$, $x=\dfrac{a}{2}$. Знайти $Vx$.

ВАРІАНТ 4

1. а) $\int\limits_{\pi/4}^{3}\left(3x-x^2\right)\sin 2x dx$, б) $\int\limits_{\pi/4}^{arctg 3}\dfrac{1+\operatorname{ctg}x}{(\sin x+2\cos x)^2}dx$, в) $\int\limits_{1}^{2}\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}dx$.

2. $y=2-4x^2+4x^3-x^4$, $y=0$, $x=x_1$, $x=x_2$, де $x_1$ і $x_2$ – точки максимуму функції.

3. а) $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, $0\le t\le t_0\le\dfrac{\pi}{2}$, $a\ne b$ б) $\rho=ath\dfrac{\varphi}{2}$, $0\le\varphi\le\varphi_0$.

4. $y=\dfrac{a^3}{x^2+a^3}$, $y=\dfrac{a}{2}$. Знайти $Vy$.

ВАРІАНТ 5

1. а) $\int\limits_{0}^{1/\sqrt{2}}\dfrac{(\arccos x)^3-1}{\sqrt{1-x^2}}dx$, б) $\int\limits_{0}^{1/\sqrt{2}}\dfrac{x^4dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}$, в) $\int\limits_{-\pi/2}^{0}2^8\sin^2 x\cos^4 x dx$.

2. $x^2+y^2=2$, $y^2=2x-1$, $x\ge 0{,}5$.

3. а) $x=\left(t^2-2\right)\sin t+2t\cos t$, $y=\left(t^2-2\right)\cos t-2t\sin t$, $0\le t\le\pi$,

б) $\rho=a\varphi^3$, $0\le\varphi\le 4$

4. $y=e^{\alpha x}\sin\pi x$, $n-1\le x\le n$, $y=0$, $n\in N$. Знайти $Vx$.

ВАРІАНТ 6

1. а) $\int\limits_0^{\pi/4}\operatorname{tg}x\ln\cos x\,dx$, б) $\int\limits_{\arcsin\left(2/\sqrt{5}\right)}^{\arcsin\left(3/\sqrt{10}\right)}\frac{(2\operatorname{tg}x+5)dx}{(5-\operatorname{tg}x)\sin 2x}$, в) $\int\limits_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$.

2. $y=4^{-x}$, $y=-\log_4 x$, $y=0$, $x=0$.

3. а) $x=a\left(\cos t+\ln\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)$, $y=a\sin t$, $0\le t\le t_0\le\frac{\pi}{2}$ (трактриса),

б) $\rho=a(1-\sin\varphi)$, $-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le-\frac{\pi}{6}$.

4. $y=x$, $y=x+\sin^2 x$, $0\le x\le\pi$. Знайти $Vy$.

ВАРІАНТ 7

1. а) $\int\limits_0^1(x+1)\ln^2(x+1)dx$, б) $\int\limits_{\arccos\left(1/\sqrt{10}\right)}^{0}\frac{3\operatorname{tg}^2x-50}{2\operatorname{tg}x+7}dx$, в) $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{(5-x^2)^3}}$.

2. $y=x^2$, $y=x^2+x-1$, $y=0{,}5\sqrt{5x}$, $y\le x^2$.

3. а) $x=t-0{,}5\operatorname{sh}2t$, $y=2\operatorname{ch}t$, $0\le t\le t_0$, б) $\rho=a\varphi^4$, $0\le\varphi\le 3$.

4. $y=\sqrt{\frac{x^2-1}{x-3}}$, $-1\le x\le 1$, $y=0$. Знайти $Vx$.

ВАРІАНТ 8

1. а) $\int\limits_2^3(x-1)^3\ln^2(x-1)dx$, б) $\int\limits_0^{\pi/4}\frac{5\operatorname{tg}x+2}{2\sin 2x+5}dx$, в) $\int\limits_1^3\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)}dx$.

2. $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=0$.

3. а) $x=2t^2$, $y=t\left(0{,}25-t^2\right)$ (довжина петлі),

б) Знайти довжину дуги кардіоїди $\rho=2(1-\cos\varphi)$, яка знаходиться всередині кола $\rho=1$.

4. $y=e^x+6$, $y=e^{2x}$, $x=0$. Знайти $Vy$.

ВАРІАНТ 9

1. а) $\int\limits_{-1}^{0}(x+2)^3\ln^2(x+2)dx$, б) $\int\limits_{\pi/4}^{\arcsin\left(2/\sqrt{5}\right)}\frac{4\operatorname{tg}x-5}{4\cos^2x-\sin 2x+1}dx$, в) $\int\limits_0^{\sqrt{2}}\frac{x^4dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$.

2. $y=3^x$, $y=\frac{9}{4}\left(3^{-x}+1\right)+\frac{8}{3}$, $y=9$.

3. а) $x=t^2$, $y=t\left(\frac{1}{3}-t^2\right)$ (довжина петлі),

б) Знайти довжину дуги логарифмічної спіралі $\rho=e^{a\varphi}$, яка знаходиться всередині кола $\rho=1$, ($a>0$).

4. $y=\sqrt{\frac{9+x}{9-3x}}$, $0\le x\le\frac{3}{2}$, $y=0$. Знайти $Vx$.

ВАРІАНТ 10

1. а) $\int\limits_0^2(x+1)^2\ln^2(x+1)dx$, б) $\int\limits_{-\arccos(1/\sqrt{5})}^{0}\frac{(11-3\operatorname{tg}x)dx}{\operatorname{tg}x+3}$, в) $\int\limits_0^{2\sqrt{2}}\frac{x^4dx}{\sqrt{(16-x^2)^3}}$.

2. $y=x+1$, $x=\sin\pi y$, $y=0$, $0\le y\le 1$.

3. а) $x=\frac{c^2}{a}\cos^3 t$, $y=\frac{c^2}{b}\sin^3 t$, $0\le t\le 2\pi$, $c^2=a^2-b^2$ (еволюта еліпса),

б) Знайти довжину дуги спіралі Архімеда $\rho=5\varphi$, яка знаходиться всередині кола $\rho=10\pi$.

4. $y=\arcsin x$, $y=0$, $x=1$. Знайти $Vy$.

ВАРІАНТ 11

1. а) $\int\limits_1^e\sqrt{x}\ln^2 xdx$, б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{4-7tgx}{2+3tgx}dx$, в) $\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\frac{x+\frac{1}{x}}{\sqrt{x^2+1}}dx$.

2. $x=y^2(y-1)$, $x=0$.

3. а) $x=2t^3(1-t^2)$, $y=t\sqrt[4]{15}$ (довжина петлі), б) $\rho=a\cos^5\frac{\varphi}{5}$.

4. $(x-R)^2+(y-R)^2=R^2$, $x=0$, $y=0$, $x\le R$, $y\le R$. Знайти $Vx$.

ВАРІАНТ 12

1. а) $\int\limits_{-1}^{1}x^2e^{-\frac{x}{2}}dx$, б) $\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{\operatorname{tg}^2 xdx}{4+3\cos 2x}$, в) $\int\limits_1^4\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}+1}{(\sqrt{x}+x)^2}dx$.

2. $y=|\log_a x|$, $y=0$, $x=1/a$, $x=a$, $a>1$.

3. а) $x=a(\cos\varphi+\varphi\sin\varphi)$, $y=a(\sin\varphi-\varphi\cos\varphi)$, $0\le\varphi\le\varphi_0$,

б) $\rho=\frac{p}{1+\cos\varphi}$, $|\varphi|\le\frac{\pi}{2}$, $p>0$.

4. $y=\sin x$, $y=0$, $0\le x\le\pi$. Знайти $Vy$.

ВАРІАНТ 13

1. а) $\int\limits_{-2}^{0}(x^2+2)e^{\frac{x}{2}}dx$, б) $\int\limits_0^{\arccos(1/\sqrt{6})}\frac{3\operatorname{tg}^2 x-1}{\operatorname{tg}^2 x+5}dx$, в) $\int\limits_0^{3/2}\frac{dx}{\sqrt{(9-x^2)^3}}$.

2. $y=\sin^2 x$, $y=x\sin x$, $0\le x\le \pi$.

3. а) $x=a\left(t^2-1\right)$, $y=\dfrac{2a}{\sqrt{3}}\left(t^3-\dfrac{t}{4}\right)$ (довжина петлі), б) $\rho=a\cos^3\dfrac{\varphi}{3}$.

4. $2py=x^2$, $2gy=(x-a)^2$, $y=0$. Знайти $Vx$.

## ВАРІАНТ 14

1. а) $\int\limits_{-2}^{0}\left(x^2+3\right)e^{3x}dx$, б) $\int\limits_{0}^{\arccos\left(1/\sqrt{6}\right)}\dfrac{3\,\mathrm{tg}^2 x+1}{\mathrm{tg}^2 x+4}dx$, в) $\int\limits_{0}^{\sqrt{8}/2}\dfrac{dx}{\sqrt{(8-x^2)^3}}$.

2. $y=\sin 2x$, $y=2x$, $0\le x\le \pi$.

3. а) $x=\cos^4 t$, $y=\sin^4 t$, б) $\rho=a\sin^3\dfrac{\varphi}{3}$.

4. $y=3x-x^2$, $y=0$. Знайти $Vx$.

## ВАРІАНТ 15

1. а) $\int\limits_{-2}^{0}\left(x^3+2\right)e^{x}dx$, б) $\int\limits_{0}^{\arccos\left(1/\sqrt{6}\right)}\dfrac{3\,\mathrm{tg}^2 x}{\mathrm{tg}^2 x+5}dx$, в) $\int\limits_{0}^{\sqrt{6}/2}\dfrac{dx}{\sqrt{(6-x^2)^3}}$.

2. $y=x^2\sin x$, $y=x\sin x$, $0\le x\le \pi/2$.

3. а) $x=\mathrm{ch}^3 t$, $y=\mathrm{sh}^3 t$ ($0\le t\le T$), б) $\rho=a\sin^5\dfrac{\varphi}{5}$.

4. $y=3x-x^2$, $y=0$. Знайти $Vy$.

## 7. ЧИСЛОВІ РЯДИ. ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ

***Приклад 7.1*.** Дослідити на збіжність ряди: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n+1}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{\sqrt{n+1}}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(n+1)^n}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$.

***Розв'язання.*** Числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, називають збіжним, якщо для нього існує скінченна границя послідовності частинних сум, тобто $\lim\limits_{n\to\infty}S_n = S$ [8].

При дослідженні рядів на збіжність використовують необхідну умову: якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ є збіжним, то $\lim\limits_{n\to\infty}u_n = 0$, а також достатні умови збіжності.

***а)*** Знайдемо для даного ряду $n$-у частинну суму $S_n$. Оскільки $u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, то можна записати ряд у вигляді:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\ldots$$

Тоді $S_n = 1-\frac{1}{n+1}$ і $\lim\limits_{n\to\infty}S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1$. Ряд за означенням є збіжним.

***б)*** Перевіримо для даного ряду необхідну умову збіжності ряду:

$\lim\limits_{n\to\infty}u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{n+1} = 1 \neq 0$. Ознака не виконується, отже, ряд є розбіжним.

***в)*** Застосуємо до дослідження ознаку Даламбера в граничній формі [8]: якщо $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, то ряд буде збіжним, якщо більше 1 – розбіжним, якщо дорівнює 1, то про збіжність ряду нічого сказати не можна. Для даного ряду $u_n = \frac{n!}{\sqrt{n+1}}$, $u_{n+1} = \frac{(n+1)!}{\sqrt{n+2}}$. Обчислимо границю:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}\cdot n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}} = \infty > 1.$$ Ряд розбіжний.

***г)*** Застосуємо радикальну ознаку Коші в граничній формі [8]: якщо для ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ з невід'ємними членами існує $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \rho$, то при $\rho < 1$ ряд збіжний, при $\rho > 1$ ряд розбіжний, при $\rho = 1$ ознака відповіді не дає. Для нашого ряду маємо: $u_n = \frac{2^n}{(n+1)^n}$, $\sqrt[n]{\frac{2^n}{(n+1)^n}} = \frac{2}{n+1}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n+1} = \left[\frac{2}{\infty}\right] = 0 < 1$.

Отже, ряд збіжний.

