МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Н.М. Д'яченко, І.В. Красікова, Є.В. Панасенко

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ – II: ЧИСЛОВІ ТА ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ

Навчальний посібник
для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра
освітньо-професійних програм
«Математика», «Середня освіта (Математика)»

Затверджено
вченою радою ЗНУ
Протокол № 6 від 26.12.2017 р.

Запоріжжя
2018

УДК 517.9 (075.8)
Д 999

Д'яченко Н.М. Математичний аналіз-II: Числові та функціональні ряди: навчальний посібник для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра освітньо-професійних програм «Математика», «Середня освіта (Математика)» / Н.М. Д'яченко, І.В. Красікова, Є.В. Панасенко – Запоріжжя: ЗНУ, 2018. – 244 с.

Посібник укладено у відповідності з освітньо-професійними програмами «Математика», «Середня освіта (Математика)» підготовки бакалаврів, робочих програм начальної дисципліни «Математичний аналіз – II». Він охоплює один із розділів математичного аналізу – числові та функціональні ряди, який розрахований на один семестр, та має на меті сприяти оволодінню студентами теоретичним матеріалом розділу та практичними навичками при розв'язанні відповідних задач. Цим пояснюється запропонована авторами структура посібника: теоретична частина, практикум із розв'язання задач, завдання для самостійного виконання і список рекомендованої літератури.

Посібник призначений для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра освітньо-професійних програм «Математика», «Середня освіта (Математика)», але він буде корисним для всіх, хто вивчає курс вищої математики і математичного аналізу.

Рецензент *О.О. Тітова, кандидат технічних наук, доцент кафедри фундаментальної математики*
Відповідальний за випуск *С.М. Гребенюк, доктор технічних наук, завідувач кафедри фундаментальної математики*

ЗМІСТ

ВСТУП

Значення рядів у математиці важко переоцінити внаслідок їх широкого застосування. Ряди різної природи – числові, функціональні, векторні – використовуються при розв’язанні великої кількості прикладних задач. Ряди дозволяють знаходити як точні аналітичні розв’язки задач, так і наближені, якщо замінити ряд його частковою сумою.

Фактично дослідження рядів безпосередньо пов’язане з дослідженням послідовностей. Але ряди вимагають також самостійного поглибленого дослідження, оскільки вони є допоміжним засобом подання різноманітних функцій, що зустрічаються в аналізі. Зокрема, дуже важливою є відповідь на питання про збіжність ряду. Це питання пов’язане з коректністю отриманого за допомогою рядів розв’язку задачі, з доцільністю зроблених припущень, і, зрештою, з ефективністю запропонованої математичної моделі задачі.

Зміст навчального посібника охоплює програмний матеріал одного семестру вивчення дисципліни «Математичний аналіз - ІІ». Основними завданнями вивчення дисципліни «Математичний аналіз - ІІ» є:

- ознайомлення з можливістю застосування понять та фактів математичного аналізу до розв’язання конкретних задач;
- підготовка бази для подальшого вивчення курсів диференціальних рівнянь, комплексного аналізу, теорії ймовірностей, функціонального аналізу, чисельних методів, рівнянь математичної фізики та інших.

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен

знати:

- основні поняття теорії рядів та області їх застосування;
- необхідні та достатні умови збіжності числових та функціональних рядів;
- основні області застосування відомих понять та фактів з теорії рядів.

уміти:

- досліджувати числові ряди на абсолютну та умовну збіжність;
- знаходити область збіжності функціональних рядів;
- досліджувати основні властивості числових та функціональних послідовностей і рядів;
- подавати функції у вигляді степеневих рядів та рядів Фур’є;
- застосовувати подання функцій у вигляді рядів для розв’язання задач;
- досліджувати на збіжність нескінченні добутки та подавати функції у вигляді нескінченних добутків.

Теоретичні знання і практичні навички, набуті при вивченні теорії рядів, застосовуються в окремих темах функціонального, комплексного аналізу, диференціальних рівнянь, чисельних методів, рівнянь математичної фізики, при розв’язанні прикладних задач, розв’язок яких представляється функціональним рядом. Вони є необхідними при виконанні курсових і кваліфікаційних робіт.

Навчальний посібник складається з трьох розділів, кожний з яких містить теоретичний матеріал, практикум із розв’язання задач та завдання для самостійного виконання.

Розділ 1. ЧИСЛОВІ РЯДИ ТА НЕСКІНЧЕННІ ДОБУТКИ:

1.1 ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

§1 Числові ряди

1. Числові ряди. Сума ряду. Критерій Коші

Розглянемо числову послідовність $\{a_n\}$. Формально утворену суму елементів цієї послідовності

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1.1}$$

назвемо числовим рядом. При цьому числа $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ називаються членами ряду, a_n – загальним членом ряду, а $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ – частковою сумою ряду (1.1).

🗁**Означення 1.1.** Якщо існує границя послідовності часткових сум $\{S_n\}$, тоді ряд (1.1) називають *збіжним,* при цьому число $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ називається *сумою* ряду. Позначення: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$. Якщо послідовність часткових сум не збігається, тобто $\nexists \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, тоді ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ називають *розбіжним*.

Приклад 1.1. Дослідити числовий ряд, що утворюється членами геометричної прогресії

$$1 + q \ \ + q^2 + q^3 + ... + q^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

на збіжність за означенням.

Розв'язання. Знайдемо часткову суму даного ряду:

$$S_n = 1 + q + ... + q^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}, q \neq \pm 1.$$

Застосуємо той факт, що

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0, \text{ якщо } |q| < 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \infty, \text{ якщо } |q| > 1$$

для пошуку границі послідовності часткових сум. Отримаємо:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} \dfrac{1}{1-q}, & |q| < 1 \\ \infty, & |q| > 1 \end{cases}.$$

Розглянемо окремо випадок $|q| = 1$. Якщо $q = 1$, тоді часткова сума ряду має вигляд $S_n = \underbrace{1+1+...+1}_{n} = n \to \infty$, тобто є нескінченно великою (розбіжною). Якщо

$q=-1$, то послідовність $\{S_n = 1-1+1-...+(-1)^{n-1}\} = \{1;0;1;0;...\}$ також розбігається. Отже, у випадку $|q|<1$ заданий ряд збігається, при цьому його сума дорівнює $\dfrac{1}{1-q}$. У всіх інших випадках ($|q|\ge 1$) розглянутий ряд розбігається. ■

Приклад 1.2. Дослідити числовий ряд

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{n\cdot(n+1)}+... = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot(n+1)}$$

на збіжність за означенням і знайти його суму.

Розв'язання. Розглянемо часткову суму даного ряду:

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{n\cdot(n+1)} =$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+...+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}.$$

(✍ Довести за допомогою принципу математичної індукції, що рівність

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}$$

має місце для всіх натуральних n.)

Оскільки існує границя

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1,$$

то даний ряд збігається, а його сума дорівнює 1, тобто $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\cdot(n+1)}=1$. ■

Приклад 1.3. При фіксованому значенні $x\in R$ дослідити числові ряди

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+...;$$

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+...+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}+...;$$

$$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+....+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+.....$$

на збіжність за означенням.

Розв'язання. Розглянемо розвинення наступних функцій за формулою Маклорена [1, с. 271-272]:

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+R^*_n(x);$$

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+...+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}+R^{**}_n(x);$$

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+...+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+R^{***}_n(x).$$

Розглянемо докладно перший ряд. Позначимо

$$S_n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Застосуємо зазначене розвинення за формулою Маклорена з залишковим членом у формі Лагранжа **[**1, с. 271-272**]**, тоді

$$\left|S_n - e^x\right| = \left|R_{n-1}^*\right| = \left|\frac{e^{\theta_n}}{n!} \cdot x^n\right|, \quad 0 < \theta_n < 1.$$

Отже,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{e^{\theta_n}}{n!} x^n\right| = \lim_{n\to\infty} \underbrace{e^{\theta_n}}_{обм.} \cdot \underbrace{\frac{|x|^n}{n!}}_{н.м.п.} = 0 \;\; \forall x \in R \;\; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_n \left|S_n - e^x\right| = 0 \Rightarrow \lim_n S_n = e^x \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

Таким чином, доведено збіжність першого ряду до e^x. Збіжність другого і третього ряду до $\sin x$ і $\cos x$ відповідно довести самостійно ✍! ■

Зауваження 1.1. Поняття ряду і послідовності пов'язані між собою. Дійсно, будь-якому ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ відповідає послідовність $\{S_n\}$ його часткових сум. А довільній послідовності $\{S_n\}$ можна поставити у відповідність ряд з членами

$$a_1 = S_1; \quad a_n = S_n - S_{n-1} \;\; \forall n \geq 2 \quad .$$

Детальніше:

$$\begin{array}{ll} S_1 = a_1, & a_1 = S_1, \\ S_2 = a_1 + a_2, & a_2 = S_2 - S_{1,} \\ S_3 = a_1 + a_2 + a_3, & a_3 = S_3 - S_2 \\ \ldots & \ldots \end{array}$$

Зауваження 1.2. Додавання чи відкидання від ряду скінченої кількості членів не впливає на його збіжність.

Дійсно, якщо $n_0 -$ кількість відкинутих членів даного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, який має часткові суми $S_n, n \in N$. Тоді новий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ має члени $a'_n = a_{n+n_0} \;\; \forall n \in N$, а його часткові суми S'_n відрізняються від S_n таким чином, що

$$S_{n+n_0} - S'_n = A \quad \forall n \in N,$$

де A – сума відкинутих членів даного ряду. Отже, границі часткових сум двох рядів існують або не існують одночасно. Якщо вони існують, тоді $\lim_n S'_n = \lim_n (S_{n+n_0} - A)$.

Якщо тепер, навпаки, розглядати ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ як отриманий з ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ додаванням деякої кількості членів, стає зрозумілим, що це додавання також не впливає на збіжність ряду.

Зауваження 1.3. Розглянемо два ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$, де $a'_n = ca_n$, $c = const \neq 0$. Тоді $S'_n = cS_n$, тобто границі часткових послідовностей цих рядів існують або не існують одночасно. Якщо границі існують, тоді $\lim\limits_n S'_n = \lim\limits_n cS_n$, тобто $\sum_{n=1}^{\infty}\left(c \cdot a_n\right) = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Висновок: ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ збігаються або розбігаються одночасно, а їх суми (у випадку збіжності) відрізняються сталою *c:* $\sum_{n=1}^{\infty}\left(c \cdot a_n\right) = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Зауваження 1.4. Якщо ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ збігаються, тоді збігаються ряди $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$, крім того, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Дійсно, оскільки ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ збігаються, існують границі $\lim\limits_n \sum_{k=1}^{n} a_k, \lim\limits_n \sum_{k=1}^{n} b_k$. З існування цих границь випливає, по-перше, існування границь $\lim\limits_n \sum_{k=1}^{n}(a_k \pm b_k)$, по-друге, рівність $\lim\limits_n \sum_{k=1}^{n}(a_k \pm b_k) = \lim\limits_n \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \lim\limits_n \sum_{k=1}^{n} b_k$. Отже, за означенням суми ряду маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Теорема 1.1 *(критерій Коші збіжності числового ряду).* Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається тоді і лише тоді, коли він задовольняє вимогу:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in N\ \forall n \geq n_0\ \forall p \in N \quad \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| < \varepsilon.$$

Доведення. Пригадаємо критерій Коші для послідовності [1, с. 114]:

$$\{S_n\} - \text{збігається} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathrm{N}\ \forall n \geq n_0\ \forall p \in \mathrm{N} \quad \left|S_{n+p} - S_n\right| < \varepsilon. \quad (1.2)$$

Якщо $\{S_n\}$ – послідовність часткових сум ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, тоді

$$S_{n+p} - S_n = \underline{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} + a_{n+1} + \ldots + a_{n+p} - (\underline{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}) = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k . \qquad (1.3)$$

Підставляючи (1.3) в (1.2) отримаємо потрібне. ■

Наслідок 1.1. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, тоді і тільки тоді, коли послідовність залишків ряду $\left\{ r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k \right\}$ є нескінченно малою послідовністю (н.м.п.), тобто

$$\{S_n\} - \text{збігається} \;\Leftrightarrow\; \left\{ r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \right\} - \text{н.м.п.} \;\Leftrightarrow\; \lim_{m\to\infty} r_n = 0 .$$

Доведення. *Необхідність.* За критерієм Коші збіжності числового ряду,

$$\text{ряд } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ збігається} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in N \; \forall n \ge n_0 \; \forall p \in N \; \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon / 2 . \qquad (1.4)$$

Здійснимо граничний перехід при $p \to \infty$ під знаком останньої нерівності в (1.4). При цьому зауважимо, що для кожного фіксованого значення $n \in N$ сума $\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k$ є частковою сумою ряду $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$, який утворено відкиданням скінченної кількості членів ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, тому він є збіжним для кожного $n \in N$. Отже, існує границя $\lim\limits_{p\to\infty} \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$, що ми й використаємо при граничному переході в (1.4):

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \right| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \;\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathrm{N} \; \forall n \ge n_0 \; |r_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \right| < \varepsilon \;\Rightarrow\; \{r_n\} - \text{н.м.п.}$$

Достатність. За означенням нескінченно малої послідовності маємо:

$$\{r_n\} - \text{н.м.п.} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathrm{N} \; \forall n \ge n_0 \; |r_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \right| < \varepsilon / 2 .$$

Тоді $\forall n \ge n_0 \;\; \forall p \in N \; |r_{n+p}| < \varepsilon / 2$. Оскільки $r_n - r_{n+p} = \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k \; \forall p \in \mathrm{N}$, то

$$\forall n \ge n_0 \;\; \forall p \in \mathrm{N} \; \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| = |r_n - r_{n+p}| \le |r_n| + |r_{n+p}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Таким чином, $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathrm{N} \; \forall n \ge n_0 \; \forall p \in \mathrm{N} \; \left| \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon$.

Тобто, за критерієм Коші, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається. ■

Наслідок 1.2 *(необхідна умова збіжності ряду).* Якщо ряд (1.1) збігається, то загальний член ряду прямує до нуля, тобто

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{збігається} \Rightarrow \lim_{n\leftarrow\infty} a_n = 0 .$$

Зауважимо, що цю умову можна сформулювати іншим чином:

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \;\Rightarrow\; \sum_{n}^{\infty} a_n \; - \text{розбігається} .$$

У такому випадку будемо писати: «н.у. не виконується».

Доведення.

Застосуємо до збіжного ряду $\sum_{n}^{\infty} a_n$ умову критерію Коші при $p = 1$:

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathrm{N} \;\; \forall n \geq n_0 \;\; \left|\sum_{k=n+1}^{n+1} a_k\right| = |a_{n+1}| < \varepsilon \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = 0 = \lim_{n\to\infty} a_n . \;■$$

Приклад 1.4. Розглянемо ряд

$$\boxed{\sum_{n}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots - \text{гармонічний ряд.}}$$

Для нього $\lim_{n} a_n = \lim_{n} \frac{1}{n} = 0$, тобто *необхідна умова виконується*. Доведемо за критерієм Коші розбіжність ряду. Для $p = n \in \mathrm{N}$ маємо:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+p} \geq \frac{p}{n+p} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} .$$

Отже,

для $\varepsilon = \frac{1}{2}$ $\forall n_0 \in \mathrm{N}$ для $n = n_0 \in \mathrm{N}$ і для $p = n$ виконується нерівність $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| \geq \varepsilon$.

За критерієм Коші, це означає, що ☝ ***гармонічний ряд розбігається.*** ■

§2 Знакопостійні ряди

Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, де $a_n \geq 0 \;\; \forall n \in \mathrm{N}$. Тоді

$$\left.\begin{aligned} &S_1 = a_1, \\ &S_2 = a_1 + a_2 = S_1 + a_2, \\ &S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = S_2 + a_3, \\ &\ldots \\ &S_{n+1} = S_n + a_{n+1}, \\ &\ldots \end{aligned}\right\} \Rightarrow S_1 \leq S_2 \leq \ldots \leq S_n \leq S_{n+1} \leq \ldots ,$$

тобто послідовність часткових сум такого ряду є неспадною. Це дає можливість сформулювати наступну теорему.

Теорема 1.2 *(критерій збіжності ряду з невід'ємними членами).* Ряд з невід'ємними членами збігається тоді і тільки тоді, коли послідовність його часткових сум є обмеженою.

Доведення. *Необхідність.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{збігається} \Leftrightarrow \{S_n\} - \text{збігається} \Rightarrow \{S_n\} - \text{обмежена}.$$

Достатність. Як було зазначено перед теоремою, послідовність $\{S_n\}$ є монотонною. Якщо ця послідовність додатково є обмеженою, за теоремою Вейєрштрасса про збіжність монотонної обмеженої послідовності [1, с.96], одержимо, що $\{S_n\}$ збігається, тобто ряд збігається. ■

Приклад 1.5. Дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ на збіжність.

Розв'язання. Розглянемо часткову суму даного ряду:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + + \frac{1}{n^2} \le 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)\cdot n} \le$$

$$\le 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)\cdot n} + \frac{1}{n\cdot(n+1)} =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\cdot(k+1)} = (\text{див. приклад } 1.2) = 1 + 1 - \frac{1}{n+1} \le 2.$$

Звідки випливає обмеженість послідовності часткових сум даного ряду з невід'ємними членами, а, отже, його збіжність (за теоремою1.2). ■

1. Ознаки збіжності знакопостійних рядів (порівняння, Коші, інтегральна ознака)

Теорема 1.3 *(загальна ознака порівняння).* Нехай $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ – ряди з невід'ємними членами, тобто такі, що $a_n \ge 0,\ b_n \ge 0\ \ \forall n \in \mathrm{N}$, тоді

$$\text{I)}\ \left.\begin{array}{l} a_n \le b_n\ \forall n \in \mathrm{N}, \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n - \text{збігається} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{збігається};$$

$$\text{II)}\ \left.\begin{array}{l} a_n \le b_n \forall n \in \mathrm{N}, \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n - \text{розбігається} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n - \text{розбігається}.$$

Доведення. I) Для часткових сум даних рядів маємо:

$$\left.\begin{array}{l} A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k, B_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_n, \\ a_n \le b_n\ \ \forall n \in \mathrm{N}, \end{array}\right\} \Rightarrow A_n \le B_n\ \forall n \in \mathrm{N}.$$

Для ряду з невід'ємними членами –

$$\left.\begin{array}{l}\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n - \text{збігається,}\\ b_n \ge 0\ \forall n \in \mathrm{N},\end{array}\right\} \Rightarrow \{B_n\} - \text{обмежена} \Rightarrow \exists M > 0\ \forall n \in \mathrm{N} : B_n \le M .$$

Отже,

$$\left.\begin{array}{l} A_n \le B_n\ \forall n \in \mathrm{N},\\ \exists M > 0\ \forall n \in \mathrm{N} : B_n \le M \end{array}\right\} \Rightarrow A_n \le B_n \le M\ \forall n \in \mathrm{N},$$

тобто послідовність часткових сум $\{A_n\}$ ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ є обмеженою. Тоді, за критерієм збіжності ряду з невід'ємними членами, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається.

II) Для отримання другої частини твердження теореми достатньо пригадати, що для двох висловлювань V і U імплікація $V \Rightarrow U$ рівносильна імплікації $\overline{U} \Rightarrow \overline{V}$ (принцип контрапозиції). ■

Теорема 1.4 *(ознака порівняння в граничній формі).* Нехай $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ – ряди з додатними членами, тобто такі, що $a_n > 0,\ b_n > 0\ \ \forall n \in \mathrm{N}$ і $\exists \lim\limits_{n} \dfrac{a_n}{b_n} = K$ $\left(0 \le K \le +\infty\right)$, тоді

I) $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n - \text{збігається} \wedge K \ne +\infty\right) \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n - \text{збігається};$

II) $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n - \text{розбігається} \wedge K \ne 0\right) \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n - \text{розбігається}.$

Зокрема, якщо $0 < K < +\infty$, то ряди збігаються або розбігаються одночасно.

Доведення. I) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = K < \infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathrm{N}\ \forall n \ge n_0\ \ \left|\dfrac{a_n}{b_n} - K\right| < \varepsilon \Rightarrow$

$$\Rightarrow\ \forall n \ge n_0\ \ K - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < K + \varepsilon\ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ \forall n \ge n_0\ a_n < \underbrace{(K+\varepsilon)}_{const} b_n .$$

З загальної ознаки порівняння (теорема 1.3 (I)) та збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ випливає збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Насправді доведено збіжність ряду $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$, але його збіжність рівносильна збіжності усього ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ відповідно до зауваження 1.2.

II) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = K > 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{K} < +\infty$.

Тоді із частини I) випливає, що у випадку збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, збіжним буде також ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Ця імплікація є рівносильною імплікації: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – розбігається $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ – розбігається. ■

Теорема 1.5 (*додаткова ознака порівняння*)**.** Нехай ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ такі, що $a_n > 0, b_n > 0 \ \forall n \in \mathrm{N}$ і $\exists n_0 \in \mathrm{N} \ \forall n \geq n_0 \ \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$. Тоді

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ – збігається } \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ – збігається,}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ – розбігається } \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ – розбігається.}$$

Доведення. I) Без обмеження загальності міркувань можна вважати, що $n_0 = 1$, тоді

$$\left.\begin{array}{l} \frac{a_2}{a_1} \leq \frac{b_2}{b_1}, \\ \frac{a_3}{a_2} \leq \frac{b_3}{b_2}, \\ \ldots \\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}, \end{array}\right\} \Rightarrow \text{/перемножимо/ } \frac{a_{n+1}}{a_1} \leq \frac{b_{n+1}}{b_1} \quad \Rightarrow \quad a_{n+1} \leq \underbrace{\frac{a_1}{b_1}}_{const} \cdot b_{n+1} \quad \forall n \in \mathrm{N} .$$

Застосуємо теорему 1.3 та отримаємо, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – збігається.

II) Друга частина теореми випливає з принципу контрапозиції алгебри логіки. ■

Теорема 1.6 *(радикальна ознака Коші (загальне формулювання))*. Нехай $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathrm{N}$, тоді

I) $\left(\exists n_1 \in \mathrm{N} : \forall n \geq n_1 \quad \sqrt[n]{a_n} \leq p < 1\right) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – збігається;

II) $\left(\exists n_2 \in \mathrm{N} : \forall n \geq n_2 \quad \sqrt[n]{a_n} \geq 1\right) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – розбігається.

Доведення. I) Оскільки $\exists n_1 \in \mathrm{N} : \forall n \geq n_1 \quad a_n \leq p^n$ та при $p < 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} p^n$ збігається (див. приклад 1.1), тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ також збігається.

II) Оскільки $\exists n_2 \in \mathrm{N} : \forall n \geq n_2 \quad \sqrt[n]{a_n} \geq 1$, тоді $\forall n \geq n_2 \; a_n \geq 1$, тобто не може виконуватися необхідна умова, і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбігається. ■

Теорема 1.7 *(радикальна ознака Коші (гранична форма)).*

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \;\; a_n \geq 0 \;\forall n, \\ \exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q \text{ (скінченна або} \\ \qquad\qquad \text{нескінченна),} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 1)\; q < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{збігається,} \\ 2)\; q > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{розбігається,} \\ \quad 3)\; q = 1 - \text{сумнівний випадок.} \end{array}\right. .$$

Доведення. 1) Запишемо означення границі $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$ при $0 < q < 1$ для $\varepsilon = \frac{1-q}{2}$:

$$\exists n_0 \in \mathrm{N} : \forall n \geq n_0 \; \left|\sqrt[n]{a_n} - q\right| < \varepsilon = \frac{1-q}{2} \;\; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall n \geq n_0 \;\; q - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < q + \varepsilon = q + \frac{1-q}{2} = \frac{1+q}{2} < 1 \; .$$

Позначимо тепер $p = \frac{1+q}{2}$, тоді $\forall n \geq n_0 \; \sqrt[n]{a_n} < p < 1$. Отже, за радикальною ознакою Коші у загальному формулюванні, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається.

2) Випадок $1 < q$ розіб'ємо на два: $1 < q < \infty$ (2а) і $q = \infty$ (2б).

2а) Нехай $1 < q < \infty$, тоді запишемо означення границі $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$ для $\varepsilon = (q-1)$: $\exists n_1 \in \mathrm{N} : \forall n \geq n_1 \left|\sqrt[n]{a_n} - q\right| < q - 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \forall n \geq n_1 \; \sqrt[n]{a_n} > q - (q-1) = 1 \Rightarrow \forall n \geq n_1 \sqrt[n]{a_n} > 1.$$

Отже, за радикальною ознакою Коші у загальному формулюванні, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбігається.

2б) Якщо $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\infty$, тоді для $\varepsilon=1$

$\exists n_2\in\mathrm{N}:\forall n\geq n_2\quad \sqrt[n]{a_n}>\varepsilon=1\Rightarrow\sqrt[n]{a_n}>1:\forall n\geq n_2\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n-$ розбігається.

