ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
„ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ”
МІНІСТЕРСТВА ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

С.М. Гребенюк, О.О. Тітова

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ: ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Практикум
для студентів освітньо-кваліфікаційного рівня „бакалавр”
напрямів підготовки
„Інформатика”, „Прикладна математика”, „Програмна інженерія”

Затверджено
вченою радою ЗНУ
Протокол № __ від _____

Запоріжжя
2014

УДК 517.31/38 (075.8)
ББК В162я73

Гребенюк С.М., Тітова О.О. Математичний аналіз: інтегральне числення функцій багатьох змінних: практикум для студентів освітньо-кваліфікаційного рівня „бакалавр" напрямів підготовки: „Інформатика", „Прикладна математика", „Програмна інженерія". – Запоріжжя: ЗНУ, 2014. – 65с.

Практикум призначений для студентів математичного факультету денної та заочної форм навчання напрямів підготовки „Інформатика", „Прикладна математика", „Програмна інженерія". Він охоплює один із важливих розділів математичного аналізу – інтегральне числення функцій багатьох змінних та має на меті сприяти студентам у оволодінні теоретичним матеріалом розділу та практичними навичками при розв'язанні відповідних задач.

Практикум містить теоретичну частину, варіанти індивідуальних завдань із прикладами їх виконання, перелік питань до екзамену, список рекомендованої літератури, предметний покажчик. Довідковий графічний матеріал наведено в додатках.

Рецензент Д'яченко Н.М., к.ф.-м.н., доцент

Відповідальний
за випуск Гребенюк С.М., к.т.н., доцент, завідувач кафедри

З М І С Т

Передмова 4
1. Кратні інтеграли........…………………………………………………… 6
1.1. Подвійні інтеграли……………………………………………… 6
1.2. Потрійні інтеграли....................……………………………… 8
1.3. Наближені методи обчислення подвійних інтегралів………... 10
1.4. Індивідуальні завдання....……………………………………… 12
1.5. Зразок виконання індивідуального завдання…………………. 21
2. Криволінійні та поверхневі інтеграли......……………………………… 27
2.1. Криволінійні інтеграли....................………………………….. 27
2.2. Поверхневі інтеграли....……………………………………….. 29
2.3. Теорія поля......……………………………………………….. 32
2.4. Індивідуальні завдання………………………………………… 33
2.5. Зразок виконання індивідуального завдання…………………. 43
Перелік питань до екзамену....……………………………………………….. 50
Список літератури…………………………………………………………….. 51
Предметний покажчик………………………………………………………… 53
Додаток А. Графіки кривих у полярній системі координат……………... 55
Додаток Б. Графічне зображення основних поверхонь другого порядку в декартовій системі координат…………………………………………… 60
Додаток В. Таблиця похідних елементарних функцій…….……………... 62
Додаток Г. Таблиця основних інтегралів………………….……………... 63

ПЕРЕДМОВА

Закладання Ньютоном і Лейбніцом три століття тому основ диференціального і інтегрального числення навіть за сучасними мірками є найкрупнішою подією в історії науки взагалі і математики зокрема.

Математичний аналіз і алгебра переплітались і утворювали тепер ту кореневу систему, на якій тримається гіллясте дерево сучасної математики і через яку проходить його основний контакт з нематематичною сферою. Саме з цієї причини основи аналізу включають як необхідний елемент навіть самих малих уявлень про так звану вищу математику, і ймовірно саме з цих причин викладанню основ аналізу присвячено велику кількість книг, адресованих різним кругам читачів.

Цей практикум в першу чергу адресовано математикам та програмістам, які мають бажання одержати повноцінні знання з одного з важливих розділів математичного аналізу, а саме, інтегрального числення функції багатьох змінних. Метою практикуму є подання основ теорії кратних інтегралів (подвійних, потрійних), криволінійних та поверхневих інтегралів на сучасному і водночас доступному рівні.

За характером викладання. В межах кожної великої теми викладання теоретичного матеріалу достатньо стисле, проте інформативне. Основну увагу приділено детальному розв'язанню практичних задач, на яких проілюстровано застосування наведених теоретичних відомостей.

За змістом. Практикум поділено на два розділи.

У першому розділі розглянуто теорію кратних інтегралів. Введено поняття подвійного та потрійного інтегралів, розглянуто елементарні області двовимірного та тривимірного простору та відповідні повторні інтеграли. Наведено властивості кратних інтегралів, методи обчислень, приділено увагу їх геометричному та механічному застосуванню. Теоретичний матеріал проілюстровано прикладами розв'язання задач.

Комп'ютери на сучасному етапі розвитку науки дозволяють будувати числові моделі різних об'єктів. За їх допомогою можна побачити ще неіснуючий об'єкт, одержати його геометричні характеристики, дослідити його фізичні та інші властивості, виконати експерименти, внести зміни, підготувати виробництво і виготовити об'єкт. Інструментом для цього є комп'ютерні системи. Загальним елементом таких систем є математична модель геометрії об'єкта, що проектується. При геометричному моделюванні слід виконувати різні математичні операції, в тому числі і інтегрування. Чисельному інтегруванню кратних інтегралів приділено увагу в першому розділі практикуму. Наведено приклад такого чисельного інтегрування.

Другий розділ практикуму присвячено криволінійним та поверхневим інтегралам. У теоретичній частині розділу введено поняття криволінійних інтегралів першого та другого роду, наведено методи їх обчислення, встановлено зв'язок між ними та подвійними інтегралами (формула Гріна), сформульовано умови незалежності криволінійного інтегралу другого роду від шляху інтегрування, приділено увагу застосуванню цих інтегралів.

Поверхневі інтеграли першого та другого типів, теорії яких приділено увагу у другому розділі, відіграють важливу роль при застосуванні математичного аналізу в геометричних і особливо механічних задачах, при математичному моделюванні різних процесів. У теоретичній частині розділу введено поняття поверхневих інтегралів першого та другого роду, наведено методи їх обчислення, показано зв'язок між ними та іншими типами інтегралів (формули Остроградського-Гауса, Стокса), звернуто увагу на застосування цих інтегралів. У окремому підрозділі розглянуто основні формули теорії поля.

У сучасному навчальному процесі для активізації пізнавальної діяльності студентів, напрацювання у них здібностей самостійно розв'язувати достатньо складні проблеми, кожен студент виконує індивідуальні завдання з обов'язковим контролем їх виконання і виставленням відповідних балів. Тому у даному практикуму наприкінці кожного розділу наведено варіанти індивідуальних завдань з розглянутих розділів математичного аналізу. Для зручності виконання цих завдань наведено зразки їх виконання, розв'язано детально велику кількість різноманітних задач.

При розв'язанні задач інтегрування функцій багатьох змінних потрібно вміти будувати той геометричний об'єкт, по якому здійснюється інтегрування (області двовимірного, тривимірного, n-вимірного простору, криві у різних системах координат, поверхні та ін). Для зручності виконання деяких завдань у додатках наведено графіки деяких кривих та поверхонь. Так у додатку А наведено графіки функцій у полярній системі координат та графіки деяких кривих, заданих параметрично. У додатку Б наведено зображення поверхонь другого порядку, заданих канонічними рівняннями. Також у додатках наведено інший довідковий матеріал, а саме, похідні та невизначені інтеграли елементарних функцій.

Автори вважають, що практикум буде корисним не тільки студентам математичних факультетів напрямів підготовки „Інформатика", „Прикладна математика", „Програмна інженерія" денної та заочної форм навчання, але й інженерам, науковцям, програмістам тощо.

Наприкінці, впевнено зауважимо, що запропонований практикум буде сприяти підвищенню математичної культури читачів.

1. КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ

1.1. Подвійні інтеграли

Нехай G – обмежена область площини xOy з кусочно-гладкою границею. Нехай функція $f(x,y)$ визначена і обмежена на області G. Область G розбиваємо на n „елементарних” областей σ_i з площами $\Delta\sigma_i$. Нехай λ – найбільший із діаметрів елементарних областей, який відповідає даному розбиттю. В кожній з елементарних областей вибираємо точку $M_i(x_i, y_i)$. Якщо існує границя $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \lambda\to 0}} \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i$, то її називають подвійним інтегралом функції $f(x,y)$ по області G і позначають $\iint\limits_G f(x,y)dG$. Якщо σ_i – елементарні прямокутники, то відповідно розглядають границю:

$$\lim_{\substack{\max\Delta x_i\to 0 \\ \max\Delta y_j\to 0}} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(x_i, y_j)\Delta x_i \Delta y_j = \iint\limits_G f(x,y)dG = \iint\limits_G f(x,y)dxdy .$$

Якщо розглядати не подвійну, а повторні границі, то одержимо повторні інтеграли, які відповідають областям двох типів (рис.1.1):

$$\lim_{\max\Delta x_i\to 0} \lim_{\max\Delta y_j\to 0} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(x_i, y_j)\Delta x_i \Delta y_j = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy ,$$

$$\lim_{\max\Delta y_j\to 0} \lim_{\max\Delta x_i\to 0} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(x_i, y_j)\Delta x_i \Delta y_j = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx .$$

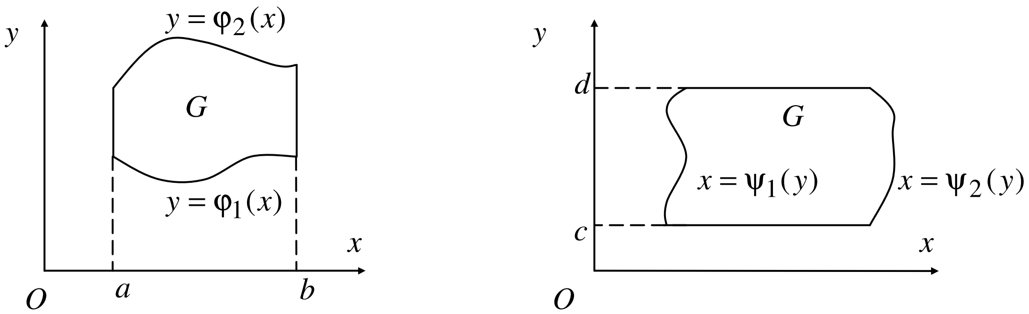


Рис. 1.1. Області в двовимірному просторі

Властивості подвійних інтегралів:

1. $\iint\limits_G (f(x,y) + g(x,y))dxdy = \iint\limits_G f(x,y)dxdy + \iint\limits_G g(x,y)dxdy$.
2. $\iint\limits_{G_1\cup G_2} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{G_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{G_2} f(x,y)dxdy$, якщо $G_1 \cap G_2 = \emptyset$.
3. $\iint\limits_G Af(x,y)dxdy = A\iint\limits_G f(x,y)dxdy$.
4. $\iint\limits_G f(x,y)dxdy \le \iint\limits_G g(x,y)dxdy$, якщо $f(x,y) \le g(x,y)$ на множині G.
5. $\left|\iint\limits_G f(x,y)dxdy\right| \le \iint\limits_G |f(x,y)|dxdy$.

Заміна змінних в подвійному інтегралі

Нехай функції $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ однозначно відображають область G' в область G. Нехай ці функції і їх частинні похідні неперервні на G', а також

$$J = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Якщо функція $f(x,y)$ неперервна на G, то справедлива формула:

$$\iint_G f(x,y)dxdy = \iint_{G'} f(x(u,v), y(u,v))\left|J(u,v)\right|dudv.$$

Найчастіше використовують полярну систему координат та її узагальнення:

Полярні координати: $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$, $\quad |J| = \rho$.

Узагальнені полярні координати: $\begin{cases} x = a\rho\cos\varphi \\ y = b\rho\sin\varphi \end{cases}$, $\quad |J| = ab\rho$.

Застосування подвійного інтегралу:

1. Обчислення площ плоских фігур: $S_G = \iint_G dxdy$.

2. Обчислення об'ємів циліндричних тіл (рис. 1.2): $V = \iint_G f(x,y)dxdy$.

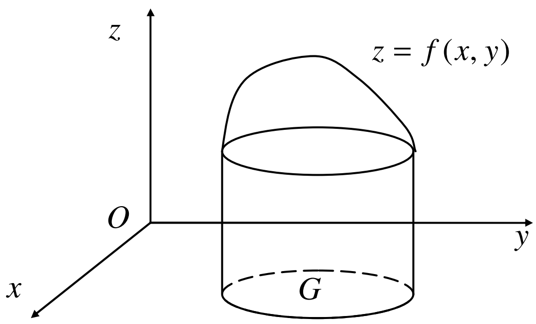


Рис. 1.2. Циліндричне тіло

3. Обчислення площ поверхонь: $S_{пов} = \iint_G \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$.

4. Застосування в механіці. Нехай деяка пластинка займає область G. Нехай густина цієї пластинки задана формулою $\gamma(x,y)$. Тоді справедливі формули:

маса пластинки: $m = \iint_G \gamma(x,y)dxdy$,

статичні моменти: $M_x = \iint_G y\gamma(x,y)dxdy,\ M_y = \iint_G x\gamma(x,y)dxdy$,

координати центра мас: $x_ц = \frac{M_y}{m},\ y_ц = \frac{M_x}{m}$,

моменти інерції: $I_x = \iint_G y^2\gamma(x,y)dxdy$, $I_y = \iint_G x^2\gamma(x,y)dxdy$,

$$I_o = \iint_G \left(x^2 + y^2\right)\gamma(x,y)dxdy.$$

1.2. Потрійні інтеграли

Розглянемо кубовану область $G \subset R^3$, яка обмежена поверхнею Σ. Нехай в області G визначено функцію $u = f(x, y, z)$. Розіб'ємо область G на елементарні паралелепіпеди. Нехай деяка точка $P_{i,j,s}$ належить елементарному прямокутному паралелепіпеду $\sigma_{i,j,s}$. Розглянемо $S_T = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \sum_{s=1}^{m} u(P_{i,j,s}) \Delta\sigma_{i,j,s}$ і нехай ця сума відповідає деякому розбиттю. Якщо $\lim\limits_{\lambda \to 0} S_T$, де λ – найбільший діаметр паралелепіпедів, існує, то її називають потрійним інтегралом по області G функції $f(x, y, z)$ і позначають $\iiint\limits_G f(P)dG = \iiint\limits_G f(x, y, z)dxdydz$.

Властивості потрійних інтегралів:

1. Якщо G складається з G_i, $i = \overline{1,n}$ і ці області не перетинаються, тобто міра перетину дорівнює 0, то $\iiint\limits_G f(P)dG = \sum\limits_{i=1}^{n} \iiint\limits_{G_i} f(P)dG$.
2. $\iiint\limits_G (f(x, y, z) + g(x, y, z))dxdydz = \iiint\limits_G f(x, y, z)dxdydz + \iiint\limits_G g(x, y, z)dxdydz$.
3. $\iiint\limits_G Af(x, y, z)dxdydz = A\iiint\limits_G f(x, y, z)dxdydz$.
4. Якщо $f(x, y, z) \le g(x, y, z)$, а функція $\varphi(x, y, z) > 0$, то $\iiint\limits_G f(x, y, z)\varphi(x, y, z)dxdydz \le \iiint\limits_G g(x, y, z)\varphi(x, y, z)dxdydz$.
5. Якщо $f(x, y, z)$ і $|f(x, y, z)|$ інтегровані, то $\left|\iiint\limits_D f(x, y, z)dxdydz\right| \le \iiint\limits_D |f(x, y, z)|dxdydz$

Способи обчислення потрійних інтегралів

Нехай в декартовій системі координат $G: \begin{cases} a \le x \le b \\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x) \\ \psi_1(x, y) \le z \le \psi_2(x, y) \end{cases}$. Таку область називають елементарною областю I типу. Існує 6 типів областей в просторі.

Якщо розглянути потрійний інтеграл по такій області, то в кожному випадку його можна звести до повторного інтегралу. Наприклад, для області першого типу: $\iiint\limits_G f(x, y, z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z)dz$.

Заміна змінних в потрійному інтегралі

Нехай області G в системі координат (x, y, z) відповідає область G' в системі координат (u, v, w), тоді справедлива формула:

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)dxdydz = \iiint\limits_{G'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))|J|dudvdw, \text{ де } J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

Найчастіше використовують циліндричну і сферичну системи координат, а також їх узагальнення.

Циліндричні координати

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi & \varphi \in [0,2\pi] \\ y = r\sin\varphi & r \in [0,+\infty) \\ z = z & z \in (-\infty,+\infty) \end{cases} \qquad \iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{G'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\, r\, d\varphi dr dz$$

Загальні циліндричні координати

$$\begin{cases} x = ar\cos\varphi \\ y = br\sin\varphi \\ z = cz \end{cases} \qquad \iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{G'} f(ar\cos\varphi, br\sin\varphi, cz)\, abrcd\varphi dr dz$$

Узагальнені циліндричні координати

$$\begin{cases} x = ar\cos^\lambda\varphi \\ y = br\sin^\lambda\varphi \\ z = cz \end{cases} \qquad J = -abrc\lambda\sin^{\lambda-1}\varphi\cos^{\lambda-1}\varphi$$

Сферичні координати

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi\sin\theta & \varphi \in [0,2\pi] \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta & \rho \ge 0 \\ z = \rho\cos\theta & \theta \in [0,\pi] \end{cases} \qquad \begin{aligned} &\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \\ &= \iiint\limits_{G'} f(\rho\cos\varphi\sin\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\theta)\rho^2\sin\theta d\varphi d\rho d\theta \end{aligned}$$

Загальні сферичні координати

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\varphi\sin\theta \\ y = b\rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = c\rho\cos\theta \end{cases} \qquad J = \rho^2\sin\theta\cdot abc$$

Узагальнені сферичні координати

$$\begin{cases} x = a\rho\cos^\lambda\varphi\sin^\alpha\theta \\ y = b\rho\sin^\lambda\varphi\sin^\alpha\theta \\ z = c\rho\cos^\alpha\theta \end{cases} \qquad J = \rho^2 abc\lambda\alpha\sin^{2\alpha-1}\theta\cos^{\lambda-1}\varphi\sin^{\lambda-1}\varphi\cos^{\alpha-1}\theta.$$

Застосування потрійних інтегралів:

1. Обчислення об'ємів тіл: $V = \iiint\limits_G dxdydz = \iiint\limits_{G'} r\,dr\,d\varphi\,dz = \iiint\limits_{G''} \rho^2\sin\theta\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$.

2. Застосування в механіці. Нехай деяке тіло займає область G. Нехай густину цього тіла задано формулою $\gamma(x,y,z)$. Тоді справедливі формули:

маса тіла: $m = \iiint\limits_G \gamma(x,y,z)dxdydz$,

статичні моменти: $M_{xy} = \iiint\limits_G z\gamma dxdydz$, $M_{xz} = \iiint\limits_G y\gamma dxdydz$, $M_{yz} = \iiint\limits_G x\gamma dxdydz$,

координати центра мас: $x_ц = \frac{M_{yz}}{m}$, $y_ц = \frac{M_{xz}}{m}$, $z_ц = \frac{M_{xy}}{m}$,

моменти інерції: $I_{xy} = \iiint\limits_G z^2\gamma dxdydz$, $I_{xz} = \iiint\limits_G y^2\gamma dxdydz$, $I_{yz} = \iiint\limits_G x^2\gamma dxdydz$,

$$I_z = I_{xz} + I_{yz},\ I_x = I_{xy} + I_{xz},\ I_y = I_{yz} + I_{xy},\ I_O = I_{xy} + I_{xz} + I_{yz}.$$

1.3. Наближені методи обчислення подвійних інтегралів

Нехай потрібно наближено обчислити подвійний інтеграл від деякої неперервної і однозначної функції $f(x, y)$ по області G, тобто

$$I = \iint_G f(x, y)dxdy,$$

де область G обмежена лініями: $y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$, $\varphi(x) \le \psi(x)$, $a \le x \le b$ (рис. 1.3). Тобто область задано як область першого типу. Для областей другого типу міркування аналогічні.

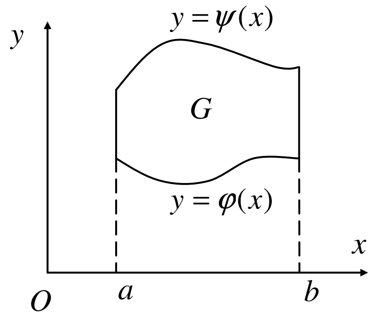


Рис. 1.3. Область інтегрування

Подвійний інтеграл можна звести до повторного інтегралу:

$$I = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)dy = \int_a^b F(x)dx, \qquad \text{де } F(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)dy.$$

Застосуємо до зовнішнього інтегралу квадратурну формулу і одержимо:

$$I = \iint_G f(x, y)dxdy \approx \sum_{i=1}^{m} a_i F(x_i),$$

де a_i, x_i – вагові множники та вузли квадратурної формули, відповідно.

У свою чергу значення $F(x_i)$ також можуть бути обчислені за допомогою квадратурних формул, тобто

$$F(x_i) = \int_{\varphi(x_i)}^{\psi(x_i)} f(x_i, y)dy \approx \sum_{j=1}^{n} b_{ij} f(x_i, y_{ij}).$$

Таким чином подвійний інтеграл наближено можна обчислити за формулою:

$$I \approx \sum_{i=1}^{m} a_i \sum_{j=1}^{n} b_{ij} f(x_i, y_{ij}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \omega_{ij} f(x_i, y_{ij}),$$

де $\omega_{ij} = a_i b_{ij}$ – постійні коефіцієнти, обчислені по ваговим множникам.

У випадку використання квадратурних формул Гауса відповідна кубатурна формула для обчислення подвійного інтегралу матиме наступний вигляд:

$$I \approx \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^{m} \xi_i \frac{\psi(x_i) - \varphi(x_i)}{2} \sum_{j=1}^{n} \eta_j f(x_i, y_{ij}),$$

де $x_i = \dfrac{a+b}{2} + u_i \dfrac{b-a}{2}$, $y_{ij} = \dfrac{\varphi(x_i) + \psi(x_i)}{2} + v_j \dfrac{\psi(x_i) - \varphi(x_i)}{2}$,

u_i при $i = 1,2,...,m$ – параметри коренів полінома Лежандра $P_m(u)$, $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m$ – відповідні їм вагові множники,

v_j при $j = 1,2,...,n$ – параметри коренів полінома Лежандра $P_n(v)$, $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n$ – відповідні їм вагові множники.

Значення u_i, ξ_i, v_j та η_j наведені для стандартного відрізку $[-1;1]$ у таблицях [10].

Кубатурні формули Гауса на чотирьохкутній та трикутній області наведено в посібнику [9]. Також показано спосіб розбиття довільної області на трикутні та чотирикутні області. Більш розширено способи побудови кубатурних формул та методів поліпшення точності обчислень кратних інтегралів наведено у довіднику [10].

Зауважимо, що наближені обчислення потрійних, і взагалі, кратних інтегралів можна проводити за допомогою аналогічних міркувань.

Наведемо приклад обчислення інтегралу $\iint\limits_D xydxdy$, де область D: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le \sqrt{4-x^2}$ (рис. 1.4).

