Державний вищий навчальний заклад
„Запорізький національний університет”
Міністерства освіти і науки України

В.В. Киричевський, О.О. Тітова

НЕОЗНАЧЕНИЙ ТА ОЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ, ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

Навчально-методичний посібник
для студентів спеціальностей
6.080202 „Прикладна математика”
6.080201 „Інформатика”

Затверджено
вченою радою ЗНУ
Протокол № 3 від 28.11.06

Запоріжжя
2006

УДК 517.31/38 (075.8)
ББК В162я73

Киричевський В.В., Тітова О.О. Неозначений та означений інтеграл, їх застосування: Навчально-методичний посібник для студентів спеціальностей 6.080202 „Прикладна математика”, 6.080201 „Інформатика”. – Запоріжжя: ЗНУ, 2006. – 63с.

Посібник розраховано на студентів І і ІІ курсу денної та заочної форм навчання спеціальностей 6.080202 „Прикладна математика”, 6.080201 „Інформатика”. Теоретичний матеріал ілюструється численними прикладами і задачами. Наведено тексти типових завдань. Задачі і методи їх розв’язання систематизовано.

Рецензент *Дьяченко Н.М., к.ф.-м.н., доцент*

Відповідальний
за випуск *Тітова О.О., к.т.н., доцент*

З М І С Т

1. Неозначений інтеграл………………………………………………………. 4
   1.1. Основні поняття…………………………………………………… 4
   1.2. Заміна змінної при інтегруванні………………………………. 6
   1.3. Інтегрування по частинам……………………………………… 8
   1.4. Інтегрування раціональних дробів……………………………. 9
   1.5. Інтегрування ірраціональних функцій………………………… 12
   1.6. Інтегрування трансцендентних функцій………………………. 17
   1.7. Типові завдання....…………………………………………………… 21
2. Означений інтеграл…………………………………………………………. 26
   2.1. Означений інтеграл як границя суми………………………….. 26
   2.2. Формула заміни змінної…………………………………………... 30
   2.3. Інтегрування по частинам……………………………………… 31
   2.4. Обчислення площ плоских фігур……………………………..... 32
   2.5. Обчислення довжин кривих……………………………………. 34
   2.6. Обчислення об’ємів тіл………………………………………… 36
   2.7. Обчислення площ поверхонь……………………………………. 38
   2.8. Застосування означених інтегралів до питань механіки, фізики, техніки……………………………………………………….. 40
   2.9. Типові завдання....…………………………………………………… 42
Список літератури……………………………………………………………….. 48

1. НЕОЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

1.1. Основні поняття

1.1.1. Первісна та неозначений інтеграл

Функцію $F(x)$ називають первісною функції $f(x)$ на деякому проміжку, якщо $F(x)$ неперервна на цьому проміжку і має диференціал у кожній його внутрішній точці, причому $F'(x)=f(x)$. Сукупність усіх первісних $\{F(x)+C, C\in R\}$ функції називають неозначеним інтегралом функції $f(x)$ та пишуть $\int f(x)dx = F(x)+C.$

1.1.2. Властивості неозначеного інтегралу (правила інтегрування)

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.
2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$.
3. $\int dF(x) = F(x)+C$.
4. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx,\ \ a=const, a\neq 0$.
5. $\int [f_1(x)\pm f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$.
6. $\int f(ax+b) = \dfrac{1}{a}F(ax+b)+C.$
7. Якщо $\int f(x)dx = F(x)+C$ і $u=\varphi(x)$, то $\int f(u)du = F(u)+C.$ (1.1)

1.1.3. Таблиця основних інтегралів

Кожна з наступних формул вірна на проміжках, які належать області визначення підінтегральної функції:

1. $\int du = u + C.$
2. $\int u^{\alpha}dx = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\ \ \alpha\neq -1.$
3. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C$.
4. $\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a}+C,\ \ a>0, a\neq 1$.
5. $\int e^u dx = e^u + C.$
6. $\int \sin u du = -\cos u + C.$
7. $\int \cos u du = \sin u + C.$
8. $\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = tgu + C.$
9. $\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -ctgu + C.$
10. $\int chudu = shu + C.$
11. $\int shudu = chu + C.$
12. $\int \dfrac{du}{ch^2 u} = thu + C.$
13. $\int \dfrac{du}{sh^2 u} = -cthu + C.$
14. $\int \dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \begin{cases} \arcsin u + C \\ -\arccos u + C.\end{cases}$
15. $\int \dfrac{du}{1+u^2} = \begin{cases} arctgu + C \\ -arcctgu + C.\end{cases}$
16. $\int \dfrac{du}{u^2+a^2} = \dfrac{1}{a} arctg\dfrac{u}{a} + C,\ \ a\neq 0$
17. $\int \dfrac{du}{u^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{u-a}{u+a}\right| + C,\ \ a\neq 0$
18. $\int \dfrac{udu}{a^2\pm u^2} = \pm\dfrac{1}{2}\ln\left|a^2\pm u^2\right| + C.$

19. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{|a|} + C,\ \ a>0$ 20. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u+\sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C,\ \ a>0$

21. $\int \frac{udu}{\sqrt{a^2 \pm u^2}} = \pm\sqrt{a^2 \pm u^2} + C,\ \ a>0$ 22. $\int \sqrt{a^2-u^2}du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{u}{a} + C,\ a>0$

23. $\int \sqrt{u^2 \pm a^2}du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|u+\sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C,\ \ a>0$

24. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm 1}} = \ln\left|u+\sqrt{u^2 \pm 1}\right| + C.$ 25. $\int \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + C.$

1.1.4. Безпосереднє інтегрування

Так називають інтегрування з використанням таблиці основних інтегралів та властивостей неозначеного інтегралу. Наведемо приклади безпосереднього інтегрування.

1. $\int (3x^2-2x+4)dx = 3\int x^2dx - 2\int xdx + 4\int dx = 3\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2} + 4x + C = x^3 - x^2 + 4x + C$.

2. $\int \frac{x^2-6x+x\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}dx = \int (x^{\frac{1}{2}} - 6x^{-\frac{1}{2}} + 1)dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx - 6\int x^{-\frac{1}{2}}dx + \int dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 12x^{\frac{1}{2}} + x + C$.

3. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = tgx - ctgx + C$.

4. $\int \frac{dx}{3x^2+x^4} = -\frac{1}{3}\int \frac{x^2-(3+x^2)}{x^2(3+x^2)}dx = -\frac{1}{3}\int \frac{dx}{3+x^2} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{3\sqrt{3}}arctg\frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3x} + C$.

5. $\int th^2xdx = \int \frac{sh^2x}{ch^2x}dx = \int \frac{ch^2x-1}{ch^2x}dx = \int \left(1-\frac{1}{ch^2x}\right)dx = \int dx - \int \frac{dx}{ch^2x} = x - thx + C$.

6. $\int (3^x+5^x)^2dx = \int (3^{2x} + 2\cdot 15^x + 5^{2x})dx = \int 9^xdx + 2\int 15^xdx + \int 25^xdx = \frac{9^x}{\ln 9} + \frac{2\cdot 15^x}{\ln 15} + \frac{25^x}{\ln 25} + C$.

При інтегруванні зручно використовувати властивість інваріантності диференціалу; наведемо, наприклад, такі формули:

$d(x^n) = nx^{n-1}dx$, $d(\ln x) = \frac{dx}{x}$, $d(tgx) = \frac{dx}{\cos^2 x}$,

$d(\sin x) = \cos xdx$, $d(\cos x) = -\sin xdx$, $d(e^x) = e^xdx$,

$d(\arcsin x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $d(\arccos x) = \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $d(arctgx) = \frac{dx}{1+x^2}$

7. $\int e^{5x+1}d(5x+1) = e^{5x+1} + C$.

8. $\int e^{x^2}2xdx = \int e^{x^2}d(x^2) = e^{x^2} + C$.

9. $\int \cos^3 xdx = \int \cos^2 x\cos xdx = \int (1-\sin^2 x)d\sin x = \int d(\sin x) - \int \sin^2 xd(\sin x) = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$.

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}} = \int \frac{d(x-1)}{\sqrt{(x-1)^2+4}} = \ln(x-1+\sqrt{x^2-2x+5})+C$.

1.2. Заміна змінної при інтегруванні

Нехай на деякому проміжку визначена складна функція $f(\varphi(x))$ і функція $t=\varphi(x)$ неперервна на цьому проміжку. Тоді:

$$\int f(t)dt = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx \tag{1.2}$$

Формулу (1.2) називають формулою заміни змінної при інтегруванні.

1. $I=\int (x^2\sqrt{x^3+1})dx = \begin{vmatrix} x^3+1=t \\ 3x^2dx=dt \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\int t^{\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C = \frac{2}{9}(x^3+1)^{\frac{3}{2}}+C$.

Вибір конкретної заміни "підказується" властивістю інтегралу.

2. $I=\int \frac{\sin 2xdx}{\sqrt{25\sin^2 x+9\cos^2 x}} = \begin{vmatrix} 25\sin^2 x+9\cos^2 x=t \\ (50\sin x\cos x-18\sin x\cos x)dx=dt \\ 16\sin 2xdx=dt \end{vmatrix} = \frac{1}{16}\int t^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{8}\sqrt{t}+C$, або, повертаючись до змінної x, маємо $I=\frac{1}{8}\sqrt{25\sin^2 x+9\cos^2 x}+C.$

3. $I=\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^6-7x^4+x^2}}dx$. Розділивши чисельник та знаменник функції на x^2, маємо $I=\int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{\sqrt{x^2-7+\frac{1}{x^2}}}dx = \int \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2-5}}$. Ці перетворення підказують наступну заміну: $x-\frac{1}{x}=t$. Тоді: $I=\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-5}} = \ln\left|t+\sqrt{t^2-5}\right|+C = \ln\left|x-\frac{1}{x}+\sqrt{x^2-7+\frac{1}{x^2}}\right|+C.$

4. $I=\int \frac{x+3}{\sqrt{3+4x-4x^2}}dx.$ Представимо підінтегральну функцію у вигляді лінійної комбінації двох раціональних дробів так, щоб чисельник першого дробу був похідною квадратного тричлена $3+4x-4x^2$, а чисельник другого дробу – одиниця: $\frac{x+3}{\sqrt{3+4x-4x^2}} = -\frac{1}{8}\cdot\frac{4-8x}{\sqrt{3+4x-4x^2}}+\frac{7}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3+4x-4x^2}}.$

Тоді одержимо: $I=-\frac{1}{8}\int (3+4x-4x^2)^{-\frac{1}{2}}d(3+4x-4x^2)+\frac{7}{2}\int \frac{\frac{1}{2}d(2x-1)}{\sqrt{4-(2x-1)^2}} =$

$= -\frac{1}{4}\sqrt{3+4x-4x^2}+\frac{7}{4}\arcsin\frac{2x-1}{2}+C.$

5. $\int\sqrt{a^2-x^2}dx$, $(|x|\le a)$. Застосуємо підстановку $x=a\sin t$. При цьому $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, $x\in[-a,a]$. Тоді $dx=a\cos tdt$, і $I=\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\int\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}a\cos tdt=a^2\int\cos^2 tdt.$ (Зауважимо, що оскільки $\cos t\ge 0$ для $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, то арифметичне значення кореня $\sqrt{a^2-x^2}$ дорівнює $a\cos t$); беручи інтеграл, одержуємо $a^2\int\cos^2 tdt=\frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)dt=\frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{4}\sin 2t+C$. З рівності $\sin t=\frac{x}{a}$, $t=\arcsin\frac{x}{a}$, $\sin 2t=2\sin t\cos t=2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}=2\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}=\frac{2x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}$. Остаточно маємо $\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.$ Значення цього інтегралу наведено в таблиці основних інтегралів.

6. $I=\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$. Обчислимо даний інтеграл кількома способами:

а) Нехай $x=tgt,\ dx=\frac{1}{\cos^2 t}dx.$ Маємо $I=\int\frac{\frac{1}{\cos^2 t}dt}{tg^2\frac{1}{\cos t}}=\int\frac{\cos tdt}{\sin^2 t}=\int\frac{d(\sin t)}{\sin^2 t}=-\frac{1}{\sin t}+C.$

Враховуючи, що $t=arctgx,$ а $\sin(arctgx)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, одержуємо $I=-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C.$

б) Нехай $x=\frac{1}{t},\ dx=-\frac{dt}{t^2}$, отже, $I=-\int\frac{tdt}{\sqrt{1+t^2}}=-\sqrt{1+t^2}+C=-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C.$

в) Покладемо $x=sht,$ тоді $dx=chtdt,$ причому $ch^2t-sh^2t=1$ маємо $I=\int\frac{dt}{sh^2t}=-ctht+C.$ Враховуючи, що $x=\frac{e^t-e^{-t}}{2}=\frac{e^{2t}-1}{2e^t}$, розв'язуючи рівняння $e^{2t}-2xe^t-1=0$ відносно e^t (x - параметр) та відкинувши $e^t=x-\sqrt{x^2+1}$, $(e^t>0)$, маємо $t=\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|$. Формально одержимо іншу відповідь порівняно з рішенням у пп. “а”, “б”, але можна одержати ту ж саму відповідь, якщо враховувати, що $ctht=\frac{cht}{sht}=\frac{e^{2t}+1}{e^{2t}-1}$.

Помітимо, що якщо первісна $F(x)$ існує, то при різних підстановках відрізняється лише сталою. Цей інтеграл можна обчислити за допомогою інших підстановок ($x^2=\frac{1}{t^2-1}$, $x=\frac{2t}{1-t^2}$). Це свідчить про творчий процес інтегрування.

1.3. Інтегрування по частинам

Цей метод опирається на рівність

$$\int u dv = uv - \int v du, \qquad (1.3)$$

яку називають формулою інтегрування по частинам.

Застосування формули (1.3) доцільно у тих випадках, коли підінтегральний вираз $f(x)dx$ вдається представити у вигляді добутку двох множників u і dv таким чином, щоб інтегрування виразів dv та vdu стало задачею більш простою, ніж інтегрування початкового виразу.

По відомому диференціалу dv функція v визначається неоднозначною, але у формулі (1.3) за v може бути вибрана будь-яка функція, що має диференціал dv (тобто довільну сталу при знаходженні v випускають).

Іноді для обчислення інтегралу формулу інтегрування по частинам доводиться застосовувати декілька разів (приклад 4).

1. $$\int x\ln x dx = \begin{vmatrix} u = \ln x, & du = \dfrac{dx}{x}, \\ dv = xdx, & v = \dfrac{x^2}{2}, \end{vmatrix} = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C.$$

2. $$\int arctg\sqrt{x}dx = \begin{vmatrix} u = arctg\sqrt{x}, & du = \dfrac{1}{1+x}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx, \\ dv = dx, & v = x \end{vmatrix} = xarctg\sqrt{x} - \int \frac{\sqrt{x}dx}{2(1+x)}.$$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{2}\cdot\frac{dx}{(1+x)} = \begin{vmatrix} x = t^2 \\ dx = 2tdt \end{vmatrix} = \int \frac{t\cdot 2tdt}{2(1+t^2)} = \int \frac{(1+t^2)-1}{1+t^2}dt = \int dt - \int \frac{dt}{1+t^2} = \sqrt{x} - arctg\sqrt{x} + C.$$

Остаточно маємо $\int arctg\sqrt{x}dx = xarctg\sqrt{x} - \sqrt{x} + arctg\sqrt{x} + C.$

3. $$\int \sqrt{a^2+x^2}dx = \begin{vmatrix} u = \sqrt{a^2+x^2}, & du = \dfrac{xdx}{\sqrt{a^2+x^2}}, \\ dv = dx, & v = x \end{vmatrix} = x\sqrt{a^2+x^2} - \int \frac{(x^2+a^2)-a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx =$$

$$= x\sqrt{a^2+x^2} - \int \sqrt{a^2+x^2}dx + a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|.$$

Таким чином $2\int \sqrt{a^2+x^2}dx = x\sqrt{a^2+x^2} + a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|,$

$$\int \sqrt{a^2+x^2}dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2+x^2} + a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|\right) + C.$$

4. $$I = \int e^{2x}\sin 3x dx = \begin{vmatrix} e^{2x} = u, & du = 2e^{2x}dx, \\ dv = \sin 3x dx, & v = \int \sin 3x dx = -\dfrac{1}{3}\cos 3x \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{3}\int e^{2x}\cos 3x dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = e^{2x}, & du = 2e^{2x}dx, \\ dv = \cos 3x dx, & v = \dfrac{1}{3}\sin 3x \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x - \frac{2}{3}\int e^{2x}\sin 3x dx\right).$$

Таким чином $I = -\dfrac{1}{3}e^{2x}\cos 3x + \dfrac{2}{9}e^{2x}\sin 3x - \dfrac{4}{9}I, \qquad I = \dfrac{1}{3}e^{2x}(2\sin 3x - 3\cos 3x) + C.$

5. Шляхом інтегрування по частинам $\left(u=\frac{1}{(x^2+a^2)^n}, dv=dx\right)$ можна одержати рекурентну формулу для обчислення інтегралу: $I_n=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$, $n\in N$.

$$I_{n+1}=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}=\frac{1}{2na^2}\left(\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+(2n-1)I_n\right). \qquad (1.4)$$

По формулі (1.4) I_{n+1} зводиться до I_n (будемо писати $I_{n+1}\to I_n$), $I_n\to I_{n-1}\to I_{n-2}\to\ldots\to I_1=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C.$

6. $\int x^5\sin 5xdx$. В цьому випадку прийшлося б п'ять разів інтегрувати по частинам, кожного разу вибираючи многочлен за u. Простіше скористатися формулою ($P_n(x)$ – многочлен):

$$\int P_n(x)\sin axdx=-\left(P_n(x)-\frac{P_n''(x)}{a^2}+\frac{P_n^{(4)}(x)}{a^4}-\ldots\right)\frac{\cos ax}{a}+$$
$$+\left(\frac{P_n(x)}{a}-\frac{P_n'''(x)}{a^3}+\frac{P_n^{(5)}(x)}{a^5}-\ldots\right)\frac{\sin ax}{a}+C.$$

В нашому випадку $P_n(x)=x^5$, $a=5.$

1.4. Інтегрування раціональних дробів

Нагадаємо, що раціональний дріб $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ називається правильним, якщо степені многочленів n і m задовольняють нерівність $n<m$. З курсу алгебри відомо, що всякий правильний дріб можна подати єдиним способом у вигляді суми елементарних раціональних дробів: $\frac{A}{(x-a)^n}$; $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$, $p^2-4q<0$.