***д)*** Застосуємо інтегральну ознаку Коші [8]: Якщо для знакододатнього ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ формула $u_n = f(n)$ така, що відповідна їй функція $f(x)$ неперервного аргументу $x$ невід'ємна, неперервна, монотонно спадає на $[1;+\infty)$, то невласний інтеграл $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ є збіжними і розбіжними одночасно.

Для даного ряду $u_n = f(n) = \dfrac{1}{n^{\alpha}}$, що відповідає функції неперервного аргументу $f(x) = \dfrac{1}{x^{\alpha}}$. Для $\alpha \neq 1$ невласний інтеграл має вигляд: $\int\limits_1^{\infty} \dfrac{dx}{x^{\alpha}} = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_1^{n} \dfrac{dx}{x^{\alpha}} = \lim\limits_{n\to\infty} \left.\dfrac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_1^n = \dfrac{1}{1-\alpha} \lim\limits_{n\to\infty} \left(n^{1-\alpha} - 1\right)$. При $\alpha < 1$ маємо: $\dfrac{1}{1-\alpha} \lim\limits_{n\to\infty} \left(n^{1-\alpha} - 1\right) = \infty$. При $\alpha > 1$: $\dfrac{1}{1-\alpha} \lim\limits_{n\to\infty} \left(n^{1-\alpha} - 1\right) = \dfrac{1}{\alpha - 1}$.

При $\alpha = 1$: $\int\limits_1^{\infty} \dfrac{dx}{x} = \lim\limits_{n\to\infty} \ln x \Big|_1^n = \infty$. Отже, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\alpha}}$ є збіжним при $\alpha > 1$ і розбіжним при $\alpha \leq 1$.

***е)*** Порівняємо ряд з рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$. Обчислимо границю $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 = const \neq 0$. Отже, ряди мають однаковий характер збіжності і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\dfrac{1}{n}$ розбіжний, оскільки ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ є розбіжним рядом.

***<u>Приклад 7.2</u>.*** Дослідити ряд на абсолютну та умовну збіжність ряди:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin n}{n^2}.$$

***Розв'язання.*** Абсолютно збіжні ряди – це ряди, що є збіжними, і для яких ряди, складені з модулів їхніх членів, також є збіжними. Знакозмінні ряди, що є збіжними, для яких ряди, складені з модулів їхніх членів, розбіжні, називають умовно збіжними.

***а)*** Розглянемо ряд, складений із модулів: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^{n+1} \dfrac{1}{n}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$. Він розбіжний, тобто абсолютної збіжності немає. Для знакопочережного ряду використаємо ознаку Лейбніца. Оскільки $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$ і $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ збіжний. Таким чином, маємо умовно збіжний ряд.

***б)*** Розглянемо ряд, складений із модулів: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{\sin n}{n^2}\right| \le \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ збіжний, тобто за ознакою порівняння ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{\sin n}{n^2}\right|$ теж збіжний, а даний ряд абсолютно збіжний.

***<u>Приклад 7.3</u>.*** Знайти радіус збіжності та область збіжності степеневого ряду: а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}(x-3)^n$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)}$.

***Розв'язання.*** Степеневий ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_n(x-x_0)^n$ збіжний при $|x-x_0| < R$, де радіус збіжності знаходять за однією з формул: $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right|$, $R = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|C_n|}}$.

Поведінку ряду на кінцях інтервалу збіжності досліджують окремо.

***а)*** Для ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}(x-3)^n$ маємо: $x_0 = 3$, $C_n = \frac{n+1}{2^n}$, $C_{n+1} = \frac{n+2}{2^{n+1}}$.

Знайдемо радіус збіжності ряду:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)2^{n+1}}{2^n(n+2)} = 2\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2} = 2.$$

Ряд збіжний на інтервалі $(3-2;\ 3+2) = (1;5)$. Визначимо поведінку ряду на кінцях інтервалу. При $x = 1$ ряд має вигляд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)$ і є знакопочережним. Досліджуючи його, знайдемо що $\lim\limits_{n\to\infty}u_n = \infty$, ряд розбіжний. При $x = 5$ одержимо ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)$, що також розбіжний, оскільки не виконується необхідна ознака збіжності ряду. Отже, заданий ряд збіжний для усіх $x \in (1;5)$.

***б)*** Дослідимо ряд з модулів членів даного ряду за ознакою Даламбера: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{|x|^{2n+1}(2n-1)}{(2n+1)|x|^{2n-1}} = |x|^2\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1} = |x|^2$. При $|x|^2 < 1$ ряд збіжний. Тобто $|x| < 1$ – інтервал збіжності даного ряду.

Досліджуємо поведінку ряду на кінцях інтервалу збіжності.

При $x=-1$ одержимо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n-1}$, який за ознакою Лейбніца збіжний. При $x=1$ одержимо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{1}{2n-1}$, що також є знакопочережним і збіжним. Отже, заданий ряд збіжний на відрізку $[-1;1]$.

***Приклад 7.4***. Розкласти функцію в ряд Маклорена:

а) $f(x)=\frac{5}{6+x-x^2}$; б) $f(x)=7x^2e^{3x}$; в) $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{x+25}{x-25}$.

***Розв'язання.*** При розвиненні функцій в ряд використовують властивості степеневих рядів, а також відомі ряди [8]:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots \quad (-\infty<x<\infty),$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots \quad (-\infty<x<\infty),$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots \quad (-\infty<x<\infty),$$

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots (-1<x<1),$$

$$\frac{1}{1+x}=(1+x)^{-1}=1-x+x^2-x^3+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \quad (-1<x<1),$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+\ldots (-1<x<1),$$

$$\operatorname{arctg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (-1<x<1).$$

***а)*** Представимо функцію у вигляді суми елементарних дробів за допомогою метода невизначених коефіцієнтів:

$$f(x)=\frac{5}{6+x-x^2}=\frac{5}{(3-x)(x+2)}=\frac{A}{3-x}+\frac{B}{x+2},$$

$$5=A(x+2)+B(3-x),$$

$x=3$: $\quad 5=5A$, $A=1$,

$x=-2$: $\quad 5=5B$, $B=1$.

Таким чином, маємо: $f(x)=\frac{1}{3-x}+\frac{1}{x+2}$. Далі виконаємо перетворення окремо кожного дробу і використаємо відомий розклад для функції $\frac{1}{1+x}$:

$$f(x)=\frac{1}{3\left(1-\frac{x}{3}\right)}+\frac{1}{2\left(1+\frac{x}{2}\right)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{3}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{1}{3}\left(1+\frac{x}{3}+\left(\frac{x}{3}\right)^2+\left(\frac{x}{3}\right)^3+\ldots+\left(\frac{x}{3}\right)^n+\ldots\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{2}+\left(\frac{x}{2}\right)^2-\left(\frac{x}{2}\right)^3+\ldots+(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^n+\ldots\right).$$

Розклад буде справедливим при: $\left|\frac{x}{2}\right|<1$ і $\left|\frac{x}{3}\right|<1$, тобто на інтервалі $(-2,2)$.

***б)*** Використаємо відомий ряд для функції $e^x$:

$$f(x)=7x^2e^{3x}=7x^2\left(1+\frac{3x}{1!}+\frac{(3x)^2}{2!}+\ldots+\frac{(3x)^n}{n!}+\ldots\right)=$$

$$=7x^2+\frac{21x^3}{1!}+\frac{63x^4}{2!}+\ldots+\frac{7\cdot 3^n x^{n+2}}{n!}+\ldots$$

Розклад буде справедливим при $-\infty<x<\infty$, оскільки розклад для $e^x$ справедливий при всіх $-\infty<x<\infty$.

***в)*** При розвиненні в ряд достатньо часто використовують по членне диференціювання та інтегрування рядів. Обчислимо похідну функції $f(x)$:

$$f'(x)=\left(\operatorname{arctg}\frac{x+25}{x-25}\right)'=\frac{1}{1+\left(\frac{x+25}{x-25}\right)^2}\cdot\frac{1\cdot(x-25)-1\cdot(x+25)}{(x-25)^2}=\frac{-25}{x^2+625}.$$

Виконаємо перетворення дробу і використаємо розклад для функції $\frac{1}{1+x}$:

$$f'(x)=\frac{-25}{625}\cdot\frac{1}{1+\frac{x^2}{625}}=\frac{-1}{25}\cdot\left(1-\frac{x^2}{625}+\left(\frac{x^2}{625}\right)^2-\left(\frac{x^2}{625}\right)^3+\ldots\right).$$

Розклад буде справедливим при $\left|\frac{x^2}{625}\right|<1$, тобто на інтервалі $(-25,25)$.

Для знаходження розкладу для $f(x)$ використаємо інтегрування:

$$f(x)=\int_0^x f'(t)dt=-\frac{1}{25}\int_0^x\left(1-\frac{t^2}{625}+\left(\frac{t^2}{625}\right)^2-\left(\frac{t^2}{625}\right)^3+\ldots\right)dt=$$

$$=-\frac{1}{25}\cdot\left(x-\frac{x^3}{625\cdot 3}+\frac{x^5}{625^2\cdot 5}-\frac{x^7}{625^3\cdot 7}+\ldots\right).$$

***Завдання для самостійної роботи***

1. Дослідити на збіжність ряд.
2. Дослідити ряд на абсолютну та умовну збіжність.
3. Знайти радіус збіжності та область збіжності степеневого ряду.
4. Розкласти функцію в ряд Маклорена.

## ВАРІАНТ 1

1. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)$, б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{2^n(n-1)!}$, в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+2}{3n+1}\right)^n(n+1)^3$,

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+3)\ln^2(2n+1)}$, д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^3+2}}{n^2\sin^2 n}$.

2. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{\sqrt[3]{n^4}}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^2}$. 3. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}4^n(x+1)^n$.

4. а) $f(x)=\frac{9}{20-x-x^2}$, б) $f(x)=arctg\,\frac{3-4x^2}{6+2x^2}$.

## ВАРІАНТ 2

1. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^4\,\mathrm{arctg}^{2n}\left(\frac{\pi}{4n}\right)$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{1}{n^4+1}}$, в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$,

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^{n^2}$, д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2(2n+1)}$

2. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+2}{\sqrt[4]{n^5}}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^3}$. 3. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}3^n(x-1)^n$.

4. а) $f(x)=\frac{1}{6x^2+3x}$, б) $f(x)=x\ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)$.

## ВАРІАНТ 3

1. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\arcsin\frac{3+(-1)^n}{4}}{2^n+n}$, б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\sqrt[3]{n}\left(\frac{n-2}{2n+1}\right)^{3n}$, в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)$,

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}\left(n^3+1\right)}{(n+1)\,!}$, д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\ln^2(2n+3)}$.

2. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{\sqrt[6]{n^7}}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n!}$. 3. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(2n)\,!}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}3^n\left(n^3+2\right)(x-1)^n$.

4. а) $f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$, б) $f(x)=x\ln\left(x^2+\sqrt{x^4+9}\right)$.

## ВАРІАНТ 4

1. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{3n+1}\right)^n$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3+(-1)^n}{2^{n+2}}$, в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!\sin\frac{\pi}{2^n}$, г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$, д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{4^n}$.

2. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3n+2}{\sqrt[3]{n^4}}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n!}$. 3. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(2n+1)\,!}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}5^n(x+2)^n$.

4. а) $f(x)=\dfrac{1}{x^4-3x^2+2}$, б) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{2+x^2}{2-x^2}$.

ВАРІАНТ 5

1. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{10^n\cdot 2n!}{(2n)\,!}$, б) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{1}{(3n-5)\ln^2(4n-7)}$, в) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{1}{n^2\ \ln n+\sqrt[3]{\ln^2 n}}$,

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\cdot 3^{n+2}}{5^n}$, д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2$.

2. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ \dfrac{4n+1}{\sqrt[3]{n^5}}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n}{n^3}$. 3. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{(n+1)\,!}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+1}{n^2+4n}(x-2)^n$.

4. а) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-6x+5}$, б) $f(x)=\ln\left(1-x-6x^2\right)$.

ВАРІАНТ 6

1. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n+2)\,!}{(3n+5)2^n}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{-n^2}$, в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln^2(3n+1)}$,

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2+3}{n^3\left(2+\sin\dfrac{\pi n}{2}\right)}$, д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\left(\dfrac{n}{3n-1}\right)^{2n}$.

2. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ \dfrac{n+1}{\sqrt[3]{n^4+2}}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n}{n^2}$. 3. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{(2n-1)\,!}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+3}{n^2+5n}(x+1)^n$.

4. а) $f(x)=\dfrac{1}{3x^3+2}$, б) $f(x)=\ln\left(x^3+\sqrt{x^6+9}\right)$.

ВАРІАНТ 7

1. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2-4n+5}$, б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{n+1}{2^n(n-1)\,!}$, в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n+2}{3n+1}\right)^n(n+1)^3$,

г) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{n}{\left(n^2-3\right)\ln^2 n}$, д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\ln n}{n^2-3}$.

2. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\ \dfrac{2n+1}{n(n+1)}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin 3n}{n^2}$. 3. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n\cdot 2^n}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n^2+n}(x+1)^n$.

4. а) $f(x)=\cos^2 3x$, б) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{2-x}{1+2x}$.

ВАРІАНТ 8

1. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+1)^{n^2}}{n}\cdot\dfrac{1}{2^n}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3n-1}$, в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n\,!)^2}{2^{n^2}}$, г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n+1}{3n-2}\right)^{n^2}$, д) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{n^2}{\left(n^3+1\right)\ln n}$.

2. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{(2n-1)^3}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^3 n}{n^2}$. 3. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(4n)!}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2}(x-3)^n$.

4. а) $f(x)=\arcsin 3x$, б) $f(x)=\ln\left(x^3+\sqrt{x^6+64}\right)$.

## ВАРІАНТ 9

1. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos^2 n}{n^3+5}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\operatorname{arctg}\frac{\pi}{4\sqrt{n}}$, в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$, г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}n^3}{(n+1)!}$, д) $\sum_{n=1}^{\infty}n^4\left(\frac{2n}{3n+1}\right)^n$.

2. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{n2^n}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 3n}{(3n)!}$. 3. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2x^n}{(4n)!}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n}(x+3)^n$.

4. а) $f(x)=\frac{1}{x^2+5}$, б) $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{2x-3}{x+6}$.

## ВАРІАНТ 10

1. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2(n+7)}$, б) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln\sqrt{n^2+3n}}{\sqrt{n^2-n}}$, в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{n+1}}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$,

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{(n+2)n}$, д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{3^n(n+1)!}$.

2. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^4+1}}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 3n}{(3n+1)!}$. 3. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2x^n}{4}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}(x-5)^n$.

4. а) $f(x)=\frac{1}{x^2+2}$, б) $f(x)=\left(x^2-1\right)\arcsin 2x^2$.

## ВАРІАНТ 11

1. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\cdot\frac{1}{2^n}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+4)\ln^2(5n+2)}$, в) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\arcsin((n\text{-}1)/n)}{\sqrt[3]{n^3-3n}}$,

г) $\sum_{n=1}^{\infty}n^2\sin^n\frac{\pi}{2n}$, д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+4)}$.

2. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln(n+1)}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n}{(2n+1)!}$. 3. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2x^n}{4n+1}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n+1}(x-5)^n$.

4. а) $f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$, б) $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{x+0{,}5}{x-0{,}5}$.

## ВАРІАНТ 12

1. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\ln^2 5n}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3n}\right)^{n^2}$, в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5\cdot 3^n}{(2n+1)^n}$, г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}\left(1+(-1)^n\right)n/2}{n^3+2}$,

д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(3n)!}$.

2. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\ln^2(n+1)}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n}{(2n+1)\,!}$, 3. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{4n+1}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n+2}(x+5)^n$ .

4. а) $f(x)=\frac{1}{x^2-3x+2}$, б) $f(x)=x^2\arccos 2x$.

## ВАРІАНТ 13

1. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{1+n^2}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7^{2n}}{(2n-1)\,!}$, в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^2(3n+1)}$,

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n\cdot\frac{n}{5^n}$, д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\pi/2)}{n(n+1)(n+2)}$.

2. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln(2n+1)}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 4n}{n^4}$. 3. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{4\sqrt{n}+1}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{\sqrt{n+2}}(x+1)^n$ .

4. а) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, б) $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}$.

## ВАРІАНТ 14

1. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)(n+2)}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+2}}{\left(2n^2+1\right)^{\frac{n}{2}}}$, в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}$,

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+2}{4n-1}\right)^n(n-1)^2$, д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\ln 2n}$.

2. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n\ln(2n+1)}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 5n}{n^5}$. 3. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n+1}}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n+5}(x+5)^n$ .

4. а) $f(x)=x^2\cos\frac{x}{2}$, б) $f(x)=x\ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)$.

## ВАРІАНТ 15

1. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^7}}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{n-1}e^{-n}$ , в) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\left(n^2-4\right)}$, г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n(n+1)\,!}{(2n)\,!}$, д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n-3}{5n+1}\right)^{n^3}$ .

2. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\ln(3n+1)}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2+2n}$. 3. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n^2+1}}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n+3}(x-3)^n$ .

4. а) $f(x)=x\ln\left(1+x^2\right)$, б) $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{3-4x^2}{6+2x^2}$.

## 8. КРАТНІ, КРИВОЛІНІЙНІ ТА ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ.

***<u>Приклад 8.1.</u>*** Змінити порядок інтегрування: $\int\limits_0^2 dx \int\limits_x^{2x} f(x,y)dy$ [3].

***Розв'язання.*** Побудуємо область інтегрування. Для цього зобразимо в системі координат графіки функцій: $x=0$, $x=2$, $y=x$, $y=2x$ (рис. 8.1). Щоб змінити порядок інтегрування, потрібно визначитись, яка змінна буде під знаком диференціалу у внутрішньому інтегралі. В даному випадку це буде $x$. Тоді уявно проведемо прямі $y=const$ і подивимось від точки на якій кривій і до точки на якій кривій змінюється $x$. В даному випадку для $y\in[0,2]$ і $y\in[2,4]$ ці криві різні. Тому в результаті одержимо 2 інтеграли.

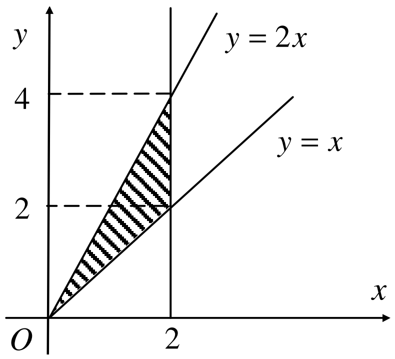


Рис. 8.1.

Оскільки зовнішнє інтегрування буде по $y$, то потрібно в рівняннях кривих змінну $x$ виразити через змінну $y$. При $y\in[0,2]$: $x=\frac{y}{2}$, $x=y$, при $y\in[2,4]$: $x=\frac{y}{2}$, $x=2$. Таким чином, одержимо:

$$\int\limits_0^2 dx \int\limits_x^{2x} f(x,y)dy = \int\limits_0^2 dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^{y} f(x,y)dx + \int\limits_2^4 dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^{2} f(x,y)dx.$$

***<u>Приклад 8.2.</u>*** Представити подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ за допомогою повторних із зовнішнім інтегруванням по $x$ і по $y$, де область $D$ обмежена кривими: $x=\sqrt{y}$, $x=\sqrt{2+y}$, $x=0$, $x=2$ [3].

***Розв'язання.*** Побудуємо область інтегрування (рис. 8.2). Область інтегрування $D$ обмежена дугами парабол $y=x^2$, $y=x^2-2$, прямими $x=0$, $x=2$, тобто маємо запис області $D$ як області першого типу.

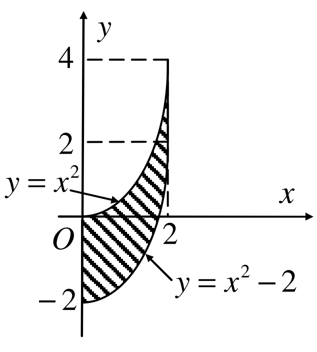


Рис. 8.2.

Тоді подвійний інтеграл за допомогою повторного із зовнішнім інтегруванням по $x$ матиме вигляд:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_{x^2-2}^{x^2} f(x,y)dy.$$

Для запису подвійного інтегралу за допомогою повторного із зовнішнім інтегруванням по $y$ слід розбити область інтегрування на три частини, а саме:

1) якщо $-2\le y\le 0$, то область ліворуч обмежена прямою $x=0$, а праворуч кривою $x=\sqrt{2+y}$;

2) якщо $0 \le y \le 2$, то область ліворуч обмежена кривою $x = \sqrt{y}$, а праворуч кривою $x = \sqrt{2 + y}$;

3) якщо $2 \le y \le 4$, то область ліворуч обмежена кривою $x = \sqrt{y}$, а праворуч прямою $x = 2$.

Тоді подвійний інтеграл за допомогою повторного із зовнішнім інтегруванням по $y$ матиме вигляд:

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_{-2}^{0} dy \int_{0}^{\sqrt{2+y}} f(x, y)dx + \int_{0}^{2} dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2+y}} f(x, y)dx + \int_{2}^{4} dy \int_{\sqrt{y}}^{2} f(x, y)dx.$$

***Приклад 8.3.*** Обчислити інтеграл $\iint_D y^2\sqrt{1 - x^2}dxdy$, де область $D$ – це круг $x^2 + y^2 \le 1$ [3].

***Розв'язання.*** Побудуємо область інтегрування (рис. 8.3). Запишемо область $D$ як область першого типу. Рівняння контуру: $x^2 + y^2 = 1$. Звідки $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$. Зрозуміло, що $y = \sqrt{1 - x^2}$ – рівняння верхнього півкола, $y = -\sqrt{1 - x^2}$ – рівняння нижнього півкола. Таким чином, при постійному $x \in [-1,1]$ змінна $y$ змінюється від $-\sqrt{1 - x^2}$ до $\sqrt{1 - x^2}$. Тоді одержимо:

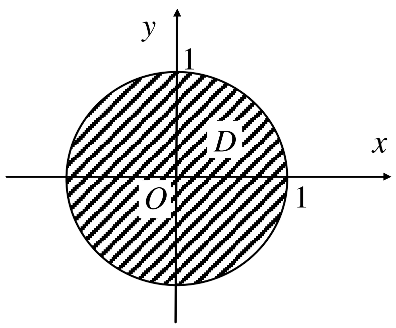

Рис. 8.3.

$$\iint_D y^2\sqrt{1 - x^2}dxdy = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} y^2dy = \left| \begin{array}{l} \textit{із парності підінт.} \\ \textit{функції у внутр.} \\ \textit{інтегралі} \end{array} \right| =$$

$$= 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}dx \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} y^2dy = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2} \cdot \left.\frac{y^3}{3}\right|_0^{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$= \frac{2}{3}\int_{-1}^{1} \left(1 - x^2\right)^2 dx = \left| \begin{array}{l} \textit{із парності} \\ \textit{підінт. функції} \end{array} \right| = \frac{4}{3}\int_{0}^{1} \left(1 - x^2\right)^2 dx = \frac{32}{45}.$$

***Приклад 8.4.*** Обчислити інтеграл $\int_{-R}^{0} dx \int_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{\ln\left(1 + \sqrt{x^2 + y^2}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy$, використовуючи полярні координати [3].

***Розв'язання.*** Побудуємо область інтегрування $D$. Для цього в системі координат проведемо лінії: $x = -R$, $x = 0$, $y = 0$, $y = \sqrt{R^2 - x^2}$. Одержимо час-

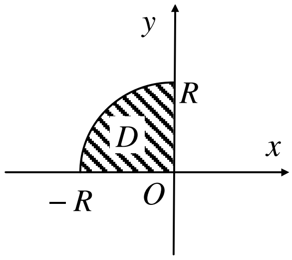


Рис. 8.4.

тину круга $x^2 + y^2 \le R^2$ (рис. 8.4). Перейдемо до полярних координат $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$.