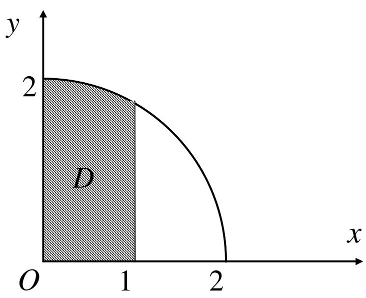


Рис. 1.4. Область інтегрування

Аналітичне обчислення інтегралу:

$$I = \iint\limits_D xydxdy = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} xydy = \int_0^1 \left(\frac{xy^2}{2} \right) \Bigg|_0^{\sqrt{4-x^2}} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(4x - x^3\right) dx = \frac{7}{8} = 0{,}875 .$$

Наближене значення інтегралу обчислимо за квадратурною формулою Гауса (по вісі x візьмемо два вузла, по вісі y – три):

$$I = \iint\limits_D xydxdy \approx \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^{2} \xi_i \frac{\psi(x_i) - \varphi(x_i)}{2} \sum_{j=1}^{3} \eta_j f\left(x_i, y_{ij}\right).$$

Оскільки по вісі x ми вибрали два вузла, то відповідно маємо:

$$u_1 = -0{,}577350,\ u_2 = 0{,}577350,\ \xi_1 = 1,\ \xi_2 = 1,$$

$$x_1 = \frac{0+1}{2} + (-0{,}57735) \cdot \frac{1-0}{2} = 0{,}211325,$$

$$x_2 = \frac{0+1}{2} + 0{,}57735 \cdot \frac{1-0}{2} = 0{,}788675.$$

Оскільки по вісі y ми вибрали три вузла, то відповідно маємо:

$$v_1 = -0{,}77459,\ v_2 = 0{,}0,\ v_3 = 0{,}77459,\ \eta_1 = 0{,}555556,\ \eta_2 = 0{,}888889,\ \eta_3 = 0{,}555556,$$

$$\varphi(x) = 0,\ \psi(0{,}211325) = 1{,}9888,\ \psi(0{,}788675) = 1{,}8379,$$

$$y_{11}=\frac{1{,}9888}{2}-0{,}77459\cdot\frac{1{,}9888}{2}=0{,}2241,$$
$$y_{12}=\frac{1{,}9888}{2}+0\cdot\frac{1{,}9888}{2}=0{,}9944,$$
$$y_{13}=\frac{1{,}9888}{2}+0{,}77459\cdot\frac{1{,}9888}{2}=1{,}76465,$$
$$y_{21}=\frac{1{,}8379}{2}-0{,}77459\cdot\frac{1{,}8379}{2}=0{,}2071,$$
$$y_{21}=\frac{1{,}8379}{2}+0\cdot\frac{1{,}8379}{2}=0{,}9190,$$
$$y_{21}=\frac{1{,}8379}{2}+0{,}77459\cdot\frac{1{,}8379}{2}=1{,}6308.$$

Наближене значення інтегралу буде наступним:

$$I\approx\frac{1-0}{2}\Bigg(1\cdot\frac{1{,}9888}{2}(0{,}555556\cdot 0{,}211325\cdot 0{,}2241+0{,}888889\cdot 0{,}211325\cdot 0{,}9944+$$
$$+0{,}555556\cdot 0{,}211325\cdot 1{,}76465)+1\cdot\frac{1{,}8379}{2}(0{,}555556\cdot 0{,}788675\cdot 0{,}2071+$$
$$+0{,}888889\cdot 0{,}788675\cdot 0{,}9190+0{,}555556\cdot 0{,}788675\cdot 1{,}6308)\Bigg)=0{,}874977.$$

Пропонуємо самостійно обчислити наступні інтеграли наближеними методами:

1. Обчислити інтеграл $\iint\limits_D (16x^2y+8xy^3)dxdy$, де область D: $1\le x\le 2$, $3\le y\le 4$.

2. Обчислити інтеграл $\iint\limits_D (\cos^2 x+\sin^2 y)dxdy$, де область D: $0\le x\le\frac{\pi}{4}$, $0\le y\le\frac{\pi}{4}$.

3. Обчислити інтеграл $\iint\limits_D xye^x dxdy$, де область D: $0\le x\le 1$, $2\le y\le 3$.

4. Обчислити інтеграл $\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdy$, де область D обмежена кривими: $y=x$, $x=0$, $y=1$, $y=2$.

5. Обчислити інтеграл $\iint\limits_D xdxdy$, де область D: трикутник з вершинами у точках: $A(2;3)$, $B(7;2)$, $C(4;5)$.

1.4. Індивідуальні завдання

1. Змінити порядок інтегрування.
2. Представити подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ за допомогою повторних із зовнішнім інтегруванням по x і по y.
3. Обчислити інтеграл.
4. Обчислити інтеграл, використовуючи полярні координати.
5. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями (за допомогою подвійного інтегралу).
6. Знайти площу області, яка обмежена кривою, використовуючи полярні координати.
7. Знайти координати центра мас однорідної пластинки, обмеженої лініями.

8. Обчислити інтеграл.
9. Обчислити інтеграл за допомогою циліндричних або сферичних координат.
10. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями (за допомогою потрійного інтегралу).

ВАРІАНТ 1

1. $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{-\sqrt{2+y}}^{0} f(x,y)dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{-y}}^{0} f(x,y)dx$.

2. D: $y = \sqrt{4-x^2}$, $y = \sqrt{3x}$, $x \ge 0$.

3. $\iint\limits_D (x^2+y)dxdy$, D: $y = x^2$, $x = y^2$.

4. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} dy$.

5. $z = x^2 + y^2$, $x + y = 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

6. $\rho = a\sin^2 2\varphi$.

7. D: $y = \sqrt{4-x^2}$, $y = \sqrt{3x}$, $x \ge 0$.

8. $\iiint\limits_D (2x^2+3y+z)dxdydz$, D: $2 \le x \le 3$, $-1 \le y \le 2$, $0 \le z \le 4$.

9. $\iiint\limits_D (x^2+y^2+z^2)dxdydz$, D: $x^2+y^2+z^2 = 4$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

10. $z^2 = 4 - x$, $x^2 + y^2 = 4x$.

ВАРІАНТ 2

1. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} f(x,y)dx + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f(x,y)dx$.

2. D: $x^2 = 2y$, $5x - 2y - 6 = 0$.

3. $\iint\limits_D xy^2 dxdy$, D: $y = x^2$, $y = 2x$.

4. $\int\limits_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int\limits_0^{\sqrt{3-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$.

5. $z = 2 - \left(x^2+y^2\right)$, $x + 2y = 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

6. $\rho = a\sin^2\varphi$.

7. D: $x^2 = 2y$, $5x - 2y - 6 = 0$.

8. $\iiint\limits_D x^2 yz dxdydz$, D: $-1 \le x \le 2$, $0 \le y \le 3$, $2 \le z \le 3$.

9. $\iiint\limits_D y\sqrt{x^2+y^2} dxdydz$, D: $z^2 = 4(x^2+y^2)$, $y \ge x$, $y \ge -x$, $z = 2$, $z \ge 0$.

10. $z = 4 - y^2$, $x^2 + y^2 = 4$, $z \ge 0$.

ВАРІАНТ 3

1. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{y} f(x,y)dx + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx$.

2. D: $x = \sqrt{8-y^2}$, $y = x$, $y \ge 0$.

3. $\iint\limits_D (x+y)dxdy$, D: $y^2 = x$, $x = y^2$.

4. $\int\limits_0^R dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{tg\sqrt{x^2+y^2}}{-\sqrt{x^2+y^2}} dy$.

5. $z = x$, $y = 4$, $x = \sqrt{25-y^2}$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

6. $\rho = a\cos^2\varphi$.

7. D: $x = \sqrt{8-y^2}$, $y = x$, $y \ge 0$.

8. $\iiint\limits_D (x+y+4z^2)dxdydz$, D: $-1 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$, $-1 \le z \le 1$.

9. $\iiint\limits_D z^2 dxdydz$, D: $1 \le x^2+y^2 \le 36$, $x \ge 0$, $y \ge x$, $z \ge 0$.

10. $z = 2 - x - y$, $x^2 + y^2 = 1$, $z \ge 0$.

ВАРИАНТ 4

1. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{\sqrt{2-y}} f(x,y)dx$.

2. D: $y = \ln x$, $0 \le y \le 1$, $x \ge 0$.

3. $\iint\limits_D x^2 y dxdy$, D: $y = 2 - x$, $x = y$, $x \ge 0$.

4. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \ln(1 + x^2 + y^2)dy$.

5. $z = 2x^2 + y^2$, $x + y = 4$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

6. $\rho^2 = a^2(1 + \sin^2\varphi)$.

7. D: $y = \ln x$, $0 \le y \le 1$, $x \ge 0$.

8. $\iiint\limits_D (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz$, D: $0 \le x \le 3$, $-1 \le y \le 2$, $0 \le z \le 2$.

9. $\iiint\limits_D ydxdydz$, D: $x^2 + y^2 + z^2 = 32$, $y^2 = x^2 + z^2$, $y \ge 0$.

10. $z = y^2$, $x + y = 2$, $x \ge 0$, $z \ge 0$.

ВАРИАНТ 5

1. $\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dy \int\limits_0^{\arcsin y} f(x,y)dx + \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 dy \int\limits_0^{\arccos y} f(x,y)dx$.

2. D: $x^2 = 2 - y$, $y + x = 0$.

3. $\iint\limits_D (x^3 - 2y)dxdy$, D: $y = x^2 - 1$, $x \ge 0$, $y \le 0$.

4. $\int\limits_{-2}^2 dy \int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \sqrt{1 - x^2 - y^2}dx$.

5. $z = 4 - x^2$, $x^2 + y^2 = 4$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

6. $\rho = a\sin 2\varphi$.

7. D: $x^2 = 2 - y$, $y + x = 0$.

8. $\iiint\limits_D x^2 y^2 z dxdydz$, D: $-1 \le x \le 3$, $0 \le y \le 2$, $-2 \le z \le 5$.

9. $\iiint\limits_D xdxdydz$, D: $x^2 + y^2 + z^2 = 8$, $x^2 = y^2 + z^2$, $x \ge 0$.

10. $x = \sqrt{9 - y^2}$, $x = \sqrt{25 - y^2}$, $x = z$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

ВАРИАНТ 6

1. $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_0^{\sqrt{2+y}} f(x,y)dx + \int\limits_{-1}^0 dy \int\limits_0^{\sqrt{-y}} f(x,y)dx$.

2. D: $y = \sqrt{2 - x^2}$, $y = x^2$.

3. $\iint\limits_D (y - x)dxdy$, D: $y = x$, $x^2 = y$.

4. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^0 \frac{xy}{x^2 + y^2}dy$.

5. $2x + 3y - 12 = 0$, $2z = y^2$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

6. $\rho = a\cos 5\varphi$.

7. D: $y = \sqrt{2 - x^2}$, $y = x^2$.

8. $\iiint\limits_D (x + y + z)dxdydz$, D: $0 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 0$, $1 \le z \le 2$.

9. $\iiint\limits_D ydxdydz$, D: $4 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 16$, $y \le \sqrt{3}x$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

10. $z = 4 - x - y$, $x^2 + y^2 = 4$, $z \ge 0$.

ВАРИАНТ 7

1. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^0 f(x,y)dx + \int\limits_1^e dy \int\limits_{-1}^{-\ln y} f(x,y)dx$.

2. D: $y = x^2 - 2$, $y = x$.

3. $\iint\limits_D (1+y)dxdy$, D: $5y = x$, $x = y^2$.

4. $\int\limits_{-R}^{0} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}} \cos\sqrt{x^2+y^2}\,dy$.

5. $z = 10 + x^2 + 2y^2$, $x = y$, $x = 1$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

6. $\rho = 4(1+\cos\varphi)$.

7. D: $y = x^2 - 2$, $y = x$.

8. $\iiint\limits_D (2x - y^2 - z)dxdydz$, D: $1 \le x \le 5$, $0 \le y \le 2$, $-1 \le z \le 0$.

9. $\iiint\limits_D ydxdydz$, D: $z = \sqrt{8 - x^2 - y^2}$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $y \ge 0$.

10. $z = x^2$, $x - 2y + 2 = 0$, $x + y = 7$, $z \ge 0$.

ВАРИАНТ 8

1. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{2-y} f(x,y)dx$.

2. D: $y = x$, $1 \le y \le 3$, $x \ge 0$.

3. $\iint\limits_D (x+y)dxdy$, D: $y = x^2 - 1$, $y = -x^2 + 1$.

4. $\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}} tg(x^2+y^2)dy$.

5. $z = x^2$, $x + y = 6$, $y = 2x$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

6. $\rho = a\sin^2 4\varphi$.

7. D: $y = x$, $1 \le y \le 3$, $x \ge 0$.

8. $\iiint\limits_D 2xy^2 zdxdydz$, D: $0 \le x \le 3$, $-2 \le y \le 0$, $1 \le z \le 2$.

9. $\iiint\limits_D \dfrac{y^2dxdydz}{x^2+y^2+z^2}$, D: $4 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 36$, $x \ge 0$, $y \ge \sqrt{3}x$, $z \ge 0$.

10. $z = y$, $x = 4$, $y = \sqrt{25 - x^2}$, $x \ge 0$, $z \ge 0$.

ВАРИАНТ 9

1. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int\limits_1^e dy \int\limits_{\ln y}^{1} f(x,y)dx$.

2. D: $y^2 = 2x$, $x^2 = 2y$, $x \le 1$.

3. $\iint\limits_D x(y-1)dxdy$, D: $y = 5x$, $x = y$, $x = 3$.

4. $\int\limits_{0}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \cos(x^2+y^2)dy$.

5. $z = 3x^2 + 2y^2 + 1$, $y = x^2 - 1$, $y = 1$, $z \ge 0$.

6. $\rho = a\sin^2 3\varphi$.

7. D: $y^2 = 2x$, $x^2 = 2y$, $x \le 1$.

8. $\iiint\limits_D 5xyz^2dxdydz$, D: $-1 \le x \le 0$, $2 \le y \le 3$, $1 \le z \le 2$.

9. $\iiint\limits_D \dfrac{y^2zdxdydz}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$, D: $z = 3(x^2+y^2)$, $y \le \sqrt{3}x$, $y \ge 0$, $z = 3$.

10. $2x - y = 0$, $x + y = 9$, $z = x^2$, $z \ge 0$, $y \ge 0$.

ВАРИАНТ 10

1. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} f(x,y)dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_{-\sqrt{2-y}}^{0} f(x,y)dx$.

2. D: $y = \sqrt{9 - x^2}$, $y \ge x$, $x \ge 0$.

3. $\iint\limits_D (x-2)ydxdy$, D: $y = x$, $y = \dfrac{1}{2}x$, $x = 2$.

4. $\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dy$.

5. $z = 2x^2 + y^2$, $x + y = 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

6. $\rho = a\sin 3\varphi$.

7. D: $y=\sqrt{9-x^2}$, $y \ge x$, $x \ge 0$.

8. $\iiint\limits_D (x^2+2y^2-z)dxdydz$, D: $0 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 2$, $0 \le z \le 4$.

9. $\iiint\limits_D \frac{x^2dxdydz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$, D: $x^2+y^2+z^2=16$, $z \ge 0$.

10. $x=4$, $y=2x$, $z=x^2$, $z \ge 0$, $y \ge 0$.

ВАРІАНТ 11

1. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-y}^0 f(x,y)dx + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^0 f(x,y)dx$.

2. D: $y^2=2-x$, $y=x$.

3. $\iint\limits_D (x-y^2)dxdy$, D: $y=x^2$, $y=1$.

4. $\int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dx \int\limits_0^{\sqrt{3-x^2}} \sqrt{1+x^2+y^2}dy$.

5. $y=2x$, $x+y+z=2$, $x \ge 0$, $z \ge 0$.

6. $\rho = a\sin 4\varphi$.

7. D: $y^2=2-x$, $y=x$.

8. $\iiint\limits_D (x+2yz)dxdydz$, D: $-2 \le x \le 0$, $-1 \le y \le 2$, $0 \le z \le 2$.

9. $\iiint\limits_D \frac{xzdxdydz}{\sqrt{x^2+y^2}}$, D: $z=2(x^2+y^2)$, $y \le \frac{1}{\sqrt{3}}x$, $y \ge 0$, $z=18$.

10. $y=2x$, $y=3$, $z=\sqrt{y}$, $x \ge 0$, $z \ge 0$.

ВАРІАНТ 12

1. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{y^3} f(x,y)dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{2-y} f(x,y)dx$.

2. D: $x=\sqrt{2-y^2}$, $x=y^2$, $y \ge 0$.

3. $\iint\limits_D x^2ydxdy$, D: $y=2x^3$, $y=0$, $x=1$.

4. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} (1+x^2+y^2)dy$.

5. $z=x^2$, $x-2y+2=0$, $x+y-7=0$, $z \ge 0$.

6. $\rho = a\sin 5\varphi$.

7. D: $x=\sqrt{2-y^2}$, $x=y^2$, $y \ge 0$.

8. $\iiint\limits_D (x^2+yz)dxdydz$, D: $2 \le x \le 3$, $0 \le y \le 2$, $0 \le z \le 4$.

9. $\iiint\limits_D \frac{xydxdydz}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$, D: $z=x^2+y^2$, $x \ge y$, $y \ge 0$, $z=4$.

10. $x=3$, $y=2x$, $z=y^2$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

ВАРІАНТ 13

1. $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{-(2+y)}^0 f(x,y)dx + \int\limits_{-1}^0 dy \int\limits_{\sqrt[3]{y}}^0 f(x,y)dx$.

2. D: $x+2y-12=0$, $y=\lg x$, $y \ge 0$.

3. $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$, D: $x=1$, $x=y^2$.

4. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{dy}{1+x^2+y^2}$.

5. $y=1-z^2$, $x=y$, $y=-x$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

6. $\rho = 2a(2+\cos\varphi)$.

7. D: $x+2y-12=0$, $y=\lg x$, $y \ge 0$.

8. $\iiint\limits_D (2x^2+3yz)dxdydz$, D: $0 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 2$, $0 \le z \le 4$.

9. $\iiint\limits_D \frac{zdxdydz}{\sqrt{x^2+y^2}}$, D: $4y = x^2 + y^2$, $y + z = 4$, $z \ge 0$.

10. $y^2 = 2 - x$, $z = 3x$, $z \ge 0$.

ВАРІАНТ 14

1. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^y f(x,y)dx + \int\limits_1^e dy \int\limits_{\ln y}^1 f(x,y)dx$.

2. D: $y = -x$, $1 \le y \le 3$, $x \le 0$.

3. $\iint\limits_D xydxdy$, D: $y = x^3$, $y = 0$, $x \le 2$.

4. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{1+\sqrt{x^2+y^2}}$.

5. $z = 2 - x^2 - y^2$, $x^2 + y^2 = 1$, $z \ge 0$.

6. $\rho = a\cos 2\varphi$.

7. D: $y = -x$, $1 \le y \le 3$, $x \le 0$.

8. $\iiint\limits_D (2xy + 3z)dxdydz$, D: $2 \le x \le 3$, $-1 \le y \le 2$, $3 \le z \le 4$.

9. $\iiint\limits_D \frac{ydxdydz}{\sqrt{x^2+y^2}}$, D: $2x = x^2 + y^2$, $x + z = 2$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

10. $y = \sqrt{9 - x^2}$, $z = 2y$, $z \ge 0$.

ВАРІАНТ 15

1. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f(x,y)dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{y}^{0} f(x,y)dx$.

2. D: $y = -\sqrt{2 - x^2}$, $y \ge x$, $y = 0$.

3. $\iint\limits_D y(1-x)dxdy$, D: $y = x$, $x = y^3$.

4. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} dy$.

5. $z = y^2$, $x + y = 1$, $x \ge 0$, $z \ge 0$.

6. $\rho = a\cos 4\varphi$.

7. D: $y = -\sqrt{2 - x^2}$, $y \ge x$, $y = 0$.

8. $\iiint\limits_D (2x^2 - 3yz)dxdydz$, D: $0 \le x \le 3$, $-1 \le y \le 2$, $0 \le z \le 4$.

9. $\iiint\limits_D \frac{xdxdydz}{\sqrt{x^2+y^2}}$, D: $16y = x^2 + y^2$, $y + z = 16$, $z \ge 0$, $x \ge 0$.

10. $x + y = 2$, $z = x^2 + y^2$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

ВАРІАНТ 16

1. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt[3]{y}}^{0} f(x,y)dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_{-\sqrt{2-y}}^{0} f(x,y)dx$.

2. D: $y \ge 0$, $x = \sqrt{y}$, $y = \sqrt{8 - x^2}$.

3. $\iint\limits_D (x+y)dxdy$, D: $y = x^3$, $y = 8$, $y = 0$, $x = 3$.

4. $\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{0} \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} dy$.

5. $z = 2x^2 + 3y^2$, $y = x^2$, $x = y$, $z \ge 0$.

6. $\rho^2 = a^2\cos 2\varphi$.

7. D: $y \ge 0$, $x = \sqrt{y}$, $y = \sqrt{8 - x^2}$.

8. $\iiint\limits_D (2x^2 + 3y - z)dxdydz$, D: $2 \le x \le 4$, $-1 \le y \le 2$, $0 \le z \le 4$.

9. $\iiint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdydz$, D: $x^2 + y^2 = 2x$, $x + z = 2$, $z \ge 0$.

10. $z = 4 - x$, $x = 2\sqrt{y}$, $y = 2\sqrt{x}$, $z \ge 0$.

ВАРІАНТ 17

1. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx$.

2. $D:\ x=-y,\ y^2=x+3$.

3. $\iint\limits_D x(2x+y)dxdy,\ D:\ y=1-x^2,\ y\ge 0$.

4. $\int\limits_0^R dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}\cos^2\sqrt{x^2+y^2}}$.

5. $z=2x^2+y^2,\ y\le x,\ y=3x,\ x=2,\ z\ge 0$.

6. $\rho^2=a^2\cos 3\varphi$.

7. $D:\ x=-y,\ y^2=x+3$.

8. $\iiint\limits_D x^3yzdxdydz,\ D:\ -1\le x\le 2,\ 0\le y\le 2,\ 2\le z\le 3$.

9. $\iiint\limits_D yxdxdydz,\ D:\ 2\le x^2+y^2+z^2\le 8,\ z^2=x^2+y^2,\ y\ge 0,\ x\ge 0,\ z\ge 0$.

10. $z=5-x-y,\ x^2+y^2=9,\ z\ge 0$.

ВАРІАНТ 18

1. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-y^2}^{0} f(x,y)dx + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f(x,y)dx$.

2. $D:\ y=\sqrt{4-x^2},\ y=0,\ x=1,\ x\ge 0$.

3. $\iint\limits_D xy^3dxdy,\ D:\ y^2=1-x,\ x\ge 0$.

4. $\int\limits_{-R}^R dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{0} \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}\sin^2\sqrt{x^2+y^2}}$.

5. $y=\sqrt{x},\ y=x,\ x+y+z=2,\ z\ge 0$.

6. $\rho=a(1-\cos\varphi)$.

7. $D:\ y=\sqrt{4-x^2},\ y=0,\ x=1,\ x\ge 0$.

8. $\iiint\limits_D (x+2y+4z^2)dxdydz,\ D:\ -1\le x\le 2,\ 0\le y\le 2,\ -1\le z\le 1$.

9. $\iiint\limits_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdydz,\ D:\ x^2+y^2=2y,\ x\ge 0,\ x^2+y^2=4y,\ z\ge 0,\ z=6$.

10. $x=\sqrt{4-y^2},\ z=x,\ z\ge 0$.

ВАРІАНТ 19

1. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt[4]{y}}^{0} f(x,y)dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_{-\sqrt{2-y}}^{0} f(x,y)dx$.

2. $D:\ x=-1,\ x=-2,\ y\ge 0,\ y=x^2$.

3. $\iint\limits_D x(y+5)dxdy,\ D:\ y=x+5,\ x+y+5=0,\ x\le 0$.

4. $\int\limits_{-R}^0 dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}\,ctg\sqrt{x^2+y^2}}$.

5. $y=1-x^2,\ x+y+z=3,\ y\ge 0,\ z\ge 0$.

6. $\rho^2=1+\sin^2\varphi$.

7. $D:\ x=-1,\ x=-2,\ y\ge 0,\ y=x^2$.

8. $\iiint\limits_D (x^2+y^2+z^2)dxdydz,\ D:\ 0\le x\le 1,\ -1\le y\le 2,\ 0\le z\le 3$.

9. $\iiint\limits_D \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz,\ D:\ x^2+y^2+z^2=36,\ z\ge 0,\ y\ge 0,\ y\le -x$.

10. $z=x^2,\ x+y=2,\ y\ge 0,\ z\ge 0$.

ВАРІАНТ 20

1. $\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dy \int\limits_{-\arcsin y}^{0} f(x,y)dx + \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} dy \int\limits_{-\arccos y}^{0} f(x,y)dx$.

2. $D:\ x^2=-y,\ y\le 0,\ x=\sqrt{1-y^2}$.

3. $\iint\limits_D (x-y)dxdy$, D: $y=x^2-1$, $y=3$.