Тому інтегрування раціональних дробів зводиться до розкладу раціональної функції на елементарні дроби та до інтегрування елементарних дробів та многочленів. Інтегрування елементарних дробів провадиться таким чином:

1) $\int\frac{Adx}{x-a}=A\ln|x-a|+C;$

2) $\int\frac{Adx}{(x-a)^n}=-\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}}+C,\ n\neq 1;$

3) $\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\frac{M}{2}\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}dx+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dx}{x^2+px+q}=\frac{M}{2}\ln(x^2+px+q)+$

$$+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}}=\frac{M}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{N-\frac{Mp}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}arctg\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C;$$

4) $$\int\frac{(Mx+N)}{(x^2+px+q)^n}dx=\frac{M}{2}\int\frac{(2x+p)dx}{(x^2+px+q)^n}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^n}=$$

$$=\frac{M}{2}\cdot\frac{(x^2+px+q)^{1-n}}{1-n}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dx}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}\right)^n}\ ,\quad n>1\,.$$

Останній інтеграл підстановкою $t=x+\frac{p}{2}$ зводиться до інтегралу I_n (1.4).

1. $\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$. Поділивши многочлен $P_5(x)=x^5+x^4-8$ на многочлен $Q_3(x)=x^3-4x$, одержимо частку $T(x)=x^2+x+4$ та залишок $R(x)=4x^2+16x-8$. Отже, $\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}=x^2+x+4+4\frac{x^2+4x-2}{x^3-4x}$. Але многочлен $Q_3(x)=x(x-2)(x+2)$ має дійсні корені першої кратності $x_1=0,\quad x_2=2,\quad x_3=-2.$ Тому розклад на елементарні дроби має вигляд $\frac{x^2+4x-2}{x^3-4x}=\frac{x^2+4x-2}{x(x-2)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2}$. З рівності дробів випливає рівність многочленів $x^2+4x-2=A(x^2-4)+Bx(x+2)+Cx(x-2).$

$x=0$: $\quad -2=-4A$, тобто $A=\frac{1}{2}$;

$x=2$: $\quad 10=8B$, тобто $B=\frac{5}{4}$;

$x=-2$: $\quad -6=8C$, тобто $C=-\frac{3}{4}$.

Таким чином, $\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}=x^2+x+4+\frac{2}{x}+\frac{5}{x-2}-\frac{3}{x+2}$,

$$\int\frac{x^5+x^4-5}{x^3-4x}dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+2\ln|x|+5\ln|x-2|-3\ln|x+2|+C.$$

2. $\int\frac{x^4+1}{(x-1)(x^4-1)}dx.$ Знаменник $Q(x)=(x-1)^2(x+1)(x^2+1)$ має дійсний корінь $x_1=-1$ другої кратності, дійсний корінь $x_2=-1$ першої кратності та $x_{3,4}=\pm i$ комплексні корені першої кратності. Тому розклад підінтегральної функції на елементарні дроби має вигляд $\frac{x^4+1}{(x-1)^2(x+1)(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+1}+\frac{Dx+E}{x^2+1}$. Зауважимо, що кількість неозначених коефіцієнтів A,B,C,D,E співпадає з найбільшим

показником степеня змінної x в знаменнику правильного раціонального дробу. З рівності дробів випливає рівність многочленів:

$$x^4+1=A(x^4-1)+B(x+1)(x^2+1)+C(x-1)^2(x^2+1)+(Dx+E)(x-1)^2(x+1).$$

$x=1$: $\quad B=\frac{1}{2}$;

$x=-1$: $\quad C=\frac{1}{4}$;

$x=i$: $\quad 2=(Di+E)(-1-2i+1)(i+1)=(Di+E)(2-2i)$,

$1=(Di+E)(1-i)=Di+D+E-Ei=(D+E)+i(D-E)$.

Прирівнюючи дійсні та уявні частини, одержуємо $\begin{cases}D+E=1,\\ D-E=0,\end{cases}$ звідки $D=\frac{1}{2}$, $E=\frac{1}{2}$.

Для знаходження коефіцієнта A скористаємося методом неозначених коефіцієнтів (МНК), прирівнюючи коефіцієнти при x^4 в обох частинах тотожності: x^4: $\quad 1=A+C+D$. Звідки $A=1-(C+D)=1-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)=1-\frac{3}{4}$, тобто $A=\frac{1}{4}$.

Таким чином: $\dfrac{x^4+1}{(x-1)^2(x+1)(x^2+1)}=\dfrac{0{,}25}{x-1}+\dfrac{0{,}5}{(x-1)^2}+\dfrac{0{,}25}{x+1}+\dfrac{0{,}5x+0{,}5}{x^2+1}$,

$$\int\frac{(x^4+1)dx}{(x-1)^2(x+1)(x^2+1)}=\frac{1}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{2(x-1)}+\frac{1}{4}\ln|x+1|+\frac{1}{2}\int\frac{0{,}5d(x^2+1)}{x^2+1}+$$

$$+\frac{1}{2}arctgx+C=\frac{1}{4}\ln\left|x^4-1\right|+\frac{1}{2}arctgx-\frac{1}{2(x-1)}+C.$$

3. $I=\int\dfrac{x^4-2x^3+12x^2-20x+10}{(x-1)(x^2-2x+2)^3}dx.$ Зробимо попередньо заміну: $x-1=t$, тоді $dx=dt$.

Користуючись схемою Горнера, розкладемо многочлен, що стоїть у чисельнику, за степенями $(x-1)$:

$$x^4-2x^4+12x^2-20x+10=(x-1)^4+2(x-1)^3+12(x-1)^2+2(x-1)+1=t^4+2t^3+12t^2+2t+1.$$

Враховуючи, що $x^2-2x+2=(x-1)^2+1=t^2+1$, маємо $I=\int\dfrac{t^4+2t^3+12t^2+2t+1}{t(t^2+1)^3}dt.$

Розкладемо підінтегральну функцію на елементарні дроби:

$$\frac{t^4+2t^3+12t^2+2t+1}{t(t^2+1)^3}=\frac{A}{t}+\frac{Bt+C}{t^2+1}+\frac{Dt+E}{(t^2+1)^2}+\frac{Mt+N}{(t^2+1)^3}.$$

Маємо $t^4+2t^3+12t^2+2t+1=A(t^2+1)^3+(Bt+C)t(t^2+1)^2+(Dt+E)t(t^2+1)+(Mt+N)t.$

$t=0$: $\quad A=1$,

$t=i$: $\quad 1-2i-12+2i+1=(Mi+N)i=-M+iN$, $\quad -M=-10$, $\quad M=10$, $\quad N=0$,

t^6: $\quad A+B=0$, $\quad B=-1$,

t^5: $\quad C=0$,

t^4: $\quad 3A+2B+D=1$, $\quad D=0$,

t^3: $\quad 2C+E=2$ $\quad E=2$.

Підінтегральна функція може бути представлена у вигляді:

$$\frac{t^4+2t^3+12t^2+2t+1}{t(t^2+1)^3}=\frac{1}{t}-\frac{t}{t^2+1}+2\frac{1}{(t^2+1)^2}+\frac{10t}{(t^2+1)^3},$$

$$I=\ln|t|-\frac{1}{2}\ln(t^2+1)+2I_2+5\int\frac{d(t^2+1)}{(t^2+1)^3}=\ln\left|\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\right|+2I_2-\frac{5}{2(t^2+1)^2}.$$

Але $I_2=\frac{1}{2}\left(\frac{t}{t^2+1}+I_1\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{t}{t^2+1}+\frac{1}{2}arctgt+C.$

Тому $I=\ln\left|\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\right|-\frac{5}{2(t^2+1)^2}+\frac{t}{t^2+1}+arctgt+C=\ln\left|\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\right|+$

$+\frac{2t^3+2t-5}{2(t^2+1)}+arctgt+C=\frac{2x^3-6x^2+8x-9}{2(x^2-2x+2)^2}+\frac{1}{2}\ln\frac{x^2-2x+1}{x^2-2x+2}+arctg(x-1)+C.$

З формул 1) – 4) підрозділу 1.4 випливає, що інтеграл від елементарного дробу виражається через раціональні функції, логарифми та арктангенси. Тому неозначений інтеграл від будь-якої раціональної функції на всякому проміжку, який належить її області визначення, являється елементарною функцією, яка може бути представлена у вигляді алгебраїчної суми композицій раціональних функцій, логарифмів та арктангенсів.

4. $\int\frac{1-4x^5}{(1+x+x^5)^2}dx.$ Якщо формально дотримуватися теорії, то треба знайти корені знаменника та, крім того, знайти 10 неозначених коефіцієнтів. З другого боку, квадрат знаменника наштовхує на думку про те, що знаменник первісної дорівнює $(1+x+x^5)$, що стосується чисельника первісної, то він може мати вигляд тільки $(Ax+B)$, у іншому випадку степінь чисельника підінтегральної функції був би більше 5. Отже, будемо шукати інтеграл виду $\frac{Ax+B}{1+x+x^5}$. Повинна бути рівність $\left(\frac{Ax+B}{1+x+x^5}\right)'=\frac{1-4x^5}{(1+x+x^5)^2}$ або $A(1+x+x^5)-(5x^4+1)(Ax+B)=1-4x^5$. Порівнюючи коефіцієнти при степенях x, одержимо $A=1,\ \ B=0.$ Остаточно маємо $\int\frac{(1-4x^5)dx}{(1+x+x^5)^2}=\frac{x}{1+x+x^5}+C.$

1.5. Інтегрування ірраціональних функцій

Часто зустрічаються інтеграли від ірраціональних функцій, які можна обчислити методом раціоналізації підінтегральної функції. Він полягає в тому, що підшукується заміна змінної, яка перетворює інтеграл від ірраціональної функції в інтеграл від раціональної функції.

1.5.1. Інтеграл виду

$$\int R\left(x;\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{P_1};\ldots;\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{P_n}\right)dx, \tag{1.5}$$

де $n\in N;\ P_1,P_2,\ldots,P_n\in Q;\ a,b,c,d\in R,\ ad-bc\neq 0$, заміною $\frac{ax+b}{cx+d}=t^{\lambda}$ (λ – спільний знаменник чисел $P_1,\ldots,P_n$) приводиться до інтегралу від раціональної функції.

1. $I=\int\frac{dx}{x+2\sqrt{x^3}+\sqrt[3]{x^4}}$. $P_1=\frac{3}{2};\ P_2=\frac{4}{3};\ \lambda=6.$ Зробимо заміну $x=t^6$, тоді $dx=6t^5dt.$

$I=\int\frac{6t^5dt}{t^6+2t^9+t^8}=\int\frac{6dt}{2t^4+t^3+t}=6\int\frac{dt}{t(2t^3+t^2+1)}=6\int\frac{dt}{t(t+1)(2t^2-t+1)}$.

Підінтегральну функцію представимо у виді $\frac{1}{t(t+1)(2t^2-t+1)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t+1}+\frac{Ct+D}{2t^2-t+1}.$

В задачах підрозд. 1.4 приділено достатньо уваги інтегруванню раціональних дробів, тому обмежимося наведенням відповіді $(t=\sqrt[6]{x})$:

$$I=\ln|x|-\frac{3}{2}\ln(1+\sqrt[6]{x})-\frac{9}{4}\ln(1-\sqrt[6]{x}+2\sqrt[3]{x})+\frac{3}{2\sqrt{7}}arctg\frac{1-4\sqrt[6]{x}}{\sqrt{7}}+C.$$

1.5.2. Інтеграл виду

$$\int P(x;\sqrt{ax^2+bx+c})dx,\ a\neq 0,\ b^2-4ac\neq 0 \tag{1.6}$$

зводиться до інтегралів від раціональної функції підстановками Ейлера:

$\sqrt{ax^2+bx+c}=x\sqrt{a}+t,$ якщо $a>0$;

$\sqrt{ax^2+bx+c}=tx+\sqrt{c},$ якщо $c>0$;

$\sqrt{ax^2+bx+c}=(x-x_1)t,$ де x_1 – один із коренів квадратного тричлена.

1. $I=\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$. Скористаємося першою підстановкою Ейлера, поклавши $\sqrt{x^2+x+1}=t+1$. Після піднесення до квадрату одержимо: $x^2+x+1=x^2+2tx+t^2$, $x=\frac{t^2-1}{1-2t},\ dx=\frac{-2(t^2-t+1)}{(2t-1)^2}dt$, $x+\sqrt{x^2+x+1}=2x+t=\frac{2(t^2-1)}{1-2t}+t=\frac{t-2}{1-2t}$.

$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}=\int\frac{\frac{-2(t^2-t+1)}{(2t-1)^2}}{\frac{t-2}{1-2t}}dt=2\int\frac{t^2-t+1}{(t-2)(2t-1)}dt.$ Для підінтегральної функції маємо: $\frac{2t^2-2t+2}{(t-2)(2t-1)}=\frac{2t^2-2t+2}{2t^2-5t+2}=1+\frac{3t}{(t-2)(2t-1)},\quad \frac{3t}{(t-2)(2t-1)}=\frac{2}{t-2}+\frac{-1}{2t-1},$

$I=\int\left(1+\frac{2}{t-2}-\frac{1}{2t-1}\right)dt=t+2\ln|t-2|-\frac{1}{2}\ln|2t-1|+C=t+\ln\frac{(t-2)^2}{\sqrt{2t-1}}+C,$ де $t=\sqrt{x^2+x+1}-x.$

Зауважимо, що підстановки Ейлера часто призводять до громіздких викладок. Інтеграли виду (1.6) можна звести до інтегралів типу

$$\int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bc+c}}. \qquad (1.7) \qquad\qquad \int \frac{dx}{(x-\alpha)^k \sqrt{ax^2+bx+c}}; \qquad (1.8)$$

$$\int \frac{(Mx+N)dx}{(x^2+px+q)^m \sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad p^2-4q<0 \qquad (1.9)$$

Для обчислення інтегралу (1.7) зручно користуватися формулою Чебишева

$$\int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \qquad (1.10)$$

де $Q_{n-1}(x)-$ многочлен з неозначеними коефіцієнтами; $\lambda-$ неозначений коефіцієнт. Покажемо це на прикладі 3.

3. $I=\int \frac{2x^2-3x}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx.$ $P_2(x)=2x^2-3x;$ $Q_1(x)=ax+b.$ Скористаємося формулою (1.10). $\int \frac{2x^2-3x}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx=(ax+b)\sqrt{x^2-2x+5}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}.$ Обчислимо похідні по x:

$$\frac{2x^2-3x}{\sqrt{x^2-2x+5}} = a\sqrt{x^2-2x+5} + \frac{(ax+b)(2x-2)}{2\sqrt{x^2-2x+5}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2-2x+5}},$$

$$2x^2-3x = a(x^2-2x+5)+(ax+b)(x-1)+\lambda .$$

Тоді

$$\int \frac{2x^2-3x}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx = x\sqrt{x^2-2x+5} - 5\int \frac{d(x-1)}{\sqrt{(x-1)^2+4}} = x\sqrt{x^2-2x+5} - 5\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+5}\right| + C .$$

Інтеграл (1.8) заміною $t=\frac{1}{x-a}$ приводиться до інтегралу (1.7). Покажемо на прикладі 4, як береться інтеграл виду (1.9).

4. $I=\int \frac{(x+3)dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+x+1}}.$ Нехай $x=\frac{\alpha t+\beta}{t+1},$ де α і β підберемо так, щоб в квадратних тричленах x^2+px+q і ax^2+bx+c (1.9) зникли члени, які мають t:

$$x^2+1=\frac{\alpha^2t^2+2\alpha\beta t+\beta^2+t^2+2t+1}{(t+1)^2}, \; x^2+x+1=\frac{\alpha^2t^2+2\alpha\beta t+\beta^2+t^2+2t+1+\alpha t^2+\beta t+\alpha t+\beta}{(t+1)^2},$$

маємо систему рівнянь $\begin{cases}2\alpha\beta+2=0,\\ 2\alpha\beta+2+\beta+\alpha=0,\end{cases}$ звідки $\alpha_1=1,$ $\beta_1=-1;$ $\alpha_2=-1,$ $\beta_2=1.$ Візьмемо: $\alpha=1,$ $\beta=-1$ (не має значення, який розв'язок системи взяти). Тоді $x=\frac{t-1}{t+1},$ $3+x=\frac{2(2t+1)}{t+1},$ $x^2+1=\frac{2(t^2+1)}{(t+1)^2},$ $x^2+x+1=\frac{3t^2+1}{(t+1)^2},$ $dx=\frac{2dt}{(t+1)^2}.$ При $t+1>0,$ а отже, $|x|<1,$ маємо $I=4\int\frac{tdt}{(t^2+1)\sqrt{3t^2+1}}+2\int\frac{dt}{(t^2+1)\sqrt{3t^2+1}}.$

У першому інтегралі покладемо $3t^2+1=z^2$, тоді він дорівнює: $4\int\frac{dz}{z^2+2}=2\sqrt{2}arctg\frac{z}{\sqrt{2}}$. У другому інтегралі зробимо заміну Абеля: $v=(\sqrt{3t^2+1})'=\frac{3t}{\sqrt{3t^2+1}}$. Тоді $t^2=\frac{v^2}{3(3-v^2)}$, $t^2+1=\frac{9-2v^2}{3(3-v^2)}$, $tdt=\frac{vdv}{(3-v^2)^2}$. Другий інтеграл буде мати вигляд: $-6\int\frac{dv}{2v^2-9}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{v\sqrt{2}+3}{v\sqrt{2}-3}\right|+C$. Повертаючись до змінної x, остаточно одержимо: $I=2\sqrt{2}arctg\frac{\sqrt{2(x^2+x+1)}}{1-x}+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1+x+\sqrt{2(x^2+x+1)}}{1+x-\sqrt{2(x^2+x+1)}}\right|+C.$

1.5.3. Інтеграли виду

$$\int x^m(ax^n+b)^p\,dx, \tag{1.11}$$

де $a,b\in R$, $m,n,p\in Q$, при цьому $a\neq 0, b\neq 0, n\neq 0, p\neq 0$, називають інтегралами від диференціального бінома. Ці інтеграли зводяться до інтегралів від раціональних функцій тільки в трьох випадках (теорема Чебишева):

$$\begin{aligned}&1)\ p-\textit{ціле число}\\ &2)\ \frac{m+1}{n}-\textit{ціле число}\\ &3)\ \frac{m+1}{n}+p-\textit{ціле число}\end{aligned} \tag{1.12}$$

У випадку 1) застосовується заміна $x=t^N$, де N – спільний знаменник дробів m і n, у другому і третьому випадках — відповідно заміни $ax^n+b=t^S$, та $a+bx^{-n}=t^S$, де S – знаменник дробу p.