3) Розглянемо ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n};\ \sum\limits_{n}\frac{1}{n^2}$. Для них $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=1=q$ і $\lim\limits_{n}\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}=1=q$. Але перший із цих рядів є гармонічним розбіжним, а другий є збіжним (див. приклад 1.5).■

Теорема 1.8 *(інтегральна ознака Маклорена-Коші).*

$$\left.\begin{array}{l}\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n,\quad a_n>0\ \ \forall n\in\mathrm{N},\\ 1)f(n)=a_n,\\ 2)f(x)\text{ не зростає}\\ \quad\text{на }[n_0,\infty)\end{array}\right\}\Rightarrow\left(\begin{array}{l}\int\limits_{n_0}^{\infty}f(x)dx-\text{збігається (розбігається)}\Rightarrow\\ \qquad\qquad\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n-\text{збігається (розбігається)}\end{array}\right)$$

Доведення. Розглянемо числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n, a_n>0\ \ \forall n\in\mathrm{N}$ і функцію $f(x)$ такі, що задовольняють умови 1) і 2).

Уведемо до розгляду функцію $F(x)=\int\limits_{n_0}^{x}f(t)dt$, яка є інтегралом із змінною верхньою межею. Ця функція має властивості:

$$F'(x)=f(x)>0\ \forall x\in[n_0,\infty)\Rightarrow F(x)\ \text{зростає на}\ [n_0,\infty);$$

$$F(x)=\int\limits_{n_0}^{x}f(t)dt>0\ \ \forall x\in[n_0,\infty).$$

З монотонності функції випливає, що $\left(\exists\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)<+\infty\ \vee\ \lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=+\infty\right)$.

Тоді у випадку, коли $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=\int\limits_{n_0}^{\infty}f(t)\,dt<\infty$ інтеграл $\int\limits_{n_0}^{\infty}f(t)\,dt$ збігається, а у випадку $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=+\infty$ він розбігається.

Розглянемо різницю ($n\geq n_0$)

$$F(n+1)-F(n)=\int\limits_{n_0}^{n+1}f(t)\,dt-\int\limits_{n_0}^{n}f(t)\,dt=\int\limits_{n}^{n+1}f(t)\,dt. \qquad (1.5)$$

Функція $F(x)$ диференційовна на відрізку $[n,n+1]$, а тому неперервна на ньому. Це дозволяє застосувати формулу Лагранжа [1, с. 245] до $F(x)$:

$$F(n+1)-F(n)=F'(n+\theta_n(n+1-n))(n+1-n)=F'(n+\theta_n),0<\theta_n<1.$$

Оскільки $F'(x)=f(x)$ на $[n_0,\infty)$, то

$$F(n+1)-F(n)=f(n+\theta_n).$$

В наслідок незростання функції $f(x)$, маємо:

$$n\le n+\theta_n\le n+1 \quad\Rightarrow\quad f(n)\ge f(n+\theta_n)\ge f(n+1);$$

$$f(n+1)\le F(n+1)-F(n)\le f(n);$$

$$a_{n+1}\le F(n+1)-F(n)\le a_n. \tag{1.6}$$

Із (1.5) і (1.6), отримаємо:

$$a_{n+1}\le\int_n^{n+1}f(t)\,dt\le a_n. \tag{1.7}$$

Розглянемо суму

$$\sum_{n=n_0}^{N}(F(n+1)-F(n))=F(n_0+1)-F(n_0)+F(n_0+2)-F(n_0+1)+\ldots$$

$$+F(N+1)-F(N)=-F(n_0)+F(N+1)=\int_{n_0}^{N}f(t)dt.$$

Із рівності $\sum_{n=n_0}^{N}(F(n+1)-F(n))=\int_{n_0}^{N}f(t)\,dt$ випливає, що інтеграл $\int_{n_0}^{\infty}f(t)\,dt$ і ряд $\sum_{n=n_0}^{\infty}(F(n+1)-F(n))$ збігаються або розбігаються одночасно. В наслідок ознаки порівняння і нерівності (1.7) одночасно з ними збігається або розбігається ряд $\sum_{n=n_0}^{\infty}a_n$. Оскільки скінченна кількість членів ряду не впливає на його збіжність, таку ж поведінку буде мати і весь ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ (див. зауваження 1.2). ■

Геометрична інтерпретація інтегральної ознаки Маклорена-Коші. Знайдемо суму нерівностей (1.7) для $n_0\le n\le N-1$

$$\sum_{n=n_0+1}^{N}a_n\le\int_{n_0}^{N}f(x)dx\le\sum_{n=n_0}^{N-1}a_n$$

та здійснимо граничний перехід при $N\to\infty$, враховуючи монотонність послідовностей часткових сум,

$$\exists\lim_{N\to\infty}\int_{n_0}^{N}f(x)dx<\infty\Rightarrow\exists\lim_{N\to\infty}\sum_{n=n_0+1}^{N}a_n<\infty,$$

$$\lim_{N\to\infty}\int_{n_0}^{N}f(x)dx=+\infty\Rightarrow\lim_{N\to\infty}\sum_{n=n_0}^{N-1}a_n=\infty,$$

тобто

$$\int_{n_0}^{\infty} f(x)dx - \text{збігається}\left(\text{розбігається}\right) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{збігається}\left(\text{розбігається}\right) \text{ і}$$

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n \le \int_{n_0}^{\infty} f(x)dx \le \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n. \qquad (1.8)$$

Невласному інтегралу $\int_{n_0}^{\infty} f(x)dx$ геометрично відповідає площа нескінченного криволінійного трикутника, обмеженого графіками ліній $y = 0,\ y = f(x),\ x = n_0$ а ряду $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ – площа східчастої фігури. На рис. 1.1 зображено геометричну інтерпретацію нерівності (1.8) у випадку $n_0 = 1$.

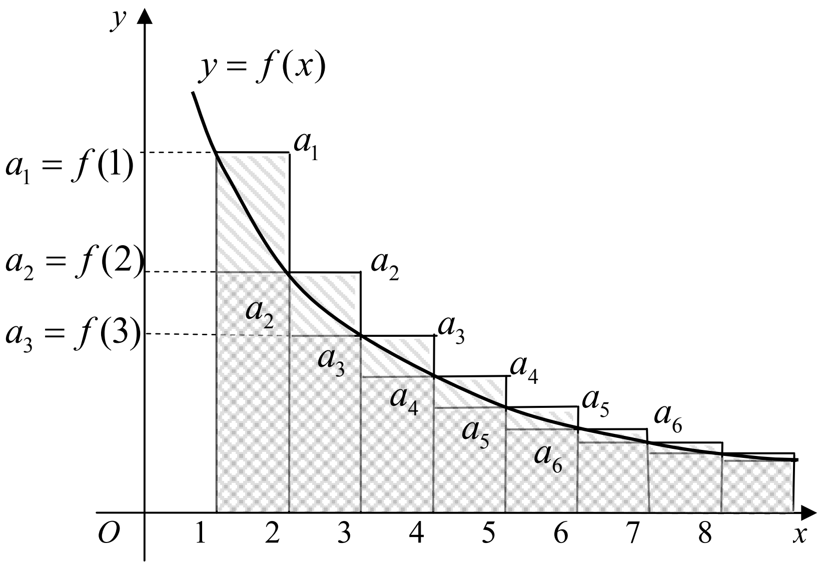


Рис. 1.1

Висновок. Якщо площа нескінченного криволінійного трикутника під графіком функції $y = f(x)$ на промені $[n_0;+\infty)$ скінчена, то скінченною є площа східчастої фігури, що лежить всередині цього трикутника, тому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається. Якщо площа фігури під графіком функції $y = f(x)$ нескінченна, то нескінченою є площа східчастої фігури, розташованої зовні трикутника, тому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбігається.

Оцінка залишку $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ *збіжного ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Підсумуємо нерівності $a_{k+1} \le \int_{k}^{k+1} f(t)\,dt \le a_k$ (див. (1.7)) від n до $n+m-1$:

$$\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k \le \int_{n}^{n+m} f(x)dx \le \sum_{k=n}^{n+m-1} a_k$$

та здійснимо граничний перехід при $m \to \infty$:

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k \le \lim_{m\to\infty}\int_{n}^{n+m} f(x)dx \le \lim_{m\to\infty}\sum_{k=n}^{n+m-1} a_k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \le \int_{n}^{\infty} f(x)dx \le \sum_{k=n}^{\infty} a_k .$$

Звідси отримаємо оцінку залишку ряду:

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)dx \le \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \le \int_{n}^{\infty} f(x)dx \quad \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\Leftrightarrow \int_{n+1}^{\infty} f(x)dx \le r_n \le \int_{n}^{\infty} f(x)dx.}$$

Приклад 1.6. Довести, що

узагальнений гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ **збігається при** $p>1$**,**
розбігається при $p \le 1$**.**

Для розв'язані поставленої задачі потрібно застосувати інтегральну ознаку Маклорена-Коші і той факт, що невласний інтеграл

$$\int_{a}^{+\infty}\frac{dx}{x^{\lambda}}, \qquad a>0$$

збігається при $\lambda>1$ розбігається при $\lambda \le 1$.

Детальне доведення провести самостійно ✍! ■

Приклад 1.7. За допомогою інтегральної ознаки Маклорена-Коші довести, що ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ розбігається.

Розв'язання. Для функції

$$f(x)=\frac{1}{x\ln x}$$

маємо:

1) $f(n)=\dfrac{1}{n\ln n}=a_n \ \ \forall n \ge 2$;

2) $f(x)$ спадає на $[2;+\infty)$, оскільки функція $g(x)=x\ln x$ зростає на $[2;+\infty)$ (як добуток двох зростаючих функцій);

3) Невласний інтеграл

$$\int_{2}^{+\infty} f(x)dx = \int_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x} = \int_{2}^{+\infty}\frac{d\ln x}{\ln x} = \ln\left|\ln x\right| \Big|_{2}^{+\infty} = +\infty$$

розбігається, тому (за інтегральною ознакою Маклорена-Коші) розбігається ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$. ■

2. Ознаки збіжності знакопостійних рядів (Кумера, Даламбера, Раабе, Бертрана, Гаусса)

Теорема 1.9 (*ознака Кумера*). Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, в якому $a_n > 0 \ \forall n \in \mathrm{N}$ та довільну послідовність $\{C_1, C_2, ..., C_n, ...\}$, що задовольняє вимоги

1) $C_n > 0 \ \forall n \in \mathrm{N}$,

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{C_n}$ – розбігається,

і послідовність $\left\{x_n = C_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - C_{n+1}\right\}$. Тоді

I) якщо $\exists n_1 \in \mathrm{N} \ \forall n \geq n_1 \ \ x_n \geq \sigma > 0$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – збігається;

II) якщо .$\exists n_2 \in \mathrm{N} \ \ \forall n \geq n_2 \ \ x_n \leq 0$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – розбігається.

Доведення. I) Оскільки $x_n = C_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - C_{n+1} \geq \sigma$, то

$$C_n a_n - C_{n+1} a_{n+1} \geq \sigma \cdot a_{n+1}. \tag{1.9}$$

Щоб застосувати до цієї нерівності ознаку порівняння, дослідимо на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (C_n a_n - C_{n+1} a_{n+1}) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Маємо:

$$\forall n \geq n_1 \quad x_n = C_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - C_{n+1} \geq \sigma > 0 \ \Rightarrow \ \forall n \geq n_1 \quad b_n = C_n a_n - C_{n+1} a_{n+1} > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_n a_n > C_{n+1} a_{n+1} \ \forall n \geq n_1 \ \Rightarrow \ \{C_n a_n\}_{n=n_1}^{\infty} \text{ спадає.}$$

Зауважимо також, що ця послідовність обмежена знизу ($\forall n \in \mathrm{N} \quad C_n a_n > 0$), отже, за теоремою Вейєрштрасса вона має границю $\lim_{n\to\infty} C_n a_n = S$.

Дослідимо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (C_n a_n - C_{n+1} a_{n+1}) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ на збіжність за означенням:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (C_k a_k - C_{k+1} a_{k+1}) = C_1 a_1 - C_2 a_2 + C_2 a_2 - C_3 a_3 + C_3 a_3 - C_4 a_4 + ... +$$

$$+ C_n a_n - C_{n+1} a_{n+1} = C_1 a_1 - C_{n+1} a_{n+1} \ \Rightarrow \ \lim_{n\to\infty} S_n = C_1 a_1 - S = \mathrm{const} \ \Rightarrow \ \sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty.$$

Отже, із (1.9) і ознаки порівняння випливає збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

II) Оскільки $C_n \dfrac{a_n}{a_{n+1}} - C_{n+1} \le 0 \ (n \ge n_2)$, тоді

$$\left.\begin{array}{l} C_n a_n \le C_{n+1} a_{n+1} \quad (n \ge n_2), \\ a_n > 0, \ C_n > 0, \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{C_n}{C_{n+1}} \le \frac{a_{n+1}}{a_n} \Rightarrow \frac{1/C_{n+1}}{1/C_n} \le \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad (n \ge n_2).$$

Застосуємо додаткову ознаку порівняння:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1/C_{n+1}}{1/C_n} \le \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \quad (n \ge n_2), \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{C_n} - \text{розбігається}, \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{ розбігається.} \ \blacksquare$$

Теорема 1.10 (*ознака Кумера* (гранична форма)). Розглянемо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, в якому $a_n > 0 \ \ \forall n \in \mathrm{N}$ та довільну послідовність $\{C_1, C_2, ..., C_n, ...\}$, що задовольняє умови

1) $C_n > 0 \ \ \forall n \in \mathrm{N}$,

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{C_n} -$ розбігається.

Якщо існує (скінченна або нескінченна) границя $\lim\limits_{n} \left(C_n \dfrac{a_n}{a_{n+1}} - C_{n+1} \right) = x$, тоді: 1) при $x > 0$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається; 2) при $x < 0$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ розбігається; 3) при $x = 0$ – сумнівний випадок.

Доведення проводиться аналогічно доведенню радикальної ознаки Коші в граничній формі на основі ознаки Кумера в загальному формулюванні.

Наступні ознаки є наслідками ознаки Кумера.

Теорема 1.11 *(ознака Д'Аламбера).*

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \ a_n > 0 \ \ \forall n \in \mathrm{N}, \\ \exists \lim\limits_{n} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q \ \ \text{(скінченна або} \\ \qquad\qquad \text{нескінченна),} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 1) \ q < 1 \Rightarrow \displaystyle\sum_{n} a_n \text{ збігається,} \\ 2) \ q > 1 \Rightarrow \displaystyle\sum_{n} a_n \text{ розбігається,} \\ 3) \ q = 1 \Rightarrow \text{сумнівний випадок.} \end{array}\right.$$

Доведення. Нехай $C_n = 1 \ \forall n \in \mathrm{N}$, тоді $C_n > 0 \ \forall n \in \mathrm{N}$ і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{C_n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{1}$ розбігається. Тоді

$$x_n = C_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - C_{n+1} = 1 \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 = \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{x_n + 1}.$$

Оскільки за умовою $\exists \lim\limits_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, то $\exists \lim\limits_n x_n = x$ і $q = \frac{1}{x+1}$. Отже, застосовуючи ознаку Кумера, отримаємо

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ q < 1 \Rightarrow x + 1 > 1 \Rightarrow x > 0; \\ \quad q = 0 \Rightarrow x = +\infty > 0; \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{збігається},$$

$$\left.\begin{array}{l} 2)\ q > 1 \Rightarrow x + 1 < 1 \Rightarrow x < 0; \\ \quad q = \infty \Rightarrow x = -1 < 0; \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{розбігається},$$

$$3)\ q = 1 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \text{сумнівний випадок}. \ \blacksquare$$

Теорема 1.12 (*ознака Раабе).*

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n,\ a_n > 0\ \ \forall n \in \mathrm{N}, \\ \exists \lim\limits_n n \cdot \left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = r \text{ (скінченна або} \\ \hfill \text{нескінченна)}, \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 1)\ r < 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n - \text{розбігається}, \\ 2)\ r > 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n - \text{збігається}, \\ 3)\ r = 1 \Rightarrow \text{сумнівний випадок}. \end{array}\right.$$

Доведення. Нехай $C_n = n \ \forall n \in \mathrm{N}$, тоді $C_n > 0 \ \forall n \in \mathrm{N}$ і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{C_n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ розбігається, а

$$x_n = C_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - C_{n+1} = n \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1).$$

Покладемо $r_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right)$, тоді $x_n = r_n - 1$. Оскільки (за умовою) $\exists \lim\limits_n r_n = r$, то $\exists \lim\limits_n x_n = x$ і $x = r - 1$. Отже, за ознакою Кумера, отримаємо:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ r < 1 \Rightarrow x < 0, \\ \quad r = 0 \Rightarrow x = -1 < 0, \\ \quad r = -\infty \Rightarrow x = -\infty < 0, \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{розбігається},$$

$$\left.\begin{array}{l} 2)\ r > 1 \Rightarrow x > 0, \\ \quad r = +\infty \Rightarrow x = +\infty > 0, \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{збігається},$$

$$3)\ \ r = 1 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \text{сумнівний випадок}. \ \blacksquare$$

Теорема 1.13 *(ознака Бертрана).*

$$\left.\begin{array}{r}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ a_n>0\ \ \forall n\in\mathrm{N}, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \\ \displaystyle\exists\lim_{n}\ \ln n\cdot\left(n\cdot\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right)=b\ \ (\text{скінченна або} \\ \text{нескінченна}),\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}1)\ b<1\Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\text{розбігається,}\\ 2)\ b>1\Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\text{збігається,}\\ 3)\ b=1\Rightarrow \text{сумнівний випадок.}\end{cases}$$

Доведення. Нехай $C_n=n\ln n\ \ \forall n\in\mathrm{N}\setminus\{1\}$, тоді ряд $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{C_n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ розбігається (див. приклад 1.7). Тоді

$$x_n=C_n\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}}-C_{n+1}=n\ln n\frac{a_n}{a_{n+1}}-(n+1)\ln(n+1)=\underline{n\ln n\frac{a_n}{a_{n+1}}}-\underline{\underline{n\ln(n+1)}}-\underline{\underline{\underline{\ln(n+1)}}}+$$

$$+\underline{\underline{n\ln n}}-\underline{n\ln n}+\underline{\underline{\underline{\ln n}}}-\underline{\ln n}=\ln n\cdot\left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right)-n\cdot[\ln(n+1)-\ln n]-[\ln(n+1)-\ln n]=$$

$$=\ln n\cdot\left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right)-\ln\frac{n+1}{n}\cdot(n+1)=\ln n\cdot\left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right)-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Звідки

$$b=\lim_{n}\ \underset{\exists}{\ln n\cdot\left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right)}\underset{\Rightarrow}{=}\lim_{n}\left(x_n+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right)=\underset{\exists}{\lim_{n}x_n}+\ln e.$$

Тобто $\exists\lim\limits_{n}x_n=x$ і $b=x+1$. Отже, за ознакою Кумера, одержимо:

$$1)\ \left.\begin{array}{l}b>1\Rightarrow x>0,\\ b=\infty\Rightarrow x=\infty>0,\end{array}\right\}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\text{збігається;}$$

$$2)\ \left.\begin{array}{l}b<1\Rightarrow x<0,\\ b=0\Rightarrow x=-1<0,\end{array}\right\}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\text{розбігається;}$$

3) $b=1\Rightarrow x>0\Rightarrow$ сумнівний випадок. ■

Теорема 1.14 *(ознака Гаусса).*

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n,\quad a_n>0\ \ \forall n\in\mathrm{N},\\ \displaystyle\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lambda+\frac{\mu}{n}+\frac{\theta_n}{n^2},\ \ \theta_n-\text{обмеж,}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}1)\ \lambda>1\vee(\lambda=1\wedge\mu>1)\Rightarrow\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\text{збігається,}\\ 2)\ \lambda<1\vee(\lambda=1\wedge\mu\le1)\Rightarrow\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\text{розбігається.}\end{cases}$$

Доведення. Спочатку до ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ застосуємо ознаку Д'Аламбера при $\underline{\lambda \neq 1}$, тоді

$$\lim_n \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_n \left(\lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^2} \right) = \lambda,$$

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{\lambda} = q \quad \Rightarrow \begin{cases} (\lambda > 1 \vee \lambda = \infty) \Leftrightarrow 0 \le q < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{збігається}, \\ \lambda < 1 \Leftrightarrow q > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{розбігається}, \\ \lambda = 0 \Leftrightarrow q = \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{розбігається}. \end{cases}$$

До ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ застосуємо ознаку Раабе при $\underline{\lambda = 1}$, тоді

$$\lim_n n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_n n\left(\frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^2} \right) = \lim_n \left(\mu + \frac{\theta_n}{n} \right) = \mu = r \Rightarrow \begin{cases} \mu = r < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{розбігається}, \\ \mu = r > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{збігається}. \end{cases}$$

Застосуємо ознаку Бертрана при $\underline{\lambda = 1 \wedge \mu = 1}$, тоді

$$\lim_n \ln n \cdot \left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right) = \lim_n \ln n \cdot \left(n\left(\frac{1}{n} + \frac{\theta_n}{n^2} \right) - 1 \right) = \lim_n \underbrace{\theta_n}_{\text{обм.}} \cdot \underbrace{\frac{\ln n}{n}}_{\text{н.м.п.}} = 0 = b < 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{розбігається. } \blacksquare$$

3. Відсутність універсального ряду порівняння.

При доведенні радикальної ознаки Коші збіжності знакододатного ряду ми оцінювали його члени геометричною прогресією, а при доведенні розбіжності – членами ряду $\sum_{n=1}^{\infty} 1$. При доведенні ознаки Д'Аламбера за ряд порівняння (при дослідженні на розбіжність) застосовували ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 1$, в ознаці Бертрана - ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$, в ознаці Раабе – ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Якщо доводити останні три ознаки не як наслідки ознаки Кумера, то в загальному випадку з використанням ознаки порівняння застосовуються для дослідження на збіжність ряди $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\sigma}}, \quad \sigma > 0$.

Поставимо питання: *чи існує універсальний, найповільніше збіжний (розбіжний) ряд, порівняно з яким можна зробити висновок про збіжність (розбіжність) ряду з невід'ємними членами*.

🗁**Означення 1.2.**

Нехай $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} C'_n$ – збігаються, $C_n \geq 0,\ C'_n \geq 0\ \ \forall n \in \mathrm{N}$. Говорять, що ряд $\sum_{n=1}^{¥} C'_n$ *збігається повільніше* за ряд $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$, якщо послідовність залишків $\left\{\gamma_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} C_k\right\}$ ряду $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$ є нескінченно малою послідовністю (н.м.п.) більш високого порядку мализни ніж послідовність залишків $\left\{\gamma'_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} C'_k\right\}$ ряду $\sum_{n=1}^{\infty} C'_n$, тобто $\gamma_n = o(\gamma'_n)$ або $\lim\limits_{n} \dfrac{\gamma_n}{\gamma'_n} = 0$.

🗁**Означення 1.3.**

Нехай $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} d'_n$ – розбігаються, $d_n \geq 0,\ d'_n \geq 0\ \forall n \in \mathrm{N}$. Говорять, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} d'_n$ *розбігається повільніше* за ряд $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$, якщо послідовність часткових сум $\left\{D'_n = \sum_{k=1}^{n} d'_k\right\}$ ряду $\sum_{n=1}^{\infty} d'_n$ є нескінченно великою послідовністю (н.в.п.) нижчого порядку ніж послідовність часткових сум $\left\{D_n = \sum_{k=1}^{n} d_k\right\}$ ряду $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$, тобто $\lim\limits_{n} \dfrac{D_n}{D'_n} = \infty \left(\text{або } \lim\limits_{n} \dfrac{D'_n}{D_n} = 0\right)$.

Твердження 1.1. Для довільного збіжного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} C_n \quad (C_n \geq 0\ \forall n)$ існує інший збіжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} C'_n \quad (C'_n \geq 0\ \forall n)$, який збігається повільніше за $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$.