4. $\int\limits_{-3}^{3} dx \int\limits_{-\sqrt{9-x^2}} \frac{xy}{x^2+y^2}dy$.

5. $3y=\sqrt{x}$, $y\le x$, $x+y+z=10$, $y=1$, $z=0$.

6. $\rho = a\sin 6\varphi$.

7. D: $x^2=-y$, $y\le 0$, $x=\sqrt{1-y^2}$.

8. $\iiint\limits_D x^2y^2zdxdydz$, D: $-1\le x\le 1$, $0\le y\le 2$, $-2\le z\le 2$.

9. $\iiint\limits_D \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdydz$, D: $x^2+y^2=2x$, $x^2+y^2=4x$, $z\ge 0$, $z=4$, $y\ge 0$, $y\le x$.

10. $x=\sqrt{25-y^2}$, $y=4$, $x=z$, $y\ge 0$, $z\ge 0$.

ВАРІАНТ 21

1. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)dx + \int\limits_1^e dy \int\limits_{\ln y}^1 f(x,y)dx$.

2. D: $x=-\sqrt{4-y^2}$, $y=x$, $0\le y\le 1$.

3. $\iint\limits_D (x+1)y^2dxdy$, D: $y=3$, $3x^2=y$.

4. $\int\limits_{-R}^{0} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{0} \cos\left(x^2+y^2\right)dy$.

5. $y^2=1-x$, $x+y+z=1$, $x=0$, $z=0$.

6. $\rho = a\cos 6\varphi$.

7. D: $x=-\sqrt{4-y^2}$, $y=x$, $0\le y\le 1$.

8. $\iiint\limits_D (x+y+2z)dxdydz$, D: $0\le x\le 1$, $-1\le y\le 1$, $1\le z\le 2$.

9. $\iiint\limits_D \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dxdydz$, D: $1\le x^2+y^2+z^2\le 9$, $y\le \frac{\sqrt{3}x}{3}$, $y\ge 0$, $z\ge 0$.

10. $z=y^2$, $x^2+y^2=9$, $z\ge 0$.

ВАРІАНТ 22

1. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt[3]{y}}^{0} f(x,y)dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_{y-2}^{0} f(x,y)dx$.

2. D: $y=1$, $y=4$, $y=-x$, $x\le 0$.

3. $\iint\limits_D xy^2dxdy$, D: $y=x$, $x=1$, $y=0$.

4. $\int\limits_{-R}^{0} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sin\left(x^2+y^2\right)dy$.

5. $y=x^2$, $x=y^2$, $z=3x+2y+6$, $z=0$.

6. $\rho = 9(1+\cos\varphi)$.

7. D: $y=1$, $y=4$, $y=-x$, $x\le 0$.

8. $\iiint\limits_D (2x-y^2+z)dxdydz$, D: $1\le x\le 2$, $0\le y\le 2$, $-1\le z\le 0$.

9. $\iiint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdydz$, D: $x^2-2x+y^2=0$, $z+x=2$, $y\ge 0$, $z\ge 0$.

10. $z=1-x^2-y^2$, $y\ge x$, $x\ge 0$, $z\ge 0$.

ВАРІАНТ 23

1. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt[4]{y}} f(x,y)dx + \int\limits_1^e dy \int\limits_{\ln y}^1 f(x,y)dx$.

2. D: $y=-x$, $y=3-x^2$.

3. $\iint\limits_D (x^3+y)dxdy$, D: $x+y=1$, $x+y=2$, $0\le x\le 1$.

4. $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1+x^2+y^2}dy$.

5. $x^2=1-y$, $x+y+z=3$, $y\ge 0$, $z\ge 0$.

6. $\rho = 2\sin^2 4\varphi$.

7. D: $y=-x$, $y=3-x^2$.

8. $\iiint\limits_D 2xy^2zdxdydz$, D: $0\le x\le 1$, $-2\le y\le 0$, $1\le z\le 3$.

9. $\iiint\limits_D x^2zdxdydz$, D: $1\le x^2+y^2+z^2\le 16$, $y\ge 0$, $y\le x$, $z\ge 0$.

10. $z=x^2+y^2$, $x^2+y^2=4$, $z\ge 0$.

ВАРІАНТ 24

1. $\int\limits_0^1 dy\int\limits_{-\sqrt[5]{y}}^0 f(x,y)dx+\int\limits_1^2 dy\int\limits_{-\sqrt{2-y}}^0 f(x,y)dx$.

2. D: $y=x^2+4$, $x=0$, $x=-2$, $y\ge 0$.

3. $\iint\limits_D xy^3dxdy$, D: $y=x^3$, $4x=y$, $y\ge 0$.

4. $\int\limits_{-2}^2 dx\int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}e^{x^2+y^2}dy$.

5. $y^2=x$, $x=1$, $x+y+z=4$, $z=0$.

6. $\rho=3\sin^2 3\varphi$.

7. D: $y=x^2+4$, $x=0$, $x=-2$, $y\ge 0$.

8. $\iiint\limits_D 5xyz^2dxdydz$, D: $-1\le x\le 1$, $2\le y\le 3$, $1\le z\le 3$.

9. $\iiint\limits_D \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2}}$, D: $x^2+y^2=4y$, $y+z=4$, $z\ge 0$.

10. $y=2$, $y=x$, $z=x^2$, $z\ge 0$.

ВАРІАНТ 25

1. $\int\limits_0^1 dy\int\limits_{-y^3}^0 f(x,y)dx+\int\limits_1^{\sqrt{2}} dy\int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^0 f(x,y)dx$.

2. D: $y=0$, $x=0$, $y=1$, $(x-3)^2+y^2=1$.

3. $\iint\limits_D (x^3+3y)dxdy$, D: $y+x=1$, $y=x^2-1$, $x\ge 0$.

4. $\int\limits_0^3 dx\int\limits_0^{\sqrt{9-x^2}}\ln(1+x^2+y^2)dy$.

5. $y=x^2$, $y=4$, $z=2x+5y+10$, $z\ge 0$.

6. $\rho=2\sin 3\varphi$.

7. D: $y=0$, $x=0$, $y=1$, $(x-3)^2+y^2=1$.

8. $\iiint\limits_D (x^2+2y^2+2z)dxdydz$, D: $0\le x\le 1$, $-1\le y\le 1$, $0\le z\le 3$.

9. $\iiint\limits_D \frac{ydxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, D: $4\le x^2+y^2+z^2\le 16$, $y\le\sqrt{3}x$, $y\ge 0$, $z\ge 0$.

10. $y+z=2$, $x^2+y^2=4$, $z\ge 0$.

1.5. Зразок виконання індивідуального завдання

Приклад 1.1. Змінити порядок інтегрування в інтегралі:

а) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_x^{2x} f(x,y)dy$, б) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)dx$.

Розв'язання. а) Змінимо порядок інтегрування в інтегралі: $\int\limits_0^2 dx \int\limits_x^{2x} f(x,y)dy$. Побудуємо область інтегрування. Для цього зобразимо в системі координат графіки функцій: $x=0$, $x=2$, $y=x$, $y=2x$ (рис. 1.5). Щоб змінити порядок інтегрування, потрібно визначитись, яка змінна буде під знаком диференціалу у внутрішньому інтегралі. В даному випадку це буде x. Тоді уявно проведемо прямі $y=const$ і подивимось від точки на якій кривій і до точки на якій кривій змінюється x. В даному випадку для $y\in[0,2]$ і $y\in[2,4]$ ці криві різні. Тому в результаті одержимо 2 інтеграли.

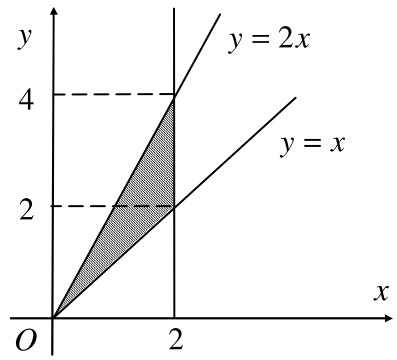


Рис. 1.5.

Оскільки зовнішнє інтегрування буде по y, то потрібно в рівняннях кривих змінну x виразити через змінну y. При $y\in[0,2]$: $x=\frac{y}{2}$, $x=y$, при $y\in[2,4]$: $x=\frac{y}{2}$, $x=2$. Таким чином, одержимо:

$$\int\limits_0^2 dx \int\limits_x^{2x} f(x,y)dy = \int\limits_0^2 dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^{y} f(x,y)dx + \int\limits_2^4 dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^{2} f(x,y)dx .$$

б) Змінимо порядок інтегрування в інтегралі: $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)dx$. Побудуємо область інтегрування. Для цього зобразимо в системі координат графіки функцій: $y=0$, $y=1$, $x=\sqrt{y}$, $x=2-y$ (рис. 1.6).

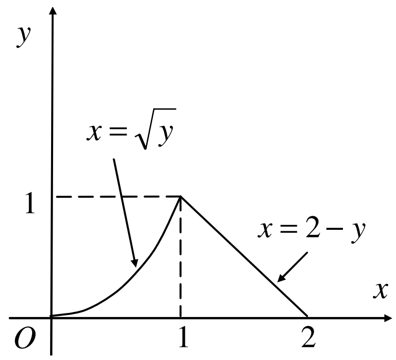


Рис. 1.6.

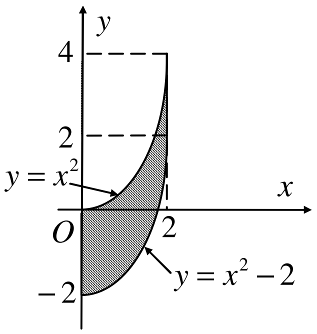
Під знаком диференціалу у внутрішньому інтегралі буде y. Тоді уявно проведемо прямі $x=const$ і подивимось від точки на якій кривій і до точки на якій кривій змінюється y. В даному випадку для $x\in[0,1]$ і $x\in[1,2]$ ці криві різні. Тому в результаті одержимо 2 інтеграли. Оскільки зовнішнє інтегрування буде по y, то потрібно в рівняннях кривих змінну y виразити через x.

При $x\in[0,1]$: $y=0$, $y=x^2$, при $x\in[1,2]$: $y=0$, $y=2-x$. Таким чином, одержимо:

$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)dx = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f(x,y)dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} f(x,y)dy .$$

Приклад 1.2. Представити подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ за допомогою повторних із зовнішнім інтегруванням по x і по y, де область D обмежена кривими: $x=\sqrt{y}$, $x=\sqrt{2+y}$, $x=0$, $x=2$.

Розв'язання. Побудуємо область інтегрування (рис. 1.7). Область інтегрування D обмежена дугами парабол $y=x^2$, $y=x^2-2$, прямими $x=0$, $x=2$, тобто маємо запис області D як області першого типу.



Тоді подвійний інтеграл за допомогою повторного із зовнішнім інтегруванням по x матиме вигляд:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_0^2 dx\int\limits_{x^2-2}^{x^2} f(x,y)dy.$$

Рис. 1.7.

Для запису подвійного інтегралу за допомогою повторного із зовнішнім інтегруванням по y слід розбити область інтегрування на три частини, а саме:

1) якщо $-2\le y\le 0$, то область ліворуч обмежена прямою $x=0$, а праворуч кривою $x=\sqrt{2+y}$;
2) якщо $0\le y\le 2$, то область ліворуч обмежена кривою $x=\sqrt{y}$, а праворуч кривою $x=\sqrt{2+y}$;
3) якщо $2\le y\le 4$, то область ліворуч обмежена кривою $x=\sqrt{y}$, а праворуч прямою $x=2$.

Тоді подвійний інтеграл за допомогою повторного із зовнішнім інтегруванням по y матиме вигляд:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_{-2}^{0} dy\int\limits_0^{\sqrt{2+y}} f(x,y)dx+\int\limits_0^2 dy\int\limits_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2+y}} f(x,y)dx+\int\limits_2^4 dy\int\limits_{\sqrt{y}}^{2} f(x,y)dx.$$

Приклад 1.3. Обчислити інтеграл $\iint\limits_D y^2\sqrt{1-x^2}dxdy$, де область D – це круг $x^2+y^2\le 1$.

Розв'язання. Побудуємо область інтегрування (рис. 1.8). Запишемо область D як область першого типу. Рівняння контуру: $x^2+y^2=1$. Звідки $y=\pm\sqrt{1-x^2}$. Зрозуміло, що $y=\sqrt{1-x^2}$ – рівняння верхнього півкола, $y=-\sqrt{1-x^2}$ – рівняння нижнього півкола. Таким чином, при постійному $x\in[-1,1]$ змінна y змінюється від $-\sqrt{1-x^2}$ до $\sqrt{1-x^2}$. Тоді одержимо:

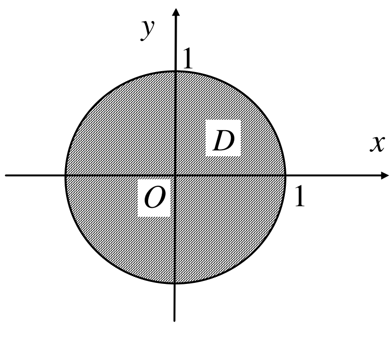


Рис. 1.8.

$$\iint_D y^2\sqrt{1-x^2}\,dxdy = \int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} y^2dy = \left| \begin{array}{l} \textit{із парності підінт.}\\ \textit{функції у внутр.}\\ \textit{інтегралі}\end{array}\right| = 2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}y^2dy =$$

$$=2\int_{-1}^1\sqrt{1-x^2}\cdot\left.\frac{y^3}{3}\right|_0^{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{2}{3}\int_{-1}^1\left(1-x^2\right)^2dx = \left| \begin{array}{l} \textit{із парності}\\ \textit{підінт. функції}\end{array}\right| = \frac43\int_0^1\left(1-x^2\right)^2dx=\frac{32}{45}.$$

Приклад 1.4. Обчислити інтеграл $\int_{-R}^{0}dx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\frac{\ln\left(1+\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}dy$, використовуючи полярні координати.

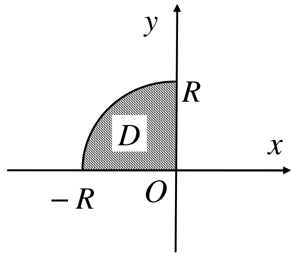


Рис. 1.9.

Розв'язання. Побудуємо область інтегрування D. Для цього в системі координат проведемо лінії: $x=-R$, $x=0$, $y=0$, $y=\sqrt{R^2-x^2}$. Одержимо частину круга $x^2+y^2\le R^2$ (рис. 1.9). Перейдемо до полярних координат $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$.

Тоді область D можна записати за допомогою нерівностей: $0\le\rho\le R$, $\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\pi$. Для інтегралу одержимо наступне:

$$\int_{-R}^{0}dx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\frac{\ln\left(1+\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}dy = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}d\varphi\int_0^R\frac{\ln(1+\rho)}{\rho}\cdot\rho d\rho = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}d\varphi\int_0^R\ln(1+\rho)d\rho =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} \textit{інтегруємо частинами}: & \\ u=\ln(1+\rho), & dv=d\rho, \\ du=\dfrac{d\rho}{1+\rho}, & v=\rho \end{array}\right| = \frac{\pi}{2}\left(R\ln(1+R)-R+\ln(1+R)\right).$$

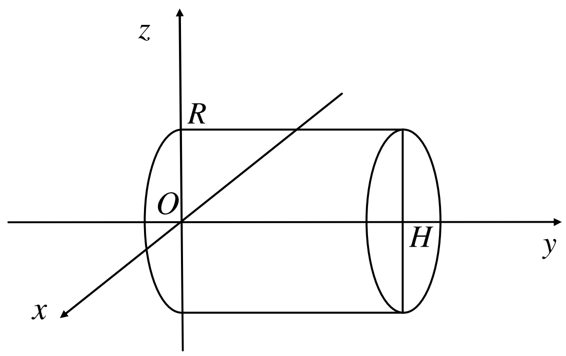
Приклад 1.5. а) Знайти об'єм тіла, обмеженого еліптичним циліндром $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, еліптичним параболоїдом $\frac{2z}{c}=\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}$ та площиною $z=0$ за допомогою подвійного інтегралу.

б) Знайти площу бічної поверхні циліндра: $x^2+z^2=R^2$, $0\le y\le H$ за допомогою подвійного інтегралу.

Розв'язання. а) Розв'язання задачі зводиться до обчислення інтегралу по частині площини, яка обмежена еліпсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, тому зручно перейти до узагальнених полярних координат. Тоді об'єм тіла буде дорівнювати:

$$V=\frac{c}{2}\iint_D\left(\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}\right)dxdy = 2abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^1\left(\frac{a^2\cos^2\varphi}{p^2}+\frac{b^2\sin^2\varphi}{q^2}\right)\rho^3d\rho=\frac{\pi}{8}abc\left(\frac{a^2}{p^2}+\frac{b^2}{q^2}\right) \text{ (куб. од.).}$$

б) Знайдемо площу бічної поверхні циліндра за допомогою подвійного інтегралу. Побудуємо циліндр в системі координат (рис. 1.10). Тоді проекція на площину xOy буде область G: $\begin{cases}-R\le x\le R,\\ 0\le y\le H,\end{cases}$



$$z = \pm\sqrt{R^2 - x^2}\ ,\ \frac{\partial z}{\partial x} = \mp\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\ ,\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0\,.$$

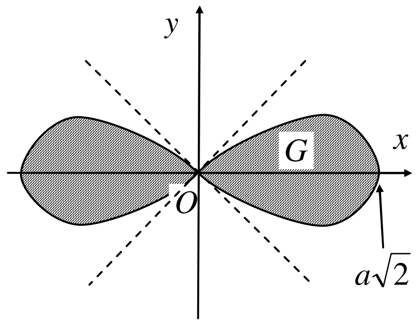
$$S = 2\iint\limits_G \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\,dxdy = 2R\iint\limits_G \frac{dxdy}{\sqrt{R^2 - x^2}} =$$

$$= 2R\int_0^H dy \int_{-R}^{R} \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = 4RH\int_0^R \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = 2\pi RH\ .$$

Рис. 1.10.

Приклад 1.6. Знайти площу фігури, обмежену кривою $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$, використовуючи полярні координати.

Розв'язання. При наявності двочлена $x^2 + y^2$ виникає думка про перехід до полярних координат. Тоді площу фігури зручно підраховувати за формулою: $S_G = \iint\limits_G \rho d\rho d\varphi$. Побудуємо область інтегрування (рис. 1.11). Для цього перейдемо до полярних координат. Рівняння кривої буде мати вигляд: $\rho = \sqrt{2\cos 2\varphi}$. При цьому $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$. Область G складається з 4 однакових областей,



наприклад, $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, ρ змінюється від $\rho = 0$ до $\rho = \sqrt{2\cos 2\varphi}$.

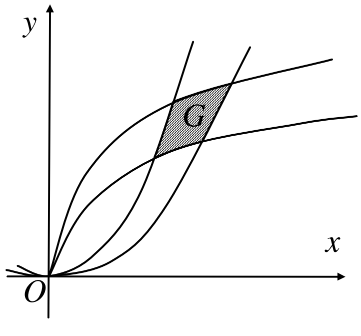
Таким чином, одержимо площу області G:

$$S_G = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\sqrt{2\cos 2\varphi}} \rho d\rho = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi d\varphi = 2 \text{ (кв. од.).}$$

Рис. 1.11.

Приклад 1.7. Знайти масу пластинки, обмежену лініями: $y = x^2$, $2y = x^2$, $y^2 = x$, $y^2 = 3x$, якщо густина задається формулою $\gamma = xy$.

Розв'язання. Побудуємо область інтегрування (рис. 1.12). Вона являє собою криволінійний чотирикутник, тому границі інтегрування в декартових координатах записувати важко. Введемо нові координати u та v: $y^2 = ux$, $x^2 = vy$. Тоді $x = \sqrt[3]{uv^2}$, $y = \sqrt[3]{u^2 v}$, $|J| = \frac{1}{3}$, $u \in [1,3]$, $v \in [1,2]$.



$$m = \iint\limits_G \gamma(x, y)dxdy = \int_1^2 dv \int_1^3 \sqrt[3]{uv^2} \cdot \sqrt[3]{u^2 v} \cdot \frac{1}{3}du = \frac{1}{3}\int_1^2 vdv \int_1^3 udu = 2\,.$$

Рис. 1.12.

Приклад 1.8. а) Обчислити інтеграл $\iiint\limits_D (3x + 2y - z^3)dxdydz$, де D: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$, $1 \le z \le 3$.

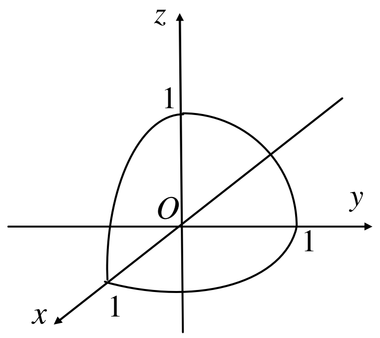
б) Обчислити інтеграл $\iiint\limits_D xyzdxdydz$, де область D обмежена поверхнями: $z^2 + x^2 + y^2 = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Розв'язання. ***а)*** Дана область інтегрування являє собою прямокутний паралелепіпед, тобто одержимо для інтегралу наступне:

$$\iiint\limits_D (3x + 2y - z^3)dxdydz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^2 dy \int\limits_1^3 (3x + 2y - z^3)dz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^2 \left(3xz + 2yz - \frac{z^4}{4} \right)\Bigg|_1^3 dy =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^2 (6x + 4y - 20)dy = \int\limits_0^1 \left(6xy + 2y^2 - 20y\right)\Big|_0^2 dx = \int\limits_0^1 (12x - 32)dx = -26.$$

б) Побудуємо область інтегрування (рис. 1.13). Зафіксуємо змінну x, $0 \le x \le 1$. Тоді, якщо розглянути проекцію тіла на площину xOy, то y буде змінюватись від точки кривої $y = 0$ до точки кривої $y = \sqrt{1 - x^2}$. Якщо зафіксувати деякий x та y з проекції тіла на площину xOy, то z буде змінюватись від поверхні $z = 0$ до $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Таким чином, одержимо наступний вираз:



$$\iiint\limits_D xyzdxdydz = \int\limits_0^1 xdx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} ydy \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} zdz = \int\limits_0^1 xdx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} y \cdot \frac{z^2}{2}\Bigg|_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dy =$$

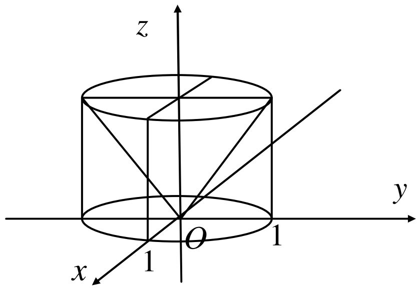
$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 xdx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} (y - x^2 y - y^3)dy = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 x\left(\frac{y^2}{2} - \frac{x^2 y^2}{2} - \frac{y^4}{4} \right)\Bigg|_0^{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int\limits_0^1 (x - 2x^3 + x^5)dx = \frac{1}{48}.$$

Рис. 1.13.

<u>Приклад 1.9.</u> Обчислити інтеграл $\iiint\limits_D zdxdydz$, де область D обмежена поверхнями: $z^2 = x^2 + y^2$, $z = 1$.

Розв'язання. Побудуємо область інтегрування. Поверхня $z^2 = x^2 + y^2$ є конусом, $z = 1$ є площиною (рис. 1.14). Перейдемо до циліндричних координат: $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z$, де $\varphi \in [0, 2\pi]$, $r \in [0,1]$, $z \in [r,1]$. Таким чином:



$$\iiint\limits_D zdxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 rdr \int\limits_r^1 zdz = \pi \int\limits_0^1 (r - r^3)dr = \frac{\pi}{4}.$$

Рис. 1.14.

<u>Приклад 1.10.</u> Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $3z^2 = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$.

Розв’язання. Побудуємо область інтегрування (рис. 1.15).