5. $I=\int\sqrt[3]{x-x^3}dx.$. Перепишемо інтеграл у вигляді $I=\int x^{\frac{1}{3}}(1-x^2)^{\frac{1}{3}}dx$. У нас $a=-1$, $b=1$, $m=\frac{1}{3}$, $n=2$, $p=\frac{1}{3}$. Маємо третій випадок диференційного бінома, оскільки $\frac{m+1}{n}+p=\frac{\frac{1}{3}+1}{2}+\frac{1}{3}=1-$ ціле число. Згідно з теоремою Чебишева, застосуємо заміну $a+bx^{-n}=t^3$, тобто $-1+x^{-2}=t^3$. Тоді $1+x^2=x^2t^3$. Продиференціювавши обидві частини підстановки, одержимо: $-2xt^3dx=3t^2dt$. Не знаходячи x, зразу ж переходимо до інтегралу (підстановка забезпечує зникнення змінної x!): $I=\int x^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{2}{3}}t\cdot\frac{3t^2dt}{-2x^{-3}}=-\frac{3}{2}\int x^4t^3dt.$ $x^2=\frac{1}{1+t^3}$, тоді $I=-\frac{3}{2}\int\frac{t^3dt}{(t^3+1)^2}$. Одержали інтеграл від раціонального дробу. Враховуючи, що $t^3+1=(t+1)(t^2-t+1)$, знайдемо неозначені коефіцієнти у розкладі $\frac{t^3}{(t^3+1)^2}=\frac{A}{t+1}+\frac{B}{(t+1)^2}+\frac{Ct+D}{t^2-t+1}+\frac{Et+F}{(t^2-t+1)^2}$ і

знайдемо значення інтегралу. Наведемо відповідь для самоконтролю: $I = \frac{t}{2(t^3+1)} - \frac{1}{12}\ln\frac{t^2+2t+1}{t^2-t+1} - \frac{1}{2\sqrt{3}}arctg\frac{2t-1}{\sqrt{3}} + C,$ де $t = \sqrt[3]{\frac{1-x^3}{x^2}}$.

6. $\int \frac{x^3 dx}{(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}}$, $|x| < a$. Тут $m=3$, $n=2$, $p=-\frac{3}{2}$. Оскільки $\frac{m+1}{n} = \frac{3+1}{2} = 2 -$ ціле число, то заданий інтеграл заміною $a^2 - x^2 = t^2$ зводиться до інтегралу від раціональної функції змінної t. Знаходимо $-2xdx = 2tdt$, $xdx = -tdt$, $x^2 = a^2 - t^2$,

$$\int x^3(a^2-x^2)^{-\frac{3}{2}}dx = -\int (a^2-t^2)t^{-3}tdt = -\int \frac{a^2-t^2}{t^2}dt = \int dt - a^2\int\frac{dt}{t^2} = t + \frac{a^2}{t} + C = \frac{2a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} + C.$$

1.5.4. Інтеграл виду

$$\int R(x;\sqrt{P_n(x)})dx, \tag{1.13}$$

де $P_n(x)-$ многочлен степеня $n>2$, як правило, не виражаються через елементарні функції і в цьому випадку при $n=3$ і $n=4$ називаються еліптичними, а при $n>4-$гіпереліптичними. В цьому випадку, коли інтеграл (1.13) при $n=3$ і $n=4$ є елементарною функцією, він називається псевдоеліптичним. Кожний еліптичний інтеграл може бути виражений через елементарні функції і через стандартні еліптичні інтеграли:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\kappa^2x^2)}}, \tag{1.14}$$

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\kappa^2x^2)}}, \tag{1.15}$$

$$\int \frac{dx}{(1+hx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-\kappa^2x^2)}}, \quad \kappa \in (0;1). \tag{1.16}$$

Заміною $x = \sin\varphi$ ці інтеграли зводяться до лінійних комбінацій інтегралів:

$$\int \frac{d\phi}{\sqrt{1-\kappa^2\sin^2\phi}}, \tag{1.17}$$

$$\int \sqrt{1-\kappa^2\sin^2\varphi}\,d\varphi, \tag{1.18}$$

$$\int \frac{d\varphi}{(1+h\sin^2\varphi)\sqrt{1-\kappa^2\sin^2\varphi}}, \quad \kappa \in (0;1), \tag{1.19}$$

які називають відповідно еліптичними інтегралами першого, другого, третього роду в формі Лежандра.

Через $F(\varphi;\kappa)$ та $E(\varphi;\kappa)$ позначимо відповідно ту з первісних (1.17) і (1.18), яка при $\varphi=0$ перетворюється в нуль.

1. $I = \int \frac{(x^2-1)dx}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}} = \int \frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx}{\left(x+\frac{1}{x}\right)\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}} = \left| \begin{array}{l} x+\frac{1}{x}=t \\ \left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t\sqrt{t^2-2}} = \left| \begin{array}{l} \frac{1}{t}=z \\ -\frac{1}{t^2}dt = dz \end{array} \right| =$

$$=\int\frac{dz}{\sqrt{1-2z^2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d(z\sqrt{2})}{\sqrt{1-(z\sqrt{2})^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arccos z\sqrt{2}+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\arccos\frac{x\sqrt{2}}{x^2+1}+C.$$

2. $$I=\int\frac{x^2dx}{\sqrt{36x^4-13x^2+1}}=\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(1-9x^2)(1-4x^2)}}=\left|\begin{matrix}x=\frac{1}{3}\sin\varphi\\ dx=\frac{1}{3}\cos\varphi d\varphi\end{matrix}\right|=\frac{1}{27}\int\frac{\sin^2\varphi d\varphi}{\sqrt{1-\frac{4}{9}\sin^2\varphi}}=$$

$$=-\frac{1}{27}\int\frac{\frac{9}{4}\left(-\frac{4}{9}\sin^2\varphi+1\right)-\frac{9}{4}}{\sqrt{1-\frac{4}{9}\sin^2\varphi}}d\varphi=\frac{1}{12}\left(F\left(\varphi;\frac{2}{3}\right)-E\left(\varphi;\frac{2}{3}\right)\right)+C\text{, де }\varphi=\arcsin 3x.$$

1.6. Інтегрування трансцендентних функцій

1.6.1. Інтеграли виду

$$\int R(\sin x;\cos x)dx, \tag{1.20}$$

де $R(u;v)-$ раціональна функція змінних u і v, завжди можна звести до інтегралів від раціональних функцій за допомогою підстановки (її називають універсальною тригонометричною підстановкою)

$$t=tg\frac{x}{2},\quad x\in(-\pi;\pi). \tag{1.21}$$

Ця підстановка перетворює інтеграл (1.20) до виду: $2\int R\left(\frac{2t}{1+t^2};\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{dt}{1+t^2}$. (1.22)

Помітимо, що підстановка (1.21) часто призводить до громіздких викладок, тому її використовують тоді, коли не знайдено інших шляхів інтегрування.

1. $$I=\int\frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}=\left|tg\frac{x}{2}=t\right|=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{4\cdot 2t}{1+t^2}+3\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}+5}=\int\frac{dt}{(t+2)^2}=\frac{-1}{t+2}+C=\frac{-1}{tg\frac{x}{2}+2}+C.$$

Якщо підінтегральна функція має одну із властивостей:

1) $R(-\sin x;\cos x)=-R(\sin x;\cos x)$;

2) $R(\sin x;-\cos x)=-R(\sin x;\cos)$;

3) $R(-\sin x;-\cos x)=R(\sin x;\cos x)$;

то для обчислення інтегралу зручно використовувати відповідні підстановки:

1) $t=\cos x,\ x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$; 2) $t=\sin x,\ x\in(0,\pi)$; 3) $t=tgx,\ x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

2. $I=\int\frac{2tgx+3}{\sin^2x+2\cos^2x}dx.$ Тут $R(-\sin x;-\cos x)=R(\sin x;\cos x)$, тому, поклавши $tgx=t$,

$$I=\int\frac{(2tgx+3)(dtgx)}{tg^2x+2}=\int\frac{2t+3}{t^2+2}dt=\ln(t^2+2)+\frac{3}{\sqrt{2}}arctg\frac{t}{\sqrt{2}}+C=\ln(tg^2x+2)+\frac{3}{\sqrt{2}}arctg\frac{tgx}{\sqrt{2}}+C.$$

В деяких випадках обчислення інтегралу (1.20) досягається застосуванням інших прийомів.

3. $I=\int\frac{2\sin x-\cos x}{3\sin^2 x+4\cos^2 x}dx=-2\int\frac{d(\cos x)}{3+\cos^3 x}-\int\frac{d(\sin x)}{4-\sin^2 x}=-\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{\cos x}{\sqrt{3}}+\frac{1}{4}\ln\frac{2-\sin x}{2+\sin x}+C.$

4. $I=\int\frac{\sin x\cdot\cos x}{\sin x+\cos x}dx.$ Скористаємося тотожністю $\sin x\cdot\cos x=\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)^2-\frac{1}{2}.$

$$I=\int\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)dx-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{d\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|+C.$$

1.6.2. Інтеграли виду

$$\int R(shx;chx)dx, \tag{1.23}$$

де $R(u;v)$ – раціональна функція змінних u і v, завжди можна звести до інтегралів від раціональних функцій $2\int R\left(\frac{2t}{1-t^2};\frac{1+t^2}{1-t^2}\right)\frac{dt}{1-t^2}$ з допомогою підстановки $th\frac{x}{2}=t.$ Іноді зручно використовувати підстановки $t=shx,\ t=chx,\ t=thx.$

5. $I=\int\frac{dx}{(1+chx)^2}=\left|th\frac{x}{2}=t\right|=\int\frac{\frac{2dt}{1-t^2}}{\left(1+\frac{1+t^2}{1-t^2}\right)^2}=\frac{1}{2}\int(1-t^2)dt=\frac{1}{2}t-\frac{1}{6}t^3+C=\frac{1}{2}th\frac{x}{2}-\frac{1}{6}th^3\frac{x}{2}+C.$

6. $I=\int\frac{3shx+2chx}{5shx+4chx}dx.$ Представимо чисельник підінтегральної функції у вигляді лінійної комбінації знаменника і похідної знаменника: $3shx+2chx=\alpha(5shx+4chx)+\beta(5chx+4shx)$. Для α і β одержимо систему рівнянь: $\begin{cases}5\alpha+4\beta=3,\\4\alpha+5\beta=2,\end{cases}$ звідки $\alpha=\frac{7}{9},\ \beta=-\frac{2}{9}.$ $I=\frac{7}{9}\int dx-\frac{2}{9}\int\frac{d(5shx+4chx)}{5shx+4chx}=\frac{7}{9}x-\frac{2}{9}\ln|5shx+4chx|+C.$

1.6.3. Інтеграли виду

$$\int\sin^p x\cdot\cos^q xdx,\quad \int sh^p x\cdot ch^q xdx \tag{1.24}$$

підстановками $t=\sin x$ або $t=\cos x$ і відповідно $t=shx$ або $t=chx$ завжди можна звести до інтегралів від диференціального бінома.

7. $I=\int\frac{\sin^3 x}{\cos x\sqrt[3]{\cos x}}dx=\int\sin^3 x\cdot\cos^{-\frac{4}{3}}xdx=\int(1-\cos^2 x)\cos^{-\frac{4}{3}}x\sin xdx.$ Покладемо $\cos x=t,$ тоді $-\sin xdx=dt,$ $I=-\int(1-t^2)t^{-\frac{4}{3}}dt=3t^{-\frac{1}{3}}+\frac{3}{5}t^{\frac{5}{3}}+C=\frac{3}{\sqrt[3]{\cos x}}+\frac{3}{5}\cos x\sqrt[3]{\cos^2 x}+C.$

8. $I=\int\cos^6 xdx.$ Часто рекомендують в цьому випадку зробити підстановку $tgx=t$. Доцільно понизити степінь косинуса:

$$I=\int\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^3 dx=\frac{1}{8}\int(1+3\cos 2x+3\frac{1+\cos 4x}{2}+\cos^3 2x)dx=$$

$$=\frac{1}{8}x+\frac{3}{16}x+\frac{3}{16}\sin 2x+\frac{3}{64}\sin 4x+\frac{1}{16}\sin 2x-\frac{1}{8}\int\sin^2 2x\cdot\frac{1}{2}d(\sin 2x)=$$

$$=\frac{5}{16}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{3}{64}\sin 4x-\frac{1}{48}\sin^3 2x+C.$$

Зауважимо, що при досить великих $n\in N$ зручно застосовувати формули зниження (які одержують інтегруванням по частинам):

$$\int\cos^n axdx=\frac{1}{na}\cos^{n-1}ax\cdot\sin ax+\frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2}axdx;$$

$$\int\sin^n axdx=-\frac{1}{na}\sin^{n-1}ax\cdot\cos ax+\frac{n-1}{n}\int\sin^{n-2}axdx.$$

9. $I=\int tg^7 xdx=\int tg^5 x(\sec^2 x-1)dx=\int tg^5 xd(tgx)-\int tg^5 xdx=\frac{tg^6 x}{6}-$

$$-\int tg^3 x(\sec^2 x-1)dx=\frac{tg^6 x}{6}-\frac{tg^4 x}{4}+\int tgx(\sec^2 x-1)dx=\frac{tg^6 x}{6}-\frac{tg^4 x}{4}+\frac{tg^2 x}{2}+\ln|\cos x|+C.$$

1.6.4. Інтеграли виду

$$\int\sin mx\cos nxdx;\ \int\cos mx\cos nxdx;\ \int\sin mx\sin xdx \qquad (1.25)$$

обчислюються після перетворення добутку тригонометричних функцій в алгебраїчну суму за допомогою відомих формул тригонометрії:

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)],$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)],$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)].$$

10. $I=\int\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 5xdx$. $(\cos x\cdot\cos 2x)\cos 5x=\frac{1}{2}[\cos(-x)+\cos 3x]\cos 5x=\frac{1}{2}\cos x\cdot\cos 5x+$

$$+\frac{1}{2}\cos 3x\cdot\cos 5x=\frac{1}{4}[\cos(-4x)+\cos 6x]+\frac{1}{4}[\cos(-2x)+\cos 8x]=\frac{1}{4}(\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x+\cos 8x).$$

Тоді $I=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{4}\sin 4x+\frac{1}{6}\sin 6x+\frac{1}{8}\sin 8x\right)+C=\frac{1}{8}(\sin 2x+\frac{1}{2}\sin 4x+\frac{1}{3}\sin 6x+\frac{1}{4}\sin 8x)+C.$

1.6.5. Інтеграли виду

$$\int P_n(x)\cdot f(x)dx, \qquad (1.27)$$

де $P_n(x)-$многочлен степеня n, а $f(x)-$одна з наступних функцій: $e^{\alpha x},\sin\alpha x,\cos\alpha x,\ln x,\arcsin\alpha x,ar\cos\alpha x,arctg\alpha x,\quad \alpha\in R,$ обчислюються за допомогою багатократного інтегрування по частинам. Методами інтегрування по частинам і заміни змінної інтегруються і інші трансцендентні функції (див. підр. 1.2, 1.3).

11. $\int x^7 arctgx dx = \begin{vmatrix} u = arctgx, & du = \dfrac{dx}{1+x^2}, \\ dv = x^7 dx, & v = \dfrac{x^8}{8} \end{vmatrix} = \dfrac{x^8}{8} arctgx - \dfrac{1}{8}\int \dfrac{(x^8-1)+1}{x^2+1} dx = \dfrac{x^8}{8} arctgx -$

$-\dfrac{1}{8}\int \dfrac{(x^4+1)(x^2+1)(x^2-1)}{x^2+1} dx - \dfrac{1}{8} arctgx = \dfrac{1}{8}(x^8-1) arctgx - \dfrac{1}{8}\int (x^6 - x^4 + x^2 - 1) dx =$

$= \dfrac{1}{8}(x^8-1) arctgx - \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{x^7}{7} - \dfrac{x^5}{5} + \dfrac{x^3}{3} - x\right) + C.$

12. $I = \int x^{\frac{3}{2}} (\ln x)^2 dx = \begin{vmatrix} \ln x = t, \ x = e^t, \\ dx = e^t dt \end{vmatrix} = \int (e^t)^{\frac{3}{2}} t^2 e^t dt = \int t^2 e^{\frac{5}{2}t} dt$. Рахуючи інтеграл двічі по частинам, $I = \left(\dfrac{2}{5}t^2 - \dfrac{8}{25}t + \dfrac{16}{125}\right) e^{\frac{5}{2}t} + C = \int x^{\frac{3}{2}} (\ln x)^2 dx = \dfrac{2}{125}(25\ln^2 x - 20\ln x + 8) e^{\frac{5}{2}} + C.$

Зауважимо, що має місце формула Ейлера:

$$\int P_n(x) e^{kx} dx = \frac{e^{kx}}{k}\left(P_n(x) - \frac{P_n'(x)}{k} + \frac{P_n''(x)}{k^2} - \frac{P_n'''(x)}{k^3} + \ldots\right) + C,$$

яку можна використати для контролю при обчисленні відповідних інтегралів.

13. $I = \int \dfrac{e^x + e^{3x}}{1 - e^{2x} + e^{4x}} dx$ Нехай $e^x = t, e^x dx = dt$, $I = \int \dfrac{1+t^2}{t^4 - t^2 + 1} dt = \int \dfrac{(1+t^2)dt}{(t^2 + t\sqrt{3} + 1)(t^2 + t\sqrt{2} + 1)}.$

Інтегруючи раціональний дріб (див. підрозд. 1.4) та повертаючись до змінної x, одержимо $I = arctg(2shx) + C.$ Форма відповіді підказує, що даний інтеграл можна було б звести до інтегралу $\int \dfrac{2chxdx}{4sh^2 x + 1}$. Дійсно,

$$\frac{2chx}{1+4sh^2 x} = \frac{e^x + \dfrac{1}{e^x}}{1 + \left(e^x - \dfrac{1}{e^x}\right)^2} = \frac{\dfrac{e^{2x}+1}{e^x}}{1 + \dfrac{(e^{2x}-1)^2}{e^{2x}}} = \frac{(e^{2x}+1)e^x}{e^{2x} + e^{4x} - 2e^{2x} + 1} = \frac{e^x + e^{3x}}{e^{4x} - e^{2x} + 1}.$$

14. $I = \int e^{-x}\left[(x^2+1)\cos 2x - x\sin 2x\right] dx$. Будемо шукати відповідь у вигляді: $I = e^{-x}\left[(A_1 x^2 + A_2 x + A_3)\cos 2x + (B_1 x^2 + B_2 x + B_3)\sin 2x\right] + C$ (обидва многочлени беремо другого степеня, хоча коефіцієнт при $\sin 2x -$ многочлен першого степеня). Після диференціювання одержуємо:

$$e^{-x}\left((x^2+1)\cos 2x - x\sin 2x\right) = e^{-x}\left\{\left((2B_1 - A_1)x^2 + (2B_2 + 2A_1 - A_2)x + (2B_3 + A_2 - A_3)\right)\cos 2x + \right.$$
$$\left. + \left((-B_1 - 2A_1)x^2 + (2B_1 - B_2 - 2A_2)x + (B_2 - B_3 - 2A_3)\right)\sin 2x\right\}$$

Одержимо $A_1 = -\dfrac{1}{5}$, $A_2 = \dfrac{16}{25}$, $A_3 = \dfrac{17}{125}$, $B_1 = \dfrac{2}{5}$, $B_2 = \dfrac{13}{25}$, $B_3 = \dfrac{31}{25}$, і

$I = \dfrac{e^{-x}}{125}\left[(-25x^2 + 80x + 17)\cos 2x + (50x^2 + 65x + 31)\sin 2x\right] + C.$

1.6.6. Інтеграли від трансцендентних функцій

часто не виражаються через елементарні функції. До таких інтегралів відносяться, наприклад, такі, які часто зустрічаються:

$$\int \frac{\sin x}{x} dx, \qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \quad x \in R, \tag{1.27}$$

$$\int \frac{dx}{\ln x}, \quad x \in (0;1). \tag{1.28}$$

Первісні (1.27), які при $x = 0$ перетворюються в нуль, позначаються відповідно $Si\,x$ (інтегральний синус) та $\Phi_0(x)$ (інтеграл ймовірностей). Первісна (1.28), яка прямує до нуля при $x \to +0$, позначається $li\,x$ та зветься інтегральним логарифмом.