Тоді область $D$ можна записати за допомогою нерівностей: $0 \le \rho \le R$, $\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi$. Для інтегралу одержимо наступне:

$$\int\limits_{-R}^{0} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{\ln\left(1+\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} dy = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{R} \frac{\ln(1+\rho)}{\rho}\cdot\rho d\rho = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{R} \ln(1+\rho) d\rho =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \textit{інтегруємо частинами}: \\ u = \ln(1+\rho), \quad dv = d\rho, \\ du = \dfrac{d\rho}{1+\rho}, \qquad v = \rho \end{array} \right| = \frac{\pi}{2}\left(R\ln(1+R) - R + \ln(1+R)\right).$$

***Приклад 8.5.*** Знайти площу бічної поверхні циліндра: $x^2 + z^2 = R^2$, $0 \le y \le H$ за допомогою подвійного інтегралу.

***Розв'язання.*** Знайдемо площу бічної поверхні циліндра за допомогою подвійного інтегралу. Побудуємо циліндр в системі координат (рис. 8.5). Тоді проекція на площину $xOy$ буде область $G$:

$$\begin{cases} -R \le x \le R, \\ 0 \le y \le H, \end{cases}$$

$z = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \mp\dfrac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

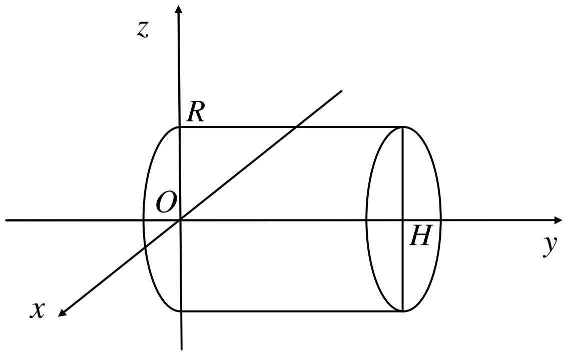


Рис. 8.5.

Обчислюємо площу:

$$S = 2\iint\limits_G \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} dxdy = 2R\iint\limits_G \frac{dxdy}{\sqrt{R^2 - x^2}} =$$

$$= 2R\int\limits_0^H dy \int\limits_{-R}^{R} \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = 4RH\int\limits_0^R \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = 2\pi RH .$$

***Приклад 8.6.*** Знайти площу фігури, обмежену кривою $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$, використовуючи полярні координати [3].

***Розв'язання.*** При наявності двочлена $x^2 + y^2$ виникає думка про перехід до полярних координат. Тоді площу фігури зручно підраховувати за формулою: $S_G = \iint\limits_G \rho d\rho d\varphi$. Побудуємо область інтегрування (рис. 8.6). Для цього перейдемо до полярних координат. Рівняння кривої буде мати вигляд: $\rho = \sqrt{2\cos 2\varphi}$.

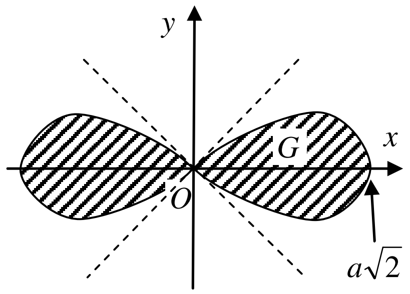


Рис. 8.6.

При цьому $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$. Область $G$ складається з 4 однакових областей, наприклад, $\varphi \in [0, \pi/4]$, $\rho$ змінюється від $\rho = 0$ до $\rho = \sqrt{2\cos 2\varphi}$.

Таким чином, одержимо площу області $G$:

$$S_G = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\sqrt{2\cos 2\varphi}} \rho d\rho = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi d\varphi = 2 \text{ (кв. од.).}$$

***Приклад 8.7.*** Обчислити інтеграл $\iiint\limits_D (3x + 2y - z^3)dxdydz$, де $D$: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$, $1 \le z \le 3$.

***Розв'язання.*** Область інтегрування являє собою прямокутний паралелепіпед, тобто одержимо для інтегралу наступне:

$$\iiint\limits_D (3x + 2y - z^3)dxdydz = \int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_1^3 (3x + 2y - z^3)dz = \int_0^1 dx \int_0^2 \left(3xz + 2yz - \frac{z^4}{4}\right)\Bigg|_1^3 dy =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^2 (6x + 4y - 20)dy = \int_0^1 \left(6xy + 2y^2 - 20y\right)\Big|_0^2 dx = \int_0^1 (12x - 32)dx = -26.$$

***Приклад 8.8.*** Обчислити інтеграл $\iiint\limits_D zdxdydz$, де область $D$ обмежена поверхнями: $z^2 = x^2 + y^2$, $z = 1$ [3].

***Розв'язання.*** Побудуємо область інтегрування. Поверхня $z^2 = x^2 + y^2$ є конусом, $z = 1$ є площиною (рис. 8.7).

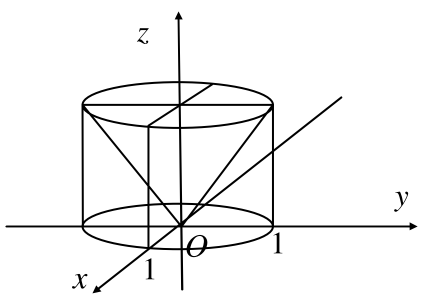


Рис. 8.7.

Перейдемо до циліндричних координат: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$, де $\varphi \in [0, 2\pi]$, $r \in [0,1]$, $z \in [r,1]$. Таким чином:

$$\iiint\limits_D zdxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 rdr \int_r^1 zdz = \pi \int_0^1 (r - r^3)dr = \frac{\pi}{4}.$$

***Приклад 8.9.*** Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $3z^2 = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ [3].

***Розв'язання.*** Побудуємо область інтегрування (рис. 8.8). Перейдемо до сферичних координат:

$$x = \rho\cos\varphi\sin\theta,\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta,\ z = \rho\cos\theta.$$

Тоді рівняння сфери буде мати вигляд: $\rho = 2\cos\theta$, рівняння конуса: $\theta = \pi/3$. Тоді одержимо:

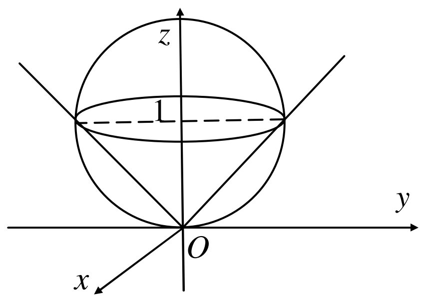


Рис. 8.8.

$$V=\iiint\limits_{D}\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\varphi\,d\theta=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi/3}d\theta\int\limits_0^{2\cos\theta}\rho^2\sin\theta d\rho=\frac{16\pi}{3}\int\limits_0^{\pi/3}\sin\theta\cos^3\theta\,d\theta=$$

$$=5\pi/4 \text{ (куб. од.)}.$$

***Приклад 8.10.*** а) Знайти $\int\limits_L xydx+(y-x)dy$, $L$: дуга параболи $y=x^2$ від точки (0, 0) до точки (1, 1).

б) Знайти $\int\limits_L xydx+(y-x)dy$, $L$: дуга параболи $y^3=x$ від точки (0, 0) до точки (8, 2).

в) Знайти $\int\limits_L xydx+yzdy+zxdz$, $L$: $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t \\ z=bt \end{cases}$, $t\in[0,2\pi]$.

***Розв'язання. а)*** Зведемо криволінійний інтеграл до визначеного інтегралу. Одержимо наступне:

$$\int\limits_L xydx+(y-x)dy=\int\limits_0^1(x^3+(x^2-x)\cdot 2x)dx=\int\limits_0^1(3x^3-2x^2)dx=\frac{1}{12}.$$

***б)*** Вважаючи $x$ функцією від змінної $y$ одержимо $dx=3y^2dy$, одержимо:

$$\int\limits_L xydx+(y-x)dy=\int\limits_0^2\left(y^3y\cdot 3y^2+\left(y-y^3\right)\right)dy=\int\limits_0^2\left(3y^6-y^3+y\right)dy=\frac{370}{7}.$$

***в)*** Обчислимо диференціали: $dx=-a\sin tdt$, $dy=a\cos tdt$, $dz=bdt$. Тоді для інтеграла одержимо:

$$\int\limits_L xydx+yzdy+zxdz=\int\limits_0^{2\pi}(-a^3\sin^2 t\cos t+a^2bt\cos t\sin t+ab^2t\cos t)dt=-\frac{\pi}{2}a^2b.$$

***Приклад 8.11.*** а) Обчислити $\int\limits_L xdl$, $L$: відрізок прямої від точки (0, 0) до точки (1, 2).

б) Обчислити $\int\limits_L ydl$, $L$: дуга кривої $y^2=x$ від точки (0, 0) до точки (4, 2).

в) Знайти довжину просторової кривої $L$: $\begin{cases} x=3t, \\ y=3t^2, \\ z=2t^3, \end{cases}$ від точки (0, 0, 0) до точки (3, 3, 2).

***Розв'язання. а)*** Знайдемо рівняння прямої, яка проходить через задані точки (0, 0) і (1, 2). Одержимо рівняння $y=2x$. Далі за формулою диференціала дуги маємо: $dl=\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx=\sqrt{5}dx$. Тоді одержимо:

$$\int\limits_L xdl = \int\limits_0^1 x\sqrt{5}dx = \sqrt{5}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1 = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

***б)*** Вважаючи $x$ функцією від $y$ маємо: $dl = \sqrt{1+(x'(y))^2}dy = \sqrt{1+4y^2}dy$. Тоді одержимо:

$$\int\limits_L ydl = \int\limits_0^2 y\sqrt{1+4y^2}dy = \frac{\left(1+4y^2\right)\sqrt{1+4y^2}}{12}\Bigg|_0^2 = \frac{17\sqrt{17}-1}{12}.$$

***в)*** Обчислимо похідні $x' = 3$, $y' = 6t$, $z' = 6t^2$. Далі за формулою довжини дуги $l = \int\limits_L dl$ маємо наступне:

$$l = \int\limits_L dl = \int\limits_0^1 \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}dt = \int\limits_0^1 \sqrt{9+36t^2+36t^4}dt = 3\int\limits_0^1 (1+2t^2)dt = 5 \text{ (од.)}.$$

***<u>Приклад 8.12.</u>*** Обчислити за допомогою формули Гріна $\oint\limits_L 5ydx + xdy$, де контур $L$: коло $x^2 + y^2 = 1$, яке пробігається проти ходу годинникової стрілки.

***Розв'язання.*** Обчислимо частинні похідні: $\frac{\partial P}{\partial y} = 5,\quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$. Контур інтегрування є замкнутим і пробігається проти хода годинникової стрілки, тоді за формулою Гріна маємо наступне (в якості області $D$ маємо круг $x^2 + y^2 \le 1$):

$$\oint\limits_L Pdx + Qdy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \iint\limits_D (1-5)dxdy = -4\iint\limits_D dxdy = -4\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho d\rho = -4\pi.$$

***<u>Приклад 8.13.</u>*** Обчислити поверхневий інтеграл другого роду $\iint\limits_S (2x+y)dydz - 4ydxdz + 5zdxdy$, де $S$ – зовнішня сторона $x^2 + y^2 + z^2 = 144$.

***Розв'язання.*** Дана поверхня є замкнутою поверхнею (сфера з центром у початку координат і радіусом 12), нормаль до якої зовнішня. Застосуємо до обчислення інтегралу формулу Остроградського-Гауса [3], тобто зведемо даний інтеграл до потрійного інтегралу по кулі $V$: $x^2 + y^2 + z^2 \le 144$.

За формулою $\oiint\limits_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$ маємо:

$$\oiint\limits_S (2x+y)dydz - 4ydxdz + 5zdxdy = \iiint\limits_V (2-4+5)dxdydz =$$

$$= 3\iiint\limits_V dxdydz = 3V_{кулі} = 3\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot 12^3 = 6912\pi.$$

***Приклад 8.14.*** Знайти потік векторного поля $\overline{A}=(x+z)\bar{i}+(2y-x)\bar{j}+z\bar{k}$ через зовнішню поверхню піраміди, утворену площиною $x-2y+2z=4$ і координатними площинами, двома способами (безпосередньо і за формулою Остроградського) [3].

***Розв'язання.*** *1 спосіб.* Обчислимо потік безпосередньо. Повна поверхня піраміди складається з чотирьох поверхонь: $\Delta AOC$, $\Delta AOB$, $\Delta BOC$ і $\Delta ABC$ (рис. 8.9).