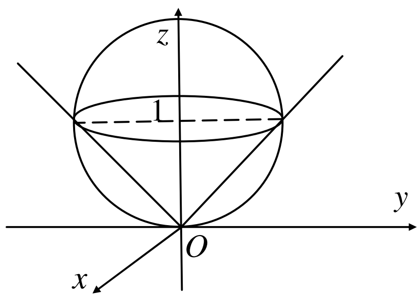


Рис. 1.15.

Перейдемо до сферичних координат:

$$x=\rho\cos\varphi\sin\theta,\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta,\ z=\rho\cos\theta.$$

Тоді рівняння сфери буде мати вигляд: $\rho=2\cos\theta$, рівняння конуса: $\theta=\frac{\pi}{3}$.

Тоді одержимо:

$$V=\iiint\limits_{D}\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\varphi\,d\theta=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int\limits_0^{2\cos\theta}\rho^2\sin\theta d\rho=\frac{16\pi}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\sin\theta\cos^3\theta\,d\theta=\frac{5\pi}{4}\ \text{(куб. од.)}.$$

2. КРИВОЛІНІЙНІ ТА ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ

2.1. Криволінійні інтеграли

Криволінійний інтеграл першого роду

Нехай L – відрізок кусочно-гладкої кривої з початком в точці A і кінцем в точці B, $z = f(x,y)$ – обмежена функція, задана в деякій області, в якій розташовано криву L. Розіб'ємо криву L точками на n елементарних дуг, довжини яких Δl_i. На кожній дузі виберемо точку P_i. Тоді, якщо існує границя:

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta l_i \to 0}} \sum_{i=0}^{n-1} f(P_i)\Delta l_i$$

яка не залежить ні від вибору точок, ні від розбиття, то її називають криволінійним інтегралом 1-го роду і позначають:

$$\int_L f(x,y)dl, \text{ або } \int_{\cup AB} f(x,y)dl.$$

Криволінійний інтеграл 1-го роду не залежить від напрямку руху вздовж кривої AB, тобто $\int_{\cup AB} f(x,y)dl = \int_{\cup BA} f(x,y)dl$.

Методи обчислення:

1. Явне задання кривої: $y = y(x)$, $x \in [a,b]$: $\int_L f(x,y)dl = \int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+(y'(x))^2}dx$ (2.1)

2. Параметричне задання кривої: $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \chi(t) \end{cases}$, $t \in [a,b]$:

$$\int_L f(x,y,z)dl = \int_a^b f(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2}dt \qquad (2.2)$$

Криволінійний інтеграл другого роду

Нехай L – відрізок кусочно-гладкої кривої з початком в точці A і кінцем в точці B, $z = f(x,y)$ – обмежена функція, яку задано в деякій області, в якій розташовано криву L. Розіб'ємо криву L точками на n елементарних дуг, довжини яких Δl_i. На кожній дузі виберемо точку P_i. Тоді, якщо існує границя:

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta l_i \to 0}} \sum_{i=0}^{n-1} f(P_i)\Delta x_i, \qquad \Delta x_i = x_{i+1} - x_i \text{ (проекція } \Delta l_i \text{ на вісь } x\text{)},$$

яка не залежить ні від вибору точок ні від розбиття, то її називають криволінійним інтегралом 2-го роду і позначають: $\int_L f(x,y)dx$. Цілком аналогічно можна ввести інтеграл $\int_L f(x,y)dy$.

Якщо на кривій $\cup AB$ визначено функції $P(x,y)$, $Q(x,y)$, то можна розглянути криволінійний інтеграл „загального” вигляду:

$$\int_{\cup AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy,$$

або аналогічно для просторової кривої:

$$\int\limits_{\cup AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz\,,$$

Зауважимо, що для криволінійного інтегралу 2-го роду важливий напрямок інтегрування, тобто

$$\int\limits_{\cup AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int\limits_{\cup BA} P(x,y)dx + Q(x,y)dy\,.$$

Методи обчислення:

1. Явне задання кривої: $y = y(x)$, $x \in [a,b]$:

$$\int\limits_{L} Pdx + Qdy = \int\limits_{a}^{b} (P(x,y(x)) + Q(x,y(x))\,y'(x))dx\,. \qquad (2.3)$$

2. Параметричне задання кривої: $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t)\,,\ t \in [a,b]: \\ z = \chi(t) \end{cases}$

$$\int\limits_{L} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{a}^{b} (P\varphi'(t) + Q\psi'(t) + R\chi'(t))dt\,. \qquad (2.4)$$

Зв'язок між криволінійними інтегралами:

$$\int\limits_{L} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{L} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dl\,,$$

де $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляючі косинуси дотичної, в припущенні, що її напрямок відповідає напрямку шляху інтегрування.

Формула Гріна *(зв'язок криволінійного та подвійного інтегралів):*

Нехай замкнутий контур L обмежує область D. Тоді справедлива формула:

$$\oint\limits_{L} Pdx + Qdy = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy\,. \qquad (2.5)$$

Умови незалежності криволінійного інтегралу від шляху інтегрування

Нехай функції $P(x,y)$ та $Q(x,y)$ разом із похідними $\frac{\partial P}{\partial y}$ та $\frac{\partial Q}{\partial x}$ неперервні в області D, тоді інтеграл $\int\limits_{L} Pdx + Qdy$ не залежить від шляху інтегрування $L \subset D$, якщо вираз $Pdx + Qdy$ є диференціалом деякої функції u, тобто $\frac{\partial u}{\partial x} = P$, $\frac{\partial u}{\partial y} = Q$.

Інтеграл знаходять за формулою: $\int\limits_{L} Pdx + Qdy = u(B) - u(A)$, де $L = \cup AB$.

Для того, щоб вираз $Pdx + Qdy$ був диференціалом $\Leftrightarrow$ щоб $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Для знаходження функції u можна використовувати формулу:

$$u(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(\xi, y_0)d\xi + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,\eta)d\eta\,. \qquad (2.6)$$

В просторовому випадку відповідні умови мають вигляд:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}\,,\ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}\,,\ \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}\,,$$

а функцію можна одержати за формулою:

$$u(x,y,z)=\int_{x_0}^{x}P(\xi,y_0,z_0)d\xi+\int_{y_0}^{y}Q(x,\eta,z_0)d\eta+\int_{z_0}^{z}R(x,y,\zeta)d\zeta\,. \qquad (2.7)$$

Застосування криволінійних інтегралів:

1. Знаходження довжин кривих: $l=\int_L dl$.

2. Знаходження площ фігур: $S=\frac{1}{2}\oint_L xdy-ydx$.

3. Застосування в механіці: маса кривої: $m=\int_L \gamma(x,y,z)dl$,

координати центра мас: $x_c=\frac{1}{m}\int_L x\gamma(x,y,z)dl$, $y_c=\frac{1}{m}\int_L y\gamma(x,y,z)dl$, $z_c=\frac{1}{m}\int_L z\gamma(x,y,z)dl$.

4. Робота сили $\overline{F}$ вздовж кривої L: $A=\int_L Pdx+Qdy+Rdz$, де P, Q, R – координати $\overline{F}$.

2.2. Поверхневі інтеграли

Поверхневий інтеграл першого роду

Нехай функція $f(x,y,z)$ визначена і обмежена на гладкій поверхні S. Розіб'ємо поверхню S на „елементарні" поверхні S_i, площі яких ΔS_i. Нехай λ – найбільший з діаметрів S_i і M_i – довільна точка поверхні S_i. Тоді, якщо існує границя: $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ \lambda\to 0}}\sum\limits_{i=0}^{n-1}f(M_i)\Delta S_i$, яка не залежить ні від вибору точок ні від розбиття, то її називають поверхневим інтегралом 1-го роду функції $f(x,y,z)$ по поверхні S і позначають: $\iint_S f(x,y,z)dS$.

Методи обчислення:

1. Нехай поверхню задано параметрично $\begin{cases}x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\\ z=z(u,v)\end{cases}$, тоді:

$$\iint_S f(x,y,z)dS=\iint_D f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,dudv\,. \qquad (2.8)$$

де D – область в системі координат (u,v), яка відповідає поверхні,

$$A=\begin{vmatrix}\frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix},\quad B=\begin{vmatrix}\frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u}\\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v}\end{vmatrix},\quad C=\begin{vmatrix}\frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u}\\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v}\end{vmatrix}.$$

Обчислимо визначник:

$$\begin{vmatrix}\overset{I}{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2} & \overset{II}{\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}}\\ \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v} & \overset{III}{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2}\end{vmatrix}=A^2+B^2+C^2\,.$$

В диференціальній геометрії прийнято позначати вираз I через E, II – через F, III – через G. Числа E, F, G називають *гаусовими коефіцієнтами поверхні.* $A^2+B^2+C^2=E\cdot G-F^2$. Тоді, поверхневий інтеграл має вигляд:

$$\iint_S f(x,y,z)dS=\iint_D f\big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big)\cdot\sqrt{E\cdot G-F^2}\,dudv .$$

2. Нехай поверхню задано явно $z=z(x,y)$. Нехай область D – це область у площині xy, яка відповідає нашій поверхні, тоді:

$$\iint_S f(x,y,z)dS=\iint_D f\big(x,y,z(x,y)\big)\cdot\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy . \tag{2.9}$$

Застосування поверхневих інтегралів першого роду:

1. Обчислення площі поверхні. $S_{пов}=\iint_S dS$. Якщо поверхню задано параметрично: $S_{пов}=\iint_D\sqrt{E\cdot G-F^2}\,dudv$; якщо явно: $S_{пов}=\iint_S\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$.

2. Застосування в механіці. Нехай вздовж поверхні розподілено масу, тобто, в кожній точці поверхні відома густина. Тоді справедливі формули:

маса поверхні: $m=\iint_S\gamma(x,y,z)dS$,

статичні моменти: $M_{xy}=\iint_S z\gamma dS$, $M_{zy}=\iint_S x\gamma dS$, $M_{xz}=\iint_S y\gamma dS$,

моменти інерції: $I_{xy}=\iint_S z^2\gamma dS$, $I_{xz}=\iint_S y^2\gamma dS$, $I_{yz}=\iint_S x^2\gamma dS$,

координати центра мас: $z_ц=\dfrac{M_{xy}}{m}$, $x_ц=\dfrac{M_{yz}}{m}$, $y_ц=\dfrac{M_{xz}}{m}$.

3. Тяжіння простого шару. Нехай на поверхні S неперервним чином розподілено маси з заданою в будь-якій точці M на поверхні густиною $\gamma(x,y,z)$. Нехай в точці $A(\xi,\eta,\varphi)$, яка розташована поза поверхнею, знаходиться одиниця маси. Потрібно визначити, з якою по величині і напрямку силою $\vec{F}$ точка A притягується поверхнею S. Проекції цієї сили визначається формулами:

$$F_x=\iint_S\gamma\frac{x-\xi}{r}dS,\quad F_y=\iint_S\gamma\frac{y-\eta}{r}dS,\quad F_z=\iint_S\gamma\frac{z-\varphi}{r}dS,\ r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\varphi)^2}.$$

Якщо точка A лежить на поверхні, то проекції сили на вісі координат є невласними інтегралами, оскільки підінтегральні функції необмежені.

Поверхневий інтеграл другого роду

Розглянемо деяку поверхню S в тривимірному просторі. Нехай D – проекція S на площину XOY. Тобто, будь-якій точці $P\in D$ відповідає точка $M\in S$. Тоді, розбиваючи область D на елементарні області, розіб'ємо і поверхню S на елементарні поверхні. Розглянемо елементарну поверхню S_i, їй відповідає область D_i. Розглянемо точку $M_i(x_i,y_i,z_i)\in S_i$, знайдемо значення функції f у цій точці, тобто: $f(M_i)=f(x_i,y_i,z_i)$. Помножимо значення цієї функції на площу D_i і складемо суму $\sigma=\sum_{i=1}^{n}f(x_i,y_i,z_i)\cdot D_i$. Якщо існує границя цієї інтегральної суми при прямуванні найбільшого діаметру S_i до нуля, то її називають *поверхневим інтегралом другого роду*, розповсюдженим на вибрану сторону поверхні S і позначають: $\iint\limits_S f(x,y,z)dxdy$.

Будемо вважати, що на поверхні S визначені і неперервні функції $P(M)$, $Q(M)$, $R(M)$ і також обрано орієнтацію S^+, тоді можна розглянути інтеграли: $\iint\limits_{S^+} P(M)dydz$, $\iint\limits_{S^+} Q(M)dxdz$, $\iint\limits_{S^+} R(M)dxdy$, і суму цих інтегралів: $\iint\limits_{S^+} P(M)dydz + Q(M)dxdz + R(M)dxdy$, останній інтеграл називають *поверхневим інтегралом другого роду*.

Цей інтеграл можна записати через поверхневий інтеграл першого роду: $\iint\limits_{S^+} (P(M)\cos\alpha + Q(M)\cos\beta + R(M)\cos\gamma)dS$, де α, β, γ – кути, які утворюють нормалі до поверхонь з вісями координат при обраній орієнтації, тобто можна вважати, що $\bar{n} = \cos\alpha\,\bar{i} + \cos\beta\,\bar{j} + \cos\gamma\,\bar{k}$.

Якщо поверхню задано параметрично, то вірна формула: $\iint\limits_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS = \iint\limits_{D'} (PA + QB + RC)dudv$. Таким чином ми можемо звести поверхневий інтеграл другого роду до поверхневого інтегралу першого роду і до подвійного.

Поверхневі інтеграли можна використовувати також для обчислення об'ємів тіл: $V = \frac{1}{3}\oiint\limits_S (zdxdy + xdydz + ydxdz)$.

Зв'язок між потрійним та поверхневим інтегралами. Формула Остроградського-Гауса

Нехай тіло V обмежене гладкою поверхнею S, функції $P = P(x,y,z)$, $Q = Q(x,y,z)$, $R = R(x,y,z)$ – неперервні в цій області разом зі своїми похідними. Тоді вірна формула Остроградського-Гауса:

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz = \oiint\limits_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy. \qquad (2.10)$$

Зв'язок між криволінійним та поверхневим інтегралами. Формула Стокса

Нехай в деякій області, в якій розташовано поверхню S, яка натягнута на контур L, задано функції $P = P(x,y,z)$, $Q = Q(x,y,z)$, $R = R(x,y,z)$, які неперервні в цій області разом зі своїми похідними. Тоді вірна формула Стокса:

$$\oint\limits_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dxdz. \qquad (2.11)$$

Формула Гріна буде частинним випадком формули Стокса.

Якщо поверхневий інтеграл другого типу замінити інтегралом першого типу, то одержимо формулу:

$$\oint\limits_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_S \left(\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta\right)dS.$$

Формулу Стокса зручно записувати за допомогою визначника:

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS \,. \qquad (2.12)$$

<u>2.3. Теорія поля</u>

Якщо в кожній точці $M(x, y, z)$ просторової області задано скалярну або векторну величину, то кажуть, що задано поле цієї величини, скалярне $u(x, y, z)$ або векторне $\overline{A} = A_x\overline{i} + A_y\overline{j} + A_z\overline{k}$.

Основні характеристики полів:

1. Поверхні (лінії) рівня: $u = const$.
2. Векторні лінії: $\dfrac{dx}{A_x} = \dfrac{dy}{A_y} = \dfrac{dz}{A_z}$.
3. Градієнт: $\overline{grad\,u} = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial z}\right)$.
4. Потік векторного поля через поверхню:

$$\varPi = \iint_S \left(A_x \cos\alpha + A_y \cos\beta + A_z \cos\gamma\right) dS = \iint_S \overline{A}\cdot\overline{n}dS = \iiint_V \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) dxdydz \,.$$

5. Дивергенція векторного поля: $div\overline{A} = \dfrac{\partial A_x}{\partial x} + \dfrac{\partial A_y}{\partial y} + \dfrac{\partial A_z}{\partial z}$.
6. Циркуляція векторного поля вздовж кривої: $\int_L A_x dx + A_y dy + A_z dz$.
7. Ротор: $\overline{rotA} = \left(\dfrac{\partial A_z}{\partial y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial z}, \dfrac{\partial A_x}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial x}, \dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial y}\right)$. Вірна формула Стокса:

$$\int_L A_x dx + A_y dy + A_z dz = \iint_S \overline{rotA}\cdot\overline{n}\, dS \,.$$

Основні види полів

Векторне поле $\overline{A}$ називають *потенціальним*, якщо існує скалярне поле u , що $\overline{A} = \overline{grad\,u}$. Для того щоб поле було потенціальним $\Leftrightarrow$ щоб $\overline{rotA} = \overline{0}$.

Векторне поле $\overline{A}$ називають *соленоїдальним*, якщо існує векторне поле $\overline{B}$, що $\overline{A} = \overline{rotB}$. Для того щоб поле було соленоїдальним $\Leftrightarrow$ щоб $div\overline{A} = 0$.

Довільне векторне поле може бути представлене в вигляді суми потенціального та соленоїдального полів.

2.4. Індивідуальні завдання

1, 2. Обчислити криволінійний інтеграл.
3. Довести, що даний вираз є повним диференціалом функції $u(x,y)$. Знайти функцію $u(x,y)$.
4. За допомогою формули Гріна обчислити інтеграл.
5. Обчислити поверхневий інтеграл першого роду по поверхні S, де S – частина площини P, яка розташована між координатними площинами.
6. Обчислити поверхневий інтеграл другого роду.
7. Знайти потік векторного поля через зовнішню поверхню піраміди двома способами (безпосередньо і за формулою Остроградського).
8. Знайти циркуляцію векторного поля через контур трикутника L, утвореного в результаті перетину площин, двома способами (безпосередньо і за формулою Стокса).
9. З'ясувати, чи є векторне поле соленоїдальним, потенціальним?

ВАРІАНТ 1

1. $\int\limits_L (x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy$, L: дуга параболи $y=x^2$ від (-1, 1) до (1, 1).

2. $\int\limits_L \sqrt{2-z^2}(2z-\sqrt{x^2+y^2})dl$, L: дуга кривої $\begin{cases} x=t\cos t \\ y=t\sin t \\ z=t \end{cases}$, $t\in[0,2\pi]$.

3. $(2x-3y^2+1)dx+(2-6xy)dy$.

4. $\oint\limits_L (1-x^2)ydx+x(1+y^2)dy$, L: коло $x^2+y^2=4$, яке пробігається проти ходу годинникової стрілки.

5. $\iint\limits_S (2x+3y+2z)dS$, P: $x+3y+z=3$.

6. $\iint\limits_S zdxdy$, S – зовнішня сторона поверхні $x^2+y^2+2z^2=2$.

7. $\overline{A}=3x\overline{i}+(y+z)\overline{j}+(x-z)\overline{k}$, S: $x+3y+z=3$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

8. $\overline{A}=30x\overline{i}+(y+z)\overline{j}+6(x-z)\overline{k}$, $-6x+3y+z=-30$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

9. $\overline{A}=x^2y\overline{i}-2xy^2\overline{j}+2xyz\overline{k}$.

ВАРІАНТ 2

1. $\int\limits_L (x^2+y^2)dx+2xydy$, L: дуга $y=x^3$ від (0, 0) до (1, 1).

2. $\int\limits_L \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dl$, L: дуга кривої $\rho=2(1+\cos\varphi)$, $\varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

3. $\left(\frac{2xy^2}{1+x^2y^2}-3\right)dx+\left(\frac{2x^2y}{1+x^2y^2}-5\right)dy$.

4. $\oint\limits_L (1-x^2)ydx+x(1+y^2)dy$, L: коло $x^2+y^2=9$, яке пробігається за ходом годинникової стрілки.

5. $\iint\limits_S (2+y-7x+9z)dS$, $P:\ 2x-y-2z=-2$.

6. $\iint\limits_S (z+1)dxdy$, S – зовнішня сторона поверхні $x^2+y^2+z^2=16$.

7. $\overline{A}=30x\overline{i}+(y+z)\overline{j}+6(x-z)\overline{k}$, $S:\ -6x+3y+z=-30$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

8. $\overline{A}=12x\overline{i}+(y+z)\overline{j}+(7x-z)\overline{k}$, $x+3y+z=3$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

9. $\overline{A}=(yz-2x)\overline{i}+(xz+2y)\overline{j}+xz\overline{k}$.

ВАРІАНТ 3

1. $\int\limits_L (x^2-y^2)dx+xydy$, L: відрізок прямої від (1, 1) до (3, 4).

2. $\int\limits_L ydl$, L: дуга кривої $\begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{cases}$, між точками (1, 0) і (0, 1).

3. $-(0{,}5\cos 2y+y\sin 2x)dx+(x\sin 2y+\cos^2 x+1)dy$.

4. $\oint\limits_L (-x^2y)ydx+xy^2dy$, L: коло $x^2+y^2=4$, яке пробігається проти ходу годинникової стрілки.

5. $\iint\limits_S (2x+3y+2z+3)dS$, $P:\ x+3y+z=1$.

6. $\iint\limits_S xdydz+ydxdz+zdxdy$, S – зовнішня сторона поверхні $x^2+y^2+z^2=16$.

7. $\overline{A}=12x\overline{i}+(y+z)\overline{j}+(7x-z)\overline{k}$, $S:\ x+3y+z=-1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

8. $\overline{A}=3x\overline{i}-4(y+z)\overline{j}+(x-z)\overline{k}$, $x+3y+z=3$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

9. $\overline{A}=(x^2-z^2)\overline{i}-3xy\overline{j}+(y^2+z^2)\overline{k}$.

ВАРІАНТ 4

1. $\int\limits_L \cos ydx-\sin xdy$, L: відрізок прямої від (2π, -2π) до (-2π, 2π).

2. $\int\limits_L (x^2+y^2+z^2)dl$, L: дуга кривої $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \\ z=\sqrt{3}t \end{cases}$, $t\in[0,2\pi]$.

3. $(y^2e^{xy^2}+3)dx+(2xye^{xy^2}-1)dy$.

4. $\oint\limits_L (-x^2y)ydx+xy^2dy$, L: коло $x^2+y^2=9$, яке пробігається за ходом годинникової стрілки.

5. $\iint\limits_S (4-2x+3y+2z)dS$, $P:\ 3x+3y+z=3$.

6. $\iint\limits_S xdydz+ydxdz+zdxdy$, S – зовнішня сторона поверхні $x^2+y^2+z^2=1$.

7. $\overline{A}=3x\overline{i}-4(y+z)\overline{j}+(x-z)\overline{k}$, $S:\ x+3y+z=30$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

8. $\overline{A}=3x\overline{i}+(y+z)\overline{j}-4(x-z)\overline{k}$, $x+3y+z=-3$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

9. $\overline{A}=2xyz\overline{i}-y(yz+1)\overline{j}+z\overline{k}$.

ВАРІАНТ 5

1. $\int\limits_L xydx+(y-x)dy$, L: дуга параболи $y=x^3$ від (0, 0) до (1, 1).

2. $\int\limits_L arctg\frac{y}{x}dl$, L: дуга кривої $\rho = 1+\cos\varphi$, $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

3. $\left(\frac{1}{x+y}+\cos x\cos y-3x^2\right)dx+\left(\frac{1}{x+y}-\sin x\sin y+4y\right)dy$.

4. $\oint\limits_L(-x^2y)\,ydx+xy^2dy$, L: коло $x^2+y^2=25$, яке пробігається проти ходу годинникової стрілки.

5. $\iint\limits_S(2x+3y+2z-5)dS$, P: $x+3y+6z=3$.

6. $\iint\limits_S(x^2+y^2)zdxdy$, S – зовнішня сторона сфери $x^2+y^2+z^2=9$

7. $\overline{A}=3x\overline{i}+(y+z)\overline{j}-4(x-z)\overline{k}$, S: $x+3y+z=-3$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

8. $\overline{A}=2x\overline{i}+(y+z)\overline{j}+(3x-z)\overline{k}$, $x+3y+z=3$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

9. $\overline{A}=(2x-3y)\overline{i}+2xy\overline{j}-z^2\overline{k}$.

ВАРІАНТ 6

1. $\int\limits_L xydx+(y-x)dy$, L: дуга параболи $y^2=x$ від (0, 0) до (1, 1).