15. Виразити через інтегральний синус $Si\,x$ і елементарні функції інтеграл $I = \int \frac{x\sin x - \cos x}{x^2} dx.$ Почленно поділивши, маємо $I = \int \frac{\sin x}{x} dx - \int \frac{\cos x}{x^2} dx..$

Проінтегруємо по частинам другий інтеграл: $u = \cos x,\ dv = \frac{dx}{x^2},\ \ du = -\sin x dx, v = -\frac{1}{x}.$

$I = six - \left(-\frac{1}{x}\cos x - \int \frac{\sin x}{x} dx \right) = 2six + \frac{\cos x}{x} + C.$

16. Виразити через інтегральний логарифм $li\,x$ та елементарні функції інтеграл $I = \int \frac{dx}{\ln^3 x} dx,\quad x < 1.$ Поклавши $\ln x = t, x = e^t, dx = e^t dt,$ одержимо $\int \frac{e^t dt}{t^3},$ який проінтегруємо двічі по частинам, кожного разу $u = e^t$.

$$\int \frac{e^t dt}{t^3} = -\frac{e^t}{2t^2} + \int \frac{e^t dt}{2t^2} = -\frac{e^t}{2t^2} + \left(-\frac{e^t}{2t} + \int \frac{e^t}{2t} dt \right) =$$

$$-\frac{x}{2\ln^2 x} - \frac{x}{2\ln x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\ln x} = \frac{1}{2}\left(lix - \frac{x(1 + \ln x)}{\ln^2 x} \right) + C\,.$$

17. $\int \Phi_0(x)dx$. Покладемо $u = \Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-\frac{x^2}{2}} dx, dv = dx,$ тоді $du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx, x = v.$

$$\int \Phi_0(x)dx = x\Phi_0(x) - \int x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = x\Phi_0(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-\frac{x^2}{2}} d\left(-\frac{x^2}{2} \right) = x\Phi_0(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} + C.$$

<u>1.7. Типові завдання</u>

Знайти інтеграли:

ВАРІАНТ 1

1 $\int \frac{x^2 + 2x\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x}} dx$ 2 $\int e^x \sin(e^x) dx$ 3 $\int \frac{dx}{\sqrt{3 - 2x}}$

4 $\int (x^2 - 5)\cos 4x dx$ 5 $\int \frac{x - 1}{x^2 + 6x + 8} dx$ 6 $\int \frac{(x^5 - 1)dx}{(x + 1)^2 (x^2 + 9)^2}$

7 $\int \frac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x^2\left(x^2+4x+40\right)^2}dx$ 8 $\int e^x \cos 5x dx$ 9 $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{(x-1)^6(x+2)^4}}$

10 $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$ 11 $\int x^{-2/3}\left(1+x^{1/3}\right)^{-3}dx$ 12 $\int \frac{ctg^3 x+ctgx}{4+tg^2 x}dx$

13 $\int \frac{chx+shx}{2shx-chx}dx$ 14 $\int \sqrt[5]{\sin^4 x}\cos^3 xdx$ 15 $\int e^{-|x|}dx$

ВАРІАНТ 2

1 $\int x^3(5x-4)dx$ 2 $\int x^2 \sin x^3 dx$ 3 $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$

4 $\int x^4 \sin 2x dx$ 5 $\int \frac{x^3-2x^2+4}{x^3(x-2)^2}dx$ 6 $\int \frac{dx}{\left(x^2+4x+5\right)\left(x^2-4x+3\right)}$

7 $\int \frac{3x-5}{(x^2+x+4)^3}dx$ 8 $\int e^{2x}\sin 2x dx$ 9 $\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[5]{x}}dx$

10 $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-3x+2}}$, $x>2$ 11 $\int \sqrt[5]{\frac{x}{x+1}}\cdot\frac{dx}{x^3}$ 12 $\int ctg^4 x dx$

13 $\int \frac{chx+4shx}{2shx-3chx}dx$ 14 $\int \cos^3 x \sin^8 x dx$ 15 $\int \frac{x^5}{\sqrt{x^2+4}}dx$

ВАРІАНТ 3

1 $\int \frac{1+x^2}{x^2}dx$ 2 $\int \frac{(4x^3+12x)dx}{x^4+6x^2+8}$ 3 $\int \frac{\sin x dx}{1+3\cos x}$

4 $\int (x^2+1)\cos x dx$ 5 $\int \frac{dx}{(x+2)^2(x-1)}$ 6 $\int \frac{(2x^3-3x^2+2x-1)dx}{(x^2+4x+29)(x^2+12x+61)}$

7 $\int \frac{3x+1}{(x^2+x+4)^3}dx$ 8 $\int e^{2x}\cos 2x dx$ 9 $\int \frac{\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}}dx$

10 $\int x\sqrt{x^2+5x+6}dx$ 11 $\int x^{1/2}\left(1+2x^{1/3}\right)^{-2}dx$ 12 $\int \cos^8 x dx$

13 $\int \frac{chx-4shx}{2shx+3chx}dx$ 14 $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt[3]{\sin^4 x}}$ 15 $\int \frac{\arcsin x}{\left(1-x^2\right)^{3/2}}dx$

ВАРІАНТ 4

1 $\int \frac{(\sqrt{x}+3)^2}{x}dx$ 2 $\int \frac{2x-4}{(x^2-4x+5)^3}dx$ 3 $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$

4 $\int arctg(7x+2)dx$ 5 $\int \frac{7x-5}{x^3+x^2-6x}dx$ 6 $\int \frac{\left(3x^3+2x^2+1\right)dx}{x(x+1)^2\left(x^2+4\right)}$

7 $\int \frac{(3x-1)dx}{\left(x^2+16\right)^3}$ 8 $\int e^{3x}\sin x dx$ 9 $\int \frac{\sqrt{x-2}-\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2}}dx$

10 $\int \frac{x+3}{\sqrt{4x^2+4x+3}}dx$ 11 $\int x^{1/2}\left(1+x^{1/3}\right)^{-2}dx$ 12 $\int \frac{2\cos x-3\sin x}{2\sin x+3\cos x}dx$

13 $\int \frac{chx+2}{2shx+3chx}dx$ 14 $\int \sqrt[5]{\sin^3 2x}\cos^3 2xdx$ 15 $\int \sin x \ln tgxdx$

ВАРІАНТ 5

1 $\int\left(\frac{3}{25+x^2}-3^x\right)dx$ 2 $\int \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ 3 $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}$

4 $\int x\arcsin xdx$ 5 $\int \frac{xdx}{x^2+5x+8}$ 6 $\int \frac{dx}{(x+1)\left(x^2+1\right)\left(x^3+1\right)}$

7 $\int \frac{\left(x^3+2x-1\right)dx}{x^2\left(x^2+2x+5\right)^2}$ 8 $\int e^{3x}\cos xdx$ 9 $\int x^2\sqrt[3]{(x+1)^2}dx$

10 $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-x+1}}$ 11 $\int x^{1/4}\left(1+x^{1/3}\right)^{-2}dx$ 12 $\int \frac{\sin 2xdx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$

13 $\int \frac{shx+2}{2shx+5chx}dx$ 14 $\int \frac{\cos^3 xdx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}$ 15 $\int \frac{dx}{e^x+\sqrt{e^x}}$

ВАРІАНТ 6

1 $\int \frac{3-2\sin^2 x}{\sin^2 x}dx$ 2 $\int \frac{\ln \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}dx$ 3 $\int e^{3x^2-5}xdx$

4 $\int x^2e^{2x}dx$ 5 $\int \frac{dx}{x^2+4x+14}$ 6 $\int \frac{x^3+2x^2+3x+4}{x^4+x^3+2x^2}dx$

7 $\int \frac{(x-1)dx}{\left(x^2-2x+5\right)^3}$ 8 $\int e^x\sin 2xdx$ 9 $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x+2)^5(x-1)^3}}$

10 $\int \frac{\left(x^3-2x^2+1\right)dx}{\sqrt{x^2-7x+10}}$ 11 $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$ 12 $\int \frac{3\cos x+7\sin x}{5\sin x+2\cos x}dx$

13 $\int \frac{shx-2}{2shx+chx}dx$ 14 $\int \frac{\sin^3 xdx}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}$ 15 $\int \cos^7 xdx$

ВАРІАНТ 7

1 $\int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x}dx$ 2 $\int e^{2x^2+2x-1}(2x+1)dx$ 3 $\int \frac{3x^2dx}{x^6-25}$

4 $\int 2^{-x}xdx$ 5 $\int \frac{xdx}{2x^2-x+1}$ 6 $\int \frac{\left(3x^2+4x-1\right)dx}{\left(x^2+4x+29\right)^2}$

7 $\int \frac{\left(x^3-2x^2+x+6\right)dx}{x(x-1)^2\left(x^2+4x+5\right)}$ 8 $\int e^x\cos 2xdx$ 9 $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}}$

10 $\int \frac{(x^2+4x)dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$

11 $\int \sqrt[3]{x+2x^3}\,dx$

12 $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1+4\cos x+\cos^2 x}}$

13 $\int \frac{shx}{2shx+chx}dx$

14 $\int \frac{3\sin^2 x}{\cos^4 x}dx$

15 $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x dx$

ВАРІАНТ 8

1 $\int \frac{5}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$

2 $\int e^{2x^2+\ln x}dx$

3 $\int \frac{\sin 2x}{3+\sin^2 x}dx$

4 $\int arctg 2x dx$

5 $\int \frac{dx}{6x^2+6x+19}$

6 $\int \frac{(x+2)dx}{(x-1)^2 x(x^2+4)}$

7 $\int \frac{x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}{x^2(x^2+2x+10)^2}dx$

8 $\int e^{2x}\cos 3x dx$

9 $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx$

10 $\int \frac{(x^3-x-1)dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$

11 $\int \sqrt[3]{x-x^3}\,dx$

12 $\int \frac{dx}{2\sin^2 x+7\cos^2 x}$

13 $\int \frac{thx}{2shx+chx}dx$

14 $\int \sin^5 x\cos^4 x dx$

15 $\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}dx$

ВАРІАНТ 9

1 $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}dx$

2 $\int \frac{e^{tgx}+ctgx}{\cos^2 x}dx$

3 $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$

4 $\int x^2\ln x dx$

5 $\int \frac{(9x+13)dx}{(x+3)(x^2+2x+3)}$

6 $\int \frac{(x^4-1)dx}{(x^2+9)(x^3+x^2)}$

7 $\int \frac{(3x+1)dx}{(x^2-4x+5)^3}$

8 $\int e^{2x}\sin 3x dx$

9 $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{4x^2 4x+1}-\sqrt{2x+1}}$

10 $\int x^2\sqrt{x^2+4}dx$

11 $\int \frac{dx}{x^3\sqrt[3]{2-x^3}}$

12 $\int \frac{(1+\cos x)^2 dx}{1+\sin x}$

13 $\int \frac{chx+1}{2shx-5chx}dx$

14 $\int \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt[5]{\cos^3 x}}$

15 $\int \frac{x\arccos\frac{x}{a}}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$

ВАРІАНТ 10

1 $\int \frac{x^2}{x^2+4}dx$

2 $\int \sqrt{\sin x}\cos^5 x dx$

3 $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$

4 $\int (x+2)\cos 3x dx$

5 $\int \frac{20dx}{(x+4)(x^2+4x+20)}$

6 $\int \frac{(x^3-2x^2+3x-1)dx}{(x^2+8x+17)(x^2+6x+34)}$

7 $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2x+5)^2}$

8 $\int e^{2x+1}\sin x dx$

9 $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx$

10 $\int \frac{\left(x^3-6x^2+11x-6\right)dx}{\sqrt{x^2+4x+3}}$ 11 $\int x^{-1/2}\left(1+x^{1/4}\right)^{-10}dx$ 12 $\int \frac{(\sin 2x)^2\,dx}{\left(\sin^3 x+\cos^3 x\right)^2}$

13 $\int \frac{chx-1}{2shx-5chx}dx$ 14 $\int \frac{dx}{\sin^5 x}$ 15 $\int x^3\sqrt{x^2-1}dx$

ВАРІАНТ 11

1 $\int \frac{x^3(x+1)}{\sqrt{x}}dx$ 2 $\int \frac{x^3dx}{x^8-18}$ 3 $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}dx$

4 $\int (x^2-2x+3)\ln(x+1)dx$ 5 $\int \frac{(3x+4)dx}{4x^2-12x+13}$ 6 $\int \frac{(x+5)dx}{(x+2)^2\left(x^4-1\right)}$

7 $\int \frac{dx}{\left(x^2+16\right)^3}$ 8 $\int e^{2x+1}\cos x dx$ 9 $\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx$

10 $\int \frac{\left(1-x+x^2\right)dx}{\sqrt{1+x-x^2}}$ 11 $\int \frac{dx}{x\sqrt[6]{x^6+1}}$ 12 $\int \frac{5\sin x-3\cos x}{7\sin x+2\cos x}dx$

13 $\int \frac{shx-1}{2shx+5chx}dx$ 14 $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$ 15 $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-16}}$

ВАРІАНТ 12

1 $\int \frac{x^6+1}{x^2}dx$ 2 $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{4-e^{2x}}}$ 3 $\int \frac{1+x}{1-\sqrt{x}}dx$

4 $\int \arccos(3x-2)dx$ 5 $\int \frac{(2x^3+3)dx}{(4x^2-1)(x^2+6x)}$ 6 $\int \frac{x^4+4x^3+3x^2+12x+20}{x^2+4x+5}dx$

7 $\int \frac{\left(x^2+1\right)dx}{x^2\left(x^2-6x+58\right)^2}$ 8 $\int e^{4x}\sin 4x dx$ 9 $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-7)^7(x-5)^5}}$

10 $\int x\sqrt{x^2+2x+2}dx$ 11 $\int \frac{\sqrt[3]{x}dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}$ 12 $\int \frac{\sin x\sin 2x dx}{\sin x+\cos x}$

13 $\int \frac{3shx}{2shx+chx}dx$ 14 $\int \sqrt[3]{\cos^2 2x}\sin^3 x dx$ 15 $\int \frac{\left(2x^2+2x+13\right)dx}{\left(x^2+1\right)\left(x^3-2x^2+x-2\right)}$

ВАРІАНТ 13

1 $\int \frac{(x+1)^3}{\sqrt{x}}dx$ 2 $\int \frac{\sqrt[4]{tgx}dx}{\sin^2 x}$ 3 $\int e^{-x^4}x^3dx$

4 $\int x^3 arctgx dx$ 5 $\int \frac{x+1}{2x-x^2}dx$ 6 $\int \frac{\left(x^2-5\right)dx}{\left(x^2-4x+5\right)\left(x^2+9\right)}$

7 $\int \frac{dx}{(x-2)^3\left(x^2-2x+2\right)^2}$ 8 $\int e^{4x}\cos 4x dx$ 9 $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}$

10 $\int \frac{2x^2-3x}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx$ 11 $\int x^{-2/3}\left(1+x^{1/3}\right)^{-3}dx$ 12 $\int \frac{dx}{3-4\sin 2x+2\cos^2 x}$

13 $\int \frac{3chx}{2shx+3chx}dx$ 14 $\int \frac{\cos^3 xdx}{\sqrt[5]{\sin^3 x}}$ 15 $\int \frac{\ln 2x}{x\ln 4x}dx$

ВАРІАНТ 14

1 $\int (x^3-\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}+1)dx$ 2 $\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{1+e^{4x}}}$ 3 $\int 2^{x^2}xdx$

4 $\int x^2 arctg 4xdx$ 5 $\int \frac{dx}{x^2-8x+14}$ 6 $\int \frac{(x+1)dx}{x(x^4+6x^2+8)}$

7 $\int \frac{\left(x^3-6\right)dx}{x^4+6x^2+8}$ 8 $\int e^{5x}\sin 5xdx$ 9 $\int \frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}dx$

10 $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$ 11 $\int x^{1/2}\left(1+x^{1/3}\right)^{-2}dx$ 12 $\int \frac{dx}{4+tgx+4ctgx}$

13 $\int \frac{3}{2shx+3chx}dx$ 14 $\int \sin^2 2x\cos^4 2xdx$ 15 $\int \frac{\ln tgxdx}{\sin 2x}$

ВАРІАНТ 15

1 $\int \frac{(\sqrt{x}+x)^3}{5x}dx$ 2 $\int \frac{\ln \arccos xdx}{\sqrt{1-x^2}\arccos x}$ 3 $\int e^{x^2-2}xdx$

4 $\int x^3\sin 5xdx$ 5 $\int \frac{(x-1)dx}{x^3+x}$ 6 $\int \frac{dx}{x^2\left(x^2+4\right)^2}$

7 $\int \frac{dx}{\left(x^2-2x+2\right)^3}$ 8 $\int x^2e^x\sin xdx$ 9 $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}$

10 $\int \frac{\left(x^3+2x^2+x-1\right)dx}{\sqrt{x^2+2x-1}}$ 11 $\int \frac{xdx}{\sqrt[4]{x^3(x-4)}}$ 12 $\int \frac{dx}{4+ctgx-4tgx}$

13 $\int \frac{7}{2shx-4chx}dx$ 14 $\int \sin^2 3x\cos^4 3xdx$ 15 $\int e^{\sqrt{x}}dx$

2. ОЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

2.1. Означений інтеграл як границя суми

2.1.1. Інтеграл Рімана

Нехай функція $f(x)$ визначена на сегменті $[a;b]$ і $\Pi=\{a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b\}$ – довільне розбиття цього сегменту на n частин. Позначимо $\Delta x_i=x_{i+1},\chi=\max\Delta x_i$. Виберемо на кожному із сегментів $[x_i;x_{i+1}](i=0,1\ldots,n-1)$ точку $\zeta_i\in[x_i;x_{i+1}]$ і складемо вираз:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\zeta_i)\Delta x_i, \qquad (2.1)$$

який назвемо інтегральною сумою. Якщо існує скінчена границя $I = \lim\limits_{\lambda\to 0} S_n$, яка не залежить від способу розбиття Π сегмента $[a;b]$ і вибору точок ζ_i, то число I називають означеним інтегралом функції $f(x)$ на сегменті $[a;b]$ і позначають символом

$$I = \int_a^b f(x)dx, \qquad (2.1)$$

а функцію $f(x)$ називають інтегрованою по Ріману на цьому сегменті.