Доведення. За шуканий ряд візьмемо ряд з членами $C'_n = \sqrt{\gamma_{n-1}} - \sqrt{\gamma_n}$. Оскільки $C_n \geq 0\ \forall n$, то $\gamma_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} C_k \leq \gamma_{n-1} = \sum_{k=n}^{\infty} C_k$, тому $C'_n \geq 0\ \forall n$. Знайдемо залишок побудованого ряду:

$$\gamma'_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} C'_k = \sqrt{\gamma_n} - \sqrt{\gamma_{n+1}} + \sqrt{\gamma_{n+1}} - \sqrt{\gamma_{n+2}} + \sqrt{\gamma_{n+2}} - \sqrt{\gamma_{n+3}} + \ldots = \sqrt{\gamma_n}$$

(довести ✍!). Тоді

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n - \text{збігається} \Rightarrow \lim_{m\to\infty} \gamma_n = 0 \Rightarrow \lim_{m\to\infty} \gamma'_n = \lim_{m\to\infty} \sqrt{\gamma_n} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{\gamma'_n\} \text{і} \{\gamma_n\} - \text{н.м.п.} \wedge \sum_{n=1}^{\infty} C'_n - \text{збігається.}$$

Порівняємо нескінченно малі послідовності:

$$\lim_n \frac{\gamma_n}{\gamma'_n} = \lim_n \frac{\gamma_n}{\sqrt{\gamma_n}} = \lim_n \sqrt{\gamma_n} = 0.$$

Це і доводить потрібне. ■

Твердження 1.2. Для довільного розбіжного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ $(d_n \ge 0\ \forall n)$ існує інший розбіжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} d'_n$, який розбігається повільніше за $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$.

Доведення. За шуканий ряд візьмемо ряд з членами

$$d'_1 = \sqrt{D_1},\ d'_n = \sqrt{D_n} - \sqrt{D_{n-1}}\ (n \ge 2).$$

Оскільки $d_n \ge 0\ \forall n$, то $D_n = \sum_{k=1}^{n} d_n \ge D_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} d_n$, тому $d'_n \ge 0\ \forall n$ і $\{D_n\}$ зростає.

Маємо

$$\sum_{k=1}^{n} d'_k = \sqrt{D_1} + \sum_{k=2}^{n}\left(\sqrt{D_k} - \sqrt{D_{k-1}}\right) = \sqrt{D_1} + \sqrt{D_2} - \sqrt{D_1} + \sqrt{D_3} - \sqrt{D_2} + \ldots +$$

$$+\sqrt{D_{n-2}} - \sqrt{D_{n-2}} + \sqrt{D_n} - \sqrt{D_{n-1}} = \sqrt{D_n};$$

отже,

$$\left.\begin{aligned} &\{D_n\}\ \text{зростає},\\ &\sum_{n=1}^{\infty} d_n - p\text{озбігається (за умовою)}, \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{m\to\infty} D_n = +\infty \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{m\to\infty} D'_n = \lim_{m\to\infty} \sqrt{D_n} = +\infty \wedge \sum_{n=1}^{\infty} d'_n - \text{розбігається.}$$

Порівняємо нескінченно великі послідовності:

$$\lim_n \frac{D_n}{D'_n} = \lim_n \frac{D_n}{\sqrt{D_n}} = \lim_n \sqrt{D_n} = +\infty.$$

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} d'_n$ розбігається повільніше за ряд $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$. ■

Теорема 1.15. Ніякий збіжний (розбіжний) ряд не може бути універсальним засобом для встановлення – шляхом порівняння з ним – збіжності (розбіжності) інших рядів.

Доведення. Припустимо, що навпаки, існує збіжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$ з невід'ємними членами, що є універсальним для перевірки на збіжність. Тоді розглянемо ряд із твердження 1.1 з членами $C'_n = \sqrt{\gamma_{n-1}} - \sqrt{\gamma_n}$. Виразимо члени ряду $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$ через γ_n:

$$\left.\begin{aligned} \gamma_n &= \sum_{k=n+1}^{\infty} C_k, \\ \gamma_{n-1} &= \sum_{k=n}^{\infty} C_k \end{aligned}\right\} \Rightarrow C_n = \gamma_{n-1} - \gamma_n.$$

Порівняємо члени цих рядів:

$$\lim_n \frac{C_n}{C'_n} = \lim_n \frac{\gamma_{n-1} - \gamma_n}{\sqrt{\gamma_{n-1}} - \sqrt{\gamma_n}} = \lim_n \left(\sqrt{\gamma_{n-1}} + \sqrt{\gamma_n} \right) = 0.$$

Оскільки $\lim_n \frac{C_n}{C'_n} = 0$, то $\exists n_0 \in \mathrm{N}\ \ \forall n \geq n_0\ C_n \leq C'_n$.

Отже, дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} C'_n$, порівнюючи його з рядом $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$, неможливо. Таким чином, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$ не є універсальним рядом порівняння для дослідження на збіжність, тобто наше припущення невірне.

Припустимо тепер, що розбіжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ з невід'ємними членами є універсальним для перевірки на розбіжність. Тоді розглянемо ряд із твердження 1.2 з членами $d'_1 = \sqrt{D_1},\ d'_n = \sqrt{D_n} - \sqrt{D_{n-1}}\ (n \geq 2)$. Оскільки $D_n = \sum_{k=1}^{n} d_k,\ \ D_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} d_k$, то $d_1 = D_1,\ d_n = D_n - D_{n-1}\ \ (n \geq 2)$.

Порівняємо члени рядів $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} d'_n$:

$$\lim_n \frac{d_n}{d'_n} = \lim_n \frac{D_n - D_{n-1}}{\sqrt{D_n} - \sqrt{D_{n-1}}} = \lim_n \left(\sqrt{D_n} + \sqrt{D_{n-1}} \right) = +\infty.$$

Оскільки $\lim_n \frac{d_n}{d'_n} = +\infty$, то $\exists n_0 \in \mathrm{N}\ \ \forall n \geq n_0\ \ \ d_n \geq d'_n$.

Отже, неможливо дослідити на розбіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} d'_n$, порівнюючи його з $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$, тобто ряд $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ не є універсальним рядом порівняння для дослідження на розбіжність і наше припущення невірне. ■

§3 Знакозмінні ряди

1. Абсолютна та умовна збіжність знакозмінних рядів

До довільних рядів відносять ряди, які містять як додатні так і від'ємні члени. Якщо ряд містить скінчену кількість від'ємних елементів, то вони не впливають на збіжність ряду, і досліджувати цей ряд на збіжність можна як знакододатний. Якщо, навпаки, додатних членів скінченна кількість, то досліджувати ряд $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ на збіжність можна як знаковід'ємний, та робити висновок про збіжність ряду, досліджуючи ряд із його модулів $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} |a_n| \left(a_n \le 0 \ \forall n \ge n_0\right)$. Такі ряди не відносять до довільних, а без обмеження загальності міркувань вважають знакосталими. До довільних рядів відносять ряди, що містять нескінчену кількість як додатних, так і від'ємних членів.

Означення 1.4. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ називають *абсолютно збіжним*, якщо збігається ряд, утворений із його модулів, тобто

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \textit{абсолютно збігається} \overset{def}{\Leftrightarrow} \sum_{m=1}^{\infty} |a_n| - \text{збігається}.$$

Означення 1.5. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ називають *умовно збіжним*, якщо він збігається, але не абсолютно. Тобто

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \textit{умовно збігається} \overset{def}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 1) \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n - \text{збігається}, \\ 2) \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n - \text{абсолютно розбігається}. \end{cases}$$

Теорема 1.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n -$ абсолютно збігається $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n -$ збігається.

Доведення. *I спосіб.* Застосовуємо критерій Коші збіжності ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{абсолютно збігається} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| - \text{збігається} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n_0 \in \mathrm{N} \ \ \forall n \ge n_0 \ \forall p \in \mathrm{N} \ \ \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon.$$

За нерівністю трикутника $\left| \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| \le \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} |a_k|$, тому

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists n_0\in\mathrm{N}\ \ \forall n\ge n_0\ \ \forall p\in\mathrm{N}\ \ \left|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k\right|<\varepsilon.$$

Це означає, що за критерієм Коші ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ збігається.

II спосіб. Позначимо

$$a^+=\begin{cases}a, & \text{якщо } a>0,\\ 0, & \text{якщо } a\le 0.\end{cases},\quad a^-=a-a^+.$$

Для даного ряду маємо: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n^++a_n^-\right)$. Дослідимо ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^+$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^-$ на збіжність. Для ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^+$ маємо:

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\text{абсолютно збігається}\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|-\text{збігається};$$

$$\left.\begin{array}{l}a_n^+\le|a_n|\\ зб.\Leftarrow зб.\end{array}\right\}\Rightarrow\exists\sum_{n=1}^{\infty}a_n^+=A^+.$$

Аналогічно ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^-$ збігається, а його суму позначимо A^-. Тоді

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^++a_n^-\right)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^++\sum_{n=1}^{\infty}a_n^-=A^++A^-.$$

Це означає, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ збігається, а його сума дорівнює A^++A^-. ■

Отже. під довільним рядом розуміємо ряд, що містить нескінченну кількість додатних і від'ємних членів. Довільні ряді ще називають *знакозмінними*. Окремим випадком знакозмінного ряду є ряд *знакопочережний ряд,* тобто ряд, знаки елементів якого строго чергуються:

$$C_1-C_2+C_3-C_4+\ldots+(-1)^{n+1}C_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}C_n,\quad C_n\ge 0\ \ \forall n\in\mathrm{N}.$$

Для дослідження на абсолютну збіжність довільних рядів до ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ застосовуються ознаки збіжності знакододатних рядів: порівняння, радикальна ознака Коші, інтегральна ознака Маклорена-Коші, ознаки Д'Аламбера, Раабе, Гаусса, Бертрана.

Знакопочережні ряди, як правило, досліджуються на збіжність за допомогою ознаки Лейбніца. Знакозмінні ряди загального вигляду (ті, що не є знакопочережними) досліджуються на збіжність за допомогою ознак Абеля і Діріхле. Саме про ці ознаки йдеться у пункті 1.3.2.

2. Перетворення Абеля

Нехай $B_k = \sum_{i=1}^{k} \beta_i$, тоді

$$\beta_1 = B_1;\; \beta_2 = B_2 - B_1;\; \beta_3 = B_3 - B_2; \ldots \beta_m = B_m - B_{m-1}.$$

Розглянемо суму добутків вигляду $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot \beta_i$:

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot \beta_i = \alpha_1 B_1 + \alpha_2 (B_2 - B_1) + \alpha_3 (B_3 - B_2) + \ldots + \alpha_m (B_m - B_{m-1}) =$$

$$= B_1(\alpha_1 - \alpha_2) + B_2(\alpha_2 - \alpha_3) + \ldots + B_m(\alpha_m - \alpha_{m+1}) = \alpha_m B_m - \sum_{i=1}^{m-1} B_i(\alpha_{i+1} - \alpha_i).$$

Отже, отримано рівність, що носить назву перетворення Абеля:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \beta_i = \alpha_m B_m - \sum_{i=1}^{m-1} B_i (\alpha_{i+1} - \alpha_i)}$$

Лема 1.1. Якщо

1) $\{\alpha_i\}_{i=1}^{m}$ – монотонна скінченна множина,

2) $\{\beta_i\}_{i=1}^{m}$ – така скінченна множина, що сукупність $\left\{ B_k = \sum_{i=1}^{k} \beta_i \right\}_{k=1}^{m}$ обмежена за модулем додатним числом L, тобто $|B_k| \le L \quad \forall k = \overline{1, m}$,

тоді

$$\left| \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \beta_i \right| \le L|\alpha_1| + 2L|\alpha_m|.$$

Зокрема, якщо скінченна множина $\{\alpha_i\}_{i=1}^{m}$ не зростає і $\alpha_i \ge 0 \; \forall i$, тоді

$$\left| \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \beta_i \right| \le L\alpha_1.$$

Доведення. Оскільки множина $\{\alpha_i\}_{i=1}^{m}$ – монотонна, то

$$\sum_{i=1}^{m-1} |\alpha_{i+1} - \alpha_i| = \pm \sum_{i=1}^{m-1} (\alpha_{i+1} - \alpha_i) = \pm(\alpha_1 - \alpha_m) = |\alpha_1 - \alpha_m|,$$

де «+» обирається, якщо $\{\alpha_i\}_{i=1}^{m}$ – зростає, а «–» у випадку її спадання.

Застосуємо перетворення Абеля:

$$\left| \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \beta_i \right| \le |\alpha_m||B_m| + \sum_{i=1}^{m-1} |B_i||\alpha_{i+1} - \alpha_i| \le L|\alpha_m| + L\sum_{i=1}^{m-1} |\alpha_{i+1} - \alpha_i| = L|\alpha_m| + L|\alpha_1 - \alpha_m| \le$$

$$\le L|\alpha_m| + L|\alpha_1| + L|\alpha_m| = 2L|\alpha_m| + L|\alpha_1|.$$

Зокрема, коли $\{\alpha_i\}_{i=1}^{m}$ – не зростає і $\alpha_i \ge 0 \; \forall i$, тоді

$$\left|\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\beta_i\right| \le L|\alpha_m| + L|\alpha_1 - \alpha_m| = L\alpha_m + L\alpha_1 - L\alpha_m = L\alpha_1. \quad \blacksquare$$

3. Ознаки збіжності знакозмінних рядів (ознаки Абеля, Діріхле і Лейбніца.

Теорема 1.17 *(ознака Абеля).*

$$\left.\begin{array}{l} 1)\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n - \text{збігається}, \\ 2)\{a_n\} - \text{монотонна (нестрого)}, \\ 3)\{a_n\} - \text{обмежена, тобто} \\ \qquad \exists K>0 \ \ \forall n\in \mathrm{N} \ \ |a_n|\le K\ , \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n - \text{збігається.}$$

Доведення. Розглянемо відрізок ряду $\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = \sum_{i=1}^{p} a_{n+i} b_{n+i}$. Застосуємо умову 1) і критерій Коші збіжності ряду:

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_n - \text{збігається} \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0 \ \ \exists n_0\in \mathrm{N} \ \ \forall n\ge n_0 \ \ \forall p\in \mathrm{N} \ \ \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} b_k\right| = \left|\sum_{i=1}^{p} b_{n+i}\right| < \varepsilon.$$

Щоб застосувати лему 1.1, введемо позначення $\alpha_i = a_{n+i},\ \beta_i = b_{n+i}$. Всі вимоги леми виконуються, причому $L=\varepsilon,\ \ m=p$, тому

$$\left|\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\beta_i\right| \le \varepsilon|\alpha_1| + 2\varepsilon|\alpha_p|.$$

Застосуємо умову 3) і зробимо зворотні позначення:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| \le 3\varepsilon K \quad \forall n\ge n_0 \forall p\in \mathrm{N}.$$

Тому за критерієм Коші ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ збігається. ■

Теорема 1.18 *(ознака Діріхле).*

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \{a_n\} \text{ спадає (нестрого)}, \\ 2)\ \lim\limits_{n} a_n = 0 \\ 3)\left\{B_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} b_i\right\} - \text{обмежена, тобто} \\ \qquad\qquad \exists M>0\ \forall n\in \mathrm{N}\ |B_i|\le M, \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_b - \text{збігається.}$$

Доведення. Розглянемо відрізок ряду $\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = \sum_{i=1}^{p} a_{n+i} b_{n+i}$. Покладемо $\alpha_i = a_{n+i},\ \beta_i = b_{n+i}$. Тоді за лемою (окремий випадок), в наслідок умови 3), потрібно обрати $L=M$, отримаємо

$$\left|\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\beta_i\right| \le M\alpha_1 .$$

Зауважимо, що із умов 1) і 2) випливає, що $a_n \ge 0\ \forall n$. Застосуємо умову 2): $\lim\limits_n a_n = 0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \ \exists n_0\in \mathrm{N}\ \ \forall n\ge n_0\ \ \ |a_n| = a_n < \varepsilon$.

Зробимо зворотні позначення та отримаємо

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k b_k\right| \le M a_{n+1} < \varepsilon M \quad \forall n\ge n_0\ \ \forall p\in \mathrm{N}.$$

Тому, за критерієм Коші, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n b_n$ збігається. ■

Теорема 1.19 *(ознака Лейбніца).* Нехай $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}C_n,\ C_n\ge 0\ \forall n$ – знакопочережний ряд. Має місце твердження:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\{C_n\}\ \text{спадає (нестрого)},\\ 2)\lim\limits_n C_n = 0, \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}C_n \text{ – збігається.}$$

Доведення. В ознаці Діріхле покладемо $a_n = C_n,\quad b_n = (-1)^{n+1}$. Тоді 1) $\{a_n\}$ спадає (нестрого), 2) $\lim\limits_n a_n = 0$,

$$\left.\begin{array}{l} B_1 = b_1 = 1\\ B_2 = b_1 + b_2 = 1-1 = 0\\ B_3 = b_1+b_2+b_3 = 1-1+1 = 1\\ \ldots \end{array}\right\} \Rightarrow \{B_n\} = \{1,0,1,0,1,0,\ldots\} \text{ – обмежена.}$$

Отже, вимоги ознаки Діріхле виконуються, тому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}C_n$ збігається. ■

Оцінка залишку $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k+1}C_k$ **ряду** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}C_n$ **лейбніцевого типу.**

Розглянемо знакопочережний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}C_n,\quad C_n\ge 0\ \forall n$, у якого 1) $\{C_n\}$ спадає (нестрого) 2) $\lim\limits_n C_n = 0$. Оцінимо його відрізок $r_{n,p} = \sum\limits_{k=n+1}^{n+p}(-1)^{k+1}C_k$ за окремим випадком леми 1.1 в тих же позначеннях, що й в доведенні ознаки Лейбніца:

$$\left|r_{n,p}\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p}(-1)^{k+1}C_k\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k b_k\right| \le Ma_{n+1} = \|M=1\| = a_{n+1} = C_{n+1} \Rightarrow \left|r_{n,p}\right| \le C_{n+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|r_n\right| = \left|\lim_{p\to\infty} r_{n,p}\right| \le C_{n+1} = \left|a_{n+1}\right|.$$

☝ *Висновок:* модуль залишку ряду лейбніцевого типа не перевищує модуля першого відкинутого члена.

Приклад 1.8. Дослідити ряд на збіжність

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - .\frac{1}{4} + .. + \frac{(-1)^n}{n} + \dots.$$

Розв'язання. За ознакою Лейбніца

1) $\left\{C_n = \dfrac{1}{n}\right\}$ спадає, оскільки $C_n = \dfrac{1}{n} \ge \dfrac{1}{n+1} = C_{n+1} \quad \forall n$,

2) $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0$,

тому даний ряд збігається. ■

Приклад 1.9. Дослідити ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(nx)}{n}$, $0 < x < \pi$ на збіжність.

Розв'язання. Застосуємо ознаку Діріхле. Нехай

$$b_n = \cos(nx), \quad a_n = \frac{1}{n}.$$

При $x \ne 2\pi m, m \in Z$ із співвідношень

$$\sum_{k=1}^{n}\cos kx = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots + \cos nx =$$

$$= \frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\left(\sin\frac{x}{2}\cdot\cos x + \sin\frac{x}{2}\cdot\cos 2x + \sin\frac{x}{2}\cdot\cos 3x + \dots + \sin\frac{x}{2}\cdot\cos nx\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\cdot\left(-\sin\frac{x}{2} + \sin\frac{3x}{2} - \sin\frac{3x}{2} + \sin\frac{5x}{2} - \sin\frac{5x}{2} + \sin\frac{7x}{2} - \dots -\right.$$

$$\left. - \sin\left[\left(n - \frac{1}{2}\right)x\right] + \sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right]\right) = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\cdot\left(-\sin\frac{x}{2} + \sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right]\right)$$

випливає, що

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right| = \frac{1}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\cdot\left(\left|\sin\frac{x}{2}\right| + \left|\sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right]\right|\right) \le \frac{1}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\cdot 2 = \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}.$$

Аналогічна нерівність виконується для синусів кратних дуг. Таким чином:

$$\boxed{\begin{array}{c} \left|\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right| \le \dfrac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|} \\ \left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right| \le \dfrac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}, \\ x \ne 2\pi m,\ m \in Z \end{array}} \qquad \begin{array}{r} (1.10) \\ (1.11) \end{array}$$

1) Із першої нерівності випливає, що:

$$|B_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} b_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)\right| \le \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|} \quad \forall n \in \mathrm{N}.$$

Звідки отримаємо обмеженість послідовності $\{B_n\}$.

2) Оскільки $a_n = \frac{1}{n} > a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$ $\forall n \in \mathrm{N}$, то $\{a_n\}$ спадає.

3) $\lim\limits_{n} a_n = \lim\limits_{n} \frac{1}{n} = 0$.

Отже, за ознакою Діріхле ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n}$ – збігається. ■

§4 Властивості числових рядів

1. Асоціативна властивість числових рядів

Теорема 1.20. Якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, тоді ряд, що утворюється із даного за допомогою групування його членів,

$$(a_1 + ... + a_{n1}) + (a_{n_1+1} + ... + a_{n_2}) + (a_{n_2+1} + ... + a_{n_3}) + ... + (a_{n_{p+1}} + ... + a_{n_p}) + ... \quad (*)$$

(тут $\{n_p\}$ – зростаюча послідовність номерів) збігається завжди і має таку саму суму, що і даний ряд.

Доведення. Позначимо через $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ часткову суму даного ряду, через A_p^* – часткову сума ряду (*). Очевидно, що $A_p^* = A_{n_p}$. Оскільки ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, і має суму $A = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, то послідовність $\{A_n\}$ збігається до A. Тому послідовність $\{A_{n_p}\}$ збігається до A, як підпослідовність збіжної до A послідовність. Отже, $\{A_p^*\}$ – послідовність часткових сум перегрупованого ряду (*) – збігається до A, тобто до суми даного ряду. ■

Запитання: чи правда, що із збіжності ряду (*) випливає збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$?

Відповідь на це запитання не завжди є позитивною. Наприклад, ряд $(1-1)+(1-1)+(1-1)+...$ збігається до 0. Але його отримано із розбіжного ряду $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ шляхом групування членів.

Розглянемо випадок, коли відповідь на дане запитання є позитивною.

Твердження 1.3. Якщо всі доданки в кожній із дужок ряду (*) мають один і той самий знак і ряд (*) збігається, тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається.

Доведення. Якщо $A_m = \sum_{n=1}^{m} a_n$, тоді $\exists p \in \mathrm{N} : n_{p-1} + 1 \le m \le n_p$. Позначимо через A_p^* часткову суму ряду (*), тоді $A_p^* = A_{n_p}$. Оскільки за умовою ряд (*) збігається, то у випадку, коли кожен доданок в p-ій дужці

додатний, то

$$\underbrace{A_{n_{p-1}}}_{\substack{A_{p-1}^* \\ \downarrow}} \le A_m \le \underbrace{A_{n_p}}_{\substack{A_p^* \\ \downarrow}}$$
$$\downarrow$$
$$A$$

а коли від’ємний, то

$$\underbrace{A_{n_{p-1}}}_{\substack{A_{p-1}^* \\ \downarrow}} \ge A_m \ge \underbrace{A_{n_p}}_{\substack{A_p^* \\ \downarrow}}$$
$$\downarrow$$
$$A$$

Об’єднуючи випадки, приходимо до висновку, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається до A. ■

Приклад 1.10 (№ Д 2672[1]). Дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ на абсолютну і умовну збіжність.

Розв’язання. Абсолютна розбіжність очевидна. Дослідимо ряд на збіжність за допомогою останнього твердження:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n} = -1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} - \frac{1}{10} - \frac{1}{11} - \ldots - \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{24} - \ldots =$$

$$= -\underbrace{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)}_{C_1} + \underbrace{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{C_2} - \underbrace{\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \ldots + \frac{1}{15}\right)}_{C_3} + \underbrace{\left(\frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{24}\right)}_{C_4} - \ldots +$$

$$+ (-1)^k \underbrace{\left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2+1} + \ldots + \frac{1}{(k+1)^2 - 1}\right)}_{C_k} + \ldots = C_1 - C_2 + C_3 - C_4 + \ldots + (-1)^{k+1} C_k + \ldots$$

---

[1] Посилання на номери, в яких фігурує літера «Д», означатимуть, що цей приклад відповідає збірнику задач Демидовича Б.П. [**4**].

Доведемо збіжність ряду $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k C_k$ за допомогою ознаки Лейбніца. Розглянемо члени цього ряду

$$C_k = \underbrace{\underbrace{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2+1} + \ldots + \frac{1}{k^2+k-1}}_{k \text{ доданків}}}_{a_k} + \underbrace{\underbrace{\frac{1}{k^2+k} + \ldots + \frac{1}{k^2+2k}}_{k+1 \text{ доданків}}}_{b_k},$$

$$C_k = a_k + b_k,$$

$$\frac{1}{k+1} = \frac{1}{k^2+k} \cdot k \le a_k \le \frac{1}{k^2} \cdot k = \frac{1}{k},$$

$$\frac{1}{k+1} = \frac{1}{k^2+2k+1} \cdot (k+1) \le b_k \le \frac{1}{k^2+k} \cdot (k+1) = \frac{1}{k}.$$

Маємо:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{k+1} \le a_k \le \dfrac{1}{k}, \\ \dfrac{1}{k+1} \le a_k \le \dfrac{1}{k}, \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \frac{2}{k+1} \le C_k \le \frac{2}{k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1 > C_2 > C_3 > C_4 > C_5 > \ldots > C_n > C_{n+1} >.$$

Тому

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \{C_n\} \text{ спадає}, \\ 2) \lim\limits_{n} C_n = 0, \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ряд } \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n C_n \text{ збігається за ознакою Лейбніца.}$$

Всі доданки у дужках мають однакові знаки. Отже, за твердженням 1.3, заданий ряд збігається. Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ збігається умовно. ■

2. Комутативна властивість числових рядів. Теорема Рімана

Означення 1.6. *Переставленням* множини A називається взаємно однозначне відображення $\pi : A \to A$ множини A на себе.