2. $\int\limits_L\sqrt{2y}dl$, L: перша арка циклоїди $\begin{cases}x=2(t-\sin t)\\ y=2(1-\cos t)\end{cases}$.

3. $\left(\frac{y}{x}+\ln y+2x\right)dx+\left(\ln x+\frac{x}{y}+1\right)dy$.

4. $\oint\limits_L(-x^2y)\,ydx+xy^2dy$, L: коло $x^2+y^2=1$, яке пробігається проти ходу годинникової стрілки.

5. $\iint\limits_S(12x+3y+2z+2)dS$, P: $x+3y+z=30$.

6. $\iint\limits_S(x+y)dydz+3ydxdz+4zdxdy$, S – зовнішня сторона поверхні $x^2+y^2+z^2=1$, розташована в першому октанті.

7. $\overline{A}=2x\overline{i}+(y+z)\overline{j}+(3x-z)\overline{k}$, S: $-2x+3y+z=6$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

8. $\overline{A}=3x\overline{i}+(3y+z)\overline{j}+(x-5z)\overline{k}$, $x+3y+z=3$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

9. $\overline{A}=yz\overline{i}+(x-y)\overline{j}+z^2\overline{k}$.

ВАРІАНТ 7

1. $\int\limits_L(xy-1)dx+x^2ydy$, L: дуга параболи $y^2=4-4x$ від (1, 0) до (0, 2).

2. $\int\limits_L(x^2+y^2)dl$, L: коло $x^2+y^2=4$.

3. $(e^{x+y}-\cos x)dx+(e^{x+y}+\sin y)dy$.

4. $\oint\limits_L(-x^2y)\,ydx+xy^2dy$, L: еліпс $x^2+4y^2=1$, який пробігається проти ходу годинникової стрілки.

5. $\iint\limits_S(2x+5y-2z)dS$, P: $x+2y+z=10$.

6. $\iint\limits_S 4xdydz+2ydxdz-zdxdy$, S – зовнішня сторона поверхні $x^2+y^2+z^2=4$.

7. $\overline{A} = 3x\bar{i} + (3y+z)\bar{j} + (x-5z)\bar{k}$, $S:\ -3x+3y+z=9$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.
8. $\overline{A} = -3x\bar{i} + (y+z)\bar{j} + (x-z)\bar{k}$, $x+3y+z=3$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.
9. $\overline{A} = (y+z)\bar{i} + (x+z)\bar{j} + (x+y)\bar{k}$.

ВАРІАНТ 8

1. $\int\limits_L xydx + (y-x)dy$, L: дуга параболи $y = x^2$ від (0, 0) до (1, 1).
2. $\int\limits_L \frac{z^2}{x^2+y^2}dl$, L: перший виток гвинтової лінії $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \\ z = 2t \end{cases}$.
3. $\left(\frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}} + 2x\right)dx + \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}} + 6y\right)dy$.
4. $\oint\limits_L (-x^2y)dx + xy^2dy$, L: еліпс $9x^2 + 4y^2 = 1$, який пробігається проти ходу годинникової стрілки.
5. $\iint\limits_S (2x+3y+2z-8)dS$, $P:\ x+3y-z=3$.
6. $\iint\limits_S z^2dxdy$, S – зовнішня сторона поверхні $x^2+y^2+2z^2=2$.
7. $\overline{A} = -3x\bar{i} + (y+z)\bar{j} + (x-z)\bar{k}$, $S:\ x+5y+z=5$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.
8. $\overline{A} = 3x\bar{i} + (y+z)\bar{j} + (x-6z)\bar{k}$, $x+3y-6z=3$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.
9. $\overline{A} = (x+y)\bar{i} - 2(y+z)\bar{j} - (x-z)\bar{k}$.

ВАРІАНТ 9

1. $\int\limits_L (xy-y^2)dx + xdy$, L: дуга параболи $y = x^2$ від (0, 0) до (1, 1).
2. $\int\limits_L \frac{dl}{\sqrt{8-x^2-y^2}}$, L: відрізок прямої від (0, 0) до (2, 2).
3. $(e^{xy} + xye^{xy} + 2)dx + (x^2e^{xy} + 1)dy$.
4. $\oint\limits_L (2-x^2y)ydx + 3xy^2dy$, L: еліпс $x^2 + 4y^2 = 1$, який пробігається проти ходу годинникової стрілки.
5. $\iint\limits_S (2x-9y+2z)dS$, $P:\ x+7y+z=7$.
6. $\iint\limits_S 3z^2dxdy$, S – зовнішня сторона поверхні $x^2+y^2+2z^2=4$.
7. $\overline{A} = 3x\bar{i} + (y+z)\bar{j} + (x-6z)\bar{k}$, $S:\ x+3y-6z=3$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.
8. $\overline{A} = 3x\bar{i} - (y+z)\bar{j} + (x-z)\bar{k}$, $x-y+z=3$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.
9. $\overline{A} = (yz-2x)\bar{i} + (xz+zy)\bar{j} + xy\bar{k}$.

ВАРІАНТ 10

1. $\int\limits_L (xy-x)dx + \frac{1}{2}x^2dy$, L: дуга параболи $y^2 = 4x$ від (0, 0) до (1, 2).
2. $\int\limits_L (4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt[3]{y})dl$, L: відрізок прямої від (-1, 0) до (0, 1).
3. $(ye^{xy} + y^2)dx + (xe^{xy} + 2xy)dy$.

4. $\oint\limits_L (-x^2y)ydx + 4xy^2dy$, L: еліпс $x^2+4y^2=1$, який пробігається за ходом годинникової стрілки.

5. $\iint\limits_S (2x+3y+2z+5)dS$, P: $5x+3y+z=15$.

6. $\iint\limits_S 4xdydz + 2ydxdz + 4zdxdy$, S – зовнішня сторона поверхні $x^2+y^2+z^2=25$.

7. $\overline{A} = 3x\overline{i} - (y+z)\overline{j} + (x-z)\overline{k}$, S: $x-y+z=3$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

8. $\overline{A} = 3x\overline{i} + (2y+z)\overline{j} + (x-z)\overline{k}$, $x-3y+z=9$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

9. $\overline{A} = yz\overline{i} + xz\overline{j} + xy\overline{k}$.

ВАРІАНТ 11

1. $\int\limits_L (xy-1)dx + x^2ydy$, L: відрізок прямої від (1, 0) до (0, 2).

2. $\int\limits_L y^2dl$, L: перша арка циклоїди $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$.

3. $(y\cos(xy) + 2x - 3y)dx + (x\cos(xy) - 3x + 4y)dy$.

4. $\oint\limits_L (4 - x^2y)ydx + (x+y^2)dy$, L: еліпс $25x^2+4y^2=1$, який пробігається проти ходу годинникової стрілки.

5. $\iint\limits_S (2x+3y+2z)dS$, P: $x+3y-5z=30$.

6. $\iint\limits_S ydxdz$, S – зовнішня сторона поверхні $x^2+y^2+2z^2=2$.

7. $\overline{A} = 3x\overline{i} + (2y+z)\overline{j} + (x-z)\overline{k}$, S: $x-3y+z=9$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

8. $\overline{A} = 8x\overline{i} + (y+z)\overline{j} + (x-z)\overline{k}$, $x+3y-z=3$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

9. $\overline{A} = 6xy\overline{i} + (3x^2-2y)\overline{j} + z\overline{k}$.

ВАРІАНТ 12

1. $\int\limits_L \frac{y}{x}dx + xdy$, L: дуга лінії $y = \ln x$ від (1, 0) до (e, 1).

2. $\int\limits_L (x^2+y^2)^2dl$, L: перша чверть кола $\rho = 2$.

3. $(y\sin(x+y) + xy\cos(x+y) - 9x^2)dx + (x\sin(x+y) + xy\cos(x+y) + 2y)dy$.

4. $\oint\limits_L (4 - x^2y)ydx + (x+y^2)dy$, L: еліпс $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, який пробігається проти ходу годинникової стрілки.

5. $\iint\limits_S (2x-3y+2z)dS$, P: $x+3y+z=9$.

6. $\iint\limits_S xdydz + ydxdz - zdxdy$, S – зовнішня сторона поверхні $x^2+y^2+4z^2=4$.

7. $\overline{A} = 8x\overline{i} + (y+z)\overline{j} + (x-z)\overline{k}$, S: $x+3y-z=3$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

8. $\overline{A} = 3x\overline{i} + 2(y+z)\overline{j} + (x+z)\overline{k}$, $3x+3y+z=3$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

9. $\overline{A} = (2x-yz)\overline{i} + (2x-xy)\overline{j} + yz\overline{k}$.

ВАРІАНТ 13

1. $\int\limits_L 2xydx - x^2dy$, L: дуга параболи $y = 0{,}25x^2$ від (0, 0) до (2, 1).

2. $\int\limits_L (x^2+y^2+z^2)dl$, L: перший виток гвинтової лінії $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \\ z=2t \end{cases}$.

3. $(5y+\cos x+6xy^2)dx+(5x+6x^2y)dy$.

4. $\oint\limits_L (4-x^2+y)ydx+(x+5y^2)dy$, L: еліпс $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$, який пробігається проти ходу годинникової стрілки.

5. $\iint\limits_S (2x+3y+2z)dS$, P: $x+3y-z=-6$.

6. $\iint\limits_S zdxdy$, S – зовнішня сторона поверхні $x^2+2y^2+2z^2=4$.

7. $\overline{A}=3x\overline{i}+2(y+z)\overline{j}+(x+z)\overline{k}$, S: $3x+3y+z=3$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

8. $\overline{A}=3x\overline{i}+(y-2z)\overline{j}+(x-z)\overline{k}$, $x+3y+z=6$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

9. $\overline{A}=(x+y)\overline{i}-2xz\overline{j}-3(y+z)\overline{k}$.

ВАРІАНТ 14

1. $\int\limits_L (x^2-2xy)dx+(y^2+2xy)dy$, L: дуга параболи $y=x^2$ від (-1, 1) до (1, 1).

2. $\int\limits_L \frac{dl}{\sqrt{5}(x-y)}$, L: відрізок прямої від (0, 4) до (4, 0).

3. $(y^2e^{xy}-3)dx+e^{xy}(1+xy)dy$.

4. $\oint\limits_L (-x^2+5y)ydx+(x-y^2)dy$, L: еліпс $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$, який пробігається проти ходу годинникової стрілки.

5. $\iint\limits_S (2x+13y+2z)dS$, P: $x-2y+z=6$.

6. $\iint\limits_S 4xdydz+ydxdz+6zdxdy$, S – зовнішня сторона поверхні $x^2+y^2+z^2=9$.

7. $\overline{A}=3x\overline{i}+(y-2z)\overline{j}+(x-z)\overline{k}$, S: $x+3y+z=6$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

8. $\overline{A}=(3x+1)\overline{i}+(y+z)\overline{j}+(x-z)\overline{k}$, $x+3y+3z=3$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

9. $\overline{A}=z^2\overline{i}+(xz+y)\overline{j}+x^2y\overline{k}$.

ВАРІАНТ 15

1. $\int\limits_L (x^2-2xy)dx+xydy$, L: дуга параболи $y=x^2$ від (-1, 1) до (1, 1).

2. $\int\limits_L ydl$, L: дуга параболи $y^2=\frac{2}{3}x$ від (0, 0) до $\left(\frac{35}{6},\frac{\sqrt{35}}{3}\right)$.

3. $(1+\cos(xy))ydx+(1+\cos(xy))xdy$.

4. $\oint\limits_L (4-x^2y)ydx+(x-6y^2)xdy$, L: еліпс $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{36}=1$, який пробігається проти ходу годинникової стрілки.

5. $\iint\limits_S (2x+3y+2z-10)dS$, P: $6x+3y-z=-12$.

6. $\iint\limits_S 4xdydz-3ydxdz+5zdxdy$, S – зовнішня сторона поверхні $x^2+y^2+z^2=16$.

7. $\overline{A}=(3x+1)\bar{i}+(y+z)\bar{j}+(x-z)\bar{k}$, $S:\ x+3y+3z=3$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

8. $\overline{A}=3x\bar{i}+(y+z)\bar{j}+(x-z)\bar{k}$, $x+3y+z=3$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

9. $\overline{A}=xy(3x-4y)\bar{i}+x^2(x-4y)\bar{j}+3z^2\bar{k}$.

ВАРІАНТ 16

1. $\int\limits_L (x^2-2xy)dx+\left(y^2-2xy\right)dy$, L: дуга $y=x^3$ від (0, 0) до (1, 1).

2. $\int\limits_L \dfrac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$, L: відрізок прямої від (0, 0) до (1, 2).

3. $\left(y-\sin x\right)dx+\left(x-2y\cos y^2\right)dy$.

4. $\oint\limits_L (4-x^2y)ydx+(x+y^2)xdy$, L: еліпс $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1$, який пробігається проти ходу годинникової стрілки.

5. $\iint\limits_S (2x+3y-z+10)dS$, $P:\ 2x+3y-z=-12$.

6. $\iint\limits_S 4xdydz-\left(3+y\right)dxdz+5zdxdy$, S – зовнішня сторона поверхні $x^2+y^2+4z^2=16$.

7. $\overline{A}=(3x+1)\bar{i}+(y+z)\bar{j}+(x+z)\bar{k}$, $S:\ x+7y-z=7$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

8. $\overline{A}=3x\bar{i}+(y-z)\bar{j}+(x-z)\bar{k}$, $x+5y+z=5$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

9. $\overline{A}=xy(3x+4y)\bar{i}+x^2(x+4y)\bar{j}+3z^2\bar{k}$.

ВАРІАНТ 17

1. $\int\limits_L (x^3+y^2)dx+3xydy$, L: дуга $y=x^3$ від (0, 0) до (1, 1).

2. $\int\limits_L xydl$, L: відрізок прямої від (0, 3) до (3, 0).

3. $\left(\sin 2x-\dfrac{1}{x^2y}\right)dx-\dfrac{1}{xy^2}dy$.

4. $\oint\limits_L (4+x^2y)ydx+6y^2dy$, L: еліпс $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{36}=1$, який пробігається проти ходу годинникової стрілки.

5. $\iint\limits_S (2x-3y+2z-10)dS$, $P:\ 6x+3y+2z=-12$.

6. $\iint\limits_S 4xdydz-3ydxdz+\left(5-z\right)dxdy$, S – зовнішня сторона поверхні $x^2+4y^2+z^2=16$.

7. $\overline{A}=(4x+1)\bar{i}+(y+z)\bar{j}+(x-2z)\bar{k}$, $S:\ x-y+5z=5$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

8. $\overline{A}=6x\bar{i}+(y+z)\bar{j}+(x+2z)\bar{k}$, $x+y+4z=4$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

9. $\overline{A}=xy(3x^2-4y)\bar{i}+x^3(x-4y)\bar{j}+3z^3\bar{k}$.

ВАРІАНТ 18

1. $\int\limits_L (x^2-y^2)dx+xydy$, L: відрізок прямої від (0, 0) до (3, 4).

2. $\int\limits_L zdl$, L: перший виток конічної гвинтової лінії $\begin{cases} x=t\cos t \\ y=t\sin t \\ z=t \end{cases}$.

3. $\frac{x+y}{xy}dx+\frac{y-x}{y^2}dy$.

4. $\oint\limits_L ydx+(2x-6y^2)xdy$, L: еліпс $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{36}=1$, який пробігається проти ходу годинникової стрілки.

5. $\iint\limits_S (x+3y+z-1)dS$, P: $6x+3y-z=24$.

6. $\iint\limits_S (4+x)dydz-3ydxdz+5zdxdy$, S – зовнішня сторона поверхні $4x^2+y^2+z^2=16$.

7. $\overline{A}=(3x+1)\bar{i}+(2y+z)\bar{j}+(x-z)\overline{k}$, S: $x+3y+3z=-6$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

8. $\overline{A}=3x\bar{i}+(2y+z)\bar{j}+(x-z)\overline{k}$, $x-5y+z=5$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

9. $\overline{A}=x(3x-4y)\bar{i}+x(x-4y)\bar{j}+3z^2\overline{k}$.

ВАРІАНТ 19

1. $\int\limits_L (x^2-2xy)dx+4xydy$, L: дуга параболи $y=x^2$ від (-1, 1) до (2, 4).

2. $\int\limits_L (x+y)dl$, L: коло $x^2+y^2=16$.

3. $(20x^3-21x^2y+2y)dx+(3+2x-7x^3)dy$.

4. $\oint\limits_L (4-x^2y)ydx+(x-6y^2)xdy$, L: коло $x^2+y^2=1$, яке пробігається проти ходу годинникової стрілки.

5. $\iint\limits_S (2x-5y+2z-10)dS$, P: $6x-4y-z=-12$.

6. $\iint\limits_S 4xdydz-(3x+2y)dxdz+5zdxdy$, S – зовнішня сторона поверхні $x^2+y^2+z^2=9$.

7. $\overline{A}=(3x+1)\bar{i}+(y+2z)\bar{j}+(x-z)\overline{k}$, S: $x+3y-4z=12$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

8. $\overline{A}=3x\bar{i}+(y+3z)\bar{j}+(x-z)\overline{k}$, $x+2y+2z=4$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

9. $\overline{A}=xy(3x-3y)\bar{i}+x^2(x-3y)\bar{j}+4z^2\overline{k}$.

ВАРІАНТ 20

1. $\int\limits_L \sin ydx-\cos xdy$, L: відрізок прямої від (0, 0) до (π, π).

2. $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}dl$, L: коло $x^2+y^2=2y$.

3. $(ye^{xy}-2\sin x)dx+(xe^{xy}+\cos y)dy$.

4. $\oint\limits_L (4-x^2y)ydx+(4x-6y^2)dy$, L: коло $x^2+y^2=100$, яке пробігається проти ходу годинникової стрілки.

5. $\iint\limits_S (2x+3y+2z-+5)dS$, P: $6x+3y+2z=6$.

6. $\iint\limits_S 4xdydz-3ydxdz+(5x+z)dxdy$, S – зовнішня сторона поверхні $x^2+y^2+4z^2=16$.

7. $\overline{A}=(3x+y)\bar{i}+(y-z)\bar{j}+(x-z)\overline{k}$, S: $x+3y+4z=12$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

8. $\overline{A}=3x\bar{i}+(2y+3z)\bar{j}+(2x-3z)\overline{k}$, $x+3y+2z=-6$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

9. $\overline{A}=y(3x-4y)\bar{i}+x^2(x-4y)\bar{j}+3z\overline{k}$.

ВАРІАНТ 21

1. $\int\limits_L xydx + (y-x)dy$, L: дуга параболи $y = x^2$ від (0, 0) до (1, 1).
2. $\int\limits_L xydl$, L: відрізок прямої від (0, 5) до (5, 0).
3. $y(e^{xy}+5)dx + x(e^{xy}+5)dy$.
4. $\oint\limits_L (4-x^2y)dx + (x-6y^2)xdy$, L: еліпс $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{100}=1$, який пробігається проти ходу годинникової стрілки.
5. $\iint\limits_S (2x+3y+6z-10)dS$, P: $6x+3y-z=36$.
6. $\iint\limits_S 4xdydz - 3ydxdz + (5y+z)dxdy$, S – зовнішня сторона поверхні $x^2+y^2+25z^2=25$.
7. $\overline{A}=(3x+1)\overline{i}+(3y+z)\overline{j}+(x-z)\overline{k}$, S: $x+2y+4z=4$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.
8. $\overline{A}=5x\overline{i}+(y+z)\overline{j}+(x-z)\overline{k}$, $x+5y-z=5$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.
9. $\overline{A}=xy(3x+y)\overline{i}+x^2(x-4y)\overline{j}+3z^4\overline{k}$.

ВАРІАНТ 22

1. $\int\limits_L xydx + (x+y)dy$, L: дуга параболи $y^2 = x$ від (0, 0) до (1, 1).
2. $\int\limits_L (x^2+y^2)dl$, L: коло $x^2+y^2=4x$.
3. $\left(x-\dfrac{y}{x^2-y^2}\right)dx+\left(\dfrac{x}{x^2-y^2}-y\right)dy$.
4. $\oint\limits_L (4-x^2y)dx + (x-6y^2)dy$, L: коло $x^2+y^2=16$, яке пробігається проти ходу годинникової стрілки.
5. $\iint\limits_S (2x+3y+2z+2)dS$, P: $6x+4y-z=12$.
6. $\iint\limits_S (4x+y)dydz - 3ydxdz + 5zdxdy$, S – зовнішня сторона поверхні $x^2+16y^2+z^2=16$.
7. $\overline{A}=(3x+1)\overline{i}+(y-2z)\overline{j}+(x-z)\overline{k}$, S: $x+3y-3z=6$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.
8. $\overline{A}=3x\overline{i}+(y+z)\overline{j}+(2x-z)\overline{k}$, $x-y+7z=7$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.
9. $\overline{A}=y(3x-4y)\overline{i}+x(x-4y)\overline{j}+3z^2\overline{k}$.

ВАРІАНТ 23

1. $\int\limits_L (xy-1)dx + xy^2dy$, L: дуга параболи $y^2=2-2x$ від (1, 0) до (-1, 2).
2. $\int\limits_L \sqrt{3y}dl$, L: перша арка циклоїди $\begin{cases} x=3(t-\sin t) \\ y=3(1-\cos t) \end{cases}$
3. $\dfrac{x\ln y+y}{x}dx+\dfrac{y\ln x+x}{y}dy$.
4. $\oint\limits_L (4+x^2y)dx + (4x-6y^2)dy$, L: коло $x^2+y^2=25$, яке пробігається проти ходу годинникової стрілки.
5. $\iint\limits_S (3x+3y+2z+9)dS$, P: $2x+3y-z=6$.

6. $\iint\limits_S 4xdydz-(3x+y)dxdz+5zdxdy$, S – зовнішня сторона поверхні $4x^2+y^2+z^2=4$.

7. $\overline{A}=(3x+1)\overline{i}+(y+z)\overline{j}+(x+z)\overline{k}$, S: $x+3y+3z=6$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

8. $\overline{A}=5x\overline{i}+(y+z)\overline{j}+(x-z)\overline{k}$, $5x+y-z=5$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

9. $\overline{A}=xy(5x-4y)\overline{i}+x^2(x-5y)\overline{j}+5z^2\overline{k}$.

ВАРІАНТ 24

1. $\int\limits_L xydx+(y+x)dy$, L: дуга параболи $y=x^2$ від (0, 0) до (2, 4).

2. $\int\limits_L (x^2+y^2+z)dl$, L: перший виток гвинтової лінії $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \\ z=3t \end{cases}$

3. $e^{x-y}(1+x+y)dx+e^{x-y}(1-x-y)dy$.

4. $\oint\limits_L xydx+(x-6y^2)dy$, L: коло $x^2+y^2=1$, яке пробігається проти ходу годинникової стрілки.

5. $\iint\limits_S (2x+6y+2z-10)dS$, P: $2x+3y-2z=12$.

6. $\iint\limits_S 4xdydz-12ydxdz+5zdxdy$, S – зовнішня сторона поверхні $x^2+16y^2+4z^2=16$.

7. $\overline{A}=(2x+1)\overline{i}+(y+z)\overline{j}+(x-z)\overline{k}$, S: $x-3y+3z=3$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

8. $\overline{A}=3x\overline{i}+(y+z)\overline{j}+(x-z)\overline{k}$, $-x+7y+z=7$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

9. $\overline{A}=xy(x-4y)\overline{i}+x^2(x-4y)\overline{j}+z^2\overline{k}$.

ВАРІАНТ 25

1. $\int\limits_L (x+xy)dx+x^2dy$, L: дуга параболи $y^2=4x$ від (0, 0) до (1, -2).

2. $\int\limits_L (x^2+y^2+5z^2)dl$, L: перший виток гвинтової лінії $\begin{cases} x=5\cos t \\ y=5\sin t \\ z=2t \end{cases}$.

3. $(3x^2-2xy+y)dx+(x-x^2-3y^2-4y)dy$.

4. $\oint\limits_L (9-x^2y)dx+(3x-6y^2)dy$, L: коло $x^2+y^2=4$, яке пробігається проти ходу годинникової стрілки.