Тому $$\Pi=\iint\limits_S \overline{A}\cdot\bar{n}dS=\iint\limits_{\Delta AOC}\overline{A}\cdot\bar{n}dS+\iint\limits_{\Delta AOB}\overline{A}\cdot\bar{n}dS+\iint\limits_{\Delta BOC}\overline{A}\cdot\bar{n}dS+\iint\limits_{\Delta ABC}\overline{A}\cdot\bar{n}dS=$$
$$=\Pi_1+\Pi_2+\Pi_3+\Pi_4.$$

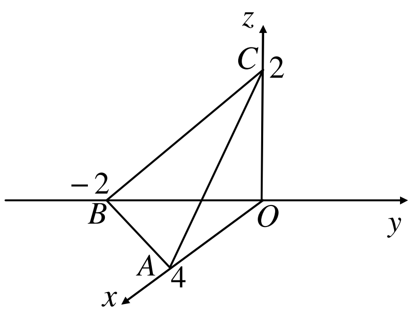


Рис. 8.9.

Обчислимо перший інтеграл. Розглянемо $\Delta AOC$. На цій поверхні: $y=0$, тобто рівняння $AC$ матиме вигляд: $x+2z=4$, або $z=\dfrac{4-x}{2}$, вектор нормалі до поверхні $\bar{n}=\bar{j}$, $dS=dxdz$. Тоді одержимо наступне: $\overline{A}\cdot\bar{n}=2y-x=-x$,

$$\Pi_1=\iint\limits_{\Delta AOC}\overline{A}\cdot\bar{n}dS=-\iint\limits_{\Delta AOC}xdxdz=-\int\limits_0^4 dx\int\limits_0^{(4-x)/2}xdz=-\frac{16}{3}.$$

Обчислимо другий інтеграл. Розглянемо $\Delta AOB$. На цій поверхні: $z=0$, вектор нормалі до поверхні $\bar{n}=-\bar{k}$, $dS=dxdy$. Тоді одержимо:

$$\overline{A}\cdot\bar{n}=0\cdot(-1)=0,\ \Pi_2=\iint\limits_{\Delta AOB}\overline{A}\cdot\bar{n}dS=0.$$

Обчислимо третій інтеграл. Розглянемо $\Delta BOC$. На цій поверхні: $x=0$, тобто рівняння $BC$ матиме вигляд: $-2y+2z=4$, або $y=z-2$, вектор нормалі до поверхні $\bar{n}=-\bar{i}$, $dS=dydz$. Тоді одержимо наступне: $\overline{A}\cdot\bar{n}=-z$,

$$\Pi_3=\iint\limits_{\Delta BOC}\overline{A}\cdot\bar{n}dS=-\iint\limits_{\Delta BOC}zdydz=-\int\limits_0^2 dz\int\limits_{z-2}^0 zdy=-\frac{4}{3}.$$

Обчислимо четвертий інтеграл. Розглянемо $\Delta ABC$. Рівняння поверхні: $x-2y+2z-4=0$, вектор нормалі до поверхні матиме вигляд:

$$\bar{n}=\frac{1}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}\bar{i}+\frac{-2}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}\bar{j}+\frac{2}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}\bar{k}=\frac{1}{3}\bar{i}-\frac{2}{3}\bar{j}+\frac{2}{3}\bar{k},$$

$$dS=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy,\ z=-\frac{1}{2}x+y+2,\ \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{2},\ \frac{\partial z}{\partial y}=1,$$

$$dS=\sqrt{1+\frac{1}{4}+1}dxdy=\frac{3}{2}dxdy.$$

Тоді одержимо наступне:

$$П_4 = \iint\limits_{\Delta ABC} \overline{A}\cdot\overline{n}dS = \frac{3}{2}\iint\limits_{\Delta ABC}\left((x+z)\cdot\frac{1}{3}dxdy + (2y-x)\left(-\frac{2}{3}\right)dxdy + z\cdot\frac{2}{3}dxdy\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta ABC}(x+z-4y+2x+2z)dxdy = \frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta ABC}(3x-4y+3z)dxdy =$$

$$= \frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta AOB}\left(3x-4y-\frac{3}{2}x+3y+6\right)dxdy = \frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta AOB}\left(\frac{3}{2}x-y+6\right)dxdy =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{0}dy\int\limits_{0}^{2y+4}\left(\frac{3}{2}x-y+6\right)dx = \frac{52}{3}.$$

Тоді одержимо, що потік буде наступним: $П = -\frac{16}{3}+0-\frac{4}{3}+\frac{52}{3} = \frac{32}{3}$.

<u>2 спосіб.</u> Обчислимо потік за формулою Остроградського-Гауса.

$$П = \iiint\limits_V\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)dxdydz = \iiint\limits_V(1+2+1)dxdydz = 4\iiint\limits_V dxdydz =$$

$$= 4V_{піраміди} = 4\cdot\frac{1}{3}S_{осн}\cdot H = 4\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4\cdot 2 = \frac{32}{3}.$$

***<u>Приклад 8.15.</u>*** Знайти циркуляцію векторного поля $\overline{A} = (x-2z)\overline{i} + (x+3y+z)\overline{j} + (5x+y)\overline{k}$ через контур трикутника $L$, утвореного в результаті перетину площин $-x+7y+z=7$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, при додатному обході відносно нормального вектора $\overline{n}(1;1;1)$ двома способами (безпосередньо і за формулою Стокса) [3].

***Розв'язання.*** <u>*1 спосіб.*</u> Побудуємо в системі координат контур $L$, тобто контур $\Delta ABC$ (рис. 8.10). Циркуляцію будемо обчислювати за наступною формулою, розбивши контур трикутника на три окремі відрізки:

$$Ц = \oint\limits_{ABCA}\overline{A}\cdot\overline{dl} = \int\limits_{\cup AB}\overline{A}\cdot\overline{dl} + \int\limits_{\cup BC}\overline{A}\cdot\overline{dl} + \int\limits_{\cup CA}\overline{A}\cdot\overline{dl}$$

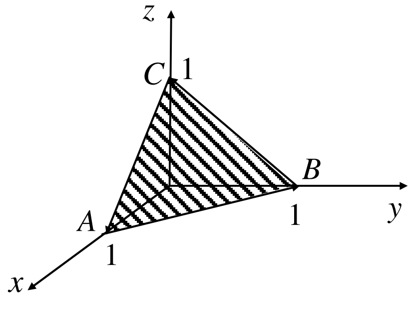


Рис. 8.10.

Обчислимо перший інтеграл. Розглянемо відрізок $AB$. На цьому відрізку: $z=0$, тобто рівняння $AB$ матиме вигляд: $x+y=1$, або $y=1-x$, тобто $dy=-dx$. Тоді одержимо наступне:

$\overline{dl} = dx\overline{i} + dy\overline{j}$, $\overline{A} = x\overline{i} + (x+3y)\overline{j} + (5x+y)\overline{k}$,

$$\overline{A}\cdot\overline{dl} = xdx + (x+3y)dy,$$

$$\int\limits_{\cup AB}\overline{A}\cdot\overline{dl} = \int\limits_{\cup AB}xdx + (x+3y)dy = \int\limits_{1}^{0}xdx + (x+3(1-x))(-dx) = \int\limits_{1}^{0}(3x-3)dx = \frac{3}{2}.$$

Обчислимо другий інтеграл. Розглянемо відрізок $BC$. На цьому відрізку: $x=0$, тобто рівняння $BC$ матиме вигляд: $z+y=1$, або $z=1-y$, тобто $dz=-dy$. Тоді одержимо наступне:

$$\overline{dl}=dy\overline{j}+dz\overline{k},\ \overline{A}=(-2z)\overline{i}+(z+3y)\overline{j}+y\overline{k},\ \overline{A}\cdot\overline{dl}=(z+3y)dy+ydz,$$

$$\int\limits_{\cup BC}\overline{A}\cdot\overline{dl}=\int\limits_{\cup BC}(z+3y)dy+ydz=\int\limits_{1}^{0}(3y+1-y-y)dy=-\frac{3}{2}.$$

Обчислимо третій інтеграл. Розглянемо відрізок $CA$. На цьому відрізку: $y=0$, тобто рівняння $CA$ матиме вигляд: $x+z=1$, або $z=1-x$, тобто $dz=-dx$. Тоді одержимо наступне:

$$\overline{A}\cdot\overline{dl}=(x-2z)dx+5xdz,$$

$$\int\limits_{\cup CA}\overline{A}\cdot\overline{dl}=\int\limits_{\cup CA}(x-2z)dx+5xdz=\int\limits_{0}^{1}(x-2+2x-5x)dx=\int\limits_{0}^{1}(-2x-2)dx=-3.$$

Тоді одержимо, що циркуляція буде наступною: $Ц=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}-3=-3$.

<u>*2 спосіб.*</u> Застосуємо формулу Стокса. Обчислимо спочатку ротор векторного поля. Маємо наступне:

$$\overline{rotA}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x-2z & x+3y+z & 5x+y\end{vmatrix}=-7\overline{j}+\overline{k}.$$

В якості поверхні $S$ виберемо $\Delta ABC$. Обчислимо циркуляцію:

$$Ц=\iint\limits_{S}\overline{rotA}\cdot\overline{n}dS=\iint\limits_{S}dxdy-7dxdz=S_{\Delta AOB}-7S_{\Delta COA}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1-7\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=-3.$$

### ***Завдання для самостійної роботи***

1. Змінити порядок інтегрування.
2. Представити подвійний інтеграл $\iint\limits_{D}f(x,y)dxdy$ за допомогою повторних із зовнішнім інтегруванням по $x$ і по $y$.
3. Обчислити інтеграл.
4. Обчислити інтеграл, використовуючи полярні координати.
5. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями (подвійний інтеграл).
6. Знайти площу області, яка обмежена кривою.
7. Обчислити інтеграл.
8. Обчислити інтеграл за допомогою циліндричних або сферичних координат.
9. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями (потрійний інтегралу).
10, 11. Обчислити криволінійний інтеграл.
12. За допомогою формули Гріна обчислити інтеграл.
13. Обчислити поверхневий інтеграл.
14. Знайти потік векторного поля через зовнішню поверхню піраміди двома способами (безпосередньо і за формулою Остроградського).

15. Знайти циркуляцію векторного поля через контур трикутника, утвореного при перетині площин, двома способами (безпосередньо і за формулою Стокса).

ВАРІАНТ 1

1. $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{-\sqrt{2+y}}^{0} f(x,y)dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{-y}}^{0} f(x,y)dx$. 2. $D:\ y=\sqrt{4-x^2},\ y=\sqrt{3x},\ x \ge 0$.

3. $\iint\limits_D (x^2+y)dxdy,\ D:\ y=x^2,\ x=y^2$. 4. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{\dfrac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}dy$.

5. $z=x^2+y^2,\ x+y=1,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0$. 6. $\rho = a\sin^2 2\varphi$.

7. $\iiint\limits_D (2x^2+3y+z)dxdydz,\ D:\ 2\le x\le 3,\ -1\le y\le 2,\ 0\le z\le 4$.

8. $\iiint\limits_D (x^2+y^2+z^2)dxdydz,\ D:\ x^2+y^2+z^2=4,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0$.

9. $z^2=4-x,\ x^2+y^2=4x$.

10. $\int\limits_L (x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy$, $L$: дуга параболи $y=x^2$ від (-1, 1) до (1, 1).

11. $\int\limits_L \sqrt{2-z^2}(2z-\sqrt{x^2+y^2})dl$, $L$: дуга кривої $\begin{cases} x=t\cos t \\ y=t\sin t \\ z=t \end{cases}$, $t\in[0,2\pi]$.

12. $\oint\limits_L (1-x^2)ydx + x(1+y^2)dy$, $L$: коло $x^2+y^2=4$, яке пробігається проти ходу годинникової стрілки.

13. $\iint\limits_S zdxdy$, $S$ – зовнішня сторона поверхні $x^2+y^2+2z^2=2$.

14. $\bar{A}=3x\bar{i}+(y+z)\bar{j}+(x-z)\bar{k}$, $S:\ x+3y+z=3,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.

15. $\bar{A}=30x\bar{i}+(y+z)\bar{j}+6(x-z)\bar{k}$, $-6x+3y+z=-30,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.