2.1.2. Нижня та верхня інтегральні суми Дарбу

Нижньою та верхньою сумами Дарбу функції $f(x)$ на сегменті $[a;b]$ при фіксованому розбитті цього сегмента, називають відповідно суми

$$\underline{S}_n = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i, \qquad \overline{S}_n = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i, \qquad (2.3)$$

де $m_i = \inf\limits_{x\in[x_i;x_{i+1}]} \{f(x)\}$, $M_i = \sup\limits_{x\in[x_i;x_{i+1}]} \{f(x)\}$.

2.1.3. Критерій інтегровності

Для того, щоб функція $f(x)$ була інтегровною на сегменті $[a,b]$, необхідно і достатньо, щоб виконувалась рівність

$$\lim_{\lambda\to 0}(\overline{S}_n - \underline{S}_n) = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n-1}\omega_i \Delta x_i = 0, \qquad (2.4)$$

де $\omega_i = M_i - m_i -$коливання функції $f(x)$ на сегменті $[x_i;x_{i+1}]$. Зокрема неперервна функція, кусочно-неперервна функція і монотонна на сегменті інтегровні на ньому.

1.Обчислити, виходячи з означення, інтеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx.$

Розіб'ємо сегмент $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ на n рівних частин точками $x_0 = 0,\ x_1 = \frac{\pi}{2R},\ x_2 = \frac{2\pi}{2n},\ldots,$ $x_n = \frac{\pi n}{2n} = \frac{\pi}{2}$. Довжина кожного частинного сегмента дорівнює $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = \frac{\pi}{2n}$. За ζ_i виберемо правий кінець $i-$го частинного сегмента. Обчислимо значення функції в точках ζ_i: $\cos\zeta_0 = \cos\frac{\pi}{2n},\ldots,\ \cos\zeta_i = \cos\frac{(i+1)\pi}{2n},\ldots,\ \cos\zeta_{n-1} = 0.$ Складемо інтегральну суму $S_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\zeta_i)\Delta x_i = \sum\limits_{i=0}^{n-1}\cos\zeta_i \cdot \frac{\pi}{2n} = \frac{\pi}{2n}\left[\cos\frac{\pi}{2n} + \cos\frac{2\pi}{2n} + \ldots + \cos\frac{(n-1)\pi}{2n}\right].$

Методом математичної індукції можна показати, що $\cos\frac{\pi}{2n}+\cos\frac{2\pi}{2n}+\ldots+\cos\frac{(n-1)\pi}{2n}=\frac{\sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{(n-1)\pi}{4n}}{\sin\frac{\pi}{4n}}$. Оскільки $(\lambda\to 0)\Rightarrow(n\to\infty)$, то

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\cos\zeta_i\frac{\pi}{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{(n-1)}{4n}}{2n\sin\frac{\pi}{4n}}.\quad \lim_{n\to\infty}2n\sin\frac{\pi}{4n}=\frac{\pi}{2},\quad \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=\frac{\pi\sin^2\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{2}}=1.$$

В деяких випадках розбивають сегмент інтегрування на нерівні частини.

2. Обчислити, виходячи з означення, інтеграл $\int\limits_a^b x^m dx,\ 0<a<b,\ m\neq -1.$

Покладемо $q=\sqrt[n]{\frac{b}{a}}$ та розіб'ємо сегмент $[a;b]$ на частини точками $x_0=a,x_1,x_2,\ldots,x_n=b,$ де $x_i=aq^i$. На сегменті $[x_i;x_{i+1}]$ виберемо точку $\zeta_i=x_i=aq^i$. Тоді $S_n=\sum\limits_{i=0}^{n-1}\zeta_i^m(x_{i+1}-x_i)=\sum\limits_{i=0}^{n-1}(aq^i)^m a(q^{i+1}-q^i)=a^{m+1}(q-1)\sum\limits_{i=0}^{n-1}q^{i(m+1)}$. Звідси згідно формули для суми геометричної прогресії:

$$S_n=\frac{a^{m+1}(q-1)(q^{n(m+1)}-1)}{q^{m+1}-1}=\frac{a^{m+1}(a-1)\left[\left(\frac{b}{a}\right)^{m+1}-1\right]}{q^{m+1}-1}=\frac{(q-1)(b^{m+1}-a^{m+1})}{q^{m+1}-1}=\frac{b^{m+1}-a^{m+1}}{q^m+q^{m+1}+\ldots+1}.$$

Якщо $\lambda\to 0,$ а отже, $n\to\infty,$ то $q=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\to 1.$ Отже, $\max\limits_{0\le i\le n-1}\left|q^{i+1}-q^i\right|\to 0$. Тому $\int\limits_a^b x^m dx=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{q\to 1}\frac{b^{m+1}-a^{m+1}}{q^m+q^{m-1}+\ldots+1}=\frac{b^{m+1}-a^{m+1}}{m+1}$. Ця формула вірна при $m\neq -1$.

2.1.4. Властивості інтегралу

1) $\int\limits_a^b dx=b-a.$

2) Якщо функція $f(x)$ інтегрована на сегменті $[a;b]$, то вона інтегрована на будь-якому сегменті $[a^*;b^*]\subset[a;b]$..

3) Адитивність інтегралу $\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^c f(x)dx+\int\limits_c^b f(x)dx,\ a\le c\le b.$

4) Лінійність інтегралу $\int\limits_a^b\left(\sum\limits_{k=1}^n\lambda_k f_k(x)\right)dx=\sum\limits_{k=1}^n\lambda_k\int\limits_a^b f_k(x)dx..$

5) Добуток інтегровних на сегменті функцій інтегровний на ньому.

6) Якщо функція $f(x)$ інтегровна на сегменті $[a;b]$ і $\inf\limits_{[a;b]}|f(x)|>0,$ то функція $\dfrac{1}{f(x)}$ також інтегровна на цьому сегменті.

7) Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ інтегровані на сегменті $[a;b]$ і $\forall x\in[a;b] f(x)\ge g(x),$ то $\int\limits_a^b f(x)dx\ge\int\limits_a^b g(x)dx.$ Зокрема, якщо на сегменті $[a;b]$ функція $f(x)\ge 0,$ то $\int\limits_a^b f(x)dx\ge 0.$

8) Якщо функція $f(x)$ інтегровна на сегменті $[a;b]$, то і її абсолютна величина $|f(x)|$ також інтегровна на $[a;b]$ і $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right|\le\int\limits_a^b|f(x)|dx,\ a\le b.$

9) Неперервність інтегралу. Якщо функція $f(x)$ інтегровна на сегменті $[a;b]$, то функція $F(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$ та $G(x)=\int\limits_x^b f(t)dt$ неперервні на цьому сегменті.

3. Оцініть інтеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{dx}{3+2\cos^2 x}.$

Оскільки $0\le\cos^2 x\le 1,$ то $\dfrac{1}{5}\le\dfrac{1}{3+2\cos^2 x}\le\dfrac{1}{3}$ та $\dfrac{\pi}{10}\le\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{dx}{3+2\cos^2 x}\le\dfrac{\pi}{6}.$

4. Довести, що якщо функція $p(x)$ інтегровна та невід'ємна на сегменті $[a;b]$, а функція $f(x)$ задовольняє на цьому сегменті умові $m\le f(x)\le M$, причому $f(x)\cdot p(x)$ інтегровна, то

$$m\int\limits_a^b p(x)dx\le\int\limits_a^b f(x)\cdot p(x)dx\le M\int\limits_a^b p(x)dx. \tag{2.5}$$

Із умови випливає, що при $a\le x\le b$ виконується нерівність $mp(x)\le f(x)\cdot p(x)\le Mp(x).$ Інтегруючи цю нерівність, приходимо до співвідношення (2.5).

Застосуємо (2.5) для оцінки інтегралу $\int\limits_0^1\dfrac{x^3dx}{\sqrt{1+x}}.$ Покладемо $p(x)=x^9,\ f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}.$

Оскільки на сегменті $0\le x\le 1$ маємо $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\le\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}\le 1,$ то $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_0^1 x^9dx\le\int\limits_0^1\dfrac{x^9}{\sqrt{1+x}}dx\le\int\limits_0^1 x^9dx.$

$\int\limits_0^1 x^9dx=\dfrac{1}{10},$ і тому $\dfrac{1}{10\sqrt{2}}\le\int\dfrac{x^9}{\sqrt{1+x}}dx\le\dfrac{1}{10}.$

2.1.5. Формула Ньютона-Лейбніца

Якщо функція $f(x)$ неперервна на сегменті $[a;b]$, то для будь-якої її первісної $F(x)$ має місце формула Ньютона-Лейбніца

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a). \qquad (2.6)$$

5. Обчислити $\int_2^3 \frac{dx}{x^2-2x-8}$. $I=\int_2^3 \frac{d(x-1)}{(x-1)^2-9} = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{(x-1)-3}{(x-1)+3}\right|\Bigg|_2^3 = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-4}{x+2}\right|\Bigg|_2^3 =$

$$= \frac{1}{6}\left(\ln\left|\frac{3-4}{3+2}\right| - \ln\left|\frac{2-4}{2+2}\right|\right) = \frac{1}{6}\left(\ln\frac{1}{5}-\ln\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6}\ln\frac{2}{5}.$$

6. Чи можна застосувати формулу Ньютона-Лейбніца до інтегралу $I=\int_0^5 \frac{dx}{(x-4)^2}$?

Відповідь негативна. Якщо формально обчислити цей інтеграл по формулі (2.6), то одержимо Невірний результат: $I=\int_0^5 \frac{d(x-4)}{(x-4)^2} = -\frac{1}{x-4}\Big|_0^5 = -\frac{1}{5-4}+\frac{1}{0-4} = -1-\frac{1}{4} = -\frac{5}{4}$.

Але підінтегральна функція $f(x)=\frac{1}{(x-4)^2}>0$ і по властивості 7) інтеграл не може бути від'ємним числом. Застосування формули Ньютона-Лейбніца незаконне, оскільки $f(x)=\frac{1}{(x-4)^2}$ має нескінчений розрив в точці $x=4$, яка належить проміжку інтегрування.

2.2. Формула заміни змінної

Якщо функція $f(x)$ неперервна на сегменті $[a;b]$, а функція $x=\varphi(t)$ неперервна та диференційована на сегменті $[\alpha;\beta]$, $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \qquad (2.7)$$

1. $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}dx = \left|\begin{matrix} e^x-1=t^2, & e^x dx = 2tdt, \\ dx=\frac{2tdt}{t^2+1}, & \begin{matrix} x=0 \Leftrightarrow t=0 \\ x=\ln 2 \Leftrightarrow t=1 \end{matrix}\end{matrix}\right| = 2\int_0^1 \frac{(t^2+1)-1}{t^2+1}dt = 2(t-arctgt)\Big|_0^1 = \frac{4-\pi}{2}$.

2. Обчислити інтеграл $\int_{-1}^2 x^2dx$ за допомогою заміни $x^2=t$. Покладемо $x^2=t$, $2xdx=dt$, $x=\sqrt{t}$. При $x=-1$, $t_1=1$, при $x=2$, $t_2=4$. Отже, $\int_{-1}^2 x^2dx = \frac{1}{2}\int_1^4 \sqrt{t}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big|_1^4 = \frac{1}{3}(8-1) = \frac{7}{3}$. Але $\int_{-1}^2 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^2 = \frac{1}{3}(8-(-1)) = 3$. Помилка тут полягає в тому, що функція $t=x^2$ має дві обернені функції: $x=\sqrt{t}$ і $x=-\sqrt{t}$. Якщо взяти $x=\sqrt{t}$, то $a=\varphi(t_1)=\sqrt{1}=1$, але не -1, як вимагає умова; якщо ж взяти $x=-\sqrt{t}$, то $b=\varphi(t_2)=-\sqrt{4}=-2$, але не +2, як вимагає цього умова. Тоді необхідно

розбити інтеграл: $\int\limits_{-1}^{2} x^2dx = \int\limits_{-1}^{0} x^2dx + \int\limits_{0}^{2} x^2dx,$ і в першому інтегралі покласти $x = -\sqrt{t}$, а в другому $x = \sqrt{t}$. $I_1 = \int\limits_{-1}^{0} x^2dx = -\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{0}\sqrt{t}dt = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{-1}^{0} = \frac{1}{3};$ $I_2 = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{4}\sqrt{t}dt = = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{0}^{4} = \frac{8}{3}.$

Таким чином, $I = I_1 + I_2 = \frac{1}{3} + \frac{3}{8} = 3.$

3. Довести, що якщо $f(x)$ неперервна на $[0;1]$, то $\int\limits_{0}^{\pi} x\cdot f(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int\limits_{0}^{\pi} f(\sin x)dx.$

Запишемо $\int\limits_{0}^{\pi} x\cdot f(\sin x)dx = \int\limits_{0}^{\pi} x\cdot f(\sin(\pi - x))dx$ і покладемо $t = \pi - x.$ Одержимо $\int\limits_{0}^{\pi} x\cdot f(\sin x)dx = \int\limits_{0}^{\pi}(\pi - t)f(\sin t)dt = \pi\int\limits_{0}^{\pi} f(\sin t)dt - \int\limits_{0}^{\pi} tf(\sin t)dt.$ Тоді $\int\limits_{0}^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int\limits_{0}^{\pi} f(\sin x)dx$.

Застосуємо доведену рівність для обчислення інтегралу $I = \int\limits_{0}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx.$

Маємо $I = \frac{\pi}{2}\int\limits_{0}^{\pi}\frac{\sin xdx}{2-\sin^2 x} = \frac{\pi}{2}\int\limits_{\pi}^{0}\frac{d(\cos x)}{1+\cos^2 x} = \frac{\pi}{2}arctg(\cos x)\Bigg|_{\pi}^{0} = \frac{\pi^2}{2}.$

2.3. Інтегрування по частинам

Якщо функції $u = u(x)$ та $v = v(x)$ неперервні разом зі своїми похідними на $[a;b]$, то

$$\int\limits_{a}^{b} udv = (uv)\Bigg|_{a}^{b} - \int\limits_{a}^{b} vdu. \qquad (2.8)$$

Цю формулу називають формулою інтегрування по частинам. Вона залишається справедливою і для випадку, якщо замість неперервності похідних u' і v' вимагається лише інтегровність.

1. Знайти інтеграл $\int\limits_{1/e}^{e}|\ln x|dx.$ Оскільки $|\ln x| = \begin{cases} -\ln x, якщо\ x\in[1/e;1]; \\ \ln x, якщо\ \ x\in[1;e], \end{cases}$ то

$$\int\limits_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|dx = \int\limits_{\frac{1}{e}}^{1}(-\ln x)dx + \int\limits_{1}^{e}\ln xdx = \begin{vmatrix} u = \ln x \\ dv = dx \end{vmatrix} = (-x\ln x + x)\Bigg|_{\frac{1}{e}}^{1} + (x\ln x - x)\Bigg|_{1}^{e} = 2(1-e^{-1}) = \frac{2(e-1)}{e}.$$

2. Знайти інтеграл $I = \int\limits_{-\pi}^{\pi} chx\cos nxdx,\ \ n\in N.$

$$I = \frac{1}{n}\int\limits_{-\pi}^{\pi} chxd(\sin nx) = \frac{chx\cdot\sin nx}{n}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n}\int\limits_{-\pi}^{\pi} sh\cdot\sin nxdx = \frac{1}{n^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} shxd(\cos nx) =$$

$= \dfrac{shx\cos nx}{n^2}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} - \dfrac{1}{n^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} chx\cos nx dx = (-1)^n\dfrac{2sh\pi}{n^2} - \dfrac{1}{n^2}I.$ Знайшовши з одержаного рівняння значення I, одержимо $I = (-1)^n\dfrac{2sh\pi}{n^2+1}.$

3. Обчислити $I_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx, \quad n \in N.$ Проводячи інтегрування по частинам $u = \sin^{n-1}x, \quad dv = \sin x dx,$ маємо $I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n,$ звідки $I_n = \dfrac{n-1}{n}I_{n-2}.$ За допомогою знайденої рекурентної формули можливо одержати остаточний результат для будь-якого натурального n.

Нехай $n = 2\kappa,$ тоді $I_{2\kappa} = \dfrac{(2\kappa-1)(2\kappa-3)\ldots 3\cdot 1}{2\kappa(2\kappa-2)\ldots 4\cdot 2}I_0 = \dfrac{(2\kappa-1)!!}{(2\kappa)!!}\cdot\dfrac{\pi}{2},$ оскільки $I_0 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \dfrac{\pi}{2}.$

Нехай $n = 2\kappa+1,$ тоді $I_{2\kappa+1} = \dfrac{2\kappa(2\kappa-2)\ldots 2}{(2\kappa+1)(2\kappa-1)\ldots 3\cdot 1}I_1 = \dfrac{(2\kappa)!!}{(2\kappa+1)!!},$ оскільки $I_1 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1.$

Таким чином,
$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & \textit{якщо } n - \textit{парне},\\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & \textit{якщо } n - \textit{парне}. \end{cases} \qquad (2.9)$$

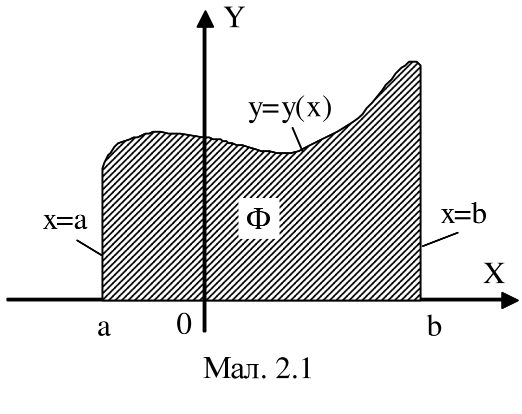
Зауважимо, що формула справедлива і для $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx.$

В деяких випадках доцільно комбінувати метод заміни змінної з методом інтегрування по частинам.