5. $\iint\limits_S (2x+3y+2z)dS$, P: $6x+3y-z=12$.

6. $\iint\limits_S (4x+2y)dydz-3ydxdz+5zdxdy$, S – зовнішня сторона поверхні $x^2+4y^2+z^2=4$.

7. $\overline{A}=(3x+1)\overline{i}+(y+z)\overline{j}+(2x-z)\overline{k}$, S: $x+3y-3z=3$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

8. $\overline{A}=4x\overline{i}+(y+z)\overline{j}+(x-z)\overline{k}$, $x+7y-2z=14$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

9. $\overline{A}=2xy(3x-4y)\overline{i}+2x^2(x-4y)\overline{j}+6z^2\overline{k}$.

2.5. Зразок виконання індивідуального завдання

Приклад 2.1. а) Знайти $\int\limits_L xydx+(y-x)dy$, L: дуга параболи $y=x^2$ від точки (0, 0) до точки (1, 1).

б) Знайти $\int\limits_L xydx+(y-x)dy$, L: дуга параболи $y^3=x$ від точки (0, 0) до точки (8, 2).

в) Знайти $\int\limits_L xydx+yzdy+zxdz$, L: $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t \\ z=bt \end{cases}$, $t\in[0,2\pi]$.

Розв'язання. а) Зведемо криволінійний інтеграл до визначеного інтегралу за формулою (2.3). Одержимо наступне:

$$\int\limits_L xydx+(y-x)dy=\int\limits_0^1 (x^3+(x^2-x)\cdot 2x)dx=\int\limits_0^1 (3x^3-2x^2)dx=\frac{1}{12}.$$

б) Вважаючи x функцією від змінної y одержимо $dx=3y^2dy$, і за формулою, аналогічною до формули (2.3), одержимо наступне:

$$\int\limits_L xydx+(y-x)dy=\int\limits_0^2 \left(y^3y\cdot 3y^2+\left(y-y^3\right)\right)dy=\int\limits_0^2 \left(3y^6-y^3+y\right)dy=\frac{370}{7}.$$

в) Обчислимо диференціали: $dx=-a\sin tdt$, $dy=a\cos tdt$, $dz=bdt$. Тоді для інтеграла за формулою (2.4) одержимо:

$$\int\limits_L xydx+yzdy+zxdz=\int\limits_0^{2\pi}(-a^3\sin^2 t\cos t+a^2bt\cos t\sin t+ab^2t\cos t)dt=-\frac{\pi}{2}a^2b.$$

Приклад 2.2. а) Обчислити $\int\limits_L xdl$, L: відрізок прямої від точки (0, 0) до точки (1, 2).

б) Обчислити $\int\limits_L ydl$, L: дуга кривої $y^2=x$ від точки (0, 0) до точки (4, 2).

в) Знайти довжину просторової кривої L: $\begin{cases} x=3t \\ y=3t^2 \\ z=2t^3 \end{cases}$ від точки (0, 0, 0) до точки (3, 3, 2).

Розв'язання. а) Знайдемо рівняння прямої, яка проходить через задані точки (0, 0) і (1, 2). Одержимо рівняння $y=2x$. Далі за формулою (2.1) маємо наступне: $dl=\sqrt{1+(y'(x))^2}dx=\sqrt{5}dx$. Тоді одержимо:

$$\int\limits_L xdl=\int\limits_0^1 x\sqrt{5}dx=\sqrt{5}\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1=\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

б) Вважаючи x функцією від змінної y за формулою, аналогічною до формули (2.1), маємо наступне: $dl=\sqrt{1+(x'(y))^2}dy=\sqrt{1+4y^2}dy$. Тоді одержимо:

$$\int\limits_L ydl=\int\limits_0^2 y\sqrt{1+4y^2}dy=\left.\frac{\left(1+4y^2\right)\sqrt{1+4y^2}}{12}\right|_0^2=\frac{17\sqrt{17}-1}{12}.$$

в) Обчислимо похідні $x' = 3$, $y' = 6t$, $z' = 6t^2$. Далі за формулою довжини дуги $l = \int\limits_L dl$ і за формулою (2.2) маємо наступне:

$$l = \int\limits_L dl = \int\limits_0^1 \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}\,dt = \int\limits_0^1 \sqrt{9 + 36t^2 + 36t^4}\,dt = 3\int\limits_0^1 (1 + 2t^2)dt = 5 \text{ (од.)}.$$

Приклад2.3. Довести, що вираз $du = 2xydx + x^2dy$ є повним диференціалом функції $u(x, y)$. Знайти функцію $u(x, y)$.

Розв'язання. Обчислимо частинні похідні: $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 2x$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 2x$, тобто $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ і вираз є повним диференціалом функції $u(x, y)$. Тоді за формулою (2.6) маємо наступний вираз для функції $u(x, y)$:

$$u(x, y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(\xi, y_0)d\xi + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x, \eta)d\eta = \int\limits_{x_0}^{x} 2\xi y_0 d\xi + \int\limits_{y_0}^{y} x^2 d\eta = y_0\xi^2\Big|_{x_0}^{x} + x^2(y - y_0) = x^2y + const.$$

Приклад 2.4. Обчислити за допомогою формули Гріна $\oint\limits_L 5ydx + xdy$, де контур L: коло $x^2 + y^2 = 1$, яке пробігається проти ходу годинникової стрілки.

Розв'язання. Обчислимо частинні похідні: $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 5$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 1$. Контур інтегрування є замкнутим і пробігається проти хода годинникової стрілки, тоді за формулою Гріна маємо наступне (в якості області D вибираємо круг $x^2 + y^2 \le 1$):

$$\oint\limits_L Pdx + Qdy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \iint\limits_D (1 - 5)dxdy = -4\iint\limits_D dxdy = -4\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho d\rho = -4\pi.$$

Приклад 2.5. а) Обчислити поверхневий інтеграл першого роду $\iint\limits_S (x + 3y + z + 2)dS$, де S – частина площини P: $x + 2y + z = 4$, яка розташована між координатними площинами.

б) Обчислити поверхневий інтеграл першого роду $\iint\limits_S z\,dS$, де S: частина поверхні конуса $z^2 = x^2 + y^2$, розташована між площинами $z = 1$, $z = 2$.

Розв'язання. а) Побудуємо дану поверхню (рис. 2.1). Одержимо, що відповідна частина поверхні проектується на площину xOy в трикутник AOB (область D). Враховуючи, що $z = 4 - x - 2y$, $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -1$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -2$, одержимо за формулою (2.9): $\iint\limits_S (x + 3y + z + 2)dS =$

$$= \iint\limits_D (x + 3y + 4 - x - 2y + 2)\cdot\sqrt{1 + (-1)^2 + (-2)^2}\,dxdy =$$

$$= \iint\limits_D (y + 6)\cdot\sqrt{6}dxdy = \sqrt{6}\int\limits_0^4 dx \int\limits_0^{\frac{4-x}{2}} (y + 6)dy = \frac{80\sqrt{6}}{3}.$$

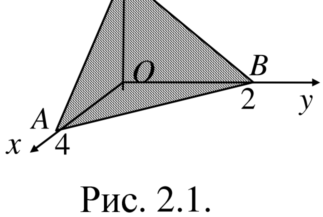


Рис. 2.1.

б) Побудуємо дану поверхню (рис. 2.2). Одержимо, що відповідна частина поверхні проектується на площину xOy в кільце D, розташоване між колами $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=2$.

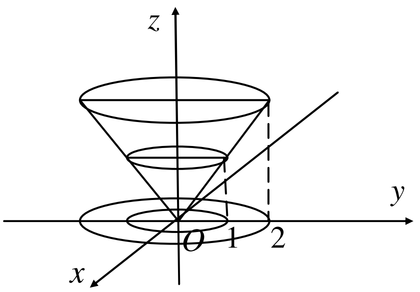


Рис. 2.2.

Враховуючи, що $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, одержимо за формулою (2.9):

$$\iint_S z\,dS=\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}dxdy=$$

$$=\sqrt{2}\iint_D\sqrt{x^2+y^2}dxdy=\begin{vmatrix}x=\rho\cos\varphi\\ y=\rho\sin\varphi\end{vmatrix}=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_1^2\rho^2d\rho=\frac{14\pi\sqrt{2}}{3}.$$

Приклад 2.6. а) Обчислити поверхневий інтеграл другого роду $\iint_S xdydz+ydxdz+zdxdy$, де S – зовнішня поверхня площини $x+2z-2=0$, розташована в 1 октанті та відсічена площиною $y=4$.

б) Обчислити поверхневий інтеграл другого роду $\iint_S(2x+y)dydz-4ydxdz+5zdxdy$, де S – зовнішня сторона поверхні $x^2+y^2+z^2=144$.

Розв'язання. а) Побудуємо дану поверхню (рис. 2.3). Розіб'ємо даний інтеграл на 3 інтеграли: $\iint_S xdydz+ydxdz+zdxdy=\iint_S xdydz+\iint_S ydxdz+\iint_S zdxdy=I_1+I_2+I_3$.

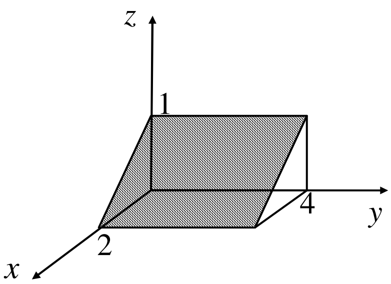


Рис.2.3.

Обчислимо перший інтеграл, тобто $I_1=\iint_S xdydz$. Із рівняння поверхні маємо: $x=2-2z$.

Проекція площини на yOz – прямокутник: $0\le y\le 4$, $0\le z\le 1$. Тоді:

$$I_1=\iint_S xdydz=2\int_0^4 dy\int_0^1(1-z)dz=4.$$

Обчислимо другий інтеграл. $I_2=\iint_S ydxdz=0$, оскільки площина (поверхня S) паралельна вісі Oy.

Обчислимо третій інтеграл, тобто $I_3=\iint_S zdxdy$. Із рівняння поверхні: $z=\frac{1}{2}(2-x)$. Проекція площини на xOy – прямокутник: $0\le y\le 4$, $0\le x\le 2$. Тоді:

$$I_3=\iint_S zdxdy=\frac{1}{2}\int_0^4 dy\int_0^2(2-x)dx=4.$$

Тоді одержимо: $\iint_S xdydz+ydxdz+zdxdy=I_1+I_2+I_3=4+0+4=8$.

б) Дана поверхня є замкнутою поверхнею (сфера з центром у початку координат і радіусом 12), нормаль до якої зовнішня. Застосуємо до обчислення інтегралу формулу Остроградського-Гауса, тобто зведемо даний інтеграл до потрійного інтегралу по кулі V : $x^2+y^2+z^2 \le 144$. За формулою (2.10) маємо:

$$\iint_S (2x+y)dydz - 4ydxdz + 5zdxdy = \iiint_V (2-4+5)dxdydz =$$

$$= 3\iiint_V dxdydz = 3V_{кулі} = 3\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot 12^3 = 6912\pi .$$

Приклад 2.7. а) Знайти потік векторного поля $\overline{A} = (x+z)\overline{i} + (2y-x)\overline{j} + z\overline{k}$ через зовнішню поверхню піраміди, утворену площиною $x-2y+2z=4$ і координатними площинами, двома способами (безпосередньо і за формулою Остроградського).

б) Знайти потік векторного поля $\overline{A} = x\overline{i} + y\overline{j} + (1-z)\overline{k}$ через повну поверхню конуса $z^2 = x^2 + y^2$, $z = H$ двома способами (безпосередньо і за формулою Остроградського).

Розв'язання. а) Обчислимо потік безпосередньо. Повна поверхня піраміди складається з чотирьох поверхонь: ΔAOC, ΔAOB, ΔBOC і ΔABC (рис. 2.4). Тому

$$П = \iint_S \overline{A}\cdot\overline{n}dS = \iint_{\Delta AOC} \overline{A}\cdot\overline{n}dS + \iint_{\Delta AOB} \overline{A}\cdot\overline{n}dS + \iint_{\Delta BOC} \overline{A}\cdot\overline{n}dS + \iint_{\Delta ABC} \overline{A}\cdot\overline{n}dS = П_1 + П_2 + П_3 + П_4 .$$

Обчислимо перший інтеграл. Розглянемо ΔAOC. На цій поверхні: $y=0$, тобто рівняння AC матиме вигляд: $x+2z=4$, або $z=\frac{4-x}{2}$, вектор нормалі до поверхні $\overline{n}=\overline{j}$, $dS = dxdz$. Тоді одержимо наступне:

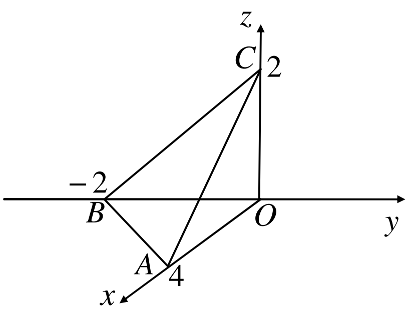


Рис. 2.4.

$$\overline{A}\cdot\overline{n} = 2y - x = -x ,$$

$$П_1 = \iint_{\Delta AOC} \overline{A}\cdot\overline{n}dS = -\iint_{\Delta AOC} xdxdz = -\int_0^4 dx \int_0^{\frac{4-x}{2}} xdz = -\frac{16}{3} .$$

Обчислимо другий інтеграл. Розглянемо ΔAOB. На цій поверхні: $z=0$, вектор нормалі до поверхні $\overline{n}=-\overline{k}$, $dS = dxdy$. Тоді одержимо наступне:

$$\overline{A}\cdot\overline{n} = 0\cdot(-1) = 0 , \qquad П_2 = \iint_{\Delta AOB} \overline{A}\cdot\overline{n}dS = 0 .$$

Обчислимо третій інтеграл. Розглянемо ΔBOC. На цій поверхні: $x=0$, тобто рівняння BC матиме вигляд: $-2y+2z=4$, або $y=z-2$, вектор нормалі до поверхні $\overline{n}=-\overline{i}$, $dS = dydz$. Тоді одержимо наступне:

$$\overline{A}\cdot\overline{n} = -z ,$$

$$П_3 = \iint_{\Delta BOC} \overline{A}\cdot\overline{n}dS = -\iint_{\Delta BOC} zdydz = -\int_0^2 dz \int_{z-2}^{0} zdy = -\frac{4}{3} .$$

Обчислимо четвертий інтеграл. Розглянемо ΔABC. Рівняння поверхні: $x-2y+2z-4=0$, вектор нормалі до поверхні матиме вигляд:

$$\bar{n} = \frac{1}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}\bar{i} + \frac{-2}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}\bar{j} + \frac{2}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}\bar{k} = \frac{1}{3}\bar{i} - \frac{2}{3}\bar{j} + \frac{2}{3}\bar{k},$$

$$dS = \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy,\ z = -\frac{1}{2}x + y + 2,\ \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{2},\ \frac{\partial z}{\partial y} = 1,\ dS = \sqrt{1+\frac{1}{4}+1}\,dxdy = \frac{3}{2}dxdy.$$

Тоді одержимо наступне:

$$\Pi_4 = \iint\limits_{\Delta ABC} \bar{A}\cdot\bar{n}dS = \frac{3}{2}\iint\limits_{\Delta ABC}\left((x+z)\cdot\frac{1}{3}dxdy + (2y-x)\left(-\frac{2}{3}\right)dxdy + z\cdot\frac{2}{3}dxdy\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta ABC}(x+z-4y+2x+2z)dxdy = \frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta ABC}(3x-4y+3z)dxdy =$$

$$= \frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta AOB}\left(3x-4y-\frac{3}{2}x+3y+6\right)dxdy = \frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta AOB}\left(\frac{3}{2}x-y+6\right)dxdy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{0}dy\int_{0}^{2y+4}\left(\frac{3}{2}x-y+6\right)dx = \frac{52}{3}.$$

Тоді одержимо, що потік буде наступним: $\Pi = -\frac{16}{3} + 0 - \frac{4}{3} + \frac{52}{3} = \frac{32}{3}$.

2 спосіб. Обчислимо потік за формулою Остроградського-Гауса.

$$\Pi = \iiint\limits_V\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)dxdydz = \iiint\limits_V(1+2+1)dxdydz = 4\iiint\limits_V dxdydz = 4V_{піраміди} = 4\cdot\frac{1}{3}S_{осн}\cdot H =$$

$$= 4\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4\cdot 2 = \frac{32}{3}.$$

б) 1 спосіб. Обчислимо потік безпосередньо. Повна поверхня складається з бічної поверхні S_1: $\Phi(x,y,z) = x^2+y^2-z^2 = 0$ та поверхні основи S_2: $z = H$ (рис. 2.5). Тому $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2$.

$$\Pi_1 = \iint\limits_{S_1}\frac{A_x\frac{\partial\Phi}{\partial x}+A_y\frac{\partial\Phi}{\partial y}+A_z\frac{\partial\Phi}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2}}dS = \iint\limits_{S_1}\frac{x^2+y^2+z^2-z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dS.$$

Із рівняння поверхні маємо: $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $dS = \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy = \sqrt{2}dxdy$, поверхня проектується на круг D: $x^2+y^2 \le H^2$.

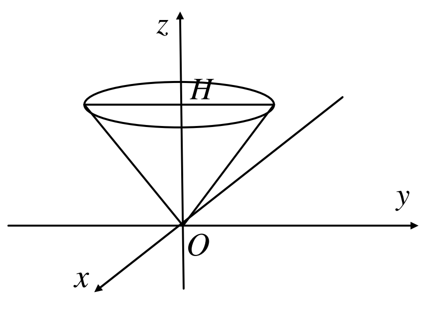


Рис 2.5.

Тоді $\Pi_1 = \iint\limits_D\frac{2(x^2+y^2)-\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{2(x^2+y^2)}}\sqrt{2}dxdy = \iint\limits_D\left(2\sqrt{x^2+y^2}-1\right)dxdy$. Переходячи до полярних координат, одержимо $\Pi_1 = 2\pi H^2\left(\frac{2}{3}H - \frac{1}{2}\right)$.

Аналогічно, $\Pi_2 = \iint\limits_{S_2} (1-z)\,dS = (1-H)\iint\limits_{D} dxdy = (1-H)\pi H^2$. Тоді одержимо:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = 2\pi H^2\left(\frac{2}{3}H - \frac{1}{2}\right) + (1-H)\pi H^2 = \frac{\pi H^3}{3}.$$

2 спосіб. Обчислимо потік за формулою Остроградського-Гауса.

$$\Pi = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right)dxdydz = \iiint\limits_V (1+1-1)dxdydz = \iiint\limits_V dxdydz = V_{конуса} = \frac{1}{3}\pi H^2 \cdot H = \frac{\pi H^3}{3}.$$

<u>Приклад 2.8.</u> Знайти циркуляцію векторного поля $\overline{A} = (x-2z)\overline{i} + (x+3y+z)\,\overline{j} + (5x+y)\overline{k}$ через контур трикутника L, утвореного в результаті перетину площин $-x+7y+z=7$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, при додатньому обході відносно нормального вектора $\overline{n}(1;1;1)$ двома способами (безпосередньо і за формулою Стокса).

Розв'язання. *1 спосіб.* Побудуємо в системі координат контур L, тобто контур ΔABC (рис. 2.6). Циркуляцію будемо обчислювати за наступною формулою, розбивши контур трикутника на три окремі відрізки:

$$Ц = \oint\limits_{ABCA} \overline{A}\cdot\overline{dl} = \int\limits_{\cup AB} \overline{A}\cdot\overline{dl} + \int\limits_{\cup BC} \overline{A}\cdot\overline{dl} + \int\limits_{\cup CA} \overline{A}\cdot\overline{dl}$$

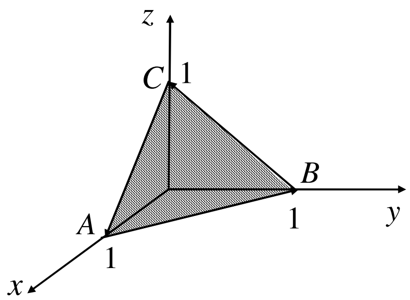


Рис. 2.6.

Обчислимо перший інтеграл. Розглянемо відрізок AB. На цьому відрізку: $z=0$, тобто рівняння AB матиме вигляд: $x+y=1$, або $y=1-x$, тобто $dy=-dx$. Тоді одержимо наступне:

$$\overline{dl} = dx\overline{i} + dy\,\overline{j},\ \overline{A} = x\overline{i} + (x+3y)\,\overline{j} + (5x+y)\overline{k},$$

$$\overline{A}\cdot\overline{dl} = xdx + (x+3y)dy,$$

$$\int\limits_{\cup AB} \overline{A}\cdot\overline{dl} = \int\limits_{\cup AB} xdx + (x+3y)dy = \int\limits_1^0 xdx + (x+3(1-x))(-dx) = \int\limits_1^0 (3x-3)dx = \frac{3}{2}.$$

Обчислимо другий інтеграл. Розглянемо відрізок BC. На цьому відрізку: $x=0$, тобто рівняння BC матиме вигляд: $z+y=1$, або $z=1-y$, тобто $dz=-dy$. Тоді одержимо наступне:

$$\overline{dl} = dy\,\overline{j} + dz\overline{k},\ \overline{A} = (-2z)\overline{i} + (z+3y)\,\overline{j} + y\overline{k},\ \overline{A}\cdot\overline{dl} = (z+3y)dy + ydz,$$

$$\int\limits_{\cup BC} \overline{A}\cdot\overline{dl} = \int\limits_{\cup BC} (z+3y)dy + ydz = \int\limits_1^0 (3y+1-y-y)dy = -\frac{3}{2}.$$

Обчислимо третій інтеграл. Розглянемо відрізок CA. На цьому відрізку: $y=0$, тобто рівняння CA матиме вигляд: $x+z=1$, або $z=1-x$, тобто $dz=-dx$. Тоді одержимо наступне:

$$\overline{A}\cdot\overline{dl} = (x-2z)dx + 5xdz,$$

$$\int\limits_{\cup CA} \overline{A}\cdot\overline{dl} = \int\limits_{\cup CA} (x-2z)dx + 5xdz = \int\limits_0^1 (x-2+2x-5x)dx = \int\limits_0^1 (-2x-2)dx = -3.$$

Тоді одержимо, що циркуляція буде наступною: $Ц = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} - 3 = -3$.

2 спосіб. Застосуємо формулу Стокса. Обчислимо спочатку ротор векторного поля. Маємо наступне:

$$\overline{rotA} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x-2z & x+3y+z & 5x+y \end{vmatrix} = -7\bar{j} + \bar{k}\,.$$

В якості поверхні S виберемо ΔABC. Тоді вектор нормалі буде мати вигляд: $\bar{n} = \bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$. Обчислимо циркуляцію:

$$Ц = \iint\limits_S \overline{rotA} \cdot \bar{n} dS = \iint\limits_S dxdy - 7dxdz = S_{\Delta AOB} - 7S_{\Delta COA} = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 - 7\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 = -3\,.$$

Приклад 2.9. а) Знайти дивергенцію векторного поля $\bar{A} = 2x^2\bar{i} - 3xy\bar{j} + (z^2 + xz)\bar{k}$ в точці $M(1,-1,2)$.

б) З'ясувати, чи є векторне поле $\bar{A} = (x^2 - y^2 + z)\bar{i} + (-2xy + z)\bar{j} + (x + y)\bar{k}$ соленоїдальним, потенціальним?

Розв'язання. а) Обчислимо частинні похідні і одержимо наступне:

$$div\bar{A}\Big|_M = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\Bigg|_M = (4x - 3x + 2z + x)\Big|_M = (2x + 2z)\Big|_M = 6\,.$$

б) Перевіримо умови соленоїдальності та потенціальності поля. Знайдемо дивергенцію та ротор векторного поля.

$$div\bar{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 2x - 2x + 0 = 0\,,$$

$$\overline{rotA} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) = (1-1, 1-1, -2y + 2y) = (0,0,0)\,.$$

Оскільки $div\bar{A} = 0$, то поле соленоїдальне, оскільки $\overline{rotA} = (0,0,0)$, то поле потенціальне.