ВАРІАНТ 2

1. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} f(x,y)dx + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f(x,y)dx$. 2. $D:\ x^2=2y,\ 5x-2y-6=0$.

3. $\iint\limits_D xy^2dxdy,\ D:\ y=x^2,\ y=2x$. 4. $\int\limits_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int\limits_0^{\sqrt{3-x^2}} \dfrac{dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$.

5. $z=2-(x^2+y^2),\ x+2y=1,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0$. 6. $\rho=a\sin^2\varphi$.

7. $\iiint\limits_D x^2yzdxdydz,\ D:\ -1\le x\le 2,\ 0\le y\le 3,\ 2\le z\le 3$.

8. $\iiint\limits_D y\sqrt{x^2+y^2}dxdydz,\ D:\ z^2=4(x^2+y^2),\ y\ge x,\ y\ge -x,\ z=2,\ z\ge 0$.

9. $z=4-y^2$, $x^2+y^2=4$, $z\geq 0$.

10. $\int\limits_L (x^2+y^2)dx+2xydy$, $L$: дуга $y=x^3$ від (0, 0) до (1, 1).

11. $\int\limits_L \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dl$, $L$: дуга кривої $\rho=2(1+\cos\varphi)$, $\varphi\in[0,\pi/2]$.

12. $\oint\limits_L (1-x^2)ydx+x(1+y^2)dy$, $L$: коло $x^2+y^2=9$, яке пробігається за ходом годинникової стрілки.

13. $\iint\limits_S (z+1)dxdy$, $S$ – зовнішня сторона поверхні $x^2+y^2+z^2=16$.

14. $\overline{A}=30x\overline{i}+(y+z)\overline{j}+6(x-z)\overline{k}$, $S:\ -6x+3y+z=-30$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

15. $\overline{A}=12x\overline{i}+(y+z)\overline{j}+(7x-z)\overline{k}$, $x+3y+z=3$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

## ВАРІАНТ 3

1. $\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^y f(x,y)dx+\int\limits_1^{\sqrt{2}} dy\int\limits_0^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx$.    2. $D:\ x=\sqrt{8-y^2}$, $y=x$, $y\geq 0$.

3. $\iint\limits_D (x+y)dxdy$, $D:\ y^2=x$, $x=y^2$.    4. $\int\limits_0^R dx\int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{\operatorname{tg}\sqrt{x^2+y^2}}{-\sqrt{x^2+y^2}}dy$.

5. $z=x$, $y=4$, $x=\sqrt{25-y^2}$, $x\geq 0$, $y\geq 0$, $z\geq 0$.    6. $\rho=a\cos^2\varphi$.

7. $\iiint\limits_D (x+y+4z^2)dxdydz$, $D:\ -1\leq x\leq 1$, $0\leq y\leq 2$, $-1\leq z\leq 1$.

8. $\iiint\limits_D z^2dxdydz$, $D:\ 1\leq x^2+y^2\leq 36$, $x\geq 0$, $y\geq 0$, $z\geq 0$.

9. $z=2-x-y$, $x^2+y^2=1$, $z\geq 0$.

10. $\int\limits_L (x^2-y^2)dx+xydy$, $L$: відрізок прямої від (1, 1) до (3, 4).

11. $\int\limits_L ydl$, $L$: дуга кривої $\begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{cases}$, між точками (1, 0) і (0, 1).

12. $\oint\limits_L (-x^2y)ydx+xy^2dy$, $L$: коло $x^2+y^2=4$, яке пробігається проти ходу годинникової стрілки.

13. $\iint\limits_S xdydz+ydxdz+zdxdy$, $S$ – зовнішня сторона поверхні $x^2+y^2+z^2=16$.

14. $\overline{A}=12x\overline{i}+(y+z)\overline{j}+(7x-z)\overline{k}$, $S:\ x+3y+z=-1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

15. $\overline{A}=3x\overline{i}-4(y+z)\overline{j}+(x-z)\overline{k}$, $x+3y+z=3$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

## ВАРІАНТ 4

1. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{\sqrt{2-y}} f(x,y)dx$.
2. $D:\ y = \ln x,\ 0 \le y \le 1,\ x \ge 0$.
3. $\iint\limits_D x^2 y dxdy,\ D:\ y = 2 - x,\ x = y,\ x \ge 0$.
4. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \ln(1 + x^2 + y^2)dy$.
5. $z = 2x^2 + y^2,\ x + y = 4,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0$.
6. $\rho^2 = a^2(1 + \sin^2 \varphi)$.
7. $\iiint\limits_D (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz,\ D:\ 0 \le x \le 3,\ -1 \le y \le 2,\ 0 \le z \le 2$.
8. $\iiint\limits_D ydxdydz,\ D:\ x^2 + y^2 + z^2 = 32,\ y^2 = x^2 + z^2,\ y \ge 0$.
9. $z = y^2,\ x + y = 2,\ x \ge 0,\ z \ge 0$.
10. $\int\limits_L \cos ydx - \sin xdy$, $L$: відрізок прямої від ($2\pi$, -$2\pi$) до (-$2\pi$,$2\pi$).
11. $\int\limits_L (x^2 + y^2 + z^2)dl$, $L$: дуга кривої $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = \sqrt{3}t \end{cases}$, $t \in [0, 2\pi]$.
12. $\oint\limits_L (-x^2 y)ydx + xy^2 dy$, $L$: коло $x^2 + y^2 = 9$, яке пробігається за ходом годинникової стрілки.
13. $\iint\limits_S xdydz + ydxdz + zdxdy$, $S$ – зовнішня сторона поверхні $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
14. $\overline{A} = 3x\overline{i} - 4(y + z)\overline{j} + (x - z)\overline{k}$, $S:\ x + 3y + z = 30, x = 0,\ y = 0,\ z = 0$.
15. $\overline{A} = 3x\overline{i} + (y + z)\overline{j} - 4(x - z)\overline{k}$, $x + 3y + z = -3, x = 0,\ y = 0,\ z = 0$.

## ВАРІАНТ 5

1. $\int\limits_0^{1/\sqrt{2}} dy \int\limits_0^{\arcsin y} f(x,y)dx + \int\limits_{1/\sqrt{2}}^1 dy \int\limits_0^{\arccos y} f(x,y)dx$.
2. $D:\ x^2 = 2 - y,\ y + x = 0$.
3. $\iint\limits_D (x^3 - 2y)dxdy,\ D:\ y = x^2 - 1,\ x \ge 0,\ y \le 0$.
4. $\int\limits_{-2}^2 dy \int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \sqrt{1 - x^2 - y^2}dx$.
5. $z = 4 - x^2,\ x^2 + y^2 = 4,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0$.
6. $\rho = a\sin 2\varphi$.
7. $\iiint\limits_D x^2 y^2 zdxdydz,\ D:\ -1 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 2,\ -2 \le z \le 5$.
8. $\iiint\limits_D xdxdydz,\ D:\ x^2 + y^2 + z^2 = 8,\ x^2 = y^2 + z^2,\ x \ge 0$.
9. $x = \sqrt{9 - y^2},\ x = \sqrt{25 - y^2},\ x = z,\ y \ge 0,\ z \ge 0$.

10. $\int\limits_L xydx+(y-x)dy$, $L$: дуга параболи $y=x^3$ від (0, 0) до (1, 1).

11. $\int\limits_L arctg\dfrac{y}{x}dl$, $L$: дуга кривої $\rho=1+\cos\varphi$, $\varphi\in[0,\pi/2]$.

12. $\oint\limits_L(-x^2y)ydx+xy^2dy$, $L$: коло $x^2+y^2=25$, яке пробігається проти ходу годинникової стрілки.

13. $\iint\limits_S(x^2+y^2)zdxdy$, $S$ – зовнішня сторона сфери $x^2+y^2+z^2=9$.

14. $\overline{A}=3x\overline{i}+(y+z)\overline{j}-4(x-z)\overline{k}$, $S$: $x+3y+z=-3$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

15. $\overline{A}=2x\overline{i}+(y+z)\overline{j}+(3x-z)\overline{k}$, $x+3y+z=3$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

## ВАРІАНТ 6

1. $\int\limits_{-2}^{-1}dy\int\limits_0^{\sqrt{2+y}}f(x,y)dx+\int\limits_{-1}^{0}dy\int\limits_0^{\sqrt{-y}}f(x,y)dx$.

2. $D$: $y=\sqrt{2-x^2}$, $y=x^2$.

3. $\iint\limits_D(y-x)dxdy$, $D$: $y=x$, $x^2=y$.

4. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}dx\int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{0}\dfrac{xy}{x^2+y^2}dy$.

5. $2x+3y-12=0$, $2z=y^2$, $x\ge0$, $y\ge0$, $z\ge0$.

6. $\rho=a\cos5\varphi$.

7. $\iiint\limits_D(x+y+z)dxdydz$, $D$: $0\le x\le1$, $-1\le y\le0$, $1\le z\le2$.

8. $\iiint\limits_D ydxdydz$, $D$: $4\le x^2+y^2+z^2\le16$, $y\le\sqrt{3}x$, $y\ge0$, $z\ge0$.

9. $z=4-x-y$, $x^2+y^2=4$, $z\ge0$.

10. $\int\limits_L xydx+(y-x)dy$, $L$: дуга параболи $y^2=x$ від (0, 0) до (1, 1).

11. $\int\limits_L\sqrt{2y}dl$, $L$: перша арка циклоїди $\begin{cases}x=2(t-\sin t)\\ y=2(1-\cos t)\end{cases}$.

12. $\oint\limits_L(-x^2y)ydx+xy^2dy$, $L$: коло $x^2+y^2=1$, яке пробігається проти ходу годинникової стрілки.

13. $\iint\limits_S(x+y)dydz+3ydxdz+4zdxdy$, $S$ – зовнішня сторона $x^2+y^2+z^2=1$.

14. $\overline{A}=2x\overline{i}+(y+z)\overline{j}+(3x-z)\overline{k}$, $S$: $-2x+3y+z=6$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

15. $\overline{A}=3x\overline{i}+(3y+z)\overline{j}+(x-5z)\overline{k}$, $x+3y+z=3$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

## ВАРІАНТ 7

1. $\int\limits_0^1dy\int\limits_{-\sqrt{y}}^{0}f(x,y)dx+\int\limits_1^e dy\int\limits_{-1}^{-\ln y}f(x,y)dx$.

2. $D$: $y=x^2-2$, $y=x$.

3. $\iint\limits_D (1+y)dxdy$, $D$: $5y = x$, $x = y^2$.

4. $\int\limits_{-R}^{0} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}} \cos\sqrt{x^2+y^2}\,dy$.

5. $z = 10 + x^2 + 2y^2$, $x = y$, $x = 1$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

6. $\rho = 4(1+\cos\varphi)$.

7. $\iiint\limits_D (2x - y^2 - z)dxdydz$, $D$: $1 \le x \le 5$, $0 \le y \le 2$, $-1 \le z \le 0$.

8. $\iiint\limits_D ydxdydz$, $D$: $z = \sqrt{8 - x^2 - y^2}$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $y \ge 0$.

9. $z = x^2$, $x - 2y + 2 = 0$, $x + y = 7$, $z \ge 0$.

10. $\int\limits_L (xy-1)dx + x^2 ydy$, $L$: дуга параболи $y^2 = 4 - 4x$ від (1, 0) до (0, 2).

11. $\int\limits_L \left(x^2 + y^2\right)dl$, $L$: коло $x^2 + y^2 = 4$.

12. $\oint\limits_L (-x^2 y)\,ydx + xy^2 dy$, $L$: еліпс $x^2 + 4y^2 = 1$, який пробігається проти ходу годинникової стрілки.

13. $\iint\limits_S 4xdydz + 2ydxdz - zdxdy$, $S$ – зовнішня сторона поверхні $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

14. $\overline{A} = 3x\overline{i} + (3y+z)\overline{j} + (x - 5z)\overline{k}$, $S$: $-3x + 3y + z = 9$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

15. $\overline{A} = -3x\overline{i} + (y+z)\overline{j} + (x - z)\overline{k}$, $x + 3y + z = 3$ ,$x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

## ВАРІАНТ 8

1. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{2-y} f(x,y)dx$.