4. Знайти інтеграл $\int\limits_0^3 \arcsin\sqrt{\dfrac{x}{1+x}}dx$. Застосовуючи формулу (2.8) $u = \arcsin\sqrt{\dfrac{x}{1+x}},$ $dv = dx$, одержимо інтеграл $\int\limits_0^3 \dfrac{\sqrt{x}}{2(x+1)}dx.$ Зробивши в ньому заміну $x = t^2$, одержимо інтеграл $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \dfrac{t^2}{1+t^2}dt$. Наведемо відповідь: $\int\limits_0^3 \arcsin\sqrt{\dfrac{x}{1+x}}dx = \dfrac{4\pi}{3} - \sqrt{3}.$

2.4. Обчислення площ плоских фігур

Нехай функція $y = y(x)$ неперервна і невід’ємна на сегменті $[a;b]$. Площа фігури Φ (мал. 2.1), обмеженої графіком функції $y = y(x),$ відрізком $[a;b]$ осі OX і



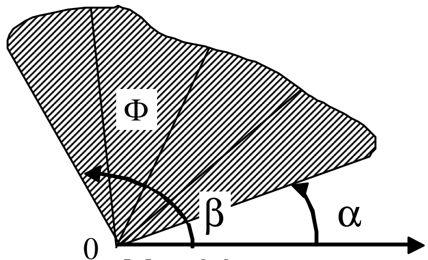
Мал. 2.1

відповідними відрізками прямих $x=a$ та $x=b$ дорівнює

$$S=\int_a^b y(x)dx \qquad (2.10)$$

Фігуру Φ називають криволінійною трапецією.

Функція $y=y(x)$ може бути задана параметричними рівняннями $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t\in[\alpha;\beta]$, де функція $x(t)$ має неперервну невід'ємну похідну на $[\alpha;\beta]$, $x(\alpha)=a$, $x(\beta)=b$, а функція $y(t)$ неперервна і невід'ємна на $[\alpha;\beta]$, тоді площа фігури Φ обчислюється по формулі: $S=\int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt.$ (2.11)



Мал. 2.2

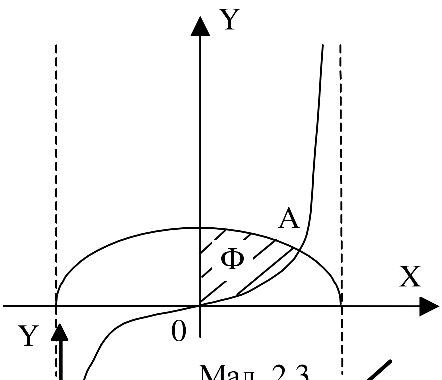
Нехай задана функція $\rho=\rho(\varphi)$, $\varphi\in[a;b]$, де $0<\beta-\alpha<2\pi$, неперервна і невід'ємна на $[\alpha;\beta]$. Площа сектора Φ (мал. 2.2), обмеженого графіком функції $\rho(\varphi)$ в полярних координатах і відповідними відрізками променів $\varphi=\alpha$ і $\varphi=\beta$, обчислюється за формулою:

$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)d\varphi. \qquad (2.12)$$

Знайти площі фігур, обмежених кривими.

1. $y=tgx$, $y=\frac{2}{3}\cos x$, $x=0$. Побудуємо криві, які обмежують фігуру Φ (мал. 2.3).

Знайдемо абсцису точки перетину тангенсоїди і косинусоїди: $\begin{cases} y=tgx; \\ y=\frac{2}{3}\cos x. \end{cases}$ Звідси



Мал. 2.3

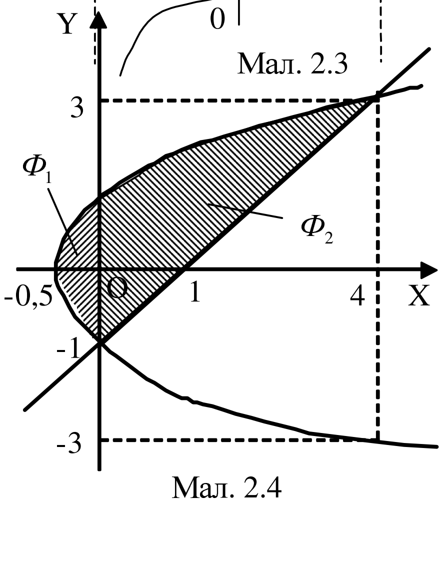
маємо рівняння $2\sin^2 x+3\sin x-2=0$. Оскільки $|\sin x|\le 1$, одержимо $\sin x=\frac{1}{2}$. Враховуючи, що $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, маємо $x_A=\frac{\pi}{6}$,

$$S=\int_0^{\pi/6}\left(\frac{2}{3}\cos x-tgx\right)dx=\left(\frac{2}{3}\sin x+\ln|\cos x|\right)\Bigg|_0^{\pi/6}=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+\ln\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{3}+\ln\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (кв. од.)}$$

2. $y^2=2x+1$, $x-y-1=0$.

Побудуємо криві, які обмежують фігуру Φ (мал. 2.4). Розв'язавши систему рівнянь $\begin{cases} y^2=2x+1; \\ x-y-1=0, \end{cases}$ знайдемо точки перетину параболи та прямої: (0;-



Мал. 2.4

1) і (4;3). $\Phi=\Phi_1\cup\Phi_2$. Враховуючи, що фігура Φ_1 симетрична відносно осі OX, її площу знайдемо як $2\int\limits_{-0,5}^{0}\sqrt{2x+1}dx$. Площу фігури Φ_2 знайдемо як $\int\limits_{0}^{4}\left(\sqrt{2x+1}-(x-1)\right)dx.$ Тут враховано, що довільна пряма, проведена знизу вгору паралельно осі OY, має точку входу на прямій $y=x-1$, а точку виходу – на додатній гілці параболи $y^2=2x+1,\ \ y>0.$ Маємо:

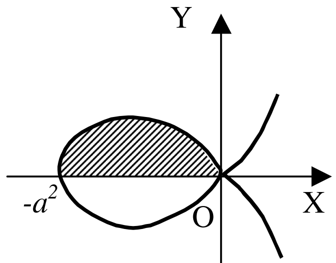
$$S=2\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{0}\sqrt{2x+1}dx+\int\limits_{0}^{4}\left(\sqrt{2x+1}-(x-1)\right)dx=$$

$$=2\cdot\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{0}(2x+1)^{\frac{1}{2}}d(2x+1)+\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{4}(2x+1)^{\frac{1}{2}}d(2x+1)-\left.\frac{(x-1)^2}{2}\right|_0^4=$$

$$=\frac{2}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{-\frac{1}{2}}^{0}+\frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{0}^{4}-\frac{9}{2}+\frac{1}{2}=\ =\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot 27-\frac{1}{3}-\frac{9}{2}+\frac{1}{2}=5\frac{1}{3}\ \text{(кв.од.)}$$

3. $x=t^2-a^2,\ \ y=t^3-a^2t,\ \ a>0.$

Для побудови кривої, яка обмежує фігуру Φ, приймемо до уваги, що $y=t^3-a^2t=t(t^2-a^2)=tx,$ звідки $t=\frac{y}{x}.$ Тоді $x=t^2-a^2=\frac{y^2}{x^2}-a^2,$ звідки $y^2=x^2(x+a^2).$ Точки перетину кривої (а вона симетрична відносно осі OX) знайдемо з умови $y=0$. Маємо $x_1=-a^2,\ \ x_{2,3}=0.$ Врахуємо, що $y^2\ge 0,$ отже, $x\ge -a^2.$ Спочатку крива попаде в точку (0;0), потім у точку $(-a^2;0)$ і, утворивши петлю, знову в точку (0;0) – точку саме перетину кривої. Оскільки $x'(t)\ge 0,$ то $t\ge 0,$ в початковій точці (0;0) $t=a,$ в кінцевій точці половини петлі $t=0$ (мал.2.5) По формулі (2.11):

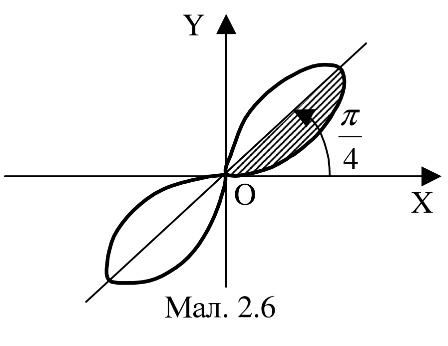


Мал. 2.5

$$S=2\int\limits_{a}^{0}(t^3-ta^2)2tdt=-4\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^3a^2}{3}\right)\Bigg|_0^a=4\left(-\frac{a^5}{5}+\frac{a^5}{3}\right)=\frac{8}{15}a^5.$$

4. $(x^2+y^2)^2=2a^2xy.$

Перейдемо до полярних координат ρ і φ, поклавши $x=\rho\cos\varphi,\ \ y=\rho\sin\varphi.$ Рівняння кривої буде мати вигляд $\rho^4=2a^2\rho^2\cos\varphi\sin\varphi$, звідки $\rho=0$ (крива двічі виходить і виходить в полюс) і $\rho^2=a^2\sin 2\varphi.$ Оскільки $\rho^2\ge 0,\ \ a^2>0$ (маємо на увазі $a>0$), то $\sin 2\varphi\ge 0,$ звідки $0\le 2\varphi\le\pi,\ \ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}.$ З умови зрозуміло,



Мал. 2.6

що $xy \ge 0$, отже, крива розміщена в I і III чвертях симетрично і відносно початку координат, і відносно бісектриси $y = x.$ Зауважимо, що найбільше значення ρ буде мати при $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Враховуючи сказане, будуємо дану криву (мал. 2.6). Площу фігури знайдемо по формулі (2.12):

$$S = 4\int_0^{\pi/4} \frac{1}{2}\rho^2(\varphi)d\varphi = 2\int_0^{\pi/4} a^2 \sin 2\varphi d\varphi = 2a^2\left(-\frac{1}{2}\cos 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi/4} = -a^2\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = a^2$$

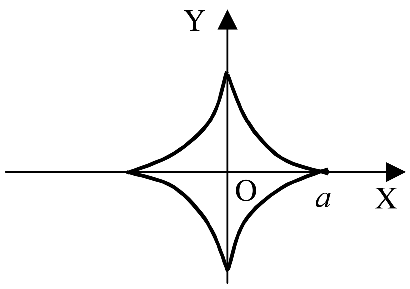
2.5. Обчислення довжин кривих

1. Знайдемо довжину дуги кривої $y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x, \quad 0 \le x \le \frac{9}{16}$. Скористаємося відомою формулою

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)}dx. \tag{2.13}$$

$y' = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}},$ тоді $1 + y'^2(x) = 1 + \frac{1-x}{1+x} = \frac{2}{1+x},$ отже, довжина дуги $l = \int_0^{\frac{9}{16}} \sqrt{\frac{2}{1+x}}dx = \sqrt{2}\int_0^{\frac{9}{16}} (1+x)^{-\frac{1}{2}} d(1+x) = 2\sqrt{2}\sqrt{1+x}\Big|_0^{\frac{9}{16}} = 2\sqrt{2}\left(\frac{5}{4} - 1\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

2. Знайти довжину дуги астроїди $x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t, \quad 0 \le t \le 2\pi$. (мал. 2.7)



Мал. 2.7

Приймаючи до уваги, що крива задана в параметричній формі, використаємо відому формулу для знаходження довжини дуги в цьому випадку: $l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x^{12}(t) + y^{12}(t)}dt,$ де t_1 і t_2 – відповідно значення параметра t на початку і в кінці дуги. Враховуючи симетричність кривої відносно осей координат, одержуємо:

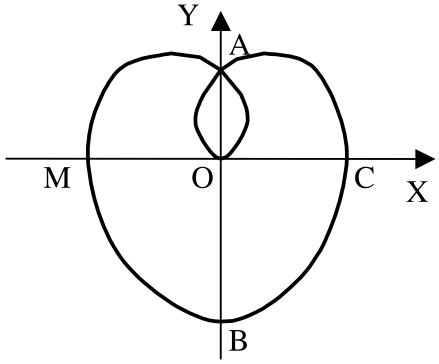
$$l = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t}dt =$$

$$= 12a\int_0^{\pi/2} \sin t\cos t dt = 12a\int_0^{\pi/2} \sin t d\sin t = 6a\sin^2 t\Big|_0^{\pi/2} = 6a. \tag{2.14}$$

3. Знайти довжину замкненої кривої $\rho = a\sin^3\frac{\varphi}{3}$. Для знаходження довжини дуги, заданої в полярних координатах, використаємо відому формулу:

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}d\varphi, \tag{2.15}$$

де $\rho=\rho(\varphi)$, $\varphi\in[\alpha;\beta]$, причому $\rho(\varphi)-$ неперервно диференційована на $[\alpha;\beta]$ функція. Оскільки $\rho\ge 0$, то $\sin\frac{\varphi}{3}\ge 0$. Звідси $0\le\varphi\le 3\pi$. При зміні φ від 0 до $\frac{3}{2}\pi$ довжина радіус-вектора ρ зростає від 0 до α, а кінець радіус-вектора описує дугу *OAMB* (мал. 2.8). Потім при зміні φ від $\frac{3}{2}\pi$ до 3π величина зменшується від α до 0, при цьому описується дуга *BCAO*, симетрична дузі *OAMB* відносно прямої $\varphi=\pm\frac{\pi}{2}$. Тепер обчислимо довжину



Мал. 2.8

кривої $\rho'(\varphi)=a\sin^2\frac{\varphi}{3}\cos\frac{\varphi}{3}$.

$$\sqrt{\rho^2(\varphi)+\rho'^2(\varphi)}=\sqrt{a^2\sin^6\frac{\varphi}{3}+a^2\sin^4\frac{\varphi}{3}\cos^2\frac{\varphi}{3}}=a\sin^2\frac{\varphi}{3}.$$

$$l=a\int\limits_a^{3\pi}\sin^2\frac{\varphi}{3}d\varphi=\frac{a}{2}\int\limits_0^{3\pi}\left(1-\cos\frac{2\varphi}{3}\right)d\varphi=\frac{a}{2}\left[\varphi-\frac{3}{2}\sin\frac{2\varphi}{3}\right]\Bigg|_0^{3\pi}=\frac{3a\pi}{2}.$$

4. Знайти довжину дуги просторової кривої $x^3=3a^2y$, $2xz=a^2$, $\frac{a}{3}\le y\le 9a$.

Довжина просторової кривої, заданої параметричними рівняннями $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$, $t\in[a;b]$, де $x(t)$ $y(t)$ $z(t)$ – неперервно диференційовані на $[a;b]$ функції, дорівнює: $l=\int\limits_a^b\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}dt$. За параметр виберемо змінну y, тоді

$x=\sqrt[3]{3a^2y}$, $y=y$, $z=\frac{a^2}{2x}=\frac{a^2}{2\sqrt[3]{3a^2y}}$, причому $\frac{a}{3}\le y\le 9a$. $x'_y=\sqrt[3]{3a^2}\cdot\frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}$;

$z'_y=-\frac{a^2}{2\sqrt[3]{3a^2}}\cdot\frac{1}{3y\sqrt[3]{y}}$. Тоді після спрощень $l=\int\limits_{\frac{a}{3}}^{9a}\left(1+\frac{a^{\frac{4}{3}}}{6\sqrt[3]{3}}y^{-\frac{4}{3}}\right)dy=\left(y-\frac{a^{\frac{4}{3}}}{2\sqrt[3]{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{y}}\right)\Bigg|_{\frac{a}{3}}^{9a}=9a$.

2.6. Обчислення об'ємів тіл

Нехай функція $y=y(x)$ неперервна і невід'ємна на сегменті $[a;b]$. Об'єм тіла утвореного обертанням навколо осі OX криволінійної трапеції Φ (мал. 2.1), обмеженої графіком функції $y(x)$, відрізками прямих $x=a$ та $x=b$ і відрізком осі OX, дорівнює

$$V=\pi\int\limits_a^b y^2(x)dx. \qquad (2.17)$$

Якщо функція $y = y(x)$ задана параметричними рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha;\beta]$, де функція $x(t)$ має неперервну невід'ємну похідну на $[\alpha;\beta]$ і $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$, а функція $y(t)$ неперервна на $[\alpha;\beta]$, то об'єм V тіла, утвореного обертанням тієї ж криволінійної трапеції навколо осі OX, дорівнює

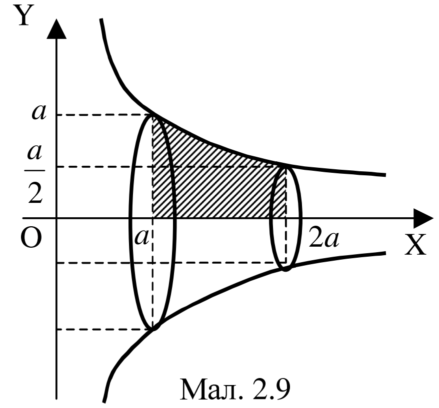
$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} y^2(t) x'(t) dt. \tag{2.18}$$

Нехай тіло розміщене в просторі $OXYZ$ між площинами $z = z_0$ $z = z_0 + H$ кожен переріз тіла площиною, перпендикулярною до осі OZ, має площу $S(z)$, де $S(z)$ – інтегровна на $[z_0; z_0 + H]$ функція. Якщо це тіло має об'єм, то він дорівнює:

$$V = \int_{z_0}^{z_0+H} S(z) dz. \tag{2.19}$$

Аналогічні формули мають місце, якщо замість осі OZ взяти вісь OX або OY.

Знайти об'єм тіла, утвореного при обертанні навколо осі OX фігури, обмеженої данними кривими.



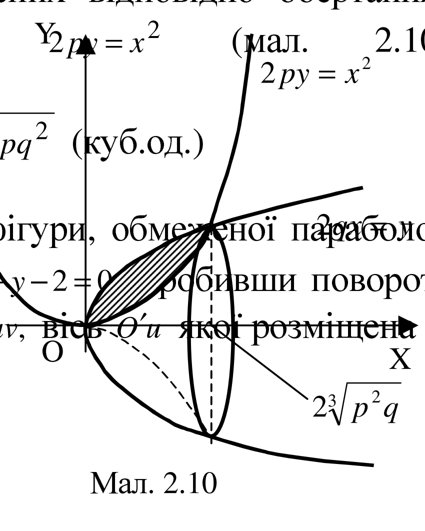
Мал. 2.9

1. $xy = a^2$, $y = 0$, $x = a$, $x = 2a$ $(a > 0)$. В утвореній фігурі обертання приймають участь три прямі та рівностороння гіпербола (мал. 2.9). По формулі (2.17) $V = \pi \int_a^{2a} y^2(x) dx = \pi \int_a^{2a} \frac{a^4}{x^2} dx = \pi a^4 \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_a^{2a} =$ $= \pi a^4 \left(-\frac{1}{2a} + \frac{1}{a} \right) = \frac{\pi a^3}{2}$ (куб.од.) На мал. 2.9 заштрихована криволінійна трапеція, яку обертають навколо осі OX.

2. $2py = x^2$, $2qx = y^2$, $p > 0$, $q > 0$.