ПЕРЕЛІК ПИТАНЬ ДО ЕКЗАМЕНУ

1. Означення подвійного інтегралу. Задачі, що приводять до поняття подвійного інтегралу. Умови існування подвійного інтегралу.
2. Властивості подвійного інтегралу.
3. Методи обчислення подвійного інтегралу: зведення до повторних інтегралів.
4. Заміна змінних інтегрування в подвійному інтегралі.
5. Обчислення площ плоских фігур і об’ємів циліндричних тіл за допомогою подвійного інтеграла.
6. Поняття площі кривої поверхні та її обчислення подвійним інтегралом.
7. Застосування подвійних інтегралів в механіці.
8. Означення потрійного інтегралу, властивості і умови існування.
9. Методи обчислення потрійних інтегралів.
10. Циліндричні координати, координатні поверхні та координатні лінії в циліндричних координатах. Коефіцієнти Ламе.
11. Сферичні координати, координатні поверхні та координатні лінії в сферичних координатах. Коефіцієнти Ламе.
12. Застосування потрійних інтегралів.
13. Кратні інтеграли, міра n-вимірної області. Методи обчислення кратних інтегралів.
14. Криволінійні інтеграли першого типу: означення, властивості і методи обчислення.
15. Застосування криволінійних інтегралів першого типу.
16. Криволінійні інтеграли другого типу: означення, властивості та методи обчислення.
17. Формула Гріна та наслідки з неї.
18. Застосування криволінійних інтегралів другого типу.
19. Поверхневі інтеграли першого типу: означення, властивості і методи обчислення.
20. Застосування поверхневих інтегралів першого типу.
21. Поверхневі інтеграли другого типу: означення, властивості і методи обчислення.
22. Формула Остроградського-Гауса та її застосування.
23. Формула Стокса та її застосування.
24. Скалярне поле та його характеристики.
25. Векторне поле та його характеристики.
26. Інтегральні характеристики векторного поля: потік і циркуляція та методи їх обчислення.
27. Градієнт скалярного поля та вираження його в різних формах.
28. Дивергенція векторного поля та вираження її в різних формах.
29. Ротор векторного поля та вираження його в різних формах.
30. Ортогональні криволінійні координати та вираження в них характеристик полів.
31. Формули Гріна та наслідки з них.

32. Потенціальне поле, умови потенціальності. Скалярний потенціал та методи його знаходження. Квазіпотенціальні поля.
33. Соленоїдальне поле, умови соленоїдальності. Векторний потенціал та методи його знаходження.
34. Знаходження векторного поля за його дивергенцію і ротором в нескінченній області.
35. Диференціальні операції другого порядку над полями та вираження їх в криволінійних координатах.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ. – М.: Наука, 1979. – 720с.
2. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ. – М.: Проспект, изд-во МГУ, 2007. – 672с.
3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: Физматлит. – Т.3. – 2003. – 728с.
4. Справочное пособие по математическому анализу / И.И. Ляшко, А.К. Боярчук, Л.Г. Гай, Г.П. Головчак. – К.: Вища шк. – Ч.2. Ряды, функции нескольких переменных, кратные и криволинейные интегралы. – 1979. – 734с.
5. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Наука, 1990. – 624с.
6. Виноградова И.А. и др. Математический анализ в задачах и упражнениях / И.А. Виноградова, С.Н. Олехник, В.А. Садовничий. – М.: Факториал, 1996. – 477с.
7. Сборник задач по математическому анализу: Интегралы. Ряды / Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов, В.И. Чехлов, М.И. Шабунин. – М.: Наука, 1986. – 600с.
8. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1985. – 383с.
9. Голованов Н.Н. Геометрическое моделирование. – М.: Изд-во физ.-мат. литературы, 2002. – 472с.
10. Крылов В.И., Шульгина Л.Т. Справочная книга по численному интегрированию. – М.: Наука, 1966. – 372с.
11. Шкіль М.І. Математичний аналіз: У 2 ч.: підручник для студентів математичних спеціальностей. – Ч. 2. – К.: Вища школа, 2005. – 510с.
12. Шунда Н.М. Практикум з математичного аналізу: Інтегральне числення. Ряди: навчальний посібник для студентів пед. навч. закладів. – К.: Вища школа, 1995. – 541с.
13. Кудрявцев А.Д. Курс математического анализа. В 3-х книгах: Т.3. – М.: Высшая школа, 1990.– 352с.

14. Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Л.Г., Головчак Г.П. Математический анализ: Кратные и криволинейные интегралы. Справочное пособие по математическому анализу. – Т.3. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 224с.
15. Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної: частина 2: навчальний посібник/ С.М. Гребенюк, М.І. Клименко, Н.М. Д'яченко та ін.. – Запоріжжя: Запорізький національний університет, 2013. – 499с.
16. Дороговцев А.Я. Математический аналіз: Справочное пособие. – К.: Вища школа, 1985. – 528с.
17. Никольский С.М. Курс математического анализа. – М.: Физматлит, – 2000. – 592с.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

векторна лінія, 32

градієнт, 32

дивергенція, 32, 49
диференціал функції, 28, 44
довжина кривої, 29

елементарні області двовимірного простору, 6, 22
елементарні області тривимірного простору, 8

замкнутий контур, 28

інтеграл криволінійний, 27, 43
інтеграл криволінійний, застосування, 29
інтеграл поверхневий, 29, 30, 44, 45
інтеграл повторний, 6, 8, 10
інтеграл подвійний, 6, 10, 12, 22
інтеграл подвійний, властивості, 6
інтеграл подвійний, наближене значення, 10
інтеграл потрійний, 8, 25
інтеграл потрійний, властивості, 8

координати полярні узагальнені, 7
координати полярні, 7, 23, 47, 54
координати сферичні загальні, 9
координати сферичні узагальнені, 9
координати сферичні, 9, 26
координати циліндричні загальні, 9
координати циліндричні узагальнені, 9
координати циліндричні, 9, 25

мас центр, 7, 9, 29, 30
маса кривої, 29
маса пластинки, 7, 24
маса поверхні, 30
маса тіла, 9
момент інерції, 7, 9, 30
момент статичний, 7, 9, 30

нормаль до поверхні, 31

об’єм тіла, 9, 23, 31

об'єм циліндричного тіла, 7, 23

площа поверхні, 7, 23, 30
площа фігури, 7, 24, 29
поверхня другого порядку, 59
поверхня рівня, 32
поле векторне, соленоїдальне, потенціальне, 32, 49
поля характеристики, 32, 46, 48, 49
порядок інтегрування, 12, 21
потік векторного поля, 32, 46

робота сили, 29
ротор, 32, 49

тяжіння простого шару, 30

формула Гріна, 28, 31, 44
формула квадратурна, 10, 11
формула кубатурна, 10, 11
формула Остроградського-Гауса, 31, 46, 47, 48
формула Стокса, 31, 49

циліндричне тіло, 7
циркуляція, 32, 48

ДОДАТОК А. ГРАФІКИ КРИВИХ У ПОЛЯРНІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ

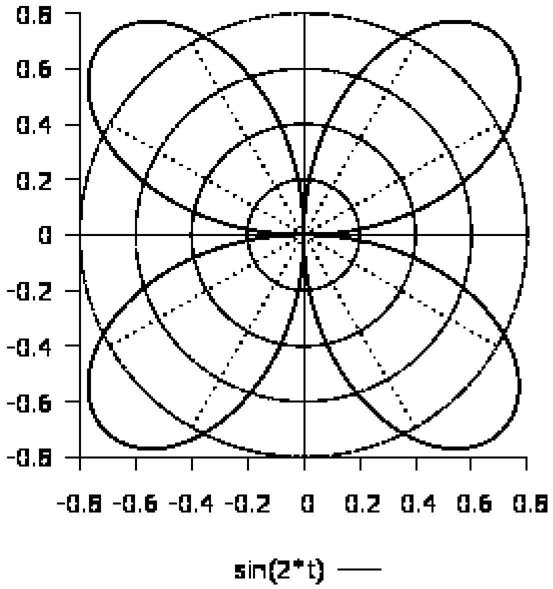


Рис. А.1. Графік функції $\rho = \sin 2\varphi$.

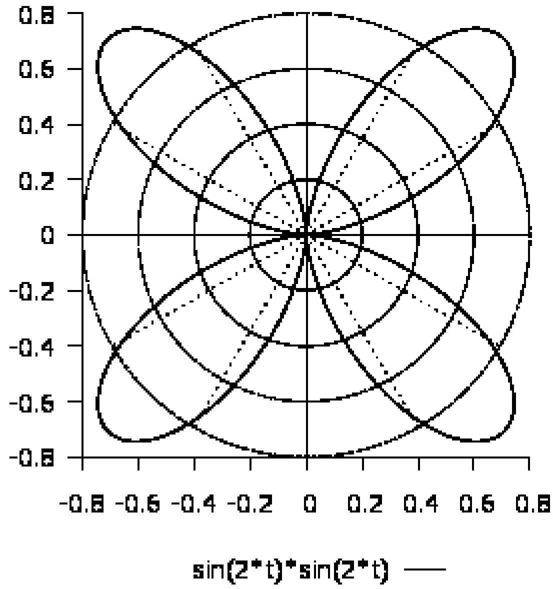


Рис. А.2. Графік функції $\rho = \sin^2 2\varphi$.

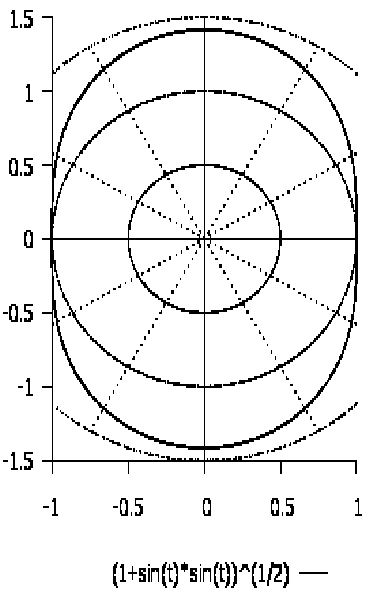


Рис. А.3. Графік функції $\rho^2 = 1 + \sin^2 \varphi$.

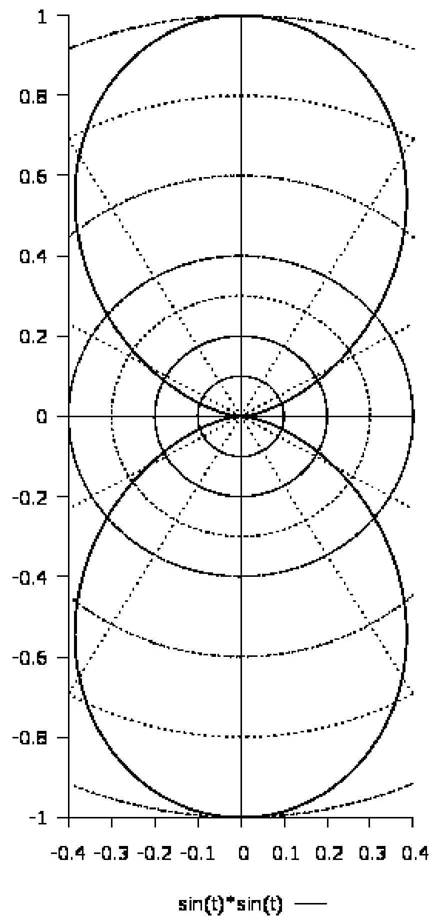


Рис. А.4. Графік функції $\rho = \sin^2 \varphi$.

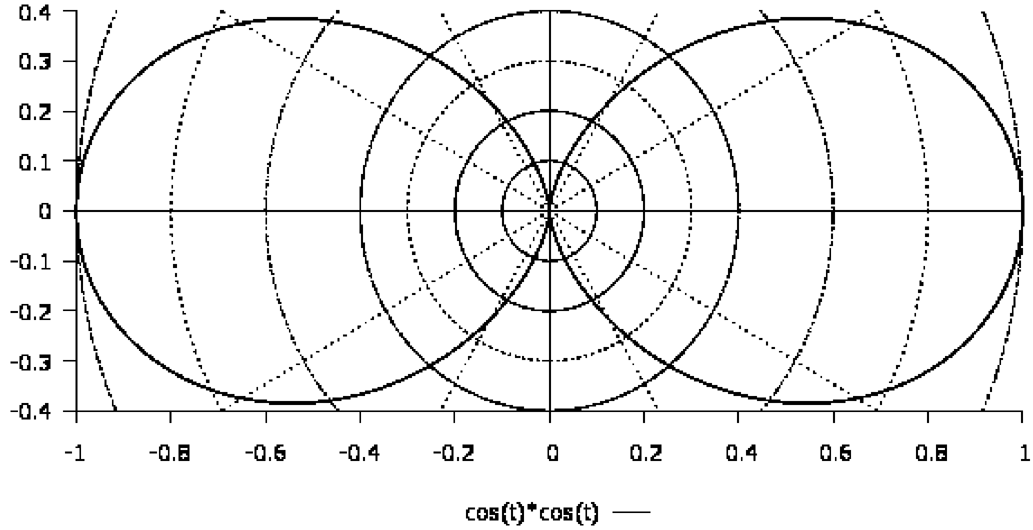


Рис. А.5. Графік функції $\rho = \cos^2 \varphi$.

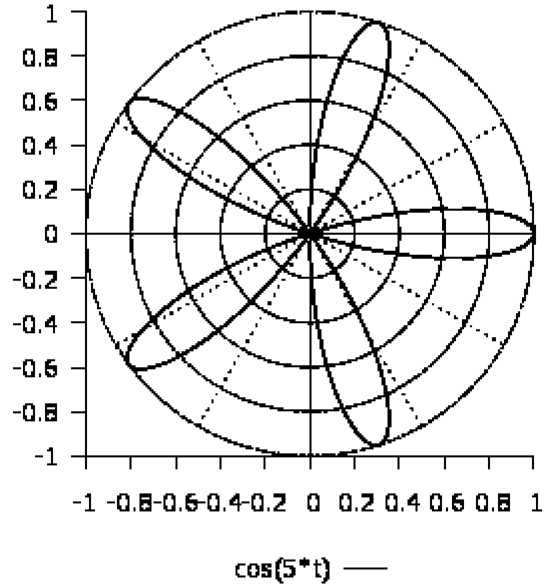


Рис. А.6. Графік функції $\rho = \cos 5\varphi$.

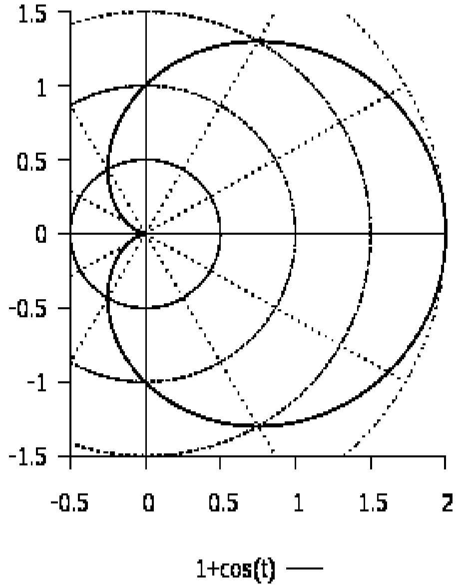


Рис. А.7. Графік функції $\rho = 1 + \cos\varphi$.

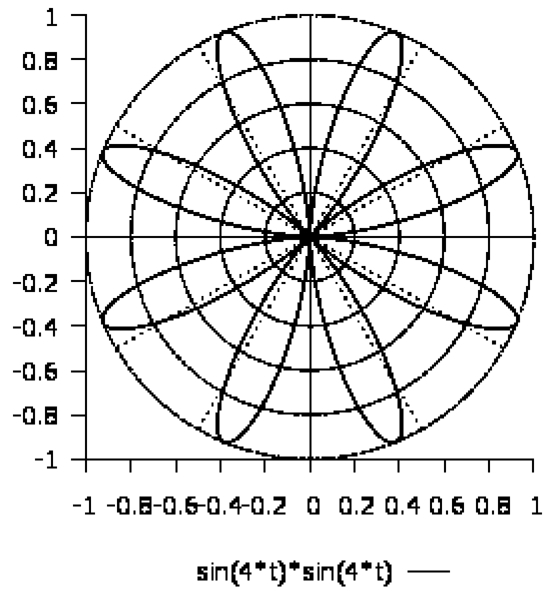


Рис. А.8. Графік функції $\rho = \sin^2 4\varphi$.

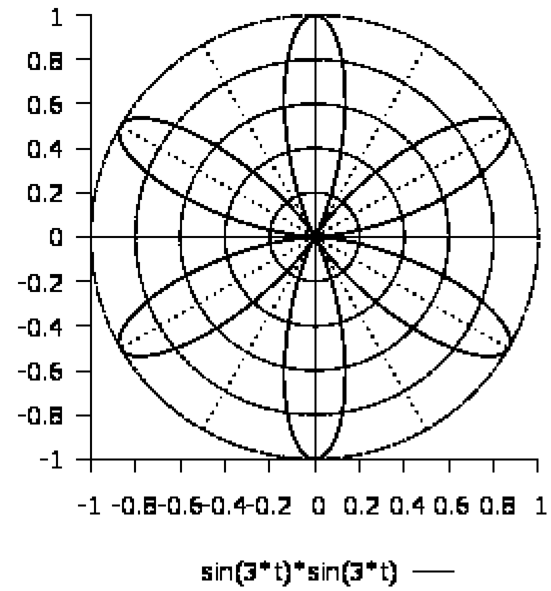


Рис. А.9. Графік функції $\rho = \sin^2 3\varphi$.

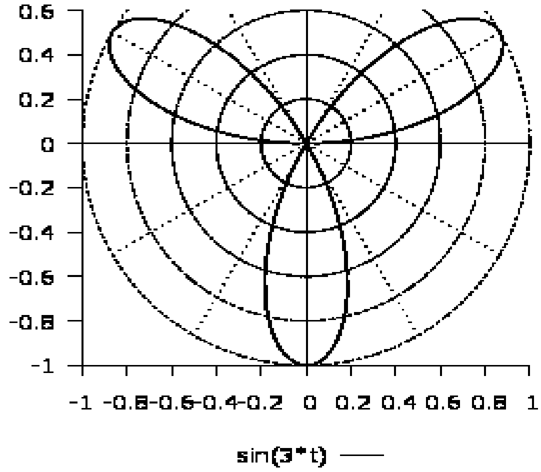


Рис. А.10. Графік функції $\rho = \sin 3\varphi$.

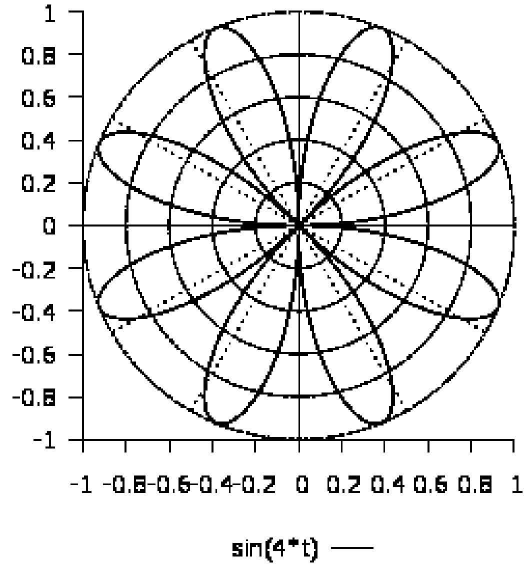


Рис. А.11. Графік функції $\rho = \sin 4\varphi$.

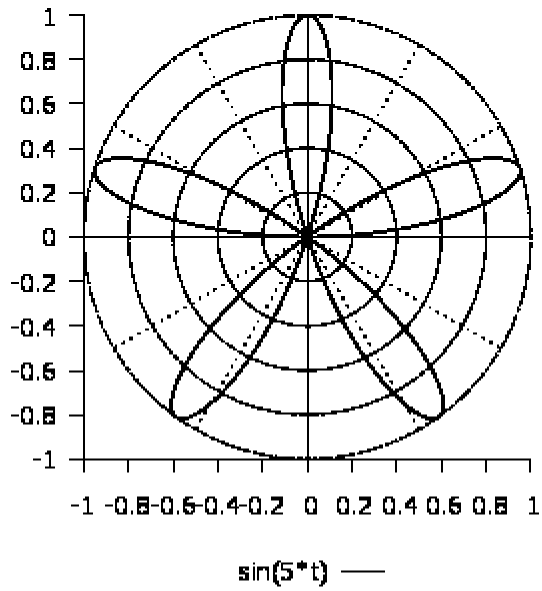


Рис. А.12. Графік функції $\rho = \sin 5\varphi$.

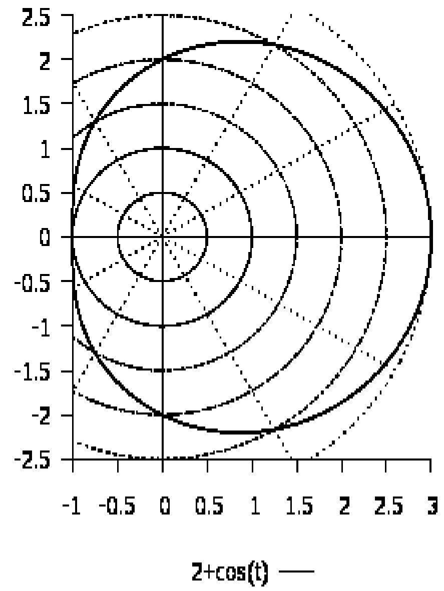


Рис. А.13. Графік функції $\rho = 2 + \cos\varphi$.

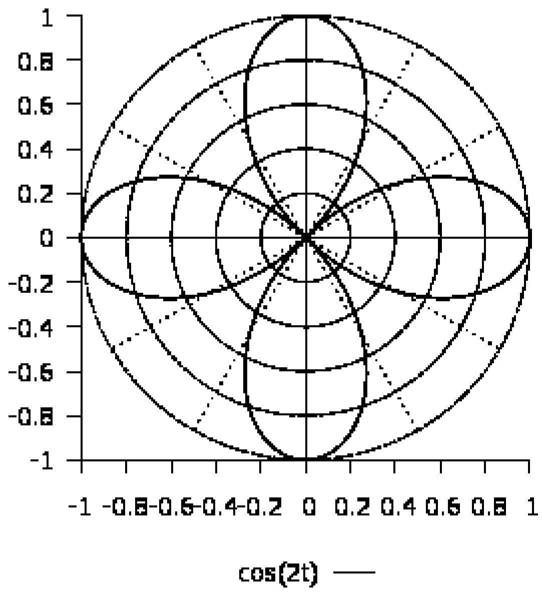


Рис. А.14. Графік функції $\rho = \cos 2\varphi$.

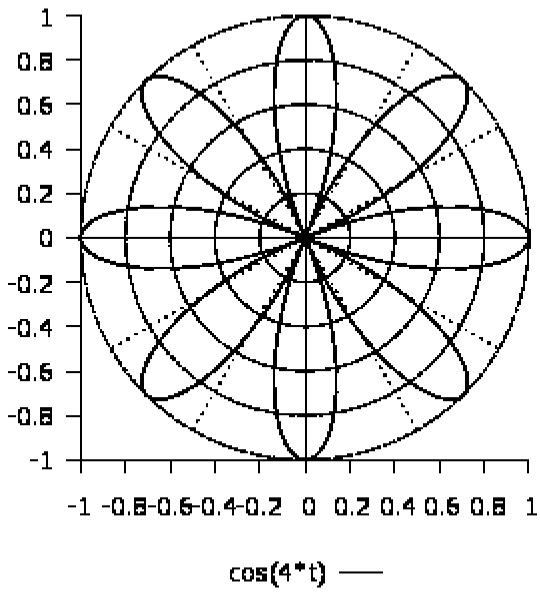


Рис. А.15. Графік функції $\rho = \cos 4\varphi$.