Теорема 1.21. Знакопостійний збіжний ряд при переставленні своїх членів залишається збіжним та не змінює свою суму.

Доведення. Без обмеження загальності міркувань можна вважати, що $a_k \ge 0\ \forall k \in \mathrm{N}$. Позначимо часткові суми даного ряду через $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, його суму – S, а часткові суми переставленого ряду – $S'_n = \sum_{k=1}^{n} a_{\pi(k)}$.

Оскільки $a_k \ge 0\ \forall k \in \mathrm{N}$, тоді $S'_1 \le S'_2 \le \ldots \le S'_n \le S$. За теоремою Вейєрштрасса [1, с.96], існує границя S' зростаючої обмеженої послідовності $\{S'_n\}$, причому $S' \le S$. З іншого боку, $S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\pi^{-1}(\pi(k))}$, тому $S \le S'$. Отже, $S' \le S$ і $S \le S'$, звідки $S = S'$. ■

Теорема 1.22. Абсолютно збіжний ряд при довільному переставленні своїх членів залишається абсолютно збіжним та не змінює свою суму.

Доведення. Введемо позначення для будь-якого дійсного числа a:

$$a^{+} = \begin{cases} a, \text{ якщо } a > 0 \\ 0, \text{ якщо } a \le 0 \end{cases}, \qquad a^{-} = a^{+} - a.$$

Розглянемо два ряди з невід'ємними членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{+}$ і $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-}$. Із оцінок $a_n^{+} \le |a_n|$ і $a_n^{-} \le |a_n|$ та загальної ознаки порівняння випливає їх збіжність, а також можливість подання

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{+} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-}. \qquad (1.12)$$

Із (1.12) випливає збіжність вихідного ряду. Позначимо суми рядів у запису (1.12) відповідно S, S^{+}, S^{-}, тоді $S = S^{+} - S^{-}$. За теоремою 1.21, при будь-якому переставленні $\pi : \mathrm{N} \to \mathrm{N}$ виконується $S^{+} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}^{+}$ і $S^{-} = \sum_{n=1}^{\infty} s_{\pi(n)}^{-}$, звідки

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}^{+} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}^{-} = S^{+} + S^{-} = S = \sum_{n=1}^{\infty} S_n. \ ■$$

Отже, для абсолютно збіжних рядів виконується умова комутативності додавання. Іншим чином поводять себе умовно збіжні ряди. Їх члени можна переставити так, щоб новий ряд збігався до будь-якого наперед заданого числа або навіть розбігався. Це стверджується наступною теоремою.

Теорема 1.23. *(теорема Рімана).* Якщо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається умовно, тоді

1) $\forall S \in \mathrm{R} \quad \exists \pi : \mathrm{N} \to \mathrm{N} : \ \sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = S$;

2) $\exists \sigma : \mathrm{N} \to \mathrm{N} : \ \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \infty$.

Доведення. Розглянемо множини

$$C = \{c_1, c_2, ..., c_n, ... : a_{c_n} \ge 0\}, \quad B = \{b_1, b_2, ..., b_n, ... : a_{b_n} < 0\}$$

та частини даного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_{c_n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{b_n}$, що їм відповідають. Якщо обидва ці ряди збігаються, то даний ряд збігається абсолютно. Якщо один із цих рядів збігається, а інший розбігається, то вихідний ряд є розбіжним. Отже, умовна збіжність вимагає одночасної розбіжності двох рядів, тобто

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{c_n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{b_n} = +\infty . \tag{1.13}$$

1) Розглянемо випадок, коли $S \geq 0$ (випадок $S < 0$ можна розглянути аналогічно). Якщо $S \geq 0$, тоді переставлення π будуємо наступним чином: спочатку беремо саме стільки додатних елементів вихідного ряду, щоб їх сума перебільшила S. Потім беремо саме стільки від'ємних елементів, щоб загальна сума вибраних елементів стала менше за S. Знову беремо саме стільки додатних елементів, щоб загальна сума перебільшила S. Продовжуючи цей процес до нескінченності, ми отримаємо ряд, в який увійдуть усі елементи вихідного ряду:

$\pi(1) = c_1$,

$\pi(2) = c_2, \ldots,$

$\pi(j_1) = c_{j_1}$, причому $\quad S_{j_1} = \sum_{k=1}^{j_1} a_{\pi(k)} > S$, а $S_{j_1 - 1} \leq S$;

$\pi(j_1 + 1) = b_1$,

$\pi(j_1 + 2) = b_2, \ldots,$

$\pi(j_1 + j_2) = b_{j_2}$, де $\quad S_{j_1 + j_2} < S$, а $\quad S_{j_1 + j_2 - 1} \geq S$;

$\pi(j_1 + j_2 + 1) = c_{j_1 + 1}, \ldots,$

$\pi(j_1 + j_2 + j_3) = c_{j_1 + j_3}$, де $\quad S_{j_1 + j_2 + j_3} > S$, $\quad S_{j_1 + j_2 + j_3 - 1} \leq S$;

$\pi(j_1 + j_2 + j_3 + 1) = b_{j_2 + 1}, \ldots,$

$\pi(j_1 + j_2 + j_3 + j_4) = b_{j_2 + j_4}$, де $\quad S_{j_1 + j_2 + j_3 + j_4} < S$, $S_{j_1 + j_2 + j_3 + j_4 - 1} \geq S$;

………………………………

Така побудова є можливою завдяки (1.13).

Покажемо, що переставлений таким чином ряд буде збігатися до S. Дійсно, нехай номер m задовольняє нерівність $j_1 + j_2 + \ldots + j_k < m < j_1 + j_2 + \ldots + j_{k+1}$, тоді $|S_m - S| \leq \left|a_{\pi(j_1 + \ldots + j_k)}\right|$. Якщо ж $m = j_1 + j_2 + \ldots + j_{k+1}$, тоді $|S_m - S| \leq \left|a_{\pi(j_1 + \ldots + j_{k+1})}\right|$. В будь-якому разі, в наслідок збіжності вихідного ряду, його загальний член прямує до нуля. Тому із останніх співвідношень отримаємо:

$$\lim_{n} S_n = S .$$

2) Шукане переставлення σ, при якому ряд розбігається, будуємо таким чином, щоб отримана послідовність часткових сум була нескінченно великою:

$\pi(1) = c_1$,

$\pi(2) = c_2, \ldots, \pi(j_1) = c_{j_1}$, причому $\quad S_{j_1} = \sum_{k=1}^{j_1} a_{\pi(k)} > 1 - a_{b_1}$;

$\pi(j_1 + 1) = b_1$, тоді $\quad S_{j_1 + 1} > 1$;

$\pi(j_1+2)=c_{j_1+1},\dots,$

$\pi(j_1+j_2)=c_{j_1+j_2-1}$, де $\qquad S_{j_1+j_2}>2-a_{b_2}$;

$\pi(j_1+j_2+1)=b_2$, тоді $\qquad S_{j_1+j_2+1}>2$;

………………………………..

$\pi(j_1+...+j_{k-1}+2)=c_{j_1+...+j_{k-1}+1},\dots,$

$\pi(j_1+...+j_{k-1}+j_k)=c_{j_1+...+j_{k-1}+j_k-1}$, $\qquad S_{j_1+...+j_{k-1}+j_k}>k-a_{b_k}$;

де

$\pi(j_1+...+j_{k-1}+j_k+1)=b_k$, тоді $\qquad S_{j_1+...+j_{k-1}+j_k+1}>k$;

………………………………..

Якщо $j_1+j_2+...+j_k<m\le j_1+j_2+...+j_{k+1}$, то $S_m>k$. Тому $\lim\limits_n S_n=\infty$. Отже,

$$\sum_{n=1}^{\infty}x_{\sigma(n)}=\infty . \ \blacksquare$$

3. Арифметичні операції над рядами.

Для суми, різниці і добутку на скаляр вже було доведено (зауваження 1.3 і 1.4), що

$$1)\ \left.\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}a_n - \text{збігається},\\ &c=const\neq 0,\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}(ca_n)}_{зб}\underset{\Leftrightarrow}{=}c\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}a_n}_{зб}$$

$$2)\ \left.\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}a_n - \text{збігається},\\ &\sum_{n=1}^{\infty}b_n - \text{збігається},\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{cases}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n) - \text{збігається},\\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\pm\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n.\end{cases}$$

За означенням, *добутком* двох рядів $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ називають ряд $\sum\limits_{i,j}a_ib_j$, членами якого є всілякі добутки a_ib_j членів даних двох рядів. Тобто

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cdot\sum_{n=1}^{\infty}b_n=(a_1+a_2+...)\cdot(b_1+b_2+...)\overset{def}{=}\sum_{i,j}a_ib_j=\sum_n w_n .$$

Поставимо запитання: чи буде із збіжності двох рядів випливати збіжність їхнього добутку та чи буде при цьому сума добутку дорівнювати добутку сум, тобто чи буде мати місце імплікація

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}a_n - \text{збігається},\\ &\sum_{n=1}^{\infty}b_n - \text{збігається},\end{aligned}\right\}\overset{?}{\Rightarrow}\sum_{n=1}^{\infty}w_n - \text{збігається},$$

а разом з нею рівність

$$\sum_{n=1}^{\infty} w_n \overset{?}{=} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{n=1}^{\infty} b_n \ ?$$

Позитивні відповіді на ці запитання мають місце у двох випадках:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ – абсолютно збігаються;

2) один із рядів збігається абсолютно, а інший хоча б умовно, тоді буде збігатися ряд спеціального вигляду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} w_n = \underbrace{a_1 b_1}_{\substack{\text{сума індексів} \\ \text{дорівнює 2}}} + \underbrace{a_1 b_2 + a_2 b_1}_{3} + \underbrace{a_2 b_2 + a_1 b_3 + a_3 b_1}_{4} + \dots$$

Якщо ж ми будемо розглядати ряд $\sum\limits_{i,j} a_i b_j$ з членами, розташованими довільним чином, то у другому випадку жодного висновку зробити буде не можна.

Спочатку розглянемо випадок 1).

Теорема 1.24.

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{абсолютно збігається до } A, \\ &\sum_{n=1}^{\infty} b_n - \text{абсолютно збігається до } B, \end{aligned}\right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} w_n = \sum_{i,j} a_i b_j - \text{збігається.}$$

Підсумований у будь-якому порядку ряд $\sum\limits_{n} w_n = \sum\limits_{i,j} a_i b_j$ так, щоб були присутні усі можливі комбінації добутків $a_i b_j$, збігається до значення добутку сум двох рядів, тобто

$$\sum_{n=1}^{\infty} w_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n = A \cdot B.$$

Доведення. Уведемо позначення:

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k, \quad B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n;$$

$$A_n^* = \sum_{k=1}^{n} |a_k|, \quad A^* = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|, \quad B_n^* = \sum_{k=1}^{n} |b_k|, \quad B^* = \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$$

Розглянемо часткову суму ряду $\sum\limits_{n} |w_n| = \sum\limits_{i,j} |a_i b_j|$, а саме: $S_n^* = \sum\limits_{k=1}^{n} |w_k|$. Позначимо найбільший із номерів членів двох рядів, що присутні в S_n^*, через m (цей номер, звичайно, залежить від n).

Тоді

$$S_n^* = \sum_{k=1}^{n} |w_k| \le (|a_1| + |a_2| + \dots + |a_m|) \cdot (|b_1| + \dots + |b_m|) \le A_m^* \cdot B_m^* \le A^* \cdot B^*.$$

Отже, часткові суми ряду знакосталого ряду $\sum_n |w_n|$ обмежені зверху. Значить, цей ряд збігається, тобто ряд $\sum_n w_n$ збігається абсолютно. Знайдемо тепер його суму.

Оскільки цей ряд абсолютно збігається, він задовольняє комутативну і асоціативну властивості. Отже, переставимо члени цього ряду так, щоб послідовність часткових сум переставленого ряду містила підпослідовність

$$a_1 \cdot b_1 = W_1,$$
$$\left(a_1 + a_2\right) \cdot \left(b_1 + b_2\right) = a_1 b_1 + a_2 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_2 = W_4,$$
$$\left(a_1 + a_2 + a_3\right) \cdot \left(b_1 + b_2 + b_3\right) = W_9, \ldots$$

Отриманий ряд (переставлений і перегрупований) збігається до тієї ж суми, що і будь-який інший ряд $\sum_n w_n = \sum_{i,j} a_i b_j$, отриманий із усіляких добутків $a_i b_j$, тому

$$\lim_n W_{n^2} = \lim_n A_n \cdot \lim_n B_n = A \cdot B. \ ■$$

Випадок 2) доведено в теоремі Мертенса.

Теорема 1.25 *(теорема Мертенса)***.** Якщо один із рядів $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ чи $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ збігається абсолютно, а інший хоча б умовно, тоді ряд спеціального вигляду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} w_n = \underbrace{a_1 b_1}_{\substack{\text{сума індексів} \\ \text{дорівнює 2}}} + \underbrace{a_1 b_2 + a_2 b_1}_{3} + \underbrace{a_2 b_2 + a_1 b_3 + a_3 b_1}_{4} + \ldots$$

збігається до добутку значень сум цих рядів, тобто

$$\sum_{n=1}^{\infty} w_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n = A \cdot B.$$

Доведення розглянути за бажанням самостійно [2, с.43] ✍!

§5 Нескінченні добутки

1. Нескінчені добутки. Подання функцій у вигляді нескінченних добутків

Формально записаний добуток членів числової послідовності $\{a_n\}$ вигляду

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot \ldots = \prod_{n=1}^{\infty} a_n$$

називають *нескінченним добутком;* $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ називають членами нескінченного добутку; $P_n = \prod_{k=1}^{n} a_k$ − частковим добутком.

🗀**Означення 1.7.** Якщо існує скінченна, не рівна нулю (!), границя часткових добутків, тоді нескінченний добуток називається збіжним, тобто

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n \text{ збіжний } \overset{def}{\Leftrightarrow} \left(\exists \lim_n P_n = P \wedge P \neq 0 \wedge P \neq \infty\right).$$

Значення границі $P = \lim_n P_n$ називають *значенням нескінченного добутку* $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ і застосовують позначення: $\prod_{n=1}^{\infty} a_n = P$.

Зауваження 1.5. Нескінченні добутки і послідовності взаємозв'язані: нескінченному добутку $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ відповідає послідовність часткових добутків $\{P_n\}$, у той же час, послідовності $\{P_n\}$ відповідає нескінченний добуток $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ з членами

$$a_n = \frac{P_n}{P_{n-1}} = \frac{a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n}{a_n \cdot \ldots \cdot a_{n-1}}.$$

Теорема 1.26 (*необхідна умова збіжності нескінченного добутку*). Якщо нескінченний добуток $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, тоді його загальний член прямує до 1, тобто $\lim_n a_n = 1$.

Доведення. Оскільки нескінченний добуток $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, то

$$\exists \lim_n P_n = P \wedge P \neq 0 \wedge P \neq \infty.$$

Тоді

$$\lim_n a_n = \lim_n \frac{P_n}{P_{n-1}} = \frac{\lim_n P_n}{\lim_n P_{n-1}} = \frac{P}{P} = 1. \blacksquare$$

Зауваження 1.6. Оскільки границя послідовності часткових добутків для збіжного добутку не дорівнює нулю, то добутки, в яких хоча б один із членів дорівнює нулю, не розглядаються.

Зауваження 1.7. Згідно з необхідною умовою збіжності нескінченних добутків, $\lim_n a_n = 1$, тому, починаючи з деякого номеру, усі члени нескінченного добутку будуть мати додатні знаки, тобто

$$\exists n_0 \in \mathrm{N} \;\; \forall n \geq n_0 \;\; a_n > 0.$$

Приклад 1.11. Дослідити нескінченний добуток на збіжність за означенням і знайти його значення, якщо $\prod_{n=1}^{\infty} \cos\frac{x}{2^n}$.

Розв'язання. Спростимо цей частковий добуток

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} \cos\frac{x}{2^k} = \cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2^2} \cdot \cos\frac{x}{2^3} \cdot \ldots \cdot \cos\frac{x}{2^n},$$

для чого помножимо його на $1=\dfrac{\sin\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}$:

$$P_n=\frac{1}{\sin\frac{x}{2^n}}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^3}\ldots\cos\frac{x}{2^{n-2}}\cos\frac{x}{2^{n-1}}\cos\frac{x}{2^n}\sin\frac{x}{2^n}.$$

Оскільки

$$\cos\frac{x}{2^n}\sin\frac{x}{2^n}=\frac{1}{2}\sin\frac{2x}{2^n}=\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2^{n-1}},$$

$$\cos\frac{x}{2^{n-1}}\cos\frac{x}{2^n}\sin\frac{x}{2^n}=\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2^{n-1}}\cos\frac{x}{2^{n-1}}=\frac{1}{4}\sin\frac{x}{2^{n-2}},$$

$$\cos\frac{x}{2^{n-2}}\cos\frac{x}{2^{n-1}}\cos\frac{x}{2^n}\sin\frac{x}{2^n}=\frac{1}{4}\sin\frac{x}{2^{n-2}}\cos\frac{x}{2^{n-2}}=\frac{1}{8}\sin\frac{x}{2^{n-3}},$$

тоді

$$P_n=\frac{1}{\sin\frac{x}{2^n}}\frac{1}{2^n}\sin\frac{x}{2^{n-n}}=\frac{\frac{1}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}\sin x.$$

Перевіримо останній висновок за індукцією. Для $n=1$ ця рівність виконується. Припустимо, закономірність для P_n є вірною. Доведемо її для P_{n+1}:

$$P_{n+1}=P_n\cdot\cos\frac{x}{2^{n+1}}=\frac{\frac{1}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}\cdot\sin x\cdot\cos\frac{x}{2^{n+1}}=\frac{\frac{1}{2^n}\sin x\cdot\cos\frac{x}{2^{n+1}}}{2\sin\frac{x}{2^{n+1}}\cdot\cos\frac{x}{2^{n+1}}}=\frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\sin\frac{x}{2^{n+1}}}\cdot\sin x.$$

Відповідно до принципу математичної індукції, рівність $P_n=\dfrac{\frac{1}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}\sin x$ виконується для всіх натуральних номерів n.

Знайдемо границю послідовності часткових добутків:

$$\lim_n P_n=\lim_n\frac{\frac{1}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}\sin x=\lim_n\frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{x}{2^n}}\sin x=\frac{\sin x}{x}.$$

Висновок: нескінченний добуток збігається, крім того, $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\cos\dfrac{x}{2}=\dfrac{\sin x}{x}$. ■

Встановимо зв’язок між нескінченними добутками і рядами.

Теорема 1.27. Нескінченний добуток $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \ln a_n$ де $a_n > 0$ $\forall n \in \mathrm{N}$ збігаються або розбігаються одночасно, а значення P нескінченного добуток і суми ряду S пов'язані рівністю

$$\ln P = S \text{ або } P = e^S .$$

Доведення. Нехай $P_n = \prod_{k=1}^{n} a_k$ – частковий добуток, $a_k > 0\ \forall k \in \mathrm{N}$ – члени добутку, тоді $\ln P_n = \ln \prod_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \ln a_k = S_n$ – часткова сума ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \ln a_n$, а $\ln P_n = S_n$.

Нехай добуток $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, тоді $\exists \lim_{n} P_n = P \wedge P \neq 0 \wedge P \neq \infty$. Оскільки функція $f(x) = \ln x$ неперервна на $(0,+\infty)$, тоді

$$\underbrace{\lim_{n} \ln P_n}_{\exists} = \ln \underbrace{\lim_{n} P_n}_{\exists} = \ln P .$$
$$\Leftarrow$$

До того ж, значення нескінченного добутку і сума ряду пов'язані рівністю:

$$\ln P = S .$$

Нехай тепер ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \ln a_n$ збігається, тоді $\exists \lim_{n} S_n = S$. Оскільки $P_n = e^{S_n}$, а $g(x) = e^x$ – неперервна на R, тоді

$$\underbrace{\lim_{n} e^{S_n}}_{\exists} = e^{\underbrace{\lim_{n} S_n}_{\exists}} = e^S .$$
$$\Leftarrow$$

До того ж, сума ряду і значення нескінченного добутку пов'язані рівністю $P = e^S$, яка еквівалентна отриманій раніше. ■

Зауваження 1.8. У загальному випадку, якщо добуток $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, тоді (за необхідною умовою збіжності добутку), $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$. Звідки випливає, що $\exists n_0 \in \mathrm{N}\ \forall n \geq n_0 \quad a_n > 0$. Тоді (за теоремою1.27) збігається ряд $\sum_{n=n_0}^{\infty} \ln a_n$.

Зауваження 1.9.

1. Якщо нескінченний добуток $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ розбігається до $P = +\infty$, тоді ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} \ln a_n$ розбігається до $S = [\ln P = \ln(+\infty)] = +\infty$.

2. Якщо добуток $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ розбігається до $P = +0$, тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \ln a_n$ розбігається до $S = [\ln P = \ln(+0)] = -\infty$.

Саме тому обидва випадки, коли $P = +0$ і $P = +\infty$, відносять до випадків розбіжності нескінченного добутку.

Будемо використовувати наступну термінологію:

1) нескінченний добуток $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ розбігається до $+\infty \overset{def}{\Leftrightarrow}$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \ln a_n$ розбігається до $+\infty$;

2) добуток $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ розбігається до 0 $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \ln a_n$ розбігається до $-\infty$.

Твердження 1.4. Нескінченний добуток збігається тоді і тільки тоді, коли послідовність його залишків прямує до 1. Тобто

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n - \text{збігається} \Leftrightarrow \lim_n r_n = \lim_n \prod_{k=n+1}^{\infty} a_k = 1.$$

Доведення. Із зауваження 1.8 випливає, що

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n - \text{збігається} \Leftrightarrow \exists n_0 \in \mathrm{N} \quad \sum_{n=n_0}^{\infty} \ln a_n - \text{збігається.}$$

У свою чергу, з наслідку 1.1 випливає, що ряд $\sum_{n=n_0}^{\infty} \ln a_n$ збігається тоді та тільки тоді, коли $\lim_n \sum_{k=n+1}^{\infty} \ln a_n = 0$. Але, враховуючи неперервність функції $y = \ln x$, $\lim_n \ln \prod_{k=n+1}^{\infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim_n \prod_{k=n+1}^{\infty} a_k = 1$. ■

Теорема 1.28. Нескінченний добуток $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + v_n)$, в якому v_n мають один знак $\forall n \in \mathrm{N}$, збігається тоді і тільки тоді, коли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ збігається.

Доведення. *Необхідність.* Якщо нескінченний добуток $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + v_n)$ збігається, тоді (за необхідною умовою збіжності добутку) $\lim_n (1 + v_n) = 1$, звідки випливає, що

$$\exists n_0 \in \mathrm{N}\ \forall n \geq n_0 \quad 1 + v_n > 0.$$

За теоремою 1.27 добуток $\prod\limits_{n=n_0}^{\infty}(1+v_n)$ збігається одночасно з рядом $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}\ln(1+v_n)$.

Оскільки $\lim\limits_{n}(1+v_n) = 1$, тоді $\lim\limits_{n} v_n = 0$. Крім того, за умовою, v_n мають однаковий знак $\forall n \in \mathrm{N}$. Отже, можна застосувати ознаку порівняння в граничній формі: оскільки $\ln(1+v_n) \sim v_n \quad (n \to \infty)$, із збіжності ряду $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}\ln(1+v_n)$ випливає збіжність ряду $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} v_n$. Скінченна кількість членів ряду не впливає на його збіжність, тому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ є збіжним.

Достатність перевірити самостійно ✍! ■

Теорема 1.29. Якщо збігаються ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ та $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n^2$, тоді нескінченний добуток $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+v_n)$ збігається.

Доведення. Оскільки ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ збігається, $\lim\limits_{n} v_n = 0$, тобто $\lim\limits_{n}(1+v_n) = 1$ і виконується необхідна умова збіжності нескінченного добутку $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+v_n)$.

Розглянемо знакододатний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(v_n - \ln(1+v_n)\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(v_n - v_n + \frac{v_n^2}{2} + o\left(v_n^2\right)\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{v_n^2}{2} + o\left(v_n^2\right)\right). \tag{1.14}$$

Оскільки $\lim\limits_{n}\dfrac{\dfrac{v_n^2}{2} + o\left(v_n^2\right)}{v_n^2} = 1$, за ознакою порівняння в граничній формі, ряд (1.14) поводить себе однаково з рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n^2$, який збігається.