Знайдемо точки перетину двох парабол. Розв'яжемо систему $\begin{cases} 2py = x^2 \\ 2qx = y^2. \end{cases}$ Маємо $y = \frac{x^2}{2p}$, тоді $2qx = \frac{x^4}{4p^2}$, звідки $x_1 = 0$, $x_2 = 2\sqrt[3]{p^2 q}$. Об'єм V тіла обертання знайдемо як різницю об'ємів двох тіл обертання, утворених відповідно обертанням параболи $2qx = y^2$ і другої параболи $2py = x^2$ (мал. 2.10):

$$V = \pi \int_0^{2\sqrt[3]{p^2 q}} \left(2qx - \frac{x^4}{4p^2} \right) dx = \pi \left(qx^2 - \frac{x^5}{20p^2} \right) \Bigg|_0^{2\sqrt[3]{p^2 q}} = \frac{12}{5} \pi pq \sqrt[3]{pq^2} \text{ (куб.од.)}$$



Мал. 2.10

3. Знайти об'єм тіла, утвореного при обертанні фігури, обмеженої параболою $2y = 4 - x^2$ і прямою $x + y - 2 = 0$, навколо прямої $x + y - 2 = 0$. Зробивши поворот і зсув (перенос), перейдемо в систему координат $O'uv$, вісь $O'u$ якої розміщена на

Мал. 2.11

осі обертання прямої $x+y-2=0$ (мал.2.11). Кут повороту, як це витікає з рівняння прямої, дорівнює $-\frac{\pi}{4}$. Формули переходу мають вигляд: $u=\frac{x-y+2}{\sqrt{2}}$, $v=\frac{x+y-2}{\sqrt{2}}$. В цій системі координат парабола $2y=4-x^2$ буде задана параметричними рівняннями $u=u(x)=\frac{x-y(x)+2}{\sqrt{2}}$, $v=v(x)=\frac{x+y(x)-2}{\sqrt{2}}$, де $y(x)=\frac{1}{2}(4-x^2)$. Дуга $O'A$ параболи відповідає відрізку $0\le x\le 2$. Об'єм тіла обертання

$$V=\pi\int_0^2 v^2(x)u'(x)dx=\frac{\pi}{8\sqrt{2}}\int_0^2(2x-x^2)^2\left(x+\frac{x^2}{2}\right)' dx=\frac{2\sqrt{2}}{15}\pi$$

Нехай функція $\rho=\rho(\varphi)$ неперервна на $[\alpha;\beta]$, $0\le\alpha\le\beta\le 2\pi$. Можна довести, що об'єм тіла, утвореного при обертанні $\alpha\le\varphi\le\beta$, $0\le\rho\le\rho(\varphi)$ навколо полярного променя дорівнює:

$$V=\frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta\rho^3(\varphi)\sin\varphi d\varphi. \tag{2.20}$$

4. Знайти об'єм тіла, утвореного при обертанні навколо полярного променя фігури, заданої в полярних координатах нерівностями: $0\le\rho\le 2a\frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi}$, $0\le\varphi\le\frac{\pi}{3}$ $(a>0)$. По формулі (2.20) $V=\frac{2}{3}\pi\int_0^{\pi/3}8a^3\frac{\sin^6\varphi}{\cos^3\varphi}\sin\varphi d\varphi=-\frac{16\pi a^3}{3}\int_0^{\pi/3}\frac{(1-\cos^2\varphi)^3}{\cos^3\varphi}d(\cos\varphi)$.

Покладемо $\cos\varphi=t$, тоді $-\sin\varphi d\varphi=dt$, а змінна t змінюється від 1 до $\frac{1}{2}$. Маємо

$$V=\frac{16\pi a^3}{3}\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{(1-t^2)^3}{t^3}dt=\frac{16\pi a^3}{3}\left(-\frac{1}{2t^2}-3\ln|t|+\frac{3}{2}t^2-\frac{t^4}{4}\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^1=$$

$$=\frac{16\pi a^3}{3}(153:64-3\ln 2)=\frac{\pi a^3}{4}(51-64\ln 2).$$

5. Знайти об'єм трьохосьового еліпсоїда $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Для розв'язування задачі скористаємося формулою (2.19) і тим відомим фактом, що площа, обмежена еліпсом з півосями a і b, дорівнює πab. Перетин еліпсоїда площиною $z=const$ представляє собою еліпс, причому його площа – функція $S(z)$. Зрозуміло, що $|z|\le C$. Цей перетин має рівняння $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{z^2}{c^2}=\frac{c^2-z^2}{c^2}$, або $\dfrac{x^2}{\dfrac{a^2(c^2-z^2)}{c^2}}-\dfrac{y^2}{\dfrac{b^2(c^2-z^2)}{c^2}}=1.$ Тоді $S(z)=\pi\sqrt{\dfrac{a^2(c^2-z^2)}{c^2}}\sqrt{\dfrac{b^2(c^2-z^2)}{c^2}}=\dfrac{\pi ab(c^2-z^2)}{c^2}.$

По формулі (2.19) об'єм еліпсоїда $V=\int\limits_{-c}^{c}\dfrac{\pi ab(c^2-z^2)}{c^2}dz=\dfrac{2\pi ab}{c^2}\int\limits_{0}^{c}(c^2-z^2)dz=\dfrac{2\pi ab}{c^2}\left(c^2z-\dfrac{z^3}{3}\right)\Bigg|_0^c=$

$=\dfrac{2\pi ab}{c^2}\left(c^3-\dfrac{c^3}{3}\right)=\dfrac{4\pi ab}{3c^2}c^3=\dfrac{4}{3}\pi abc.$ Зокрема, для кулі маємо $a=b=c=R$ та $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3.$

2.7. Обчислення площ поверхонь

Нехай $y=y(x)$ – неперервна диференційована на сегменті $[a;b]$ функція. Площа поверхні, утвореної при обертанні графіка цієї функції навколо осі OX, дорівнює:

$$P=2\pi\int\limits_a^b|y(x)|\sqrt{1+y'^2(x)}dx. \tag{2.21}$$

Знак модуля враховують в залежності від того, в якій пів площині (нижній чи верхній) розміщена крива. У випадку параметричного задання кривої маємо

$$P=2\pi\int\limits_\alpha^\beta|y(t)|\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt. \tag{2.22}$$

При аналогічних умовах площа поверхні, утвореної при обертанні кривої навколо осі OY, відповідно дорівнює:

$$P=2\pi\int\limits_c^d|x(y)|\sqrt{1+x'^2(y)}dy, \tag{2.21'}$$

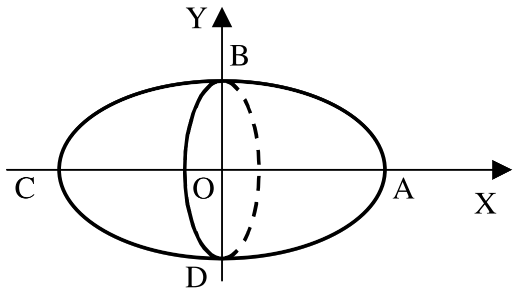
$$P=2\pi\int\limits_\alpha^\beta|x(t)|\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt. \tag{2.22'}$$

Нагадаємо, що площа поверхні, утвореної при обертанні навколо полярного променя кривої $\rho=\rho(\varphi),\ 0\le\varphi_1\le\varphi\le\varphi_2\le\pi,$ дорівнює

$$P=2\pi\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho(\varphi)\sqrt{\rho^2(\varphi)+\rho'^2(\varphi)}\sin\varphi d\varphi, \tag{2.23}$$

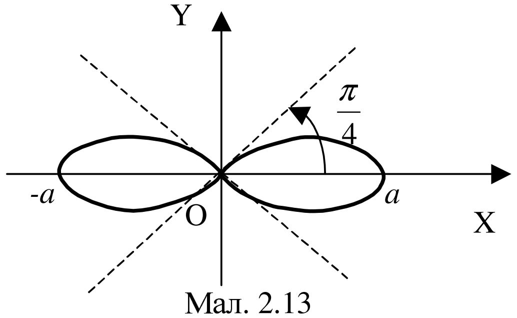
де $\rho(\varphi)$ – неперервна диференційована на $[\varphi_1;\varphi_2]$ функція. При цих же умовах площа поверхні, утвореної обертанням навколо променя $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$ кривої $\rho=\rho(\varphi),$ $-\dfrac{\pi}{2}\le\varphi_1\le\varphi\le\varphi_2\le\dfrac{\pi}{2},$ дорівнює:

$$P=2\pi\int\limits_{\varphi 1}^{\varphi_2}\rho(\varphi)\sqrt{\rho^2(\varphi)+\rho'^2(\varphi)}\cos\varphi d\varphi. \tag{2.24}$$



Мал. 2.12

1. Знайти площу поверхні, утвореної при обертанні еліпса $x^2+4y^2=36$ навколо осі OY (мал. 2.12). Дугу DAB еліпса можна розглядати як графік функції $x=2\sqrt{9-y^2}$, $-3\le y\le 3$, або в параметричній формі $x=6\cos t,\ \ y=3\sin t,\ \ t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Шукану площу поверхні знаходимо по формулі (2.22): $P=2\pi\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}6\cos t\sqrt{36\sin^2 t+9\cos^2 t}\,dt.$ Після заміни $\sin t=\frac{1}{\sqrt{3}}sh\varphi$ одержимо: $P=2\pi\sqrt{3}\int\limits_{-arsh\sqrt{3}}^{arsh\sqrt{3}}ch^2\varphi d\varphi=24\pi\sqrt{3}\left(2\sqrt{3}+\ln\left(2+\sqrt{3}\right)\right)$.



Мал. 2.13

2. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням лемніскати Бернуллі $\rho=a\sqrt{\cos 2\varphi}$ навко-ло полярного променя. Повинно бути $\cos 2\varphi\ge 0,$ тобто $-\frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{\pi}{4}$ (права гілка лемніскати), або $\frac{3\pi}{4}\le\varphi\le\frac{5\pi}{4}$ (ліва гілка лемніскати) (мал. 2.13). З урахуванням симетрії тіла обертання по формулі (2.23):

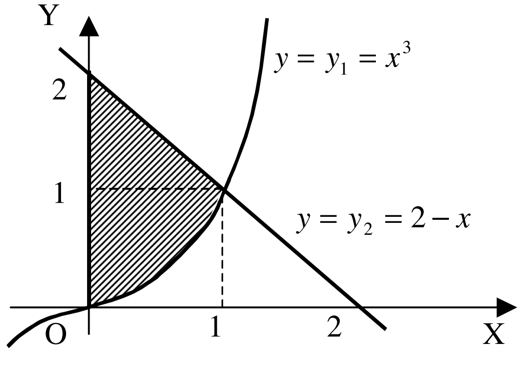
$$P=2\cdot 2\pi\int\limits_0^{\pi/4}\frac{a\sqrt{\cos 2\varphi}\sin\varphi a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}d\varphi=$$

$$4\pi\int\limits_0^{\pi/4}a^2\sin\varphi d\varphi=2\pi a^2\left(2-\sqrt{2}\right).$$

2.8. Застосування означених інтегралів до питань механіки, фізики, техніки

1. Знайти масу m фігури (густина $\gamma(x)=1$), статичні моменти M_x і M_y, моменти інерції I_x та I_y відносно осей OX і OY, координати x_c та y_c центра мас фігури, обмеженої кривими $y=x^3$, $x+y=2$, $x=0$.

Зобразимо задану фігуру (мал. 2.14). Відомо, що



Мал. 2.14

$$m = \int_a^b (y_2(x) - y_1(x))\gamma(x)dx; \qquad (2.25)$$

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b \left(y_2^2(x) - y_1^2(x)\right)\gamma(x)dx;$$

$$M_y = \int_a^b x(y_2(x) - y_1(x))\gamma(x)dx; \qquad (2.26)$$

$$x_c = \frac{M_y}{m}, \ \ y_c = \frac{M_x}{m}; \qquad (2.27)$$

$$I_x = \frac{1}{3}\int_a^b \left(y_2^3(x) - y_1^3(x)\right)\gamma(x)dx,$$

$$I_y = \int_a^b x^2(y_2(x) - y_1(x))\gamma(x)dx. \qquad (2.28)$$

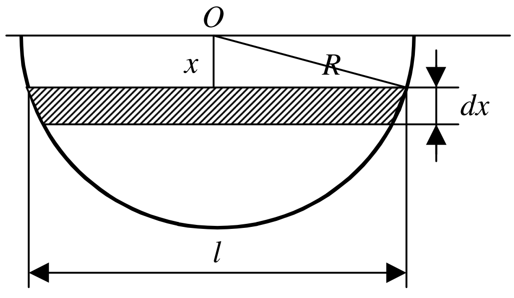
Маємо: $m = \int_0^1 (2 - x - x^3)dx = \left(2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{5}{4};$

$$M_x = -\frac{1}{2}\int_0^1 (2-x)^2 d(2-x) - \frac{1}{2}\int_0^1 x^6 dx = \left(-\frac{(2-x)^3}{6} - \frac{1}{14}x^7\right)\Bigg|_0^1 = \frac{23}{21}; \quad M_y = \int_0^1 x(2 - x - x^3)dx = \frac{7}{15}.$$

По формулі (2.27) маємо $x_c = \frac{28}{75}$; $y_c = \frac{92}{105}$.

$$I_x = \frac{1}{3}\int_0^1 \left((2-x)^3 - x^9\right)dx = \frac{1}{3}\left(-\frac{(2-x)^4}{4} - \frac{x^{10}}{10}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{73}{60}; \ \ I_y = \int_0^1 ((2-x) - x^3)x^2 dx = \frac{1}{4}.$$

2. Знати тиск, що діє на півкруг, вертикально занурений в рідину, якщо його радіус дорівнює R, а верхній діаметр лежить на вільній поверхні рідини (мал.2.15). Питома вага рідини дорівнює γ.



Мал. 2.15

Проводимо горизонтальну смужку на глибині x. Нехай ширина смужки dx, а довжина l. Приймаючи цю смужку за елемент площі, для диференціала площі одержимо вираз $ds = ldx$, але $x^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = R^2$, звідки $l = 2\sqrt{R^2 - x^2}$, отже: $ds = 2\sqrt{R^2 - x^2}dx.$ Сила тиску рідини на елементарну смужку $dP = \gamma x ds = 2\gamma x\sqrt{R^2 - x^2}dx.$ Таким чином

$$P = \gamma\int_0^R 2x\sqrt{R^2 - x^2}dx = -\gamma\int_0^R \left(R^2 - x^2\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}d\left(R^2 - x^2\right) = -\gamma\left[\frac{2}{3}\left(R^2 - x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]\Bigg|_0^R = \frac{3}{2}\gamma R^3.$$

3. Яку роботу необхідно виконати, щоб розтягнути пружину на 4см, якщо відомо, що від навантаження в $1H$ вона розтягнулася на 1см?

Згідно з законом Гука сила F, яка розтягнула пружину на x м, дорівнює: $F = kx$. Коефіцієнт пропорційності k знайдемо з умови: якщо $x = 0{,}01$, то $F = 1H$, отже $k = \frac{1}{0{,}01} = 100$ та $F = 100x$. Тоді $A = \int_0^{0{,}04} 100x\,dx = 50x^2 \Big|_0^{0{,}04} = 0{,}08$ (Дж).

4. Ракета з початковою масою m_0 з стану спокою проходить ділянку довжини l з постійним прискоренням a, зазнаючи дію сталої сили опору F. Швидкість витікання горючих газів стала і дорівнює u. Знайти витрати топлива на ділянці l. Рух матеріальної точки змінної маси $m(t)$ описується рівнянням І.В.Мещерського

$$m(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{F}_p, \tag{2.29}$$

де $\vec{F}$ — рівнодійна сил, прикладених до точки; $\vec{F}_p$ — реактивна сила, яка визначається з формули

$$\vec{F}_p = \vec{u}\frac{dm}{dt}, \tag{2.30}$$

де $\vec{u}$ – швидкість частинок маси, які приєднуються чи відділяються відносно даної точки. В даному випадку $v = at,$ зовнішня сила F; враховуючи, що вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ протилежно направлені, з (2.29) і (2.30) одержуємо $ma = -F - u\frac{dm}{dt};$ звідси

$$\frac{dm}{dt} = \frac{ma+F}{u}; \quad \frac{1}{ma+F}\cdot\frac{dm}{dt} = -\frac{1}{u}; \quad \int_0^t \frac{m'}{ma+F}dt = -\frac{t}{a}, \quad \frac{1}{a}\ln(ma+F)\Big|_0^t = -\frac{t}{u}, \quad \ln\frac{ma+F}{m_0a+F} = -\frac{a}{u}t.$$

Враховуючи, що $\frac{at^2}{2} = e, \quad t = \sqrt{\frac{2l}{a}},$ знаходимо $m = -\frac{F}{a} + \left(m_0 + \frac{F}{a}\right)e^{-\frac{\sqrt{2ae}}{u}}$ і витрати дорівнюють: $m_0 - m = \left(m_0 + \frac{F}{a}\right)\left(1 - e^{-\frac{\sqrt{2ae}}{u}}\right).$

5. Електричне коло містить опір R і має коефіцієнт самоіндукції L. В початковий момент струм в колі відсутній. В коло подається зовнішня напруга $v(t) = v_0\cdot\frac{t}{T},$ де $T = \frac{L}{R}.$ Знайти залежність $I(t)$ струму в колі від часу. Струм $I(t)$ та швидкість його зміни $\frac{dI}{dt}$ зв’язані рівнянням

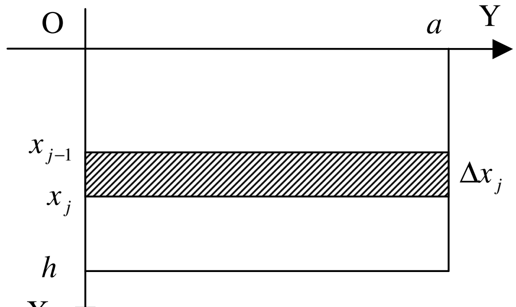
$$RI(t) = v(t) - L\frac{dI}{dt}, \tag{2.31}$$

з якого випливає, що $\frac{dI}{dt} + \frac{1}{T}I = \frac{v_0}{LT}t.$ Помножимо обидві частини цього рівняння на $e^{\frac{t}{T}}$ і одержимо, що ліва частина $e^{\frac{t}{T}}\frac{dI}{dt} + \frac{1}{T}e^{\frac{t}{T}}$ представляє похідну добутку

$e^{\frac{t}{T}} \cdot I(t)$, тому $\frac{d}{dt}\left(e^{\frac{t}{T}} \cdot I(t)\right) = \frac{v_0}{LT} t e^{\frac{t}{T}}$. Звідси $\int_0^t \frac{d}{d\tau}\left(e^{\frac{\tau}{T}} \cdot I(\tau)\right) d\tau = \frac{v_0}{LT}\int_0^t \tau e^{\frac{\tau}{T}} d\tau$. Тут ліва частина дорівнює $e^{\frac{t}{T}} I(t)$, оскільки $I(0)=0$. Правий інтеграл обчислимо, застосовуючи формулу інтегрування по частинам, в результаті чого одержимо: $I(t) = \frac{v_0}{R}\left(\frac{t}{T} - 1 + e^{-\frac{t}{T}}\right)$.