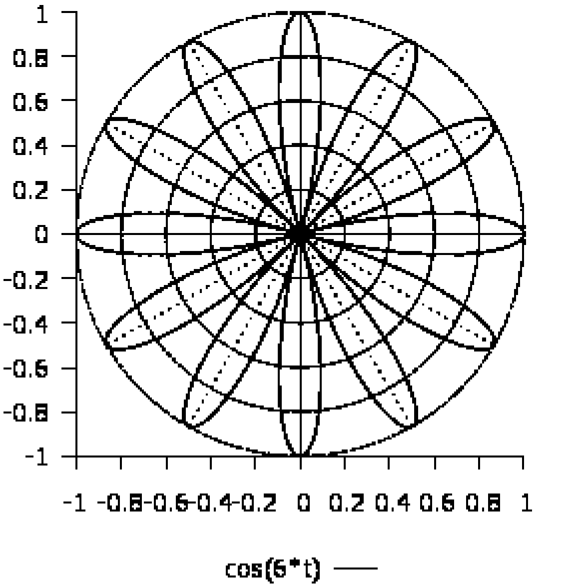


Рис. А.16. Графік функції $\rho = \cos 6\varphi$.

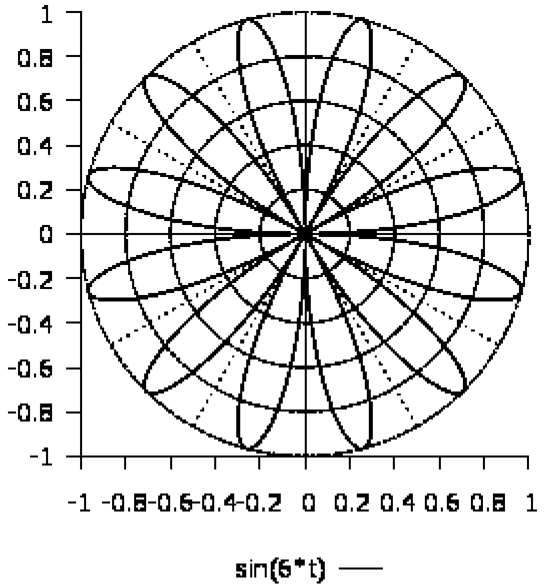


Рис. А.17. Графік функції $\rho = \sin 6\varphi$.

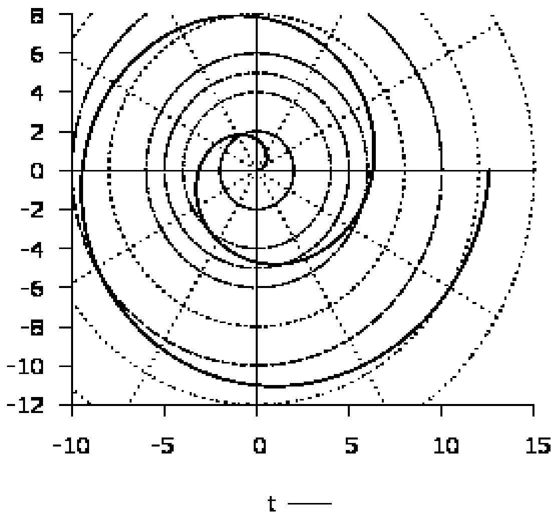


Рис. А.18. Графік функції $\rho = \varphi$.

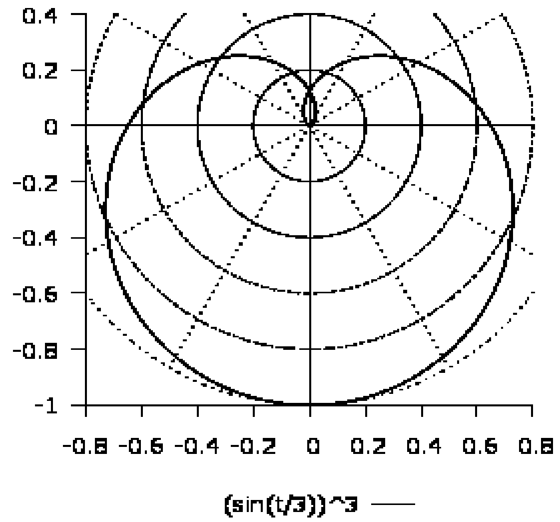


Рис. А.19. Графік функції $\rho = \sin^3 \dfrac{\varphi}{3}$.

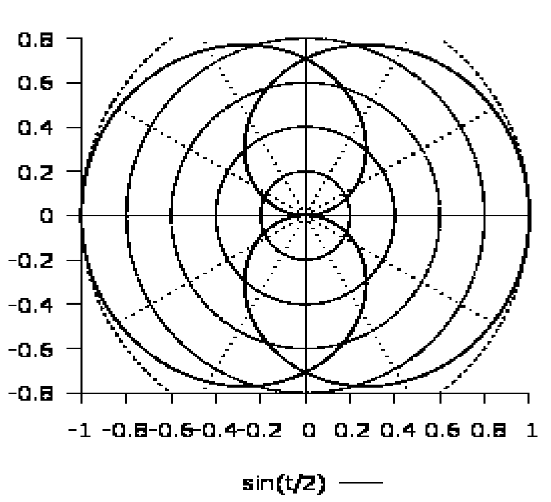


Рис. А.20. Графік функції $\rho = \sin \dfrac{\varphi}{2}$.

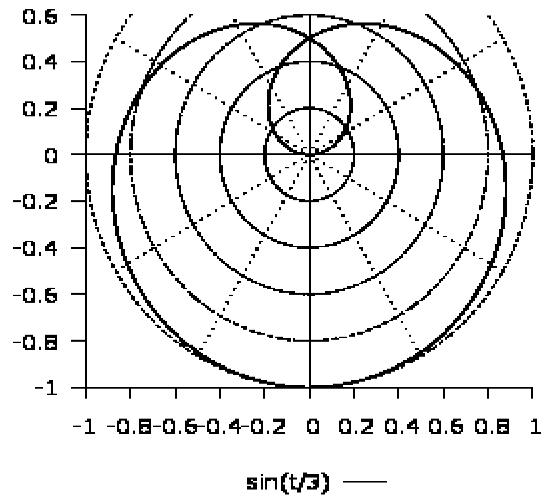


Рис. А.21. Графік функції $\rho = \sin \dfrac{\varphi}{3}$.

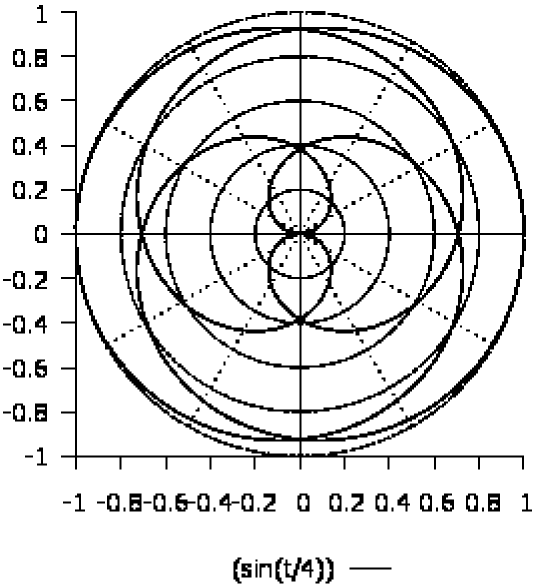


Рис. А.22. Графік функції $\rho = \sin\frac{\varphi}{4}$.

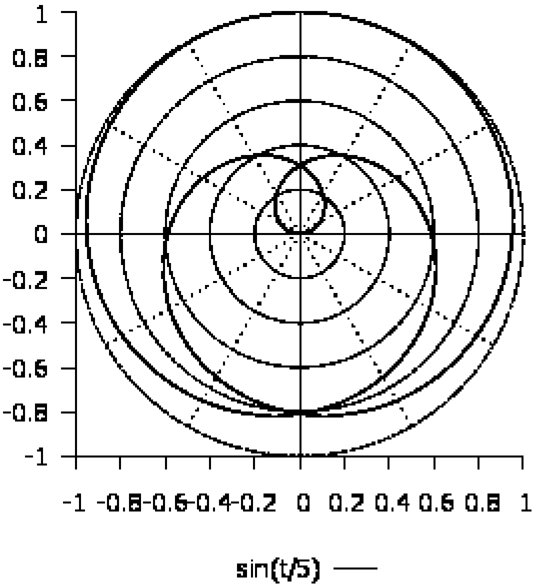


Рис. А.23. Графік функції $\rho = \sin\frac{\varphi}{5}$.

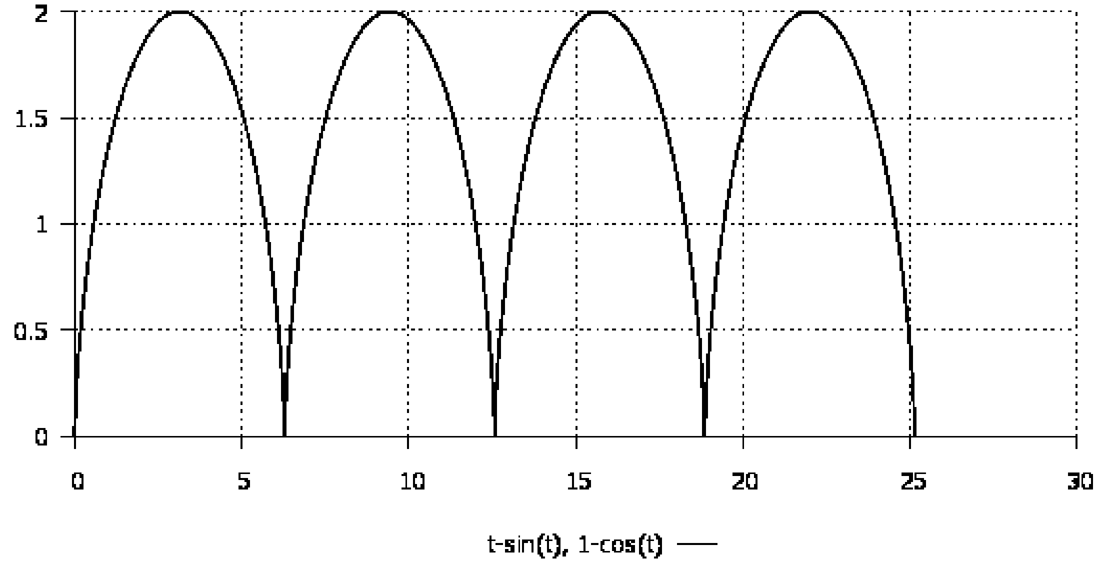


Рис. А.24. Графік функції $x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t$.

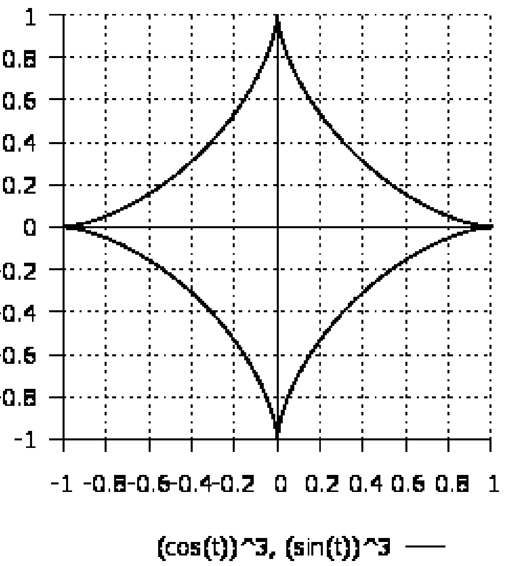


Рис. А.25. Графік функції $x = \cos^3 t, \quad y = \sin^3 t$.

ДОДАТОК Б. ГРАФІЧНЕ ЗОБРАЖЕННЯ ОСНОВНИХ ПОВЕРХОНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ В ДЕКАРТОВІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ

1. Еліпсоїд $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ (рис. Б.1).
2. Однополосний гіперболоїд $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ (рис. Б.2).

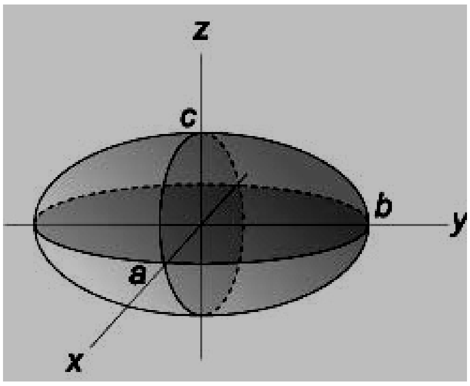


Рис. Б.1.

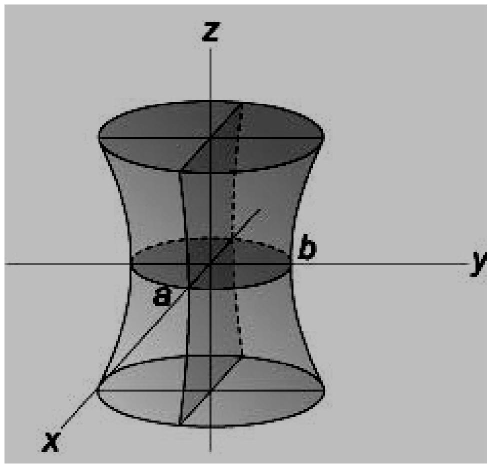


Рис. Б.2.

3. Двуполосний гіперболоїд $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ (рис. Б.3).
4. Конічна поверхня $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ (рис. Б.4).

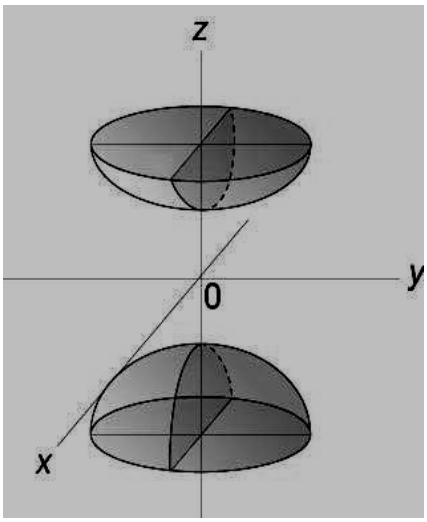


Рис. Б.3.

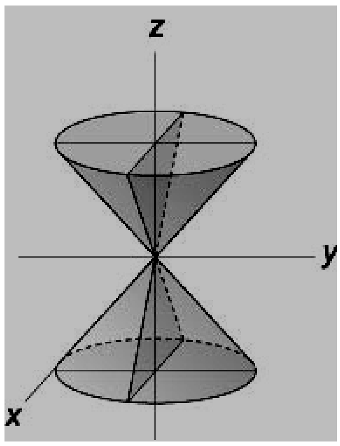


Рис. Б.4.

5. Еліптичний параболоїд $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-z=0$ (рис. Б.5).
6. Гіперболічний параболоїд $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-z=0$ (рис. Б.6).

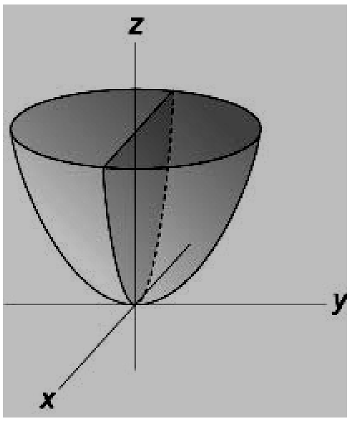


Рис. Б.5.

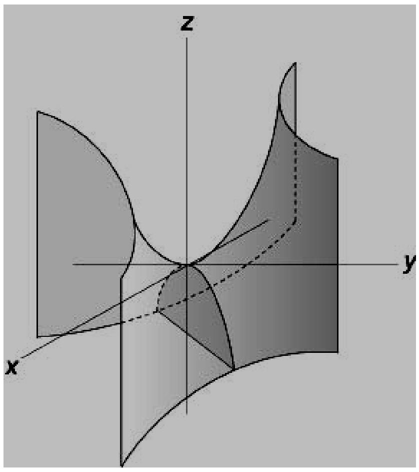


Рис. Б.6.

7. Еліптичний циліндр $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (рис. Б.7).
8. Гіперболічний циліндр $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (рис. Б.8).

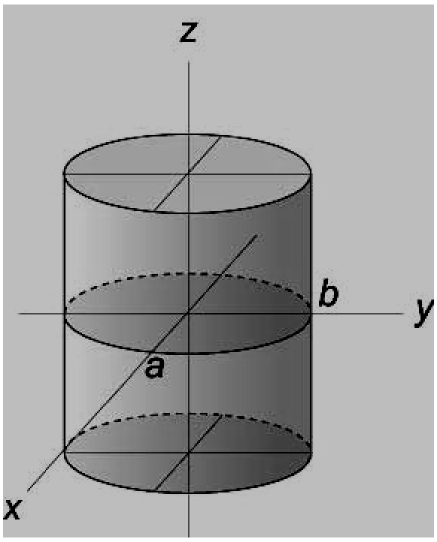


Рис. Б.7.

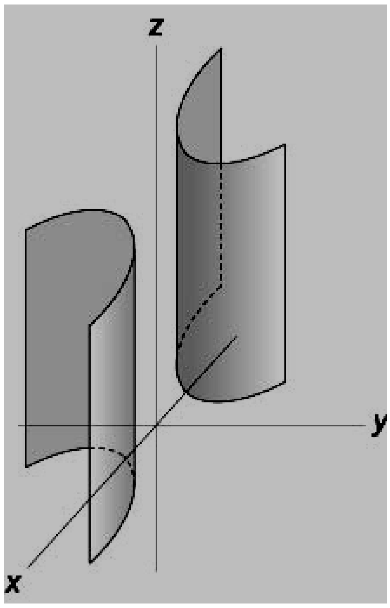


Рис. Б.8.

9. Параболічний циліндр $\frac{x^2}{a^2}-y=0$ (рис. Б.9).

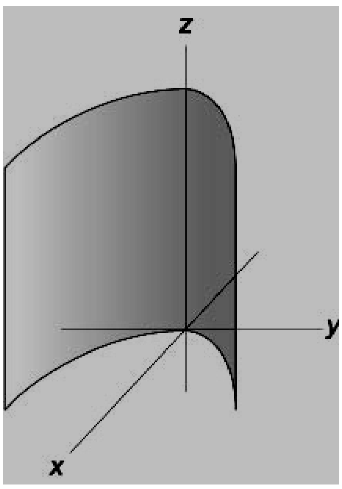


Рис. Б.9.

ДОДАТОК В. ТАБЛИЦЯ ПОХІДНИХ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦІЙ

Кожна з наступних формул вірна на проміжках, які належать області визначення відповідних функцій.

1) $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$,

2) $C' = 0$, $\left(x^2\right)' = 2x$, $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}$,

3) $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$,

4) $\left(e^x\right)' = e^x$,

5) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$,

6) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$,

7) $(\sin x)' = \cos x$,

8) $(\cos x)' = -\sin x$,

9) $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$,

10) $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$,

11) $(shx)' = chx$,

12) $(chx)' = shx$,

13) $(thx)' = \frac{1}{ch^2 x}$,

14) $(cthx)' = \frac{1}{sh^2 x}$,

15) $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$,

16) $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$

17) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

18) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

ДОДАТОК Г. ТАБЛИЦЯ ОСНОВНИХ ІНТЕГРАЛІВ

Кожна з наступних формул вірна на проміжках, які належать області визначення підінтегральної функції:

1. $\int du = u + C.$

2. $\int u^{\alpha} du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \ \alpha \neq -1.$

3. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C.$

4. $\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C, \ a > 0, a \neq 1.$

5. $\int e^u du = e^u + C.$

6. $\int \sin u du = -\cos u + C.$

7. $\int \cos u du = \sin u + C.$

8. $\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = tgu + C.$

9. $\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -ctgu + C.$

10. $\int chudu = shu + C.$

11. $\int shudu = chu + C.$

12. $\int \dfrac{du}{ch^2 u} = thu + C.$

13. $\int \dfrac{du}{sh^2 u} = -cthu + C.$

14. $\int \dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \begin{cases} \arcsin u + C \\ -\arccos u + C. \end{cases}$

15. $\int \dfrac{du}{1+u^2} = \begin{cases} arctgu + C \\ -arcctgu + C. \end{cases}$

16. $\int \dfrac{du}{u^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{u}{a} + C, \ a \neq 0$

17. $\int \dfrac{du}{u^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{u-a}{u+a}\right| + C, \ a \neq 0$

18. $\int \dfrac{udu}{a^2 \pm u^2} = \pm \dfrac{1}{2} \ln\left|a^2 \pm u^2\right| + C.$

19. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \dfrac{u}{|a|} + C, \ a > 0$

20. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C, \ a > 0$

21. $\int \dfrac{udu}{\sqrt{a^2 \pm u^2}} = \pm\sqrt{a^2 \pm u^2} + C, \ a > 0$

22. $\int \sqrt{a^2 - u^2} du = \dfrac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \dfrac{a^2}{2} \arcsin \dfrac{u}{a} + C, \ a > 0$

23. $\int \sqrt{u^2 \pm a^2} du = \dfrac{u}{2}\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \dfrac{a^2}{2} \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C, \ a > 0$

24. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 \pm 1}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm 1}\right| + C.$

25. $\int \dfrac{du}{1-u^2} = \dfrac{1}{2} \ln\left|\dfrac{1+u}{1-u}\right| + C.$

Властивості невизначеного інтегралу (правила інтегрування)

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$

2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$

3. $\int dF(x) = F(x) + C.$

4. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx, \ a = const, a \neq 0.$

5. $\int [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx.$

6. $\int f(ax+b) = \dfrac{1}{a} F(ax+b) + C.$

7. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$ і $u = \varphi(x)$, то $\int f(u)du = F(u) + C.$

Основні методи інтегрування

1. *Заміна змінної інтегрування.* Нехай на деякому проміжку визначена складна функція $f(\varphi(x))$ і функція $t=\varphi(x)$ неперервна на цьому проміжку. Тоді:

$$\int f(t)dt=\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx .$$

Якщо $\varphi(\alpha)=a,\ \ \varphi(\beta)=b,$ то

$$\int_a^b f(t)dt=\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)dx .$$

2. *Формула Ньютона-Лейбніца.* Якщо функція $f(x)$ неперервна на сегменті $[a;b]$, то для будь-якої її первісної $F(x)$ має місце формула:

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a) .$$

3. *Інтегрування частинами.* Цей метод опирається на рівність:

$$\int udv=uv-\int vdu \text{ , або } \int_a^b udv=(uv)\Big|_a^b-\int_a^b vdu.$$

4. *Інтегрування елементарних дробів*:

1) $\int\frac{Adx}{x-a}=A\ln|x-a|+C;$

2) $\int\frac{Adx}{(x-a)^n}=-\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}}+C,\ \ n\neq1;$

3) $$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\frac{M}{2}\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}dx+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dx}{x^2+px+q}=\frac{M}{2}\ln(x^2+px+q)+$$
$$+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}}=\frac{M}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{N-\frac{Mp}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}arctg\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C;$$

4) $$\int\frac{(Mx+N)}{(x^2+px+q)^n}dx=\frac{M}{2}\int\frac{(2x+p)dx}{(x^2+px+q)^n}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^n}=$$
$$=\frac{M}{2}\cdot\frac{(x^2+px+q)^{1-n}}{1-n}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dx}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}\right)^n}\ \ ,\ \ n>1.$$

Останній інтеграл підстановкою $t=x+\frac{p}{2}$ зводять до інтегралу $I_n=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$, де

$$I_{n+1}=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}=\frac{1}{2na^2}\left(\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+(2n-1)I_n\right).$$

Навчальне видання

Гребенюк Сергій Миколайович

Тітова Ольга Олександрівна

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ: ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Практикум
для студентів освітньо-кваліфікаційного рівня „бакалавр"
напрямів підготовки
„Інформатика", „Прикладна математика", „Програмна інженерія"

Коректор	Тітова О.О., к.т.н., доцент
Рецензент	Д'яченко Н.М., к.ф.-м.н., доцент
Відповідальний за випуск	Гребенюк С.М., к.т.н., доцент, завідувач кафедри