Отже, збіжним є і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(v_n - \ln(1+v_n)\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n - \sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+v_n)$, а це означає, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+v_n)$ подається у вигляді різниці двох збіжних рядів

$\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+v_n)=\sum_{n=1}^{\infty}v_n-\sum_{n=1}^{\infty}\left(v_n-\ln(1+v_n)\right)$, тобто є збіжним рядом. А це, в свою чергу, означає збіжність нескінченного добутку $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+v_n\right)$. ■

Зауваження 1.10. Якщо один із рядів $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}v_n^2$ збігається, а інший розбігається, тоді нескінченний добуток $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+v_n\right)$ розбігається. Дійсно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(v_n-\ln(1+v_n)\right)$ поводиться однаково з рядом $\sum_{n=1}^{\infty}v_n^2$, а

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+v_n)=\sum_{n=1}^{\infty}v_n-\sum_{n=1}^{\infty}\left(v_n-\ln(1+v_n)\right).$$

Отже, у будь-якому разі, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+v_n)$ є різницею розбіжного і збіжного рядів, тобто цей ряд розбігається, а разом з ним розбігається і нескінченний добуток.

🗁**Означення 1.8.** Нескінченний добуток $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+v_n\right)$ називають *абсолютно збіжним*, якщо абсолютно збіжним є ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+v_n)$. Якщо добуток збігається, але не абсолютно, він називається *умовно збіжним*.

Теорема 1.30. Добуток $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+v_n\right)$ абсолютно збігається тоді і тільки тоді, коли ряд $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ абсолютно збігається.

Доведення. За означенням 1.8, нескінченний добуток $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+v_n\right)$ абсолютно збігається $\Leftrightarrow$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\ln(1+v_n)\right|$ збігається $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left|\begin{array}{c}\lim\limits_{n\to\infty}v_n=0,\\ \text{(ознака порівняння в граничній формі)}\\ \left|\ln(1+v_n)\right|\sim\left|v_n\right|\ (n\to\infty)\end{array}\right|\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\left|v_n\right| \text{ збігається.}$$ ■

Приклад. 1.12.

1. В нескінченному добутку $\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)$ маємо: $v_k=\frac{1}{k}>0\ \forall k\in\mathrm{N}$. За теоремою 1.28, добуток $\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)$ розбігається до $+\infty$.

2. Оскільки ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{k+1}\right)$ розбігається до $-\infty$, тоді (за теоремою 1.28) нескінченний добуток $\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{k+1}\right)$ розбігається до 0.

Аналогічно приходимо до висновків:

3. Нескінченний добуток $\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k^{\alpha}}\right)$ збігається, коли $\alpha>1$ і розбігається до $+\infty$, коли $\alpha\le 1$.

4. Нескінченний добуток $\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(k+1)^{\alpha}}\right)$ збігається, коли $\alpha>1$ і розбігається до 0, коли $\alpha\le 1$.

Мають місце наступні співвідношення, доведення яких виноситься на самостійне опрацювання ✍ [2, с.51]:

$$\sin x = x\cdot\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right)\ (\alpha=2>1\Rightarrow \text{добуток збіжний}),$$

$$\cos x=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{4x^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right),$$

$$\operatorname{sh} x = x\cdot\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right),\quad \operatorname{ch} x=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{4x^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right).$$

Зауваження 1.11. В формулі $\sin x = x\cdot\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right)$ покладемо $x=\frac{\pi}{2}$:

$$1=\frac{\pi}{2}\cdot\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{\pi^2}{4\pi^2k^2}\right)=\frac{\pi}{2}\cdot\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4k^2}\right)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{4k^2-1}{4k^2}=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)(2k+1)}{4k^2},$$

або

$$\frac{\pi}{2}=\lim_n\prod_{k=1}^{n}\frac{4k^2}{(2k-1)(2k+1)}==\lim_n\frac{4^n\cdot(n!)^2}{(2n-1)!!(2n+1)!!}=\lim_n\frac{4^n\cdot(n!)^2}{((2n-1)!!)^2(2n+1)}=$$

$$=\lim_n\frac{1}{2n+1}\left(\frac{2^n\cdot(n!)}{(2n-1)!!}\right)^2=\lim_n\frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n)!!(2n)!!}{(2n-1)!!(2n)!!}\right)^2=\lim_n\frac{1}{2n+1}\left(\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}\right)^2.$$

Отримана формула носить назву формули Валліса:

$$\boxed{\frac{\pi}{2}=\lim_n\frac{1}{2n+1}\left(\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}\right)^2}.$$

1.2 ПРАКТИКУМ ІЗ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

§1 Числові ряди

1. Числові ряди. Обчислення сум рядів

Задача 1.1. Дослідити ряди на збіжність за означенням. У випадку їх збіжності знайти суму ряду. Обчислити часткову суму S_n для $n = 10$. Знайти абсолютну похибку Δ_n та відносну похибку δ_n наближеної рівності $S \approx S_n$.

а) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} + \ldots$;

б) $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \ldots$.

Розв'язання. **а)** Знайдемо часткову суму ряду: $S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}$.

Зрозуміло, що це сума n перших членів спадної геометричної прогресії, тобто

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} = \frac{1 - \frac{(-1)^n}{2^n}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3} - \frac{(-1)^n}{3 \cdot 2^{n-1}}.$$

Очевидно, що ця послідовність збігається, тобто збіжним буде і ряд, при цьому його сума дорівнює $\lim_{n} S_n = \frac{2}{3}$.

Обчислимо часткову суму при $n = 10$:

$$S_{10} = \frac{2}{3} - \frac{(-1)^{10}}{3 \cdot 2^9} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3 \cdot 2^9} = \frac{1024 - 1}{3 \cdot 512} = \frac{1023}{1536}.$$

Отже, абсолютна похибка наближення дорівнює $\Delta_{10} = \frac{2}{3} - \frac{1023}{1536} = \frac{1}{1536}$, а відносна похибка наближення: $\delta_{10} = \frac{\Delta_{10}}{S} = \frac{1}{1536} : \frac{2}{3} = \frac{3}{3072} = 0{,}00098$.

б) Знайдемо часткову суму ряду:

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} . + .. + \frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3n+1}\right).$$

(✍ Довести самостійно за допомогою принципу математичної індукції!)

Послідовність часткових сум знову збігається, що означає збіжність ряду. Його сума дорівнює $\lim_{n} S_n = \frac{1}{3}$.

Обчислимо часткову суму при $n = 10$: $S_{10} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{31}\right) = \frac{30}{3 \cdot 31} = \frac{10}{31}$.

Отже, абсолютна похибка наближення дорівнює $\Delta_{10} = \frac{1}{3} - \frac{10}{31} = \frac{1}{93}$, а відносна похибка наближення: $\delta_{10} = \frac{\Delta_{10}}{S} = \frac{1}{93} : \frac{1}{3} = \frac{3}{93} = 0{,}03226$. ■

Задача 1.2. Дослідити ряд $1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \ldots + \frac{n}{2n-1} + \ldots$ на збіжність.

Розв'язання. Перевіримо виконання необхідної умови збіжності: $\lim\limits_{n \leftarrow \infty} a_n = \lim\limits_{n \leftarrow \infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} \neq 0$. Оскільки ця умова не вивонується, заданий ряд є розбіжним. ■

2. Критерій Коші збіжності числового ряду

Задача 1.3. Дослідити ряди на збіжність, застосовуючи критерій Коші:

а) $\frac{1}{\sqrt{1 \cdot 2}} + \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} + \ldots$;

б) $\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos x^2}{2^2} + \ldots + \frac{\cos x^n}{n^2} + \ldots$.

Розв'язання. **а)** Оцінимо суму

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| = \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}} + \frac{1}{\sqrt{(n+2)(n+3)}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{(n+p)(n+p+1)}} \geq$$

$$\geq \frac{1}{\sqrt{(n+2)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(n+3)^2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{(n+p+1)^2}} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{n+p+1}.$$

Якщо n_0 – довільне натуральне число, який би номер $n \geq n_0$ не було вибрано, візьмемо $p = n$. Тоді

$$\left| \sum_{k=n+1}^{2n} a_k \right| \geq \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n+1} \geq \underbrace{\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+1} + \ldots + \frac{1}{2n+1}}_{n} = \frac{n}{2n+1} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)} \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

Отже, якщо вибрати $\varepsilon = \frac{1}{3}$, тоді $\left| \sum\limits_{k=n+1}^{2n} a_k \right| \geq \varepsilon$. Тобто умова критерію Коші не виконується і ряд є розбіжним. ■

б) Оцінимо суму

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| = \left| \frac{\cos x^{n+1}}{2^{n+1}} + \frac{\cos x^{n+2}}{2^{n+2}} + \ldots + \frac{\cos x^{n+p}}{2^{n+p}} \right| \leq \left| \frac{\cos x^{n+1}}{2^{n+1}} \right| + \ldots + \left| \frac{\cos x^{n+p}}{2^{n+p}} \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \ldots + \frac{1}{2^{n+p}} \overset{\forall p \in N}{<} \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \ldots + \frac{1}{2^{n+p}} + \ldots = \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n}.$$

Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$. Зрозуміло, що нерівність $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ виконується при $n > -\log_2 \varepsilon$. Отже, якщо вибрати $n_0 = \begin{cases} [-\log_2 \varepsilon] + 1, \varepsilon \le 1 \\ 1, \varepsilon > 1 \end{cases}$, умова $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| < \varepsilon$ буде виконуватися $\forall n \ge n_0$, що означає збіжність ряду. ■

§2 Знакопостійні ряди

1. Ознаки збіжності знакопостійних рядів (порівняння, Коші, Даламбера)

Задача 1.4. Дослідити ряди на збіжність:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$**;** **б)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(3n)!}$; **в)** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+5}{3n-5}\right)^{n^2}$; **г)** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \cdot \frac{n}{2^n}$;

Розв'язання. **а)** Застосуємо для дослідження на збіжність ряду ознаку Д'Аламбера:

$$a_n = \frac{2^n n!}{n^n};$$

$$a_{n+1} = \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} = \left\| \begin{matrix} (n+1)! = (n+1)\cdot n!; \\ (n+1)^{n+1} = (n+1)^n \cdot (n+1); \\ 2^{n+1} = 2^n \cdot 2 \end{matrix} \right\| = \frac{2^n \cdot 2 \cdot (n+1) \cdot n!}{(n+1)^n \cdot (n+1)} = \frac{2^n \cdot 2 \cdot n!}{(n+1)^n};$$

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \frac{2^n \cdot 2 \cdot n!}{(n+1)^n} \cdot \frac{n^n}{2^n n!} = \lim_n 2 \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_n \frac{2}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \lim_n \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{2}{e} = q.$$

Оскільки $q = \frac{2}{e} < 1$, то за ознакою Д'Аламбера даний ряд збігається. ■

б) Знакододатний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(3n)!}$ збігається за ознакою Д'Аламбера, оскільки

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \frac{(n+1)!}{(3n+3)!} \cdot \frac{(3n)!}{n!} = \lim_n \frac{n+1}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)} = 0 = q < 1. \quad ■$$

в) Знакододатний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+5}{3n-5}\right)^{n^2}$ збігається за радикальною ознакою Коші: $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = \lim_n \sqrt[n]{\left(\frac{2n+5}{3n-5}\right)^{n^2}} = \lim_n \left(\frac{2n+5}{3n-5}\right)^n = \left\| \left(\frac{2}{3}\right)^{+\infty} \right\| = 0 = q < 1$. ■

г) Знакододатній ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n \cdot \frac{n}{2^n}$ збігається за радикальною ознакою Коші (нагадаємо, що $\lim_n \sqrt[n]{n} = 1$) :

$$\lim_n \sqrt[n]{a_n} = \lim_n \frac{n-1}{n} \cdot \frac{\sqrt[n]{n}}{2} = \frac{1}{2} = q < 1. \quad ■$$

2. Ознаки збіжності знакопостійних рядів (Раабе, Бертрана, Гаусса, інтегральна ознака)

Задача 1.5. Дослідити ряди на збіжність:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)\ln(7n+4)}$; **б)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^4+7}}$; **в)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg} n}{n^n+n}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2 \cdot \frac{1}{n}$; **д)** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p$.

Розв'язання.

а) Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, де $a_n = \frac{1}{(3n+1)\ln(7n+4)}$ і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, де $b_n = \frac{1}{(7n+4)\ln(7n+4)}$. Для них маємо:

$$\lim_n \frac{b_n}{a_n} = \lim_n \frac{1}{(7n+4)\ln(7n+4)} \cdot \frac{(3n+1)\ln(7n+4)}{1} = \lim_n \frac{3n+1}{7n+4} = \frac{3}{7} = const \neq 0.$$

Отже, за ознакою порівняння в граничній формі ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ збігаються або розбігаються одночасно.

Дослідимо тепер ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ за допомогою інтегральної ознаки Маклорена-Коші. Для функції

$$f(x) = \frac{1}{(7x+4)\ln(7x+4)}$$

маємо:

1) $f(n) = \frac{1}{(7n+4)\ln(7n+4)} = b_n \;\; \forall n \in \mathrm{N}$;

2) $f(x)$ спадає на $[1;+\infty)$, оскільки

$\forall x_1, x_2 \in [1;+\infty)\; x_1 < x_2 \Rightarrow 7x_1 + 4 < 7x_2 + 4 \Rightarrow \ln(7x_1+4) < \ln(7x_2+4);$

$\forall x_1, x_2 \in [1;+\infty)\; x_1 < x_2 \Rightarrow (7x_1+4)\ln(7x_1+4) < (7x_2+4)\ln(7x_2+4) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{(7x_1+4)\ln(7x_1+4)} > \frac{1}{(7x_2+4)\ln(7x_2+4)} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

3) Невласний інтеграл

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(7x+4)\ln(7x+4)} = \left\| d\big(\ln(7x+4)\big) = \frac{7dx}{7x+4} \right\| =$$

$$= \frac{1}{7}\int_1^{+\infty} \frac{d\big(\ln(7x+4)\big)}{\ln(7x+4)} = \ln\left|\ln(7x+4)\right| \Big|_1^{+\infty} = +\infty$$

розбігається, тому (за інтегральною ознакою Маклорена-Коші) розбігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Отже, заданий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ також розбігається. ■

б) Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^4+7}}$. Оскільки $\forall n \in \mathrm{N}\ \forall \lambda > 0\ \ln n \le n^{\lambda}$, то для $\lambda = \frac{1}{6}$ виконується нерівність $\ln n \le n^{1/6}$. Отже,

$$\frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^4+7}} \le \frac{n^{1/6}}{n^{4/3}} = \frac{1}{n^{7/6}} \quad \forall n \in \mathrm{N}.$$

Для показника степеня знаменника $p = \frac{7}{6} > 1$ в узагальненому гармонічному ряді $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ має місце збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{7/6}}$. Тому за загальною ознакою порівняння знакододатний ряд також $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^4+7}}$ збігається. ■

в) Знакододатний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{n^n+n}$ збігається:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ a_n = \dfrac{\operatorname{arctg} n}{n^n+n} \le \dfrac{\pi/2}{n^n} = b_n \quad \forall n \in \mathrm{N}; \\ 2)\ \lim\limits_n \sqrt[n]{b_n} = \lim\limits_n \sqrt[n]{\dfrac{\pi/2}{n^n}} = \lim\limits_n \sqrt[n]{\pi/2}\cdot\dfrac{1}{n} = 1\cdot 0 = 0 = q < 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \text{ – збігається (за радикальною ознакою Коші);} \end{array}\right\} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} n}{n^n+n} - \text{зб.} \\ \text{(за загальною} \\ \text{ ознакою} \\ \text{порівняння).} \end{array}\right.$$ ■

г) Знакододатний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2 \cdot \frac{1}{n}$ збігається за ознакою Раабе:

$$a_n = \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2 \cdot \frac{1}{n}, \quad a_{n+1} = \left[\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\right]^2 \cdot \frac{1}{n+1} = \left[\frac{(2n-1)!!\cdot(2n+1)}{(2n)!!\cdot(2n+2)}\right]^2 \cdot \frac{1}{n+1},$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2 \cdot \frac{1}{n} \cdot \left[\frac{(2n)!!\cdot(2n+2)}{(2n-1)!!\cdot(2n+1)}\right]^2 \cdot (n+1) = \left[\frac{(2n+2)}{(2n+1)}\right]^2 \cdot \frac{n+1}{n};$$

$$\lim_n n\cdot\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_n n\cdot\left(\left[\frac{(2n+2)}{(2n+1)}\right]^2\cdot\frac{n+1}{n}-1\right)=$$

$$=\lim_n\frac{(2n+2)^2(n+1)-(2n+1)^2 n}{(2n+1)^2}=\lim_n\frac{8n^2+11n+4}{4n^2+4n+1}=2=r>1.\quad\blacksquare$$

д) Застосуємо до ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p$ ознаку Гаусса:

$$a_n=\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p,\quad a_{n+1}=\left(\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\right)^p=\left(\frac{(2n-1)!!\cdot(2n+1)}{(2n)!!\cdot(2n+2)}\right)^p;$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^p=\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^p=1+\frac{p}{2n+1}+\frac{p(p-1)}{2(2n+1)^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Тут ми застосували розвинення функції $(1+x)^p$ за формулою Маклорена із залишковим членом у формі Пеано. Отже,

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{\frac{p}{2}}{n+0{,}5}+\frac{1}{(n+0{,}5)^2}\left(\frac{p(p-1)}{4}+(n+0{,}5)^2 o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=1+\frac{\frac{p}{2}}{n+0{,}5}+\frac{\theta_n}{(n+0{,}5)^2},$$

де $\theta_n=\frac{p(p-1)}{4}+(n+0{,}5)^2 o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ – обмежена послідовність. Оскільки за ознакою Гаусса при $\lambda=1$ ряд збігається, коли $\mu=\frac{p}{2}>1$, заданий ряд буде збіжним при $p>2$ та розбіжним при $p\le 2$. $\blacksquare$

§3 Знакозмінні ряди

1. Ознаки збіжності знакозмінних рядів. Абсолютна та умовна збіжність знакозмінних рядів

Задача 1.6. Дослідити ряди на абсолютну та умовну збіжність:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^3+n+3}$; **б)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot\sqrt[5]{3n+1}}$; **в)** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\operatorname{arctg}2^n}{2^n}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(e^{\frac{1}{n^2}}-1\right)$; **ґ)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n!}$; **д)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot\ln^2(n+1)}$;

е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2\ln(n+1)}$; **є)** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n!)^2}{(2n)!}$; **ж)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n+4}}$;

з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2+\sin^2 n}$; **и)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \operatorname{tg}\dfrac{1}{n}$; **і)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos\pi n\cdot\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n^3}}\right)$;

к) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(3n+1)\ln(7n+4)}$; **л)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(n/3)}{\sqrt[3]{n+5}}$; **м)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n-1}{n+1}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[100]{n}}$;

н) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n\cdot\sqrt[n]{2}}$; **о)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^{n+1}}}$

Розв'язання. **а)** Розглянемо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n}{n^3+n+3}$. Маємо, що $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{(-1)^n n}{n^3+n+3}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n^3+n+3}$ та $\dfrac{n}{n^3+n+3}\overset{n\to\infty}{\sim}\dfrac{n}{n^3}=\dfrac{1}{n^2}$. Для показника степеня знаменника $p=2>1$ в узагальненому гармонічному ряді $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$ має місце збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$. Тому, за ознакою порівняння в граничній формі, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n^3+n+3}$ збігається. Отже, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n}{n^3+n+3}$ збігається абсолютно. ■

б) Оскільки $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{(-1)^{n+1}}{n\cdot\sqrt[5]{3n+1}}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\cdot\sqrt[5]{3n+1}}$ та $\dfrac{1}{n\cdot\sqrt[5]{3n+1}}\overset{n\to\infty}{\sim}\dfrac{1}{n^{6/5}}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[5]{n^6}}$ збігається як узагальнений гармонічний з показником $\dfrac{6}{5}$, заданий ряд збігається абсолютно. ■

в) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\operatorname{arctg}2^n}{2^n}$ абсолютно збігається:

$$\left.\begin{array}{l}
1)\ |a_n|=\left|(-1)^n\dfrac{\operatorname{arctg}2^n}{2^n}\right|\le\dfrac{\pi/2}{2^n}=b_n\quad\forall n\in\mathrm{N};\\[2ex]
2)\ \lim\limits_{n}\sqrt[n]{b_n}=\lim\limits_{n}\sqrt[n]{2\dfrac{\pi/2}{n^n}}=\lim\limits_{n}\sqrt[n]{\pi/2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}<1\Rightarrow\\[2ex]
\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n-\text{зб. (за радикальною ознакою Коші);}
\end{array}\right\}\Rightarrow
\left|\begin{array}{l}
\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\operatorname{arctg}2^n}{2^n}-\text{зб.}\\
\text{(за загальною ознакою}\\
\text{порівняння)}\Rightarrow\\
\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\operatorname{arctg}2^n}{2^n}-\text{абс. зб.}
\end{array}\right.$$

■

г) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(e^{\frac{1}{n^2}}-1\right)$ збігається абсолютно, оскільки при $n\to\infty$ $\left|(-1)^n\left(e^{\frac{1}{n^2}}-1\right)\right|=e^{\frac{1}{n^2}}-1\sim\frac{1}{n^2}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ збігається як узагальнений гармонічний ряд з показником $p=2$. ■

г) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n!}$ збігається абсолютно, оскільки $\left|\frac{\sin n}{n!}\right|\le\frac{1}{n!}=b_n$, а $\lim_{n}\frac{b_{n+1}}{b_n}=\lim_{n}\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{1}=\lim_{n}\frac{1}{(n+1)}=0=q<1$, тобто ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ збігається. ■

д) Дослідимо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot\ln^2(n+1)}$ на абсолютну збіжність, тобто розглянемо питання про збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln^2(n+1)}$. Оскільки $\frac{(-1)^n}{n\cdot\ln^2(n+1)}\overset{n\to\infty}{\sim}\frac{1}{(n+1)\cdot\ln^2(n+1)}$, будемо досліджувати ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\cdot\ln^2(n+1)}$.

Застосуємо інтегральну ознаку Маклорена-Коші. Для функції $f(x)=\frac{1}{(x+1)\ln^2(x+1)}$ маємо, що $f(n)=\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$ $\forall n\in\mathrm{N}$, $f(x)$ монотонно спадає на $[1;+\infty)$ (знаменник є монотонно зростаючою функцією) та

$$\int_1^{+\infty}f(x)dx=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)}=\int_1^{+\infty}\frac{d\big(\ln(x+1)\big)}{\ln^2(x+1)}=-\frac{1}{\ln(x+1)}\bigg|_1^{+\infty}=\frac{1}{\ln 2}<\infty,$$

тобто ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\cdot\ln^2(n+1)}$ збігається, що означає, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot\ln^2(n+1)}$ збігається абсолютно. ■

е) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2\ln(n+1)}$ збігається абсолютно, оскільки

$$\left|\frac{(-1)^n}{n^2\ln(n+1)}\right|\le\frac{1}{n^2\ln 2}\quad\forall n\ge 1,$$

а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ збігається. ■

є) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$ збігається абсолютно, оскільки знакододатний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$ збігається за ознакою Д'Аламбера: нехай $\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}=b_n$, тоді

$$\lim_n\frac{b_{n+1}}{b_n}=\lim_n\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2}=\lim_n\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+1)}=\frac{1}{4}=q<1.\quad\blacksquare$$

ж) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n+4}}$ абсолютно розбігається. Дійсно,

$$\left|\frac{(-1)^n\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n+4}}\right|\overset{n\to\infty}{\sim}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}=\frac{1}{n},$$

тобто ряд із модулів членів заданого ряду поводить себе як гармонічний ряд, який, як відомо, розбігається.

Покажемо, що сам ряд збігається. Нехай

$$c_n=\frac{\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n+4}}>\left\|\begin{array}{l}\frac{1}{\sqrt{n}}\in(0;1]\subset\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow\text{кут }\frac{1}{\sqrt{n}}\text{ належить}\\ \text{I чверті}\Rightarrow\sin\frac{1}{\sqrt{n}}>0;\qquad\sqrt{n+4}>0;\end{array}\right\|>0.$$

Тоді послідовність $\{c_n\}$ спадає, оскільки $\forall n\in\mathrm{N}\ \ n<n+1\quad\dfrac{1}{\sqrt{n}}>\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$, а для кута, що належить I чверті, функція $\sin x$ зростає, тобто $\sin\dfrac{1}{\sqrt{n}}>\sin\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$. Крім того, $\dfrac{1}{\sqrt{n+4}}>\dfrac{1}{\sqrt{n+5}}$, тобто $\dfrac{1}{\sqrt{n+4}}\sin\dfrac{1}{\sqrt{n}}>\dfrac{1}{\sqrt{n+5}}\sin\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ або $c_n>c_{n+1}\ \forall n\in\mathrm{N}$.