6. Визначити витрати води через прямокутний водозлив висотою h і довжиною a. Швидкість, з якою рідина витікає з досить малого отвору в посудині, що знаходиться на глибині h:

$$v = \mu\sqrt{2gh}; \tag{2.32}$$



Мал. 2.16

Для води приймають $\mu = 0{,}6$. Нехай $\{x_j\}$, $j = 0,1,...,n$ – розбиття висоти водозлива (тобто сегменту $[0;h]$). В точках прямокутника висоти $\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$, $j = 0,1,...,n$ і довжини a (мал.2.16) швидкість витікання води $v_j = \mu\sqrt{2g\xi_i}$, де $x_{j-1} \le \xi_j \le x_j$. Об'єм води, що витікає в одиницю часу з такого прямокутника, дорівнює: $\Delta Q_j = v_j \Delta x_j a = \mu\sqrt{2g}a\sqrt{\xi_i}\Delta x_j$. Повний об'єм води, який проходить в одиницю часу через водозлив, тобто витрати води, дорівнює: $Q = \sum_{j=1}^{n}\Delta Q_j = \mu\sqrt{2g}a\sum_{j=1}^{n}\sqrt{\xi_i}\Delta x_j$. В правій частині цієї рівності стоїть інтегральна сума для інтегралу $\int_0^h \sqrt{x}dx$. В граничному випадку одержимо: $Q = \mu\sqrt{2g}a\int_0^h \sqrt{x}dx = \frac{3}{2}\mu\sqrt{2g}ah^{\frac{3}{2}}$. Прийнявши $\mu = 0{,}6$, будемо мати $Q = 0{,}4\sqrt{2g} \cdot ah^{\frac{3}{2}}$.

2.9. Типові завдання

1. Для даної функції $f(x)$ знайти верхню та нижню суми Дарбу на відрізку $[a,b]$, розділяючи його на n рівних частин та знайти їх границі при $n \to \infty$.
2. Знайти значення інтегралу.
3. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій.
4. Обчислити довжину дуги кривої

5. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо вісі ($Ox - Vx$, $Oy - Vy$) фігури, обмеженої графіками функцій.

ВАРІАНТ 1

1. $f(x) = (x-1)(x+2)x$, $a = -1$, $b = 0$.

2. а) $\int\limits_0^{\pi}(8x^2 + 16x + 17)\cos 4x dx$ б) $\int\limits_{\arcsin\frac{1}{\sqrt{37}}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{6tgxdx}{3\sin 2x + 5\cos^2 x}$ в) $\int\limits_2^9 \frac{xdx}{\sqrt[3]{x-1}}$

г) $\int\limits_0^{2\pi} \sin^4 3x \cos^4 3x dx$ д) $\int\limits_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx$

3. $y = arctg\sqrt{x}$, $y + x^2 = 0$, $x = 1$.

4. а) $x = a(sht - t)$, $y = a(cht - 1)$, $0 \le y \le 7a$, $x \ge 0$ б) $\rho = \frac{a}{\cos^4\frac{\varphi}{4}}$ (довжина петлі)

5. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, $x^2 - \frac{y^2}{15} = 1$, $x \ge 1$. Знайти Vx.

ВАРІАНТ 2

1. $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$, $a = 0$, $b = 2$.

2. а) $\int\limits_{-3}^{0}(x^2 + 6x + 9)\sin 2x dx$ б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2tg^2 x - 11tgx - 22}{4 - tgx}dx$ в) $\int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{x^4 - x^2 - 1}}$

г) $\int\limits_0^{\pi} 2^4 \sin^2\frac{x}{2}\cos^6\frac{x}{2}dx$ д) $\int\limits_0^3 \frac{dx}{(9+x^2)^{3/2}}$

3. $y = \frac{10}{x^2+4}$, $y = \frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + 4}$.

4. а) $x = \int\limits_0^t \cos\varphi^2 d\varphi$, $y = \int\limits_0^t \sin\varphi^2 d\varphi$, $0 \le t \le t_0$ (клотоїда) б) $\rho = a\sin^4\frac{\varphi}{4}$

5. $y = x\sqrt{\frac{3+3x}{3-x}}$, $0 \le x \le 2$, $y = 6$, $x = 0$. Знайти Vy.

ВАРІАНТ 3

1. $f(x) = 2^x + x^3$, $a = 1$, $b = 2$.

2. а) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(x^2+17{,}5\right)\sin 2x dx$ б) $\int_{-arctg\frac{1}{3}}^{0}\frac{3tgx+1}{2\sin 2x-5\cos 2x+1}dx$ в) $\int_0^1\frac{x^3+x}{x^4+1}dx$

г) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}2^8\sin^2 x\cos^6 xdx$ д) $\int_0^{\frac{\sqrt{5}}{2}}\frac{dx}{\sqrt{(5-x^2)^3}}$

3. $y=2x^2e^x$, $y=-x^3e^x$.

4. а) $x=\sin^4 t$, $y=\cos^2 t$, $0\le t\le\frac{\pi}{2}$ б) $\rho=\frac{a}{\sin^3\frac{\varphi}{3}}$ (довжина петлі)

5. $y^2(x-a)+x^2(x+a)=0$, $0\le x\le\frac{a}{2}$, $x=\frac{a}{2}$. Знайти Vx.

ВАРІАНТ 4

1. $f(x)=x^3-x^2+1$, $a=-2$, $b=-1$.

2. а) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{3}\left(3x-x^2\right)\sin 2x dx$ б) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{arctg3}\frac{1+ctgx}{(\sin x+2\cos x)^2}dx$ в) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\cos x+\sin x}{(x\sin x)^2}dx$

г) $\int_0^{\pi}2^4\sin^4\left(\frac{x}{2}\right)\cos^4\left(\frac{x}{2}\right)dx$ д) $\int_1^2\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}dx$

3. $y=2-4x^2+4x^3-x^4$, $y=0$, $x=x_1$, $x=x_2$, де x_1 і x_2 – точки максимуму функції.

4. а) $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, $0\le t\le t_0\le\frac{\pi}{2}$, $a\ne b$ б) $\rho=ath\frac{\varphi}{2}$, $0\le\varphi\le\varphi_0$

5. $y=\frac{a^3}{x^2+a^3}$, $y=\frac{a}{2}$. Знайти Vy.

ВАРІАНТ 5

1. $f(x)=e^x+x$, $a=1$, $b=e$.

2. а) $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{(\arccos x)^3-1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ б) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{x^4dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}$ в) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}2^8\sin^2 x\cos^4 xdx$

г) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(7+3tgx)dx}{(\sin x+2\cos x)^2}$ д) $\int_1^{e^2}\frac{\ln^2 xdx}{\sqrt{x}}$

3. $x^2+y^2=2$, $y^2=2x-1$, $x\ge\frac{1}{2}$.

4. а) $x=\left(t^2-2\right)\sin t+2t\cos t$, $y=\left(t^2-2\right)\cos t-2t\sin t$, $0\le t\le\pi$ б) $\rho=a\varphi^3$, $0\le\varphi\le 4$

5. $y=e^{\alpha x}\sin\pi x$, $n-1\le x\le n$, $y=0$, $n\in N$. Знайти Vx.

ВАРІАНТ 6

1. $f(x)=(x+1)\left(x^2+1\right)$, $a=3$, $b=4$.

2. а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} tgx\ln\cos xdx$ б) $\int\limits_{\arcsin\frac{2}{\sqrt5}}^{\arcsin\frac{3}{\sqrt{10}}}\frac{(2tgx+5)dx}{(5-tgx)\sin 2x}$ в) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0}2^8\sin^4 x\cos^8 xdx$

г) $\int\limits_1^e\frac{\ln^2 xdx}{\sqrt[3]{x^2}}$ д) $\int\limits_0^{\sqrt3}\frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$

3. $y=4^{-x}$, $y=-\log_4 x$, $y=0$, $x=0$.

4. а) $x=a\left(\cos t+\ln tg\frac{t}{2}\right)$, $y=a\sin t$, $0\le t\le t_0\le\frac{\pi}{2}$ (трактриса).

б) $\rho=a(1-\sin\varphi)$, $-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le-\frac{\pi}{6}$

5. $y=x$, $y=x+\sin^2 x$, $0\le x\le\pi$. Знайти Vy.

ВАРІАНТ 7

1. $f(x)=1+x+2^{-x}$, $a=1$, $b=2$.

2. а) $\int\limits_1^e\frac{x^2+\ln x^2}{x}dx$ б) $\int\limits_{\arccos\frac{1}{\sqrt{10}}}^{0}\frac{3tg^2x-50}{2tgx+7}dx$ в) $\int\limits_0^{\pi}2^4\sin^2 2x\cos^6 2xdx$

г) $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{(5-x^2)^3}}$ д) $\int\limits_0^1(x+1)\ln^2(x+1)dx$

3. $y=x^2$, $y=x^2+x-1$, $y=\frac{\sqrt{5x}}{2}$, $y\le x^2$.

4. а) $x=t-\frac{1}{2}sh2t$, $y=2cht$, $0\le t\le t_0$ б) $\rho=a\varphi^4$, $0\le\varphi\le 3$.

5. $y=\sqrt{\frac{x^2-1}{x-3}}$, $-1\le x\le 1$, $y=0$. Знайти Vx.

ВАРІАНТ 8

1. $f(x)=(x+1)(x-2)(x+3)$, $a=0$, $b=1$.

2. а) $\int_{2}^{3}(x-1)^3\ln^2(x-1)dx$ б) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{5tgx+2}{2\sin 2x+5}dx$ в) $\int_{1}^{3}\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)}dx$

г) $\int_{0}^{\pi}2^8\sin^2 x\cos^6 xdx$ д) $\int_{0}^{4}\frac{dx}{\sqrt{(16+x^2)^3}}$

3. $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=0$.

4. а) $x=2t^2$, $y=t\left(\frac{1}{4}-t^2\right)$ (довжина петлі)

б) Знайти довжину дуги кардіоїди $\rho=2(1-\cos\varphi)$, яка знаходиться всередині кола $\rho=1$.

5. $y=e^x+6$, $y=e^{2x}$, $x=0$. Знайти Vy.

ВАРІАНТ 9

1. $f(x)=\left(x^2-2x+1\right)(x+2)$, $a=-1$, $b=1$.

2. а) $\int_{-1}^{0}(x+2)^3\ln^2(x+2)dx$ б) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}}\frac{4tgx-5}{4\cos^2 x-\sin 2x+1}dx$ в) $\int_{0}^{\sin 1}\frac{(\arcsin x)^2+1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

г) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}2^8\sin^4 x\cos^4 xdx$ д) $\int_{0}^{\sqrt{2}}\frac{x^4dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$

3. $y=3^x$, $y=\frac{9}{4}\left(3^{-x}+1\right)+\frac{8}{3}$, $y=9$.

4. а) $x=t^2$, $y=t\left(\frac{1}{3}-t^2\right)$ (довжина петлі)

б) Знайти довжину дуги логарифмічної спіралі $\rho=e^{a\varphi}$, яка знаходиться всередині кола $\rho=1$, ($a>0$).

5. $y=\sqrt{\frac{9+x}{9-3x}}$, $0\le x\le\frac{3}{2}$, $y=0$. Знайти Vx.

ВАРІАНТ 10

1. $f(x)=2x^3+1$, $a=-3$, $b=-1$.

2. а) $\int_{0}^{2}(x+1)^2\ln^2(x+1)dx$ б) $\int_{-\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}}^{0}\frac{(11-3tgx)dx}{tgx+3}$ в) $\int_{-\pi}^{0}2^8\sin^6 x\cos^2 xdx$

г) $\int_{0}^{\sqrt{3}}\frac{x-(arctgx)^4}{1+x^2}dx$ д) $\int_{0}^{2\sqrt{2}}\frac{x^4dx}{\sqrt{(16-x^2)^3}}$

3. $y=x+1$, $x=\sin \pi y$, $y=0$, $0\le y\le 1$.

4. а) $x=\frac{c^2}{a}\cos^3 t$, $y=\frac{c^2}{b}\sin^3 t$, $0\le t\le 2\pi$, $c^2=a^2-b^2$ (еволюта еліпса)

б) Знайти довжину дуги спіралі Архімеда $\rho=5\varphi$, яка знаходиться всередині кола $\rho=10\pi$.

5. $y=\arcsin x$, $y=0$, $x=1$. Знайти Vy.

ВАРІАНТ 11

1. $f(x)=x^3+x^2+1$, $a=-1$, $b=2$.

2. а) $\int\limits_1^e \sqrt{x}\ln^2 x dx$ б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{4-7tgx}{2+3tgx}dx$ в) $\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x+\frac{1}{x}}{\sqrt{x^2+1}}dx$

г) $\int\limits_0^{\pi} 2^4\sin^4 x\cos^4 xdx$ д) $\int\limits_0^{2} \frac{x^4dx}{\sqrt{(8-x^2)^3}}$

3. $x=y^2(y-1)$, $x=0$.

4. а) $x=2t^3(1-t^2)$, $y=t\sqrt[4]{15}$ (довжина петлі) б) $\rho=a\cos^5\frac{\varphi}{5}$

5. $(x-R)^2+(y-R)^2=R^2$, $x=0$, $y=0$, $x\le R$, $y\le R$. Знайти Vx.

ВАРІАНТ 12

1. $f(x)=(x-2)^2(x+1)$, $a=2$, $b=4$.

2. а) $\int\limits_{-1}^{1} x^2e^{-\frac{x}{2}}dx$ б) $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{tg^2xdx}{4+3\cos 2x}$ в) $\int\limits_1^4 \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}+1}{(\sqrt{x}+x)^2}dx$

г) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2^8\sin^6 x\cos^2 xdx$ д) $\int\limits_0^{1/\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$

3. $y=|\log_a x|$, $y=0$, $x=\frac{1}{a}$, $x=a$, $a>1$.

4. а) $x=a(\cos\varphi+\varphi\sin\varphi)$, $y=a(\sin\varphi-\varphi\cos\varphi)$, $0\le\varphi\le\varphi_0$ (евольвента кругу)

б) $\rho=\frac{p}{1+\cos\varphi}$, $|\varphi|\le\frac{\pi}{2}$, $p>0$

5. $y=\sin x$, $y=0$, $0\le x\le\pi$. Знайти Vy.

ВАРІАНТ 13

1. $f(x)=x^3-x+2$, $a=0$, $b=5$.

2. а) $\int_{-2}^{0}\left(x^2+2\right)e^{\frac{x}{2}}dx$ б) $\int_{0}^{\arccos\frac{1}{\sqrt6}}\frac{3tg^2x-1}{tg^2x+5}dx$ в) $\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{8x-arctg\,2x}{1+4x^2}dx$

г) $\int_{0}^{\pi}2^4\sin^6 x\cos^2 xdx$ д) $\int_{0}^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{\sqrt{(9-x^2)^3}}$

3. $y=\sin^2 x$, $y=x\sin x$, $0\le x\le\pi$.

4. а) $x=a\left(t^2-1\right)$, $y=\frac{2a}{\sqrt3}\left(t^3-\frac{t}{4}\right)$ (довжина петлі) б) $\rho=a\cos^3\frac{\varphi}{3}$

5. $2py=x^2$, $2gy=(x-a)^2$, $y=0$. Знайти Vx.

ВАРІАНТ 14

1. $f(x)=x^3-x+1$, $a=1$, $b=3$.

2. а) $\int_{-2}^{0}\left(x^2+3\right)e^{3x}dx$ б) $\int_{0}^{\arccos\frac{1}{\sqrt6}}\frac{3tg^2x+1}{tg^2x+4}dx$ в) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}2^2\sin^2 x\cos^2 xdx$

г) $\int_{0}^{\frac{\sqrt8}{2}}\frac{dx}{\sqrt{(8-x^2)^3}}$ д) $\int_{0}^{\frac{1}{3}}\frac{12x-arctg\,3x}{1+9x^2}dx$

3. $y=\sin 2x$, $y=2x$, $0\le x\le\pi$.

4. а) $x=\cos^4 t$, $y=\sin^4 t$ б) $\rho=a\sin^3\frac{\varphi}{3}$

5. $y=3x-x^2$, $y=0$. Знайти Vx.

ВАРІАНТ 15

1. $f(x)=x^3-x+4$, $a=2$, $b=5$.

2. а) $\int_{-2}^{0}\left(x^3+2\right)e^{x}dx$ б) $\int_{0}^{\arccos\frac{1}{\sqrt6}}\frac{3tg^2x}{tg^2x+5}dx$ в) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}2^8\sin^6 x\cos^6 xdx$

г) $\int_{0}^{\frac{\sqrt6}{2}}\frac{dx}{\sqrt{(6-x^2)^3}}$ д) $\int_{0}^{1}\frac{x-4arctgx}{1+x^2}dx$

3. $y=x^2\sin x$, $y=x\sin x$, $0\le x\le\pi/2$.

4. а) $x=ch^3t$, $y=sh^3t$ ($0\le t\le T$) б) $\rho=a\sin^5\frac{\varphi}{5}$

5. $y = 3x - x^2$, $y = 0$. Знайти Vy.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Справочное пособие по математическому анализу. Ч.I. Введение в анализ, производная, интеграл /И.И. Ляшко, А.К. Боярчук и др.– Киев: Вища школа, 1978. – 632с.
2. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.1. – М.: Наука, 1970.
3. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу: Интегралы. Ряды.: Учебное пособие для вузов / Под ред. А.Д. Кудрявцева. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 528с.
4. Никольский С.М. Курс математического анализа. Т.1. – М.: Наука, 1973. – 370с.
5. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Б.Х. Математический анализ. – М.: Наука, 1979. – 410с.
6. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. М.: Высшая школа, 1964.
7. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Наука, 1990. – 624с.
8. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М.: Наука, 1985. – 383с.

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНЕ ВИДАННЯ

Киричевський Віктор Володимирович

Тітова Ольга Олександрівна

НЕОЗНАЧЕНИЙ ТА ОЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ, ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

Навчально-методичний посібник
для студентів спеціальностей
6.080202 „Прикладна математика”
6.080201 „Інформатика”

Коректор *Тітова О.О., к.т.н., доцент*

Рецензент *Дьяченко Н.М., к.ф.-м.н., доцент*

Відповідальний
за випуск *Тітова О.О., к.т.н., доцент*