2. $D$: $y = x$, $1 \le y \le 3$, $x \ge 0$.

3. $\iint\limits_D (x+y)dxdy$, $D$: $y = x^2 - 1$, $y = -x^2 + 1$.

4. $\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}} tg(x^2 + y^2)dy$.

5. $z = x^2$, $x + y = 6$, $y = 2x$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

6. $\rho = a\sin^2 4\varphi$.

7. $\iiint\limits_D 2xy^2 zdxdydz$, $D$: $0 \le x \le 3$, $-2 \le y \le 0$, $1 \le z \le 2$.

8. $\iiint\limits_D \dfrac{y^2 dxdydz}{x^2 + y^2 + z^2}$, $D$: $4 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 36$, $x \ge 0$, $y \ge \sqrt{3}x$, $z \ge 0$.

9. $z = y$, $x = 4$, $y = \sqrt{25 - x^2}$, $x \ge 0$, $z \ge 0$.

10. $\int\limits_L xydx + (y - x)dy$, $L$: дуга параболи $y = x^2$ від (0, 0) до (1, 1).

11. $\int\limits_L \dfrac{z^2}{x^2 + y^2}dl$, $L$: перший виток гвинтової лінії $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \\ z = 2t \end{cases}$.

12. $\oint\limits_L (-x^2 y)dx + xy^2 dy$, $L$: еліпс $9x^2 + 4y^2 = 1$, який пробігається проти ходу годинникової стрілки.

13. $\iint\limits_S z^2 dxdy$, $S$ – зовнішня сторона поверхні $x^2 + y^2 + 2z^2 = 2$.

14. $\overline{A} = -3x\overline{i} + (y+z)\overline{j} + (x-z)\overline{k}$, $S$: $x + 5y + z = 5$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

15. $\overline{A} = 3x\overline{i} + (y+z)\overline{j} + (x-6z)\overline{k}$, $x + 3y - 6z = 3$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

## ВАРІАНТ 9

1. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int\limits_1^e dy \int\limits_{\ln y}^1 f(x,y)dx$.

2. $D$: $y^2 = 2x$, $x^2 = 2y$, $x \le 1$.

3. $\iint\limits_D x(y-1)dxdy$, $D$: $y = 5x$, $x = y$, $x = 3$.

4. $\int\limits_0^R dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \cos(x^2 + y^2)dy$.

5. $z = 3x^2 + 2y^2 + 1$, $y = x^2 - 1$, $y = 1$, $z \ge 0$.

6. $\rho = a\sin^2 3\varphi$.

7. $\iiint\limits_D 5xyz^2 dxdydz$, $D$: $-1 \le x \le 0$, $2 \le y \le 3$, $1 \le z \le 2$.

8. $\iiint\limits_D \frac{y^2 z dxdydz}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$, $D$: $z = 3(x^2 + y^2)$, $y \le \sqrt{3}x$, $y \ge 0$, $z = 3$.

9. $2x - y = 0$, $x + y = 9$, $z = x^2$, $z \ge 0$, $y \ge 0$.

10. $\int\limits_L (xy - y^2)dx + xdy$, $L$: дуга параболи $y = x^2$ від (0, 0) до (1, 1).

11. $\int\limits_L \frac{dl}{\sqrt{8 - x^2 - y^2}}$, $L$: відрізок прямої від (0, 0) до (2, 2).

12. $\oint\limits_L (2 - x^2 y)ydx + 3xy^2 dy$, $L$: еліпс $x^2 + 4y^2 = 1$, який пробігається проти ходу годинникової стрілки.

13. $\iint\limits_S 3z^2 dxdy$, $S$ – зовнішня сторона поверхні $x^2 + y^2 + 2z^2 = 4$.

14. $\overline{A} = 3x\overline{i} + (y+z)\overline{j} + (x-6z)\overline{k}$, $S$: $x + 3y - 6z = 3$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

15. $\overline{A} = 3x\overline{i} - (y+z)\overline{j} + (x-z)\overline{k}$, $x - y + z = 3$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

## ВАРІАНТ 10

1. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^0 f(x,y)dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_{-\sqrt{2-y}}^0 f(x,y)dx$.

2. $D$: $y = \sqrt{9 - x^2}$, $y \ge x$, $x \ge 0$.

3. $\iint\limits_D (x-2)ydxdy$, $D$: $y = x$, $y = \frac{1}{2}x$, $x = 2$.

4. $\int\limits_{-R}^R dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sin\sqrt{x^2 + y^2}dy$.

5. $z = 2x^2 + y^2$, $x + y = 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$. 6. $\rho = a\sin 3\varphi$.

7. $\iiint\limits_D (x^2 + 2y^2 - z)dxdydz$, $D$: $0 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 2$, $0 \le z \le 4$.

8. $\iiint\limits_D \frac{x^2 dxdydz}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}$, $D$: $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $z \ge 0$.

9. $x = 4$, $y = 2x$, $z = x^2$, $z \ge 0$, $y \ge 0$.

10. $\int\limits_L (xy - x)dx + 0{,}5x^2 dy$, $L$: дуга параболи $y^2 = 4x$ від (0, 0) до (1, 2).

11. $\int\limits_L (4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt[3]{y})dl$, $L$: відрізок прямої від (-1, 0) до (0, 1).

12. $\oint\limits_L (-x^2 y)\,ydx + 4xy^2 dy$, $L$: еліпс $x^2 + 4y^2 = 1$, який пробігається за ходом годинникової стрілки.

13. $\iint\limits_S 4xdydz + 2ydxdz + 4zdxdy$, $S$ – зовнішня сторона сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

14. $\overline{A} = 3x\overline{i} - (y + z)\overline{j} + (x - z)\overline{k}$, $S$: $x - y + z = 3$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

15. $\overline{A} = 3x\overline{i} + (2y + z)\overline{j} + (x - z)\overline{k}$, $x - 3y + z = 9$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

## ВАРІАНТ 11

1. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-y}^0 f(x, y)dx + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^0 f(x, y)dx$. 2. $D$: $y^2 = 2 - x$, $y = x$.

3. $\iint\limits_D (x - y^2)dxdy$, $D$: $y = x^2$, $y = 1$. 4. $\int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dx \int\limits_0^{\sqrt{3-x^2}} \sqrt{1 + x^2 + y^2}\,dy$.

5. $y = 2x$, $x + y + z = 2$, $x \ge 0$, $z \ge 0$. 6. $\rho = a\sin 4\varphi$.

7. $\iiint\limits_D (x + 2yz)dxdydz$, $D$: $-2 \le x \le 0$, $-1 \le y \le 2$, $0 \le z \le 2$.

8. $\iiint\limits_D \frac{xzdxdydz}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $D$: $z = 2(x^2 + y^2)$, $y \le \frac{1}{\sqrt{3}}x$, $y \ge 0$, $z = 18$.

9. $y = 2x$, $y = 3$, $z = \sqrt{y}$, $x \ge 0$, $z \ge 0$.

10. $\int\limits_L (xy - 1)dx + x^2 ydy$, $L$: відрізок прямої від (1, 0) до (0, 2).

11. $\int\limits_L y^2 dl$, $L$: перша арка циклоїди $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$.

12. $\oint\limits_L (4 - x^2 y)\,ydx + (x + y^2)dy$, $L$: еліпс $25x^2 + 4y^2 = 1$, який пробігається проти ходу годинникової стрілки.

13. $\iint\limits_S ydxdz$, $S$ – зовнішня сторона поверхні $x^2+y^2+2z^2=2$.

14. $\overline{A}=3x\overline{i}+(2y+z)\overline{j}+(x-z)\overline{k}$, $S$: $x-3y+z=9$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

15. $\overline{A}=8x\overline{i}+(y+z)\overline{j}+(x-z)\overline{k}$, $x+3y-z=3$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

## ВАРІАНТ 12

1. $\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^{y^3} f(x,y)dx+\int\limits_1^2 dy\int\limits_0^{2-y} f(x,y)dx$. 2. $D$: $x=\sqrt{2-y^2}$, $x=y^2$, $y\ge 0$.

3. $\iint\limits_D x^2 ydxdy$, $D$: $y=2x^3$, $y=0$, $x=1$. 4. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx\int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}}(1+x^2+y^2)dy$.

5. $z=x^2$, $x-2y+2=0$, $x+y-7=0$, $z\ge 0$. 6. $\rho=a\sin 5\varphi$.

7. $\iiint\limits_D (x^2+yz)dxdydz$, $D$: $2\le x\le 3$, $0\le y\le 2$, $0\le z\le 4$.

8. $\iiint\limits_D \dfrac{xydxdydz}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$, $D$: $z=x^2+y^2$, $x\ge y$, $y\ge 0$, $z=4$.

9. $x=3$, $y=2x$, $z=y^2$, $y\ge 0$, $z\ge 0$.

10. $\int\limits_L \dfrac{y}{x}dx+xdy$, $L$: дуга лінії $y=\ln x$ від (1, 0) до ($e$, 1).

11. $\int\limits_L (x^2+y^2)^2 dl$, $L$: перша чверть кола $\rho=2$.

12. $\oint\limits_L (4-x^2y)ydx+(x+y^2)dy$, $L$: еліпс $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$, який пробігається проти ходу годинникової стрілки.

13. $\iint\limits_S xdydz+ydxdz-zdxdy$, $S$ – зовнішня сторона поверхні $x^2+y^2+4z^2=4$.

14. $\overline{A}=8x\overline{i}+(y+z)\overline{j}+(x-z)\overline{k}$, $S$: $x+3y-z=3$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

15. $\overline{A}=3x\overline{i}+2(y+z)\overline{j}+(x+z)\overline{k}$, $3x+3y+z=3$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

## ВАРІАНТ 13

1. $\int\limits_{-2}^{-1} dy\int\limits_{-(2+y)}^{0} f(x,y)dx+\int\limits_{-1}^{0} dy\int\limits_{\sqrt[3]{y}}^{0} f(x,y)dx$. 2. $D$: $x+2y-12=0$, $y=\lg x$, $y\ge 0$.

3. $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$, $D$: $x=1$, $x=y^2$. 4. $\int\limits_0^2 dx\int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\dfrac{dy}{1+x^2+y^2}$.

5. $y=1-z^2$, $x=y$, $y=-x$, $y\ge 0$, $z\ge 0$.

6. $\rho=2a(2+\cos\varphi)$.

7. $\iiint\limits_D (2x^2+3yz)dxdydz$, $D:\ 0\le x\le 1,\ -1\le y\le 2,\ 0\le z\le 4$.

8. $\iiint\limits_D \frac{zdxdydz}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $D:\ 4y=x^2+y^2,\ y+z=4,\ z\ge 0$.

9. $y^2=2-x$, $z=3x$, $z\ge 0$.

10. $\int\limits_L 2xydx-x^2dy$, $L$: дуга параболи $y=0{,}25x^2$ від (0, 0) до (2, 1).

11. $\int\limits_L (x^2+y^2+z^2)dl$, $L$: перший виток гвинтової лінії $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \\ z=2t \end{cases}$.

12. $\oint\limits_L (4-x^2+y)ydx+(x+5y^2)dy$, $L$: еліпс $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$, який пробігається проти ходу годинникової стрілки.

13. $\iint\limits_S zdxdy$, $S$ – зовнішня сторона поверхні $x^2+2y^2+2z^2=4$.

14. $\bar{A}=3x\bar{i}+2(y+z)\bar{j}+(x+z)\bar{k}$, $S:\ 3x+3y+z=3,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.

15. $\bar{A}=3x\bar{i}+(y-2z)\bar{j}+(x-z)\bar{k}$, $x+3y+z=6,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.

## ВАРІАНТ 14

1. $\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^y f(x,y)dx+\int\limits_1^e dy\int\limits_{\ln y}^1 f(x,y)dx$.

2. $D:\ y=-x,\ 1\le y\le 3,\ x\le 0$.

3. $\iint\limits_D xydxdy$, $D:\ y=x^3,\ y=0,\ x\le 2$.

4. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}}\frac{dy}{1+\sqrt{x^2+y^2}}$.

5. $z=2-x^2-y^2$, $x^2+y^2=1$, $z\ge 0$.

6. $\rho=a\cos 2\varphi$.