Очевидно також, що $\lim\limits_n c_n=\lim\limits_n\dfrac{\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n+4}}=0$. Отже, за ознакою Лейбніца, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n c_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n+4}}$ збігається. Оскільки цей ряд абсолютно розбігається, то він збігається умовно. $\blacksquare$

з) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+\sin^2 n}$ збігається абсолютно, оскільки $\left|\frac{(-1)^n}{n^2+\sin^2 n}\right| = \frac{1}{n^2+\sin^2 n} \le \frac{1}{n^2}$ $\forall n \in \mathrm{N}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ збігається як узагальнений гармонічний ряд з показником $p = 2$. ■

и) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \operatorname{tg}\frac{1}{n}$ абсолютно розбігається, оскільки $\left|(-1)^n \operatorname{tg}\frac{1}{n}\right| \overset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ розбігається. Покажемо, що сам ряд збігається.

Оскільки

$$c_n = \operatorname{tg}\frac{1}{n} > \left\| \begin{array}{l} \frac{1}{n} \in (0;1] \subset \left(0;\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \text{кут } \frac{1}{n} \text{ належить} \\ \text{I чверті} \Rightarrow \operatorname{tg}\frac{1}{n} > 0; \end{array} \right\| > 0,$$

ряд є знакопочережним. Застосуємо до нього ознаку Лейбница:

$$\forall n \in \mathrm{N} \quad n < n+1;$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}; \\ \text{для кута,} \\ \text{що належить I чверті,} \\ \text{функція } \sin x \text{ зростає;} \end{array}\right\} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg}\frac{1}{n} > \operatorname{tg}\frac{1}{n+1}; \\ c_n > c_{n+1} \ \forall n \in \mathrm{N} \end{array} \right. ,$$

тобто послідовність $\{c_n\}$ спадає та $\lim\limits_{n} c_n = \lim\limits_{n} \operatorname{tg}\frac{1}{n} = 0$.

Отже, за ознакою Лейбніца, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n c_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \operatorname{tg}\frac{1}{n}$ збігається. Оскільки цей ряд абсолютно розбігається, то він збігається умовно. ■

і) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos \pi n \cdot \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right)$ збігається абсолютно, оскільки за ознакою порівняння в граничній формі ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right)$ поводить себе як ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}}$, оскільки $\left|(-1)^n \cdot \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right)\right| \overset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n^{3/2}}$. А ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}}$ збігається як узагальнений гармонічний з показником $p = \frac{3}{2}$. ■

к) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{(3n+1)\ln(7n+4)}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)\ln(7n+4)}$ розбігається. Це було доведено в задачі 2.4 (д). Отже, абсолютної збіжності немає.

Даний ряд є знакопочережним, оскільки його можна подати у вигляді

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n c_n,\ \text{де}\ c_n = \frac{1}{(3n+1)\ln(7n+4)} > 0 \quad \forall n \in \mathrm{N}.$$

Застосуємо ознаку Лейбніца:

1) $c_{n+1} = \dfrac{1}{(3(n+1)+1)\ln(7(n+1)+4)} = \dfrac{1}{(3n+4)\ln(7n+11)}$;

$c_n = \dfrac{1}{(3n+1)\ln(7n+4)} > \dfrac{1}{(3n+4)\ln(7n+11)} = c_{n+1} \quad \forall n \in \mathrm{N}$,

тобто послідовність $\{c_n\}$ спадає.

2) $\lim\limits_{n} c_n = \lim\limits_{n}\dfrac{1}{(3n+1)\ln(7n+4)} = 0$.

Отже, за ознакою Лейбніца ряд збігається.

Оскільки ряд збігається, але не абсолютно, то він збігається умовно. ■

л) Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(n/3)}{\sqrt[3]{n+5}}$. Для дослідження питання про його збіжність застосуємо ознаку Діріхле. Нехай

$$b_n = \cos(n/3), \quad a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n+5}}.$$

1) Для оцінки суми косинусів або синусів кратних дуг буде застосовано нерівності (1.10) або (1.11) відповідно:

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right| \le \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}; \qquad \left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right| \le \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|} \quad (x \ne 2\pi m,\ m \in \mathrm{Z}).$$

Перша із цих нерівностей для $x = \dfrac{1}{3}$ набуває вигляду:

$$|B_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} b_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n}\cos(k/3)\right| \le \frac{1}{\left|\sin\frac{1}{6}\right|} \quad \forall n \in \mathrm{N}.$$

Звідси випливає, що $\{B_n\}$– обмежена послідовність.

2) Оскільки $a_n = \dfrac{1}{\sqrt[3]{n+5}} > a_{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{n+6}} \quad \forall n \in \mathrm{N}$, то послідовність $\{a_n\}$ спадає.

3) $\lim\limits_{n} a_n = \lim\limits_{n}\dfrac{1}{\sqrt[3]{n+5}} = 0$.

Отже, за ознакою Діріхле ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(n/3)}{\sqrt[3]{n+5}}$ – збігається.

Перевіримо тепер абсолютну збіжність заданого ряду. Має місце нерівність

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos(n/3)}{\sqrt[3]{n+5}} \right| \ge \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(n/3)}{\sqrt[3]{n+5}} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+5}} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n/3)}{\sqrt[3]{n+5}}. \qquad (1.15)$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[3]{n+5}}$ розбігається, оскільки поводить себе як узагальнений гармонічний ряд з показником $p = \dfrac{1}{3}$. До ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(2n/3)}{\sqrt[3]{n+5}}$ застосуємо ознаку Діріхле:

$$\left.\begin{array}{l} b_k = \cos\dfrac{2k}{3}, \ a_k = \dfrac{1}{\sqrt[3]{k+5}}; \\ \text{1) } |B_n| = \left|\sum\limits_{k=1}^{n} b_k\right| = \left|\sum\limits_{k=1}^{n} \cos\dfrac{2k}{3}\right| \le \dfrac{1}{\left|\sin\dfrac{1}{3}\right|} \Rightarrow \{B_n\} - \text{обм.}; \\ 2\ \{a_n\} \text{ спадає; } \ 3) \lim\limits_{n} a_n = 0; \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n/3)}{\sqrt[3]{n+5}} - \text{зб.}$$

Оскільки ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[3]{n+5}}$ розбігається, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(2n/3)}{\sqrt[3]{n+5}}$ збігається, то із нерівності (1.15) випливає, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(n/3)}{\sqrt[3]{n+5}}$ абсолютно розбігається. В наслідок збіжності цього ряду матимемо його умовну збіжність. ■

м) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{n-1}{n+1} \cdot \dfrac{1}{\sqrt[100]{n}}$ абсолютно розбігається, оскільки

$$\left| (-1)^n \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt[100]{n}} \right| \overset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt[100]{n}},$$

а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[100]{n}}$ розбігається як узагальнений гармонічний ряд з показником $p = \dfrac{1}{100} < 1$.

Для дослідження на збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{n-1}{n+1} \cdot \dfrac{1}{\sqrt[100]{n}}$ застосуємо ознаку Абеля. Нехай

$$b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt[100]{n}}, \quad a_n = \frac{n-1}{n+1}.$$

Оскільки $0 \le a_n = \dfrac{n-1}{n+1} < 1 \ \forall n \in \mathrm{N}$, то послідовність $\{a_n\}-$ обмежена. Покажемо, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ збігається за ознакою Лейбніца. Дійсно, це знакопочережний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt[100]{n}}$, в якому послідовність $\left\{\dfrac{1}{\sqrt[100]{n}}\right\}$ монотонно спадає та $\lim\limits_{n} \dfrac{1}{\sqrt[100]{n}} = 0$.

Отже, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{n-1}{n+1} \cdot \dfrac{1}{\sqrt[100]{n}} -$ збігається. Внаслідок його не абсолютної збіжності матимемо висновок про умовну збіжність даного ряду. ■

н) Розглянемо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{n \cdot \sqrt[n]{2}}$. Оскільки $\lim\limits_{n} \dfrac{1}{\sqrt[n]{2}} = 1$, $\left|(-1)^n \dfrac{1}{n \cdot \sqrt[n]{2}}\right| \sim \dfrac{1}{n}$,

то ряд поводить себе як розбіжний гармонічний ряд, тобто розбігається.

Для дослідження на збіжність застосуємо ознаку Абеля:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n}, \quad b_n = \frac{1}{\sqrt[n]{2}};$$

1) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$ збігається за ознакою Лейбніца (див приклад 1.8);

2) оскільки $b_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{1/n} < b_{n+1} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{1/(n+1)} \ \forall n \in \mathrm{N}$, то послідовність $\{b_n\}$ спадає;

3) оскільки $0 < b_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{1/n} < 1 \ \forall n \in \mathrm{N}$, то послідовність $\{b_n\}-$ обмежена.

Отже, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{n \cdot \sqrt[n]{2}} -$ збігається. Внаслідок його абсолютної збіжності, матимемо висновок про умовну збіжність цього ряду. ■

о) Подамо загальний член ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^{n+1}}}$ у вигляді:

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^{n+1}}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}}}.$$

Застосуємо розвинення за формулою Маклорена

$$(1+t)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}t + o(t)$$

для $t = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$, отримаємо:

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^{n+1}}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cdot \left(1 - \frac{(-1)^{n+1}}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right);$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^{n+1}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} + \sum_{n=1}^{\infty} o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right).$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ збігається за ознакою Лейбница, оскільки послідовність $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right\}$ монотонно спадає до нуля. Але абсолютно цей ряд не збігається, оскільки це узагальнений гармонічний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ з показником $p = \dfrac{1}{2} \le 1$. Отже, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ збігається умовно.

Знакододатний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$ збігається як узагальнений гармонічний з показником степеня знаменника $p = \dfrac{3}{2} > 1$.

Розглянемо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} o\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$. Застосуємо ознаку порівняння:

$$\exists n_0 \in \mathrm{N}\ \forall n \ge n_0 \quad \left| o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \right| \le \frac{1}{n\sqrt{n}}.$$

Оскільки ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$ збігається як узагальнений гармонічний з показником $p = \dfrac{3}{2} > 1$ та скінченна кількість членів не впливає на збіжність ряду, то і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} o\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ абсолютно збігається.

Отже, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^{n+1}}} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}_{\substack{\text{умовно} \\ \text{збіжний}}} + \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}}_{\substack{\text{знакододатний} \\ \text{збіжний}}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)}_{\substack{\text{абсолютно} \\ \text{збіжний}}}$$

є умовно збіжним. ■

§4 Властивості числових рядів

1. Асоціативна та комутативна властивості числових рядів

Задача 1.7. Показати, що $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\ln 2$, та знайти суми рядів, що утворюються із даного в результаті переставлення його членів:

а) $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\ldots;$

б) ✍ $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\ldots.$

Розв'язання.

Етап 1. Доведемо спочатку, що ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} \tag{1.16}$$

збігається до числа $\ln 2$.

Розглянемо формулу Маклорена для функції $f(x)=\ln(1+x)$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+r_n(x)$$

із залишковим членом у формі Лагранжа

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\Theta x)}{(n+1)!}\cdot x^{n+1} \quad (0<\Theta<1).$$

Оскільки $(\ln x)^{(n)}=\frac{(-1)^{n+1}\cdot(n-1)!}{x^n}$ ($x>0$), то $f^{(n+1)}(\Theta x)=\frac{(-1)^n\cdot n!}{(1+\Theta x)^{n+1}}$. Отже,

$$r_n(x)=\frac{(-1)^n\cdot n!}{(1+\Theta x)^{n+1}}\cdot\frac{x^{n+1}}{(n+1)!},$$

$$|r_n(x)|=\frac{|x|^{n+1}}{|1+\Theta x|^{n+1}\cdot(n+1)}.$$

При $x=1$

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}+r_n(1),$$

$$|r_n(1)|=\frac{1}{(1+\Theta)^{n+1}\cdot(n+1)}\le\frac{1}{(n+1)}.$$

Звідси

$$\left|\left[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right]-\ln 2\right|\le\frac{1}{n+1}.$$

Позначаючи через S_n n-у часткову суму ряду (1.16), ми можемо переписати останню нерівність у вигляді:

$$\left|S_n - \ln 2\right| \le \frac{1}{n+1}. \qquad (1.17)$$

Із (1.17) випливає, що $\{S_n - \ln 2\}$ є нескінченно малою послідовністю. Це і доводить збіжність ряду (1.16) до числа $\ln 2$.

Етап 2. Запишемо ряд (1.16) у вигляді

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)+\ldots\ .$$

m-і часткові суми такого перегрупованого ряду відповідають $2m$-им частковим сумам ряду (1.16) і

$$S_{2m} = \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2m-1}-\frac{1}{2m}\right) = \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right).$$

а) Доведемо, що ряд

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\ldots, \qquad (1.18)$$

отриманий в результаті переставлення членів ряду (1.16), збігається і має суму, вдвічі меншу, ніж ряд (1.16). Будемо позначати m-і часткові суми ряду (1.18) символом S'_m. Можемо записати:

$$S'_{3m} = \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right) = \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right) = \frac{1}{2}S_{2m}.$$

Отже,

$$S'_{3m} = \frac{1}{2}S_{2m}.$$

Далі, очевидно, що

$$S'_{3m-1} = \frac{1}{2}S_{2m} + \frac{1}{4m},$$

$$S'_{3m-2} = \frac{1}{2}S_{2m} + \frac{1}{4m} + \frac{1}{4m-2}.$$

Знаючи, що

$$\lim_{m} S'_{3m} = \frac{1}{2}\lim_{m} S_{2m} = \frac{1}{2}\ln 2,$$

$$\lim_{m} S'_{3m-1} = \lim_{m}\left[\frac{1}{2}S_{2m} + \frac{1}{4m}\right] = \frac{1}{2}\ln 2,$$

$$\lim_{m} S'_{3m-2} = \lim_{m}\left[\frac{1}{2}S_{2m} + \frac{1}{4m} + \frac{1}{4m-2}\right] = \frac{1}{2}\ln 2,$$

можна дійти висновку, що ряд (1.18) збігається і має суму, яка дорівнює $\frac{1}{2}\ln 2$.

■

Задача 1.8. Довести наступне твердження: якщо члени ряду $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$ переставити так, щоб групу p послідовних додатних членів змінювала група q послідовних від'ємних членів, тоді сума нового ряду буде дорівнювати $\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}$.

Розв'язання. Розглянемо допоміжний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln\frac{n+1}{n}\right). \tag{1.19}$$

Оскільки $\ln\frac{n+1}{n}=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\le\frac{1}{n}$, цей ряд є знакододатним. Покажемо, що він збігається. Дійсно, застосовуючи формулу Маклорена, отримаємо загальний член ряду у наступному вигляді:

$$\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Це означає, що $\frac{1}{n}-\ln\frac{n+1}{n}\sim\frac{1}{n^2}$, тобто ряд (1.19) поводить себе однаково з рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, який збігається.

Знайдемо часткову суму ряду (1.19):

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\left(\ln(k+1)-\ln k\right)=$$
$$=H_n-\left(\ln 2+\ln 3-\ln 2+\ln 4-\ln 3+\ldots+\ln(n+1)-\ln n\right)=H_n-\ln(n+1),$$

де $H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ – часткова сума гармонічного ряду. Оскільки ряд (1.19) збігається, його часткова сума має границю, тобто існує $\lim_{n} S_n=\lim_{n}\left(H_n-\ln(n+1)\right)=C$. Константа C носить назву константи Ейлера. Це означає, що $H_n=C+\ln(n+1)+\alpha_n$, де $\{\alpha_n\}$ – деяка нескінченно мала послідовність. Перепишемо останній вираз у іншому вигляді:

$$H_n=C+\ln n+\ln(n+1)-\ln n+\alpha_n=C+\ln n+\ln\frac{n+1}{n}+\alpha_n=C+\ln n+\gamma_n,$$

де $\ln\frac{n+1}{n}+\alpha_n=\gamma_n$ – нескінченно мала послідовність.

Отже, має місце наступна формула:

$$H_n=C+\ln n+\gamma_n. \tag{1.20}$$

де C – константа Ейлера, а $\{\gamma_n\}$ – деяка нескінченно мала послідовність.

З формули (1.20) отримаємо, що:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2m}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{m}\right)=\frac{1}{2}H_m=\frac{1}{2}(C+\ln m+\gamma_m),$$

$$1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2k-1}=\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2k}\right)-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{k}\right)=H_{2k}-\frac{1}{2}H_k=$$

$$=C+\ln 2k+\gamma_{2k}-\frac{1}{2}(C+\ln k+\gamma_k)=\frac{C}{2}+\ln 2+\frac{1}{2}\ln k+\gamma_{2k}-\frac{1}{2}\gamma_k.$$

Переставимо члени ряду Лейбница так, як описано в умові, та для зручності об'єднаємо у групи члени одного знаку:

$$\left(1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2p-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2q}\right)+\left(\frac{1}{2p+1}+\ldots+\frac{1}{4p-1}\right)-\left(\frac{1}{2q+2}+\ldots+\frac{1}{4q}\right)+\ldots$$

Знайдемо часткові суми цього ряду, які містять такі групи цілком:

$$S'_{2n}=S'_{n(p+q)}=\left(1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2p-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2q}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2(n-1)p+1}+\ldots+\frac{1}{2np-1}\right)-$$

$$-\left(\frac{1}{2(n-1)q+2}+\ldots+\frac{1}{2nq}\right)=\left(1+\ldots+\frac{1}{2np-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2nq}\right)=\frac{C}{2}+\ln 2+\frac{1}{2}\ln np+$$

$$+\gamma_{2np}-\frac{1}{2}\gamma_{np}-\frac{C}{2}-\frac{1}{2}\ln nq-\gamma_{nq}=\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}+\underbrace{\gamma_{2np}-\frac{1}{2}\gamma_{np}-\gamma_{nq}}_{\gamma'_n};$$

$$S'_{2n-1}=S'_{np+(n-1)q}=\left(1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2p-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2q}\right)+\ldots-$$

$$-\left(\frac{1}{2(n-2)q+2}+\ldots+\frac{1}{2(n-1)q}\right)+\left(\frac{1}{2(n-1)p+1}+\ldots+\frac{1}{2np-1}\right)=\left(1+\ldots+\frac{1}{2np-1}\right)-$$

$$-\left(\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2(n-1)q}\right)=\frac{C}{2}+\ln 2+\frac{1}{2}\ln np+\gamma_{2np}-\frac{1}{2}\gamma_{np}-\frac{C}{2}-\frac{1}{2}\ln(n-1)q-\gamma_{(n-1)q}=$$

$$=\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{np}{(n-1)q}+\underbrace{\gamma_{2np}-\frac{1}{2}\gamma_{np}-\gamma_{(n-1)q}}_{\gamma''_n}.$$

Очевидно, що

$$\lim_n\left(\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}+\gamma'_n\right)=\lim_n\left(\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{np}{(n-1)q}+\gamma''_n\right)=\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}.$$

Інші часткові суми переставленого ряду будуть розташовані між обчисленими вище сумами $S'_{n(p+q)}$ та $S'_{np+(n-1)q}$ за рахунок того, що в кожній групі (дужці) містяться доданки одного знаку: якщо $\forall n\in N$ $np+(n-1)q\le i\le n(p+q)$, тоді $S'_{np+(n-1)q}\ge S'_i\ge S'_{n(p+q)}$; якщо $\forall n\in N$ $n(p+q)\le i\le(n+1)p+nq$, тоді $S'_{n(p+q)}\le S'_i\le S'_{(n+1)p+nq}$. Це означає, що

$$\lim_i S'_i = \lim_n S'_{n(p+q)} = \lim_n S'_{np+(n-1)q} = \lim_n S'_{(n+1)p+nq} = \ln 2 + \frac{1}{2}\ln\frac{p}{q},$$

тобто сума переставленого ряду дорівнює $\ln 2 + \frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}$. ■

Задача 1.9. Члени збіжного ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ переставити так, щоб він став розбіжним.

Розв'язання. Розглянемо, наприклад, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{11}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots + \\ + \frac{1}{\sqrt{6n-5}} + \frac{1}{\sqrt{6n-3}} + \frac{1}{\sqrt{6n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} + \ldots \ . \qquad (1.21)$$

Цей ряд отримано із заданого ряду за допомогою такого переставлення: за трьома додатними членами стоїть один від'ємний.

Покажемо, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбігається. Для цього розглянемо перегрупований ряд

$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{11}} - \frac{1}{\sqrt{4}}\right) + \ldots + \\ + \left(\frac{1}{\sqrt{6n-5}} + \frac{1}{\sqrt{6n-3}} + \frac{1}{\sqrt{6n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}}\right) + \ldots = \\ = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{6n-5}} + \frac{1}{\sqrt{6n-3}} + \frac{1}{\sqrt{6n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \ .$$

У силу нерівності

$$\frac{1}{\sqrt{6n-3}} + \frac{1}{\sqrt{6n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} > \frac{2}{\sqrt{6n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} > 0,$$

маємо оцінку загального члена ряду $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$:

$$x_n > \frac{1}{\sqrt{6n-5}}.$$

Оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{6n-5}}$ розбігається, то (за ознакою порівняння) розбігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Часткові суми рядів $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ позначимо відповідно A_n і X_n. Оскільки

$$X_m = A_{4m} \ \forall m \in \mathrm{N}, \ \lim_m X_m = \infty,$$

то послідовність $\{A_n\}$ містить розбіжну підпослідовність, отже, є розбіжною. Отримане означає розбіжність ряду (1.21). ■

Задача 1.10. Знайти суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{4\pi n}{3}}{3^n}$.

Розв'язання. Оскільки

$$\cos\frac{4\pi n}{3}=\cos\left(\pi n+\frac{\pi n}{3}\right)=(-1)^n\cos\frac{\pi n}{3}=\begin{cases}-\frac{1}{2}, n\neq 3k, k\in N\\ 1, n=3k, k\in N\end{cases},$$

а ряди $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{3n}}$, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^{3n+1}}$ та $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^{3n+2}}$ збігаються, заданий ряд можна подати у вигляді:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{4\pi n}{3}}{3^n}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}\right)+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3^4}+\frac{1}{3^5}\right)+\frac{1}{3^6}-...=-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^{3k+1}}-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^{3k+2}}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3^{3k}}=-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^{3k+1}}-\frac{1}{6}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^{3k+1}}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3^{3k}}=-\frac{2}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^{3k+1}}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3^{3k}}=-\frac{2}{3}\cdot\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{27}}+$$

$$+\frac{\frac{1}{27}}{1-\frac{1}{27}}=-\frac{3}{13}+\frac{1}{26}=-\frac{5}{26}.\quad ■$$

2. Арифметичні операції над числовими рядами

Задача 1.11. Довести, що $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}=1$.

Розв'язання. Зауважимо, що ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ збігається за ознакою Д'Аламбера,

оскільки $\lim\limits_{n}\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\lim\limits_{n}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim\limits_{n}\frac{1}{n!}=0<1$. Це означає, що ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}$ збігається абсолютно. Згідно з теоремою 1.24, для знаходження добутку двох абсолютно збіжних рядів можна підсумовувати почленні добутки у будь-якому порядку: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}=1+\sum_{n=2}^{\infty}w_n$, де $w_n=\sum_{k=1}^{n}a_k\cdot b_{n+1-k}$,

$a_k=\frac{1}{(k-1)!}, b_i=\frac{(-1)^{i-1}}{(i-1)!}$. Отже,

$$w_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_{n+1-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} \cdot \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} = (-1)^n \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{(k-1)!(n-k)!} =$$

$$= (-1)^n \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{C_{n-1}^{k-1}(-1)^k}{(n-1)!} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1}(-1)^{k-1} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \left(1-1\right)^{n-1} = 0.$$

Отже, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1$, що й потрібно було довести. ■

Задача 1.12. Показати, що квадрат збіжного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ є розбіжним рядом.

Розв'язання. Зауважимо, що заданий ряд збігається умовно. Помножимо цей ряд на себе: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n$, де

$$w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}} \cdot \frac{(-1)^{n+2-k}}{\sqrt{n+1-k}} = (-1)^{n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k} \cdot \sqrt{n+1-k}}.$$

Оскільки $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k} \cdot \sqrt{n+1-k}} \geq \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n}} = \frac{n}{n} = 1$, $w_n \not\to 0$, тобто для ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n$ не виконується необхідна умова збіжності і ряд розбігається. ■

Задача 1.13. Показати, що $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n \right)^2 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1) q^n$ за умови $|q| < 1$.