7. $\iiint\limits_D (2xy+3z)dxdydz$, $D:\ 2\le x\le 3,\ -1\le y\le 2,\ 3\le z\le 4$.

8. $\iiint\limits_D \frac{ydxdydz}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $D:\ 2x=x^2+y^2,\ x+z=2,\ y\ge 0,\ z\ge 0$.

9. $y=\sqrt{9-x^2}$, $z=2y$, $z\ge 0$.

10. $\int\limits_L (x^2-2xy)dx+(y^2+2xy)dy$, $L$: дуга параболи $y=x^2$ від (-1, 1) до (1, 1).

11. $\int\limits_L \frac{dl}{\sqrt{5}(x-y)}$, $L$: відрізок прямої від (0, 4) до (4, 0).

12. $\oint\limits_L (-x^2+5y)ydx+(x-y^2)dy$, $L$: еліпс $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$, який пробігається проти ходу годинникової стрілки.

13. $\iint\limits_S 4xdydz+ydxdz+6zdxdy$, $S$ – зовнішня сторона поверхні $x^2+y^2+z^2=9$.

14. $\overline{A}=3x\overline{i}+(y-2z)\overline{j}+(x-z)\overline{k}$, $S$: $x+3y+z=6$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

15. $\overline{A}=(3x+1)\overline{i}+(y+z)\overline{j}+(x-z)\overline{k}$, $x+3y+3z=3$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

## ВАРІАНТ 15

1. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1}dy\int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{0}f(x,y)dx+\int\limits_{-1}^{0}dy\int\limits_{y}^{0}f(x,y)dx$. 2. $D$: $y=-\sqrt{2-x^2}$, $y\geq x$, $y=0$.

3. $\iint\limits_D y(1-x)dxdy$, $D$: $y=x$, $x=y^3$. 4. $\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}dy$.

5. $z=y^2$, $x+y=1$, $x\geq 0$, $z\geq 0$. 6. $\rho=a\cos 4\varphi$.

7. $\iiint\limits_D (2x^2-3yz)dxdydz$, $D$: $0\leq x\leq 3$, $-1\leq y\leq 2$, $0\leq z\leq 4$.

8. $\iiint\limits_D \frac{xdxdydz}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $D$: $16y=x^2+y^2$, $y+z=16$, $z\geq 0$, $x\geq 0$.

9. $x+y=2$, $z=x^2+y^2$, $x\geq 0$, $y\geq 0$, $z\geq 0$.

10. $\int\limits_L (x^2-2xy)dx+xydy$, $L$: дуга параболи $y=x^2$ від (-1, 1) до (1, 1).

11. $\int\limits_L ydl$, $L$: дуга параболи $y^2=\frac{2}{3}x$ від (0, 0) до $\left(\frac{35}{6},\frac{\sqrt{35}}{3}\right)$.

12. $\oint\limits_L (4-x^2y)ydx+(x-6y^2)xdy$, $L$: еліпс $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{36}=1$, який пробігається проти ходу годинникової стрілки.

13. $\iint\limits_S 4xdydz-3ydxdz+5zdxdy$, $S$ – зовнішня сторона сфери $x^2+y^2+z^2=16$.

7. $\overline{A}=(3x+1)\overline{i}+(y+z)\overline{j}+(x-z)\overline{k}$, $S$: $x+3y+3z=3$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

8. $\overline{A}=3x\overline{i}+(y+z)\overline{j}+(x-z)\overline{k}$, $x+3y+z=3$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

## РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА


### Основна

1. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. Москва : Физматлит, 2003. Т. 1. 680 с.
2. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. Москва : Наука, 1966. Т. 2. 800 с.
3. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3-х т. Москва : Наука, 1966. Т. 3. 656 с.
4. Виноградова И. А., Олехник С. Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу. Москва : Факториал, 1996. 477 с.
5. Математичний аналіз: збірник завдань до самостійної роботи для студентів освітнього рівня «бакалавр» напрямів підготовки «Прикладна математика», «Математика» / Д’яченко Н. М., Красікова І. В., Тітова О.О., Стреляєв Ю.М. Запоріжжя : ЗНУ, 2015. 76 с.
6. Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної: Частина І: навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів / С. М. Гребенюк та ін. Запоріжжя : ЗНУ, 2012. 232 с.
7. Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної: Частина ІІ: навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів / С. М. Гребенюк та ін. Запоріжжя : ЗНУ, 2012. 495 с.
8. Гребенюк С. М., Тітова О. О. Математичний аналіз: інтегральне числення функції багатьох змінних: практикум для студентів освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр» напрямів підготовки «Інформатика», «Прикладна математика», «Програмна інженерія». Запоріжжя : ЗНУ, 2014. 65 с.
9. Гребенюк С. М., Тітова О. О. Математичний аналіз: диференціальне числення функцій багатьох змінних : практикум для студентів освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр» напрямів підготовки «Інформатика», «Прикладна математика», «Програмна інженерія». Запоріжжя : ЗНУ, 2014. 68 с.

### Додаткова

1. Математический анализ: Введение в анализ, производная, интеграл. Справочное пособие по математическому анализу: в 5 т. / И. И. Ляшко и др. Москва : Едиториал УРСС, 2001. Т.1. 360 с.
2. Давидов М.О. Курс математичного аналізу: в 3 ч. Київ : Вища шк., 1990. Ч. 1. 380 с.
3. Давидов М.О. Курс математичного аналізу: в 3 ч. Київ : Вища шк., 1991. Ч. 2. 365 с.
4. Математический анализ: учебник для студ. вузов, обучающихся по спец. "Математика", "Прикладная математика" и "Информатика": в 2 ч. / В. А. Ильин и др. Москва : Издательство Проспект, 2007. Ч. 1. 660 с.
5. Шунда Н.М., Томусяк А.А. Практикум з математичного аналізу. Диференціальне числення. Київ : Вища шк., 1993. 375 с.

# СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ


1. Гребенюк С. М., Тітова О. О. Вища математика: практикум для студентів освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр» напряму підготовки «Економічна кібернетика». Запоріжжя : ЗНУ, 2016. 99 с.
2. Гребенюк С. М., Тітова О. О. Математичний аналіз: диференціальне числення функцій багатьох змінних: практикум для студентів освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр» напрямів підготовки «Інформатика», «Прикладна математика», «Програмна інженерія». Запоріжжя : ЗНУ, 2014. 68 с.
3. Гребенюк С. М., Тітова О. О. Математичний аналіз: інтегральне числення функції багатьох змінних: практикум для студентів освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр» напрямів підготовки «Інформатика», «Прикладна математика», «Програмна інженерія». Запоріжжя : ЗНУ, 2014. 65 с.
4. Д’яченко Н. М., Савранська А. В. Практикум і індивідуальні завдання з математичного аналізу. Вступ до теорії множин. Принцип математичної індукції. Для студентів 1 курсу математичного факультету денної і заочної форми навчання. Запоріжжя : ЗДУ, 2003. 44 с.
5. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. Москва : Наука, 1990. 624 с.
6. Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної: Частина І: навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів / С. М. Гребенюк та ін. Запоріжжя : ЗНУ, 2012. 232 с.
7. Киричевський В. В., Тітова О. О. Неозначений та означений інтеграл, їх застосування: навчально-методичний посібник для студентів спеціальності 7.080202 «Прикладна математика». Запоріжжя : ЗНУ, 2005. 49 с.
8. Толок В. О., Киричевський В. В., Тітова О. О. Математичний аналіз для економістів: навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів. Запоріжжя : ЗНУ, 2008. 300 с.

# ДОДАТОК А. ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦІЙ

## *Таблиця похідних елементарних функцій*

Кожна з наступних формул вірна на проміжках, які належать області визначення відповідних функцій.

1. $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$,

2. $C' = 0$, $\left(x^2\right)' = 2x$, $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $\left(\dfrac{1}{x^n}\right)' = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$,

3. $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$,

4. $\left(e^x\right)' = e^x$,

5. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$,

6. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$,

7. $(\sin x)' = \cos x$,

8. $(\cos x)' = -\sin x$,

9. $(\mathrm{ctg}\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$,

10. $(\mathrm{tg}\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$,

11. $(\mathrm{sh}\, x)' = \mathrm{ch}\, x$,

12. $(\mathrm{ch}\, x)' = \mathrm{sh}\, x$,

13. $(\mathrm{th}\, x)' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$,

14. $(\mathrm{cth}\, x)' = \dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$,

15. $(\mathrm{arctg}\, x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$,

16. $(\mathrm{arcctg}\, x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$,

17. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

18. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

## *Основні правила диференціювання*

1. Число можна виносити за знак похідної:

$$(cf(x))' = cf'(x).$$

2. Похідна суми чи різниці дорівнює сумі чи різниці похідних:

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x).$$

3. Похідна добутку:

$$(u(x)v(x))' = u(x)v'(x) + v(x)u'(x).$$

4. Похідна частки:

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v^2(x)}.$$

## ДОДАТОК Б. ТАБЛИЦЯ ОСНОВНИХ ІНТЕГРАЛІВ

Кожна з наступних формул вірна на проміжках, які належать області визначення підінтегральної функції:

1. $\int du = u + C.$ 2. $\int u^{\alpha} du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1.$ 3. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C.$

4. $\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C,\ a > 0,\ a \neq 1.$ 5. $\int e^u dx = e^u + C.$

6. $\int \sin u du = -\cos u + C.$ 7. $\int \cos u du = \sin u + C.$ 8. $\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = tgu + C.$

9. $\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -ctgu + C.$ 10. $\int \mathrm{ch}\, u du = \mathrm{sh}\, u + C.$ 11. $\int \mathrm{sh}\, u du = \mathrm{ch}\, u + C.$

12. $\int \dfrac{du}{\mathrm{ch}^2 u} = \mathrm{th}\, u + C.$ 13. $\int \dfrac{du}{\mathrm{sh}^2 u} = -\mathrm{cth}\, u + C.$

14. $\int \dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \begin{cases} \arcsin u + C \\ -\arccos u + C. \end{cases}$ 15. $\int \dfrac{du}{1+u^2} = \begin{cases} \mathrm{arctg}\, u + C \\ -\mathrm{arcctg}\, u + C. \end{cases}$

16. $\int \dfrac{du}{u^2 + a^2} = \dfrac{1}{a}\mathrm{arctg}\dfrac{u}{a} + C,\ a \neq 0.$ 17. $\int \dfrac{du}{u^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{u-a}{u+a}\right| + C,\ a \neq 0.$

18. $\int \dfrac{udu}{a^2 \pm u^2} = \pm\dfrac{1}{2}\ln\left|a^2 \pm u^2\right| + C.$ 19. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\dfrac{u}{|a|} + C.$

20. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C.$ 21. $\int \dfrac{udu}{\sqrt{a^2 \pm u^2}} = \pm\sqrt{a^2 \pm u^2} + C.$

22. $\int \sqrt{a^2 - u^2} du = \dfrac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{u}{a} + C,\ a > 0.$

23. $\int \sqrt{u^2 \pm a^2} du = \dfrac{u}{2}\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \dfrac{a^2}{2}\ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C.$

24. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 \pm 1}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm 1}\right| + C.$ 25. $\int \dfrac{du}{1-u^2} = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+u}{1-u}\right| + C.$

### *Властивості невизначеного інтегралу (правила інтегрування)*

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$ 2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$

3. $\int dF(x) = F(x) + C.$ 4. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx,\ a = const, a \neq 0.$

5. $\int [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx.$ 6. $\int f(ax+b) = \dfrac{1}{a}F(ax+b) + C.$

7. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$ і $u = \varphi(x)$, то $\int f(u)du = F(u) + C.$

**Навчальне видання**
*(українською мовою)*

Тітова Ольга Олександрівна

Гребенюк Сергій Миколайович

# МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

Практикум
для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра
спеціальності “Середня освіта”
предметних спеціальностей : 014.04 – середня освіта (математика),
014.08 – середня освіта (фізика), 014.09 – середня освіта (інформатика)
освітньо-професійних програм : «Середня освіта (математика)»,
«Середня освіта (фізика)», «Середня освіта (інформатика)»

Рецензент *М.І. Клименко*
Відповідальний за випуск *С.М. Гребенюк*
Коректор *О.О. Тітова*