Розв'язання. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ збігається абсолютно. Помножимо його на себе:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n \right)^2 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} w_n, \text{ де } w_n = \sum_{k=0}^{n} q^k \cdot q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} q^n = (n+1) \cdot q^n.$$

Отже, $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n \right)^2 = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (n+1) \cdot q^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1) q^n$. ■

§5. Нескінченні добутки

2. Нескінчені добутки. Дослідження добутків на збіжність

Задача 1.14. Довести наступні рівності:

а) $\prod\limits_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) = \frac{1}{2}$; **б)** $\prod\limits_{n=0}^{\infty} \left(1 + x^{2n} \right) = \frac{2}{1 - x^2}, |x| < 1$; **в)** $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n(n+2)} \right) = 2$.

Розв'язання.

а) Обчислимо нескінченний добуток за означенням. Для цього знайдемо частковий добуток:

$$P_n=\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2-1}{k^2}=\prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}=\frac{(n-1)!\cdot(n+1)!}{2\cdot n!\cdot n!}=\frac{n+1}{2n}.$$

Отже,

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\lim_{n}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}.\quad\blacksquare$$

б) Нехай

$$P_n=\prod_{k=0}^{n}\left(1+x^{2k}\right)=2\cdot\left(1+x^2\right)\cdot\left(1+x^4\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+x^{2n}\right).$$

Помножимо обидві частини цієї рівності на $\left(1-x^2\right)$:

$$\left(1-x^2\right)P_n=2\cdot\left(1-x^2\right)\cdot\left(1+x^2\right)\cdot\left(1+x^4\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+x^{2n}\right)=2\cdot\left(1-x^4\right)\cdot\left(1+x^4\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+x^{2n}\right)=$$

$$=2\cdot\left(1-x^8\right)\cdot\left(1+x^8\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+x^{2n}\right)=2\cdot\left(1-x^{4n}\right).$$

Отже, враховуючи, що $|x|<1$,

$$P_n=\lim_{n}\frac{2\left(1-x^{4n}\right)}{1-x^2}=\frac{2}{1-x^2}.\quad\blacksquare$$

в) Знайдемо частковий добуток:

$$P_n=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k(k+2)}\right)=\prod_{k=1}^{n}\frac{k^2+2k+1}{k(k+2)}=\prod_{k=1}^{n}\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}=\frac{((n+1)!)^2\cdot 2}{n!(n+2)!}=\frac{2\cdot(n+1)}{(n+2)}.$$

Отже,

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)=\lim_{n}\frac{2(n+1)}{n+2}=2.\quad\blacksquare$$

Задача 1.15.

Довести збіжність та знайти значення наступних нескінченних добутків:

$$\textbf{а)}\ \prod_{n=3}^{\infty}\frac{n^2-4}{n^2-1};\qquad\qquad \textbf{б)}\ \prod_{n=1}^{\infty}a^{\frac{(-1)^n}{n}}.$$

Розв'язання. **а)** Доведемо збіжність добутку за означенням. Для цього знайдемо частковий добуток:

$$P_n=\prod_{k=3}^{n}\left(\frac{k^2-4}{k^2-1}\right)=\prod_{k=3}^{n}\frac{(k-2)(k+2)}{(k-1)(k+1)}=\frac{(n-2)!\cdot(n+2)!\cdot 3!}{4!\cdot(n-1)!\cdot(n+1)!}=\frac{n+2}{4(n-1)}.$$

(✍ Довести за допомогою принципу математичної індукції за зразком на ст. 42)

Оскільки послідовність $\{P_n\}$ є збіжною, заданий нескінченний добуток збігається та дорівнює

$$\prod_{n=3}^{\infty}\frac{n^2-4}{n^2-1}=\lim_{n}\frac{n+2}{4(n-1)}=\frac{1}{4}.\quad\blacksquare$$

б) Знову знайдемо частковий добуток:

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} a^{\frac{(-1)^n}{n}} = a^{-1} \cdot a^{\frac{1}{2}} \cdot \ldots \cdot a^{\frac{(-1)^n}{n}} = a^{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}} = a^{-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}}.$$

Оскільки ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$ збігається до $\ln 2$, послідовність $\{P_n\}$ також є збіжною, завдяки неперервності показникової функції :

$$\lim_n P_n = \lim_n a^{-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}} = a^{-\lim\limits_n \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}} = a^{-\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}} = a^{-\ln 2}.$$

Це означає збіжність заданого нескінченного добутку до числа $a^{-\ln 2}$. ■

Задача 1.16. Дослідити нескінченні добутки на збіжність:

а) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$; **б)** $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^p$; **в)** $\prod\limits_{n=0}^{\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}$; г) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^n}{2^n}\right)$;

г) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}$; **д)** $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)\cdot e^{-\frac{x}{n}}$; **е)** $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\right)^p$; **є)** $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{\ln(n+x)-\ln n}$.

Розв'язання.

а) Перевіримо необхідну умову збіжності нескінченного добутку: $\lim\limits_n \frac{1}{n^2} = 0 \neq 1$. Оскільки необхідна умова не виконується, заданий нескінченний добуток розбігається. ■

б) Зауважимо, що необхідна умова збіжності нескінченного добутку виконується при будь-якому значенні p: $\lim\limits_n \left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^p = 1$. Згідно з теоремою 1.27, даний добуток збігається одночасно з числовим рядом

$$\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^p = p\cdot\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right) = p\cdot\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1-\frac{2}{n^2+1}\right).$$

Зауважимо, що отриманий ряд є знаковід'ємним і його збіжність не залежить від значення параметра p. Цей ряд, в свою чергу, збігається одночасно із знакододатним рядом $-\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\left(1-\frac{2}{n^2+1}\right)$, який, за ознакою порівняння в граничній формі, поводить себе як ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, оскільки $-\ln\left(1-\frac{2}{n^2+1}\right) \sim \frac{1}{n^2}$. Оскільки ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ збігається, збіжним буде і ряд $p\cdot\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\left(1-\frac{2}{n^2+1}\right)$ $\forall p$, тобто при всіх значеннях p збігається нескінченний добуток $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^p$. ■

в) Застосуємо теорему 1.27 для дослідження добутку на збіжність, тобто дослідимо на збіжність числовий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \ln \sqrt{\frac{n+1}{n+2}} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right) = -\frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} - \ln\left(1 - \frac{1}{n+2}\right).$$

Оскільки $-\ln\left(1-\frac{1}{n+2}\right) \sim \frac{1}{n}$, за ознакою порівняння в граничній формі, ряд $-\frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} - \ln\left(1-\frac{1}{n+2}\right)$ поводить себе як гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, тобто розбігається до $+\infty$. Отже, нескінченний добуток $\prod_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n+2}}$ розбігається до нуля. ■

г) Спочатку перевіримо виконання необхідної умови збіжності: $\lim\limits_{n}\left(1+\frac{x^n}{2^n}\right) = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{n}\left(\frac{x^n}{2^n}\right) = 0 \Leftrightarrow \left|\frac{x}{2}\right| < 1 \Leftrightarrow |x| < 2$. Отже, будемо розглядати лише такі значення x. Згідно з теоремою 1.27, заданий добуток збігається одночасно з числовим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\left(\frac{x}{2}\right)^n\right)$. Покажемо, що цей ряд збігається абсолютно.

Дійсно, $\left|\ln\left(1+\left(\frac{x}{2}\right)^n\right)\right| \sim \left(\frac{|x|}{2}\right)^n$, а за умови $\left|\frac{x}{2}\right| < 1$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{|x|}{2}\right)^n$ збігається.

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\left(\frac{x}{2}\right)^n\right)$ збігається абсолютно при $|x| < 2$, тобто заданий нескінченний добуток збігається при $|x| < 2$. ■

г) Знову застосуємо теорему 1.27 для дослідження добутку на збіжність, тобто дослідимо на збіжність числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \sqrt[n]{1+\frac{1}{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Оскільки $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$, за ознакою порівняння в граничній формі, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ поводить себе як ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, тобто збігається. Отже, нескінченний добуток $\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}$ також збігається. ■

д) Оскільки $\lim\limits_{n} \frac{x}{n} = 0$ при всіх x, $\lim\limits_{n}\left(1+\frac{x}{n}\right) \cdot e^{-\frac{x}{n}} = 1$, тобто необхідна умова збіжності виконується. Згідно з теоремою 1.27, заданий добуток збігається одночасно з числовим рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)\cdot e^{-\frac{x}{n}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)+\ln e^{-\frac{x}{n}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)-\frac{x}{n}\right).$$

Для застосування ознаки порівняння в граничній формі розкладемо загальний член цього ряду за формулою Маклорена:

$$\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)-\frac{x}{n}=\frac{x}{n}-\frac{x^2}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)-\frac{x}{n}=-\frac{x^2}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Це розвинення дає можливість подати ряд у вигляді

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)-\frac{x}{n}\right)=-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),$$

що означає, що цей ряд поводить себе як $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, тобто збігається при будь-якому значенні x. Отже, нескінченний добуток $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)\cdot e^{-\frac{x}{n}}$ також збігається при всіх значеннях x. ■

е) Для дослідження добутку на збіжність порівняємо його з числовим рядом:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\right)^p=p\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\right)=p\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{\frac{x}{n}-\frac{x^3}{3!n^3}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)}{\frac{x}{n}}\right)=$$

$$=p\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{x^2}{3!n^2}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)=p\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{x^2}{6n^2}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)=-p\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{6n^2}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right).$$

Тут ми використовували розвинення за формулою Маклорена функцій $\sin x$ та $\ln(1+x)$. Оскільки $\frac{x^2}{6n^2}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\sim\frac{1}{n^2}$ при всіх значеннях x, за ознакою порівняння в граничній формі, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\right)^p$ поводить себе як ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, тобто збігається. Отже, заданий нескінченний добуток також збігається при всіх значеннях x та p. ■

є) Зрозуміло, що можна розглядати лише додатні x, інакше вираз, що стоїть під знаком кореня, буде від'ємним. Для дослідження добутку на збіжність порівняємо його з числовим рядом:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\sqrt[n]{\ln(n+x)-\ln n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\ln\left(\ln(n+x)-\ln n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\ln\left(\ln\frac{n+x}{n}\right)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\ln\left(\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\ln\left(\frac{x}{n}-\frac{x^2}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\ln\left(\frac{x}{n}\left(1-\frac{x}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\left(\ln\left(\frac{x}{n}\right)+\ln\left(1-\frac{x}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\left(\ln\left(\frac{x}{n}\right)-\frac{x}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\ln\frac{x}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n^2}+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}o\left(\frac{1}{n^2}\right)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\ln n-\ln x\right)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Серед отриманих трьох рядів останні два збігаються: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n^2}$ – узагальнений гармонічний ряд з показником 2, а для ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ застосуємо ознаку порівняння: $\exists n_0\in\mathrm{N}\ \forall n\geq n_0\ \left|o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right|\leq\frac{1}{n^2}$. Оскільки ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ збігається та скінченна кількість членів не впливає на збіжність ряду, то і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ абсолютно збігається.

Покажемо, що перший ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\ln n-\ln x\right)$ розбігається. Оскільки $\frac{\ln n-\ln x}{n}\sim\frac{\ln n}{n}$ при $n\to\infty$, цей ряд поводить себе, як ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$. Для дослідження цього ряду застосуємо інтегральну ознаку Маклорена-Коші. Для функції $f(t)=\frac{\ln t}{t}$ маємо, що $f(n)=\frac{\ln n}{n}\ \ \forall n\in\mathrm{N}$, $f(t)$ спадає на $[3;+\infty)$; оскільки $f'(t)=\frac{1-\ln t}{t^2}<0$ та невласний інтеграл

$$\int_1^{+\infty}f(t)dt=\int_1^{+\infty}\frac{\ln t dt}{t}=\int_1^{+\infty}\ln t d\ln t=\frac{1}{2}\ln^2 t\ \Big|_1^{+\infty}=+\infty$$

розбігається, тому (за інтегральною ознакою Маклорена-Коші) розбігається ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$. Отже, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\ln n-\ln x\right)$ також розбігається. А це означає, що й ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(\sqrt[n]{\ln(n+x)-\ln n}\right)$ є розбіжним при всіх значеннях $x>0$, тобто заданий нескінченний добуток також е розбіжним. ■

Задача 1.17. Дослідити нескінченні добутки на абсолютну і умовну збіжність:

а) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^p}\right)$; **б)** $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

Розв'язання. **а)** З теореми 1.28 випливає, що добуток $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^p}\right)$ абсолютно збігається тоді та лише тоді, коли абсолютно збігається ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^p}$, тобто тоді та лише тоді, коли збігається ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$. Оскільки це узагальнений гармонічний ряд, відомо, що він збігається при $p>1$.

Вирішимо тепер питання про умовну збіжність нескінченного добутку. З теореми 1.29 відомо, що якщо збігаються ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ та $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{2p}}$, тоді збігається заданий нескінченний добуток. Ці два ряди одночасно збігаються при $2p>1$, тобто при $\dfrac{1}{2}<p\le 1$ нескінченний добуток збігається умовно.

У випадку $0<p\le\dfrac{1}{2}$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ збігається, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{2p}}$ розбігається, тобто, згідно з зауваженням 1.10, заданий нескінченний добуток розбігається. У випадку $p\le 0$ добуток також розбігається, тому що не виконується необхідна умова збіжності. ■

б) Подамо нескінченний добуток у вигляді

$$\prod_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+(-1)^n}=\prod_{n=2}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}\left(\sqrt{n}-(-1)^n\right)}{\left(\sqrt{n}+(-1)^n\right)\left(\sqrt{n}-(-1)^n\right)}\right)=\prod_{n=2}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}\left(\sqrt{n}-(-1)^n\right)}{n-1}\right).$$

Для перевірки збіжності такого добутку потрібно досліджувати збіжність ряду $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}\left(\sqrt{n}-(-1)^n\right)}{n-1}$. Цей ряд розбігається, оскільки подається у вигляді суми:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\left(\sqrt{n}-(-1)^n\right)}{n-1}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sqrt{n}}{n-1}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}.$$

Перший ряд в цій сумі – це знакопочережний ряд. Він збігається за ознакою Лейбница, оскільки послідовність $\dfrac{\sqrt{n}}{n-1}\to 0$ при $n\to\infty$ та є спадною (перевірити цей факт самостійно ✍!), а ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n-1}$ розбігається як гармонічний ряд. ■

1.3 ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ВИКОНАННЯ

Завдання 1.1 Користуючись означенням, знайти суму числового ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Обчислити часткову суму S_n для $n=10$, 100. У кожному випадку знайти абсолютну похибку Δ_n та відносну похибку δ_n наближеної рівності $S \approx S_n$.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{8}{4n^2+4n-15}$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9n^2+12n-5}$
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9n^2+6n-8}$
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{9n^2+21n-8}$
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2+8n+3}$
6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2-28n-45}$
7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2-14n-48}$
8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{6}{36n^2-24n-5}$
9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5}{25n^2+5n-6}$
10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3}{9n^2+3n-2}$
11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2-7n-12}$
12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5}{4n^2-12n-7}$
13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4}{4n^2+4n-3}$
14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3}{4n^2+8n-5}$
15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{9n^2+6n-8}$
16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{18}{49n^2+28n-45}$
17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5}{36n^2+36n-27}$
18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{7}{4n^2-12n+5}$
19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-8n-5}$
20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{6}{25n^2+5n-6}$
21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5}{4n^2+4n-3}$
22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9n^2-6n-8}$
23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9n^2-12n-5}$
24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{9n^2+15n-14}$
25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4}{4n^2+4n-3}$
26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2+21n-10}$
27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2+35n-6}$
28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3}{18n^2-6n-4}$
29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{10}{25n^2+10n-24}$
30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{12}{9n^2+24n-20}$
31. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2+28n-45}$
32. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5}{8n^2+8n-6}$
33. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{8}{16n^2+8n-15}$
34. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n^2+3n+2}$
35. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3}{9n^2+15n-14}$
36. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{9}{49n^2+7n-12}$
37. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{10}{12n^2+12n-9}$
38. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{7}{8n^2-16n+6}$
39. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3}{8n^2-16n-10}$
40. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{15}{25n^2+5n-6}$

Завдання 1.2 Перевірити виконання необхідної умови збіжності. Зробити висновки.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\sqrt{9n^2+5}}{3n^2-1}$ 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{3n+2}\right)^n$ 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\ln\left(\frac{5n}{5n+1}\right)$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+3}\right)^n$ 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}-e^2}{5n+1}$ 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{n}+5\right)^2}{3n-2}$

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^3\sin\left(\frac{1}{n^3}\right)$ 8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(3n+\sqrt[4]{n}\right)^2}{3n^8+4}$ 9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{n}+\sqrt[3]{n+1}\right)^2}{n+3}$

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(3+\frac{1}{n^2}\right)$ 11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)$ 12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\sqrt{n}+9}{3\sqrt[3]{n}+4}$

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\sin\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}\right)$ 14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\sin\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\right)$ 15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\left(1-\cos\frac{\sqrt{2}}{n}\right)$

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[5]{n}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)$ 17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)^2$ 18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n+1}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)$

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{n+\cos\left(3^n\right)}$ 20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{n}+\sin\left(2^n\right)}$ 21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{n^2+2}{(n+2)(n+5)}\right)$

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{10^n-2}{9^n+8}$ 23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{2n^2}{\sqrt{2}n\left(\sqrt{2}n+9\right)}\right)$ 24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n+3}{5^n+6}$

25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\ln n}$ 26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^3\,\mathrm{tg}^3\left(\frac{2}{n}\right)$ 27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\,\mathrm{tg}^2\left(\frac{1}{n}\right)$

28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{n}+1\right)^3}{n+\sqrt{n}}$ 29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^4+5}{n^4+2}\right)^n$ 30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{n}+9\right)^2}{3n-\sqrt{n}}$

31. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi n^4}{n^4+1}\right)$ 32. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{0{,}0007}$ 33. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{arctg}\left(\frac{4-\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1}\right)$

34. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^4-1}{n^4+1}\right)^{\frac{n}{n+1}}$ 35. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{2\pi n}{n+1}\right)$ 36. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi}{\sqrt[3]{n}}\right)$

37. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+8^n}{\sqrt[3]{n}}$ 38. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+3}{n-3}\right)^{n(n-3)}$ 39. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\cos\left(\frac{\pi}{\sqrt[3]{n}}\right)\right)^{n^2}$

40. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{\sqrt[n]{n}}$

Завдання 1.3 Дослідити числові ряди на збіжність.

1. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^n(n-1)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+2}{3n+1}\right)^n(n+1)^3$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+3)\ln^2(2n+1)}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^3+2}}{n^2\sin^2 n}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}n^4\operatorname{arctg}^{2n}\left(\frac{\pi}{4n}\right)$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^{n-1}+n-1}$.

2. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^{n^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2(2n+1)}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\arcsin\frac{3+(-1)^n}{4}}{2^n+n}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[3]{n}\left(\frac{n-2}{2n+1}\right)^{3n}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{1+5^{2n}}$.

3. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}(n^3+1)}{(n+1)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}n^4\left(\frac{2n}{3n+5}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\ln^2(2n+3)}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+(-1)^n}{2^{n+2}}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}n!\sin\frac{\pi}{2^n}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+1}$.

4. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\cdot\frac{1}{4^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-5)\ln^2(4n-7)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n\cdot 2\cdot n!}{(2n)!}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\ln n+\sqrt[3]{\ln^2 n}}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n3^{n+2}}{5^n}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$.

5. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+2)!}{3n+5}\cdot\frac{1}{2^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2(3n+1)}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3}{n^3\left(2+\sin\frac{\pi n}{2}\right)}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{n}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+\sqrt[3]{n}}{n^3+n}$.

6. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^n(n-1)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+2}{3n+1}\right)^n(n+1)^3$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n^2-3)\ln^2 n}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\ln n}{n^2-3}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^{n^2}}{n}\cdot\frac{1}{2^n}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+\sqrt[3]{n}}{n^3-\sqrt{n}}$.

7. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(3n)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{3n-1}\right)^{n^2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\ln(2n)}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\operatorname{arctg}\frac{1+(-1)^n}{2}}{n^3+2}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^5 3^n}{(2n+1)^n}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+5n+8}}$.

8. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7^{2n}}{(2n-1)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n}\cdot\frac{n}{5^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{2}n+1\right)\ln^2\left(\sqrt{3}n+1\right)}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2\frac{\pi n}{2}}{n(n+1)(n+2)}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+2}}{\left(2n^2+1\right)^{\frac{n}{2}}}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n^2+5}{n^2+4}$.

9. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+2}{4n-1}\right)^{n}(n-1)^2$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\ln^2\left(\sqrt{5}n+1\right)}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^7}}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{n-1}e^{-n}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sin\frac{1}{n}$.

10. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^{n^2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(n^3+1\right)\ln^2 n}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos^2 n}{n^3+5}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\operatorname{arctg}\frac{\pi}{4\sqrt{n}}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-\ln n}$.

11. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}\left(n^3+1\right)}{(n+1)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^5\left(\frac{2n-1}{3n+4}\right)^{n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n\ln^2(n+7)}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln\sqrt{n^2+3n}}{\sqrt{n^2-n}}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{n+1}}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^2+2}}$.

12. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{3^n(n+1)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\cdot\frac{1}{2^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+4)\ln^2(5n+2)}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\arcsin\frac{n-1}{n}}{\sqrt[3]{n^3-3n}}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2\sin^n\frac{\pi}{2n}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3+7n}{5^n+n}$.

13. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^n(n+1)!}{(2n)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{4n-3}{5n+1}\right)^{n^3}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)\ln(2n)}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+5}{n!}\sin\dfrac{2}{3^n}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+3}}\left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1\right)$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\sin\dfrac{2\pi}{2n+1}$.

14. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+2}{4^n(n-2)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3n+2}{5n+1}\right)^{n}(n+1)^2$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(8n-5)\ln^2(8n-5)}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n^4+1}}{n^4\sin^2 n}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^8\operatorname{arctg}^{4n}\left(\dfrac{3\pi}{4n}\right)$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n+3n}{3^n+2n}$.

15. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1\cdot4\cdot7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{2^{n+1}n!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{5n+3}{11n+2}\right)^{n}(n+2)^3$; в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{n}{(n^2+5)\ln n}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n^3-5}}{(n+1)^2\sin^2 n}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^8\operatorname{arctg}^{4n}\left(\dfrac{\pi}{4n}\right)$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^n+7n}{7^n+5n}$.

16. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!(2n+1)!}{(3n)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n+1}{4n-2}\right)^{n^2}$; в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n^2}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\arcsin\dfrac{3+(-1)^n}{4}}{3^n+n+1}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[3]{n}\left(\dfrac{n-3}{3n+1}\right)^{2n}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{7^n+5}{5^n+7}$.

17. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n(n+1)!}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{7n+2}{8n+1}\right)^{n}(n+17)^8$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^6+\sqrt[5]{\ln^3 n}}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(n+1)^3\ln^2(n+3)}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n5^{n+4}}{10^n}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(\sqrt[3]{n}+5\right)^2}{3n+4}$.

18. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+1)^2}{(n+2)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}\sin\dfrac{1}{\sqrt{n}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(3n+7)\ln^2(3n+7)}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^5\ln n+\sqrt[5]{\ln^3 n}}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{n^2}\cdot\dfrac{1}{10^n}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n+3^n}{n^6}$.

19. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+1)!}{2^{n+1}\left(n^3+1\right)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{11^n}\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^{n^2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln^2(10n+1)}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2+3}{n^4\left(2+\cos\dfrac{\pi n}{2}\right)}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{n}\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^{5n}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n(2n+1)!}{3^n n!}$.

20. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{6^n\left(n^2-1\right)}{n!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{5n+3}{7n+4}\right)^n(n+8)^3$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{\left(n^4+5\right)\ln^2 n}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\ln n}{n^4+1}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+5)^{n^2}}{n}\cdot\dfrac{1}{3^n}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)}{n^2}$.

21. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n+2)!}{2^n(3n+5)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n+9}{4n-1}\right)^{n^2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(3n+7)\ln(3n)}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{1+(-1)^n}{4}}{n^4+5}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^3 9^n}{(27n+1)^n}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(\dfrac{5+\sqrt{n}}{3+\sqrt{n}}\right)$.

22. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{10^n 2n!}{(2n)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n-3}{n}\right)^n\cdot\dfrac{n+1}{7^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\left(\sqrt{7}n+1\right)\ln^2\left(\sqrt{7}n+1\right)}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin^2\dfrac{\pi n}{2}}{n(n+1)(n+2)}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^{n+3}}{\sqrt{\left(4n^2+1\right)^n}}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n+1)!n!}{(3n)!}$.

23. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}{3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{6n+2}{8n-3}\right)^n(n+5)^3$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln^2(6n+1)}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{\sqrt[4]{n^5}}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^{n-1}}{e^n}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+4n+7}}$.

24. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n+1)!}{10^n n^{10}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n+3}{5n+4}\right)^{n^2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{\left(n^4+3\right)\ln^2 n}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\sin^2 n}{n^3+6}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[5]{n^4}}\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{\pi}{4\sqrt{n}}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt[3]{\ln n+1}}$.

25. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^{2n}}{(2n-1)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^3\left(\frac{3n-5}{5n+1}\right)^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5}{n\ln^2(5n+5)}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln\sqrt{n^2+5n}}{\sqrt{n^2-n}}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{(n+3)^2}}\sin\frac{1}{\sqrt{n^3}}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4n}$.

26. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n-3}\right)^{n^2}\cdot\frac{1}{3^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n+7)\ln^2(7n+4)}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\arccos\frac{n-1}{n}}{\sqrt[4]{n^2-4n}}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n^3}\sin^n\frac{\pi}{2n}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{5^n}$.

27. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n-1}\sqrt{n^2+5}}{(n+1)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-3}{6n+3}\right)^{n^3}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+7)\ln(7n-1)}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n!}\sin\frac{2}{5^n}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+2}}\left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1\right)$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n^2-9)^2}$.

28. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n(n+1)!}{(2n)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n-2}{6n+1}\right)^n(n-5)^2$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n-\sqrt{5})\ln^2(4n-\sqrt{5})}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)\sqrt{n^4+1}}{n^5\cos^2 n}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[4]{n+2}\left(\frac{n-7}{7n+1}\right)^{2n}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\left(\frac{\pi}{4\sqrt{n}}\right)$.

29. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{4^n(n+2)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n+3}{9n+6}\right)^n(n+8)^3$; в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n+7}{(n^2+7)\ln n}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^3-4}}{(n+4)^2\cos^2 n}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+4)^8\operatorname{arctg}^{4n}\left(\frac{\pi}{4n}\right)$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{(2n)!}$.

30. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n\sqrt[3]{n^2}}{(n+1)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7n+5}{8n-2}\right)^{n^2}$; в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\ln(n+2)}{(n+2)^2}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\arcsin\frac{3+(-1)^n}{4}}{5^n+n+5}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n^{10}+1}\operatorname{arctg}^{2n}\left(\frac{3\pi}{4n}\right)$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[5]{\ln^7 n}}$.

31. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}{1\cdot5\cdot9\cdot\ldots\cdot(4n-3)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{8n+3}{9n+1}\right)^{n}(n+6)^{8}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{5}+\sqrt[6]{\ln^{5}n}}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-2}{(n+2)^{3}\ln^{2}(n+2)}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n8^{n+2}}{9^{n}}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^{n}}{1000n+1}$.

32. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(3n)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{10n-5}{11n-4}\right)^{n^{2}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^{2}(8n+11)}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^{6}-3}}{n^{4}\sin^{2}n}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}n!\left(\frac{2}{n}\right)^{n}$.

33. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)^{2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n}}{3^{n}(2n-1)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(6n-1)\ln^{2}(6n+3)}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6+(-1)^{n}}{3^{n+2}}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}n!\sin\frac{\pi}{9^{n}}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

34. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n}}{n!(2{,}7)^{n+1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9^{n}\cdot3\cdot n!}{(3n)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(10n-2)\ln^{2}(10n+3)}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)4^{n+2}}{11^{n}}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}n^{3}\,\mathrm{tg}^{5}\frac{\pi}{n}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}n^{2}e^{-n^{3}}$.

35. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot5\cdot\ldots\cdot(3n+2)}{2^{n}(n+1)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^{n}}\left(\frac{n}{n+5}\right)^{-n^{2}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^{2}(6n+5)}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{5}+3}{n^{6}\left(7+\sin\frac{\pi n}{2}\right)}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{2}{n}\right)$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^{2}}$.

36. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n}n!}{n^{n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6n+4}{12n+3}\right)^{n}(n+7)^{3}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{(n^{2}+7)\ln^{2}n}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-5)\ln n}{n^{2}-9}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(n^{2}-2)^{2}}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^{2}}$.

37. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7n+8}{10n-4}\right)^{n^2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(12n-1)\ln(n-12)}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^7 8^n}{(6n+1)^n}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+n^2}{2^n+n^3}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg} n}{n^2+1}$.

38. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^n\cdot\frac{n}{8^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\sqrt{8}n+1)\ln^2(\sqrt{8}n+1)}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2\frac{\pi n}{2}}{n^3(n+10)(n-2)}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\sqrt[4]{n^3}\cdot\sqrt[5]{3n+4}}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(4n^2-1)^2}$.

39. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{2^n+3^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6n+7}{12n-9}\right)^n(n-3)^2$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+11)\ln^2(11n+1)}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}8^{n-2}e^{-n}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[3]{\ln^4 n}}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n+\sqrt{n}}{2^n+\sqrt[5]{n}}$.

40. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{12n-9}{14n+7}\right)^{n^2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\ln^3(n+2)}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+8}{n!}\sin\frac{2}{4^n}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^4\sin^n\frac{\pi}{4n}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2\arcsin\frac{\pi}{2^n}$.

Завдання 1.4 Дослідити числові ряди на абсолютну та умовну збіжність.

1. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{\sqrt{n^3}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln(2n)}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^2}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin\frac{\pi}{2\sqrt{n}}}{\sqrt{3n+1}}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot\sqrt[4]{n+4}}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n+3}{2n-3}\right)^n$.

2. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{(n+1)3^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(3n+1)2^{2n}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\ln(n+1)}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{\pi}{2^n}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^{10}}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{n^{n+1}}$.

3. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n^2+n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos\frac{\pi}{6n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\cos\frac{\pi}{3\sqrt{n}}\cdot\sqrt[3]{3n+\ln n}}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin(n\sqrt{n})}{n\sqrt{n}}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{\left(\sqrt[7]{n}+8\right)^2}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\ln(12n+1)}$.

4. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot\sqrt[4]{2n+3}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\operatorname{tg}\frac{1}{n}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\operatorname{tg}\frac{\pi}{4\sqrt{n}}}{\sqrt{5n-1}}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+2}\cos\frac{\pi}{12n}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{5n}{\left(\sqrt{5}\right)^n}$.

5. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)2^{2n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n-1}{3n+2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln(n+1)}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin 3^n}{3^n}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{\pi}{8^n}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{e^n}{n\sqrt{n}+1}$.

6. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)2^{2n+1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)\ln n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2n^2}{n^4-n^2+1}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin\frac{\pi}{2\sqrt{n}}}{\sqrt{3n+1}}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{\left(\sqrt[4]{n}+1\right)^3}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\operatorname{arctg}\left(\frac{(-1)^n}{4n}\right)$.

7. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^3}{2^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\operatorname{tg}\frac{\pi}{3\sqrt{n}}}{\sqrt{4n+1}}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{\ln(n+2)}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos\frac{\pi}{2^n}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{\ln(n+3)}$.

8. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n^2}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{\sqrt{n^5}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\arcsin\left(\frac{\pi}{\sqrt{2n+1}}\right)$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin\frac{\pi}{3\sqrt{n}}}{\sqrt{4n-1}}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{\left(\sqrt{2n}+1\right)^5}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}+10}{10^n}$.

9. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{\pi}{6n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln(3n)}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+\sin^2 n}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2\ln(3n)}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n}{n^3}$.

10. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{\ln(n+4)}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+\cos\frac{2}{\sqrt{n+4}}}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^3}{(n+1)!}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}$.

11. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(7n)}{n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\ln(n+2)}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\cos\frac{\pi}{2\sqrt{n}}\sqrt[3]{2n+\ln n}}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{n(n+2)}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{3^n+n^3}$.

12. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n\cdot 2^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n\cdot\ln(\ln n)}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\arcsin n}{\sqrt{n^3}}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^3}{(n+1)!}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)2^{2n+1}}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+2}{n\sqrt{n}}$.

13. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot\sqrt[3]{3n+1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+2)\ln^2\left(\sqrt{2n}\right)}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n)}{n!}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\operatorname{tg}\frac{\pi}{2\sqrt{n}}}{\sqrt{5n+1}}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3+\sin^4 n}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-5)^n}{1-n\cdot 5^n}$.

14. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2+1}{\sqrt{n^4}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+2)\ln(2n+5)}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{(n+1)^3}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin\frac{\pi}{4\sqrt{n}}}{\sqrt{4n+1}}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^3}{\left(\sqrt[3]{n^4}+2\right)^3}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^3}{(n+2)^4}$.

15. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{(n+3)4^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)3^{2n}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\ln(n+4)}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{\pi}{4^n}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^3}{(n+2)!}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}n\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^2}\right)$.

16. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3n+4}{n^2+n+2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos\frac{\pi}{7n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\cos\frac{\pi}{\sqrt{n}}\cdot\sqrt[3]{4n+\ln n}}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin\left(n^2\sqrt{n}\right)}{n^2\sqrt{n}}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{(n+2)^4}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-2n+3}{3n+2}\right)^n$.

17. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot\sqrt[5]{3n+1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n)}{n!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\operatorname{tg}\frac{1}{2^n}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\operatorname{tg}\frac{\pi}{8\sqrt{n}}}{\sqrt{8n+1}}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^4}{(n+1)^6}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+3)}$.

18. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+3)3^{2n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4n-1}{5n+2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(3n+2)\ln(3n+1)}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin 4^n}{4^n}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 5n^2}{(n+5)^4}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n2^n}{\left(n^2+1\right)^2}$.

19. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(4n+1)3^{2n+1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(4n+3)\ln n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{3n^4-2n^2+1}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin\frac{\pi}{3\sqrt{n}}}{n\sqrt{4n+5}}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)\ln(n+1)}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}n^4\operatorname{arctg}\left(\frac{(-1)^n}{4^n}\right)$.

20. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\left(n\sqrt{n}\right)^3}{3^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(n^2+2\right)}{n^3\sqrt{n+5}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{7n+2}{7n-2}\right)^n$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{\ln(n+3)}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(n+1)\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\left(\frac{\pi}{2\sqrt{n}}\right)$.

21. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{(3n)^2}{n!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{3n+1}{\sqrt{n^7}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\arcsin\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{3n+2}}\right)$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\sin\dfrac{\pi}{4\sqrt{n}}}{n\sqrt{2n+7}}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{5^n}{n^{10}}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\arcsin\left(\dfrac{\pi}{5^n}\right)$.

22. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2-\ln n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\dfrac{\pi}{7n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)\ln(3n)}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n^3+\sin^2 n}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n\ln n}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2n-1}{n^2(n+1)^2}$.

23. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{3n+4}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(n+3)}{\ln(n+3)}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\left(1+\dfrac{1}{n^4}\right)$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2+\cos\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sqrt[3]{n}}{n+3}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{\sin n}{n}\right)^2$.

24. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(3n)}{n^3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{4\ln(n+3)}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\dfrac{n}{3n+2}\right)^n$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\cos\dfrac{\pi}{4\sqrt{n}}\sqrt[3]{n+2\ln n}}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n}{e^n}$.

25. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n\cdot 3^{2n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(n+1)\ln(n+1)\cdot\ln(\ln(n+1))}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\arcsin n}{\sqrt[3]{n^4}}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n -$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\left(1+\dfrac{1}{8^n}\right)$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{n}-\sqrt[4]{n}}$.

26. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n\cdot\sqrt[4]{2n+2}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(n+3)\ln^2(\sqrt{3n})}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(3n)}{n!}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4\sqrt{n}}}{\sqrt{3n+4}}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-n)^n}{(2n)!}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{\cos n}{n}\right)^2$.

27. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n+5}{\sqrt[3]{n^5}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n\ln(5n+1)}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(5n)}{n^7}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\sin\dfrac{\pi}{7\sqrt{n}}}{\sqrt{7n+3}}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\left(1+\dfrac{1}{12^n}\right)$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n^{100}}{100^n}$.

28. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-5)^n}{(3n+1)7^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(8n+1)7^{3n}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\operatorname{tg}\dfrac{1}{n^5}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\dfrac{\pi}{8^n}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\operatorname{arctg}n}{\sqrt[3]{n}}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{e^n}{n!}$.

29. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{7n+1}{n^2+6n+9}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos\dfrac{\pi}{12n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\cos\dfrac{\pi}{7\sqrt{n}}\cdot\sqrt[5]{6n+\ln n}}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sin\left(n^5\sqrt{n}\right)}{n^5\sqrt{n}}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n^2+1}{2^n(n-1)!}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2+3}}$.

30. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^3\cdot\sqrt[7]{n^5+1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(8n)}{n!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{\ln(n+11)}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{9\sqrt{n}}}{\sqrt{11n+5}}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n}{\left(4n^2-1\right)^2}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4n}$.

31. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(4n+12)5^{2n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{8n-1}{9n+2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2\ln(8n+1)}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sin 7^n}{7^n}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{2n+100}{3n+2}\right)^n$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sqrt{n}}{n+99}$.

32. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(7n+1)6^{2n+1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\left(n^2+11\right)\ln(3n)}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\sqrt{n}}{n^3-n^2+11}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\sin\dfrac{\pi}{9\sqrt{n}}}{\sqrt{6n+5}}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n+11}{2^n}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n-1}{n+1}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[100]{n}}$.

33. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{n^5}{8^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos\left(\dfrac{n}{2}\right)}{n!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{9\sqrt{n}}}{\sqrt{5n+11}}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n}{\ln(3n+7)}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n^{99}}{5^n}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n2^n}$.

34. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{n^5}{n!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n^2+1}{\sqrt{n^7}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \arcsin\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{8n+11}}\right)$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n \sin\dfrac{\pi}{10\sqrt{n}}}{\sqrt{6n-1}}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n^2+1}{n^2}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{n^3}{3^n}$.

35. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^4-\ln n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin\dfrac{\pi}{13n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2\ln(3n+2)}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^7}+\sin^2 n}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{2n}{3n+5}\right)^n$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt{n^2+3}-n\right)$.

36. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{11n+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(n+7)}{\ln(7n+4)}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \ln\left(1+\dfrac{1}{3n^4}\right)$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^{11}}+\cos\dfrac{1}{\sqrt{n+2}}}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3+3}}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}\left(\sqrt{n^2+2}-n\right)$.

37. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(11n)}{n^6}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{\ln(8n+3)}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{3n}{8n+9}\right)^n$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\cos\dfrac{\pi}{\sqrt{n}}\sqrt[6]{n^5+\ln n}}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\ln n}{n^2+1}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n^2}{\left(2+\dfrac{1}{n}\right)^n}$.

38. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n\cdot 8^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n\ln(5n+1)\cdot\ln(\ln(n+5))}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\arcsin n}{\sqrt[6]{n^{13}}}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(n+1)^3}{n^3(n+1)!}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\left(\dfrac{n}{3n+1}\right)^n$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}\sin\left(\dfrac{1}{2n}\right)$.

39. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2\cdot\sqrt[6]{n^5+1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+12)\ln^2(\sqrt{5n})}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(9n)}{(2n)!n!}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\operatorname{tg}\frac{\pi}{8\sqrt{n}}}{\sqrt[4]{3n^3+1}}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2+4}{4^n(n+1)!}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt[5]{n^4+7}}$.

40. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[7]{n^{12}}+5\sin^2 n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{5n^6+7}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\arcsin n}{n\sqrt[7]{n^5}}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n^3\cdot\sqrt[4]{n^5+3}}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\operatorname{tg}\frac{n}{n^2+2}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\ln^2(n+5)}$.

Завдання 1.5 Дослідити на збіжність нескінченний добуток.

1. $\prod_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{n}$

2. $\prod_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$

3. $\prod_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)$

4. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

5. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{8}{n}\right)e^{-\frac{8}{n}}$

6. $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2+2n}$

7. $\prod_{n=1}^{\infty}n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)$

8. $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{n^2+n-2}$

9. $\prod_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}$

10. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)$

11. $\prod_{n=1}^{\infty}n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

12. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2-1}\right)$

13. $\prod_{n=1}^{\infty}n\sin\frac{1}{n}$

14. $\prod_{n=1}^{\infty}\operatorname{ch}\left(\frac{1}{2^n}\right)$

15. $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

16. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$

17. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{\frac{1}{n+1}}$

18. $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)(n-1)}{n(n+1)}$

19. $\prod_{n=1}^{\infty}\sqrt[n^2]{n}$

20. $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)(n-1)}{n^2}$

21. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+e^{-8n^2}\right)$

22. $\prod_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi}{6\cdot 2^n}\right)$

23. $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{8}{n}}}{1+\frac{8}{n}}$

24. $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-4}{n^2-1}$

25. $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2n+5}{n^2+n+1}$

26. $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{3n-1}\cdot\frac{3n}{3n+1}$

27. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^2$

28. $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{2}{n^2+n}\right)$

29. $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(n\sin\dfrac{1}{n}\right)^3$

30. $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)\right)$

31. $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2-1}{n^2+1}$

32. $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4n^2}{(2n-1)(2n+1)}$

34. $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[n^2]{2}$

34. $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{5^{2^n}}\right)$

35. $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{3^n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}\right)$

36. $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2+2n}{(n+1)^2}$

37. $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{\ln(n+5)-\ln n}$

38. $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n+1)(2n+7)}{(2n+3)(2n+5)}$

39. $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)\right)^3$

40. $\prod\limits_{n=1}^{\infty}e^{\frac{1}{n(n+1)}}$

Розділ 2. ФУНКЦІОНАЛЬНІ І СТЕПЕНЕВІ РЯДИ

2.1 ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

§1 Поняття про функціональні послідовності і ряди, типи їх збіжностей

1. Функціональні послідовності та ряди. Область їх збіжності Рівномірна збіжність функціональних послідовностей та рядів

Означення 2.1 Якщо у відповідність до кожного натурального n ставиться деяка функція $f_n(x)$, визначена на множині $\{x\}$, то множину занумерованих функцій $f_1(x), f_2(x),.., f_n(x),...$ називають *функціональною послідовністю*.

Множину $\{x\}$ на якій визначена кожна із функції $f_n(x)$ називають *множиною визначення функціональної послідовності.*

Означення 2.2 Нехай функціональна послідовність $\{u_n(x)\}$ задана на $\{x\}$. Формально утворену суму вигляду $u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)+...=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ називають *функціональним рядом,* а множину $\{x\}$ – *множиною визначення функціонального ряду*.

Також будемо називати:

- $u_n(x)$ – загальним членом функціонального ряду,
- $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k(x)$ – n-ою частковою сумою функціонального ряду.

Означення 2.3 Функціональну послідовність (ряд) називають *збіжною* в точці $x_0 \in \{x\}$, якщо числова послідовність $\{f_n(x_0)\}$ (числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$) збігається. Множину точок $x_0 \in \{x\}$, в яких функціональна послідовність (ряд) збігається, називають *областю збіжності послідовності (ряду).*

Зрозуміло, що область збіжності X є підмножиною множини визначення $\{x\}$ функціональної послідовності (ряду), тобто $X \subseteq \{x\}$.

Означення 2.4 Якщо $x_0 \in X$, де X – область збіжності послідовності (ряду), то їй можна поставити у відповідність єдине значення границі послідовності $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0)$ (суми ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$). Таким чином утворюється функція, визначена на області збіжності X. Цю функцію називають *граничною функцією (сумою)* відповідної послідовності (ряду). А саме:

$$f(x)\overset{X}{=}\lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \left(S(x)\overset{X}{=}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right).$$

Щоб підкреслити збіжність функціональної послідовності (ряду) в кожній окремій точці із множини X, цю функцію називають *поточковою границею функціональної послідовності (поточковою сумою функціонального ряду).* Застосовують також інше позначення:

$$f_n(x)\xrightarrow[X]{} f(x) \quad \Big(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \overset{\text{поточк.}}{\underset{X}{=}} S(x)\Big), \text{ де} \qquad X \subseteq \{x\}.$$

На мові $\varepsilon - n_0$ означення *поточкової збіжності* на множині $A \subseteq X$ (тут X – область її збіжності) можна записати так:

$$f_n(x)\xrightarrow[X]{} f(x) \overset{def}{\Leftrightarrow} \underline{\forall x \in A}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}:\ \forall n \geq n_0\ \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \quad (2.1)$$

Приклад 2.1 Знайти область збіжності функціональної послідовності $\{f_n(x) = x^n\}$. На цій множині знайти граничну функцію (поточкову границю).

*Розв'язання***.** Множина визначення цієї функціональної послідовності – $\{x\} = \mathbb{R}$. Дослідимо послідовність на збіжність в кожній точці множини визначення:

$$|x| < 1, \text{ то } \{x^n\} - \text{н.м..п.} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0;$$

$$|x| > 1, \text{ то } \{x^n\} - \text{н.в..п.} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \infty;$$

$$x = 1, \text{ то } x^n = 1\ \forall n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1;$$

$$x = -1, \text{ то } x^n = (-1)^n\ \forall n \Rightarrow \nexists \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Висновок: область збіжності функціональної послідовності $\{f_n(x) = x^n\}$ – півінтервал $(-1;1]$. Гранична функція (поточкова границя), визначена на цій множині, подається у вигляді:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-1,1); \\ 1, & x = 1. \end{cases} \quad \blacksquare$$

🗁**Означення 2.5** Функціональну послідовність $\{f_n(x)\}$ називають *рівномірно збіжною до функції* $f(x)$ *на множині* $A \subseteq X$ (тут X – область її збіжності) і позначають $f_n(x) \underset{A}{\rightrightarrows} f(x)$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \underline{\forall x \in A} \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \qquad (2.2)$$

Зверніть увагу на місце розташування виразу «$\underline{\forall x \in A}$» в (2.1) і (2.2)! Поставимо запитання: чи завжди для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна знайти один, спільний для всіх значень $x \in A$, номер n_0, що залежить лише від ε, починаючи з якого буде виконуватися нерівність $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$? У випадку рівномірної збіжності послідовності відповідь на це запитання позитивна.

Приклад 2.2 Дослідимо послідовність $\{f_n(x) = x^n\}$ на рівномірну збіжність на відрізку $[0,1]$ до функції $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1); \\ 1, & x = 1, \end{cases}$ яка є поточковою її границею на цьому відрізку.

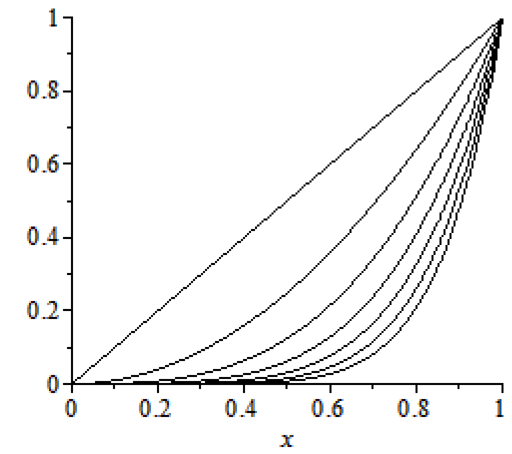


Рис. 2.1

*Розв'язання***.** На рис. 2.1 зображено графіки декількох членів-функцій даної послідовності на відрізку $[0,1]$.

I спосіб. Потрібно перевірити, чи можливо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайти один, спільний для всіх значень $x \in [0,1]$, номер n_0, що залежить лише від ε, починаючи з якого буде виконуватися нерівність $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Той факт, що для кожного фіксованого $x \in [0,1]$ можна знайти свій номер n_0, який залежить і від ε і від x, випливає із означення границі послідовності $\{f_n(x)\}$ при фіксованому x. Якщо знайти для кожного фіксованого $x \in [0,1]$ свій номер $n_0 = n_0(\varepsilon, x)$, то спільним буде номер $n_0^*(\varepsilon) = n_0^* = \sup\limits_{x\in[0,1]} n_0(\varepsilon, x)$.

Доведемо, що для даної послідовності $n_0^* = \infty$. Це буде означати нерівномірну збіжність функціональної послідовності на відрізку $[0,1]$. Розглянемо нерівність $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$: для $x \in [0,1]$. Маємо:

$$|f_n(x) - f(x)| = |x^n - 0| = x^n < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{\ln(1/\varepsilon)}{\ln(1/x)};$$

$$\sup_{x\in[0,1)} \frac{\ln(1/\varepsilon)}{\ln(1/x)} = \ln(1/\varepsilon) \cdot \lim_{x\to 1-0} \frac{1}{\ln(1/x)} = +\infty,$$

що і доводить потрібне.

II спосіб. Розглянемо заперечення логічного висловлювання

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n \ge n_0 \quad \forall x \in [0,1] \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Одержимо:

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall n_0 \in \mathbb{N} \quad \exists n \ge n_0 \quad \exists x_n \in [0,1] \quad |f_n(x) - f(x)| \ge \varepsilon.$$

Розглянемо послідовність $x_n = 1 - \dfrac{1}{n} \in [0,1]$. Для неї маємо:

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = \left|\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n - 0\right| \xrightarrow[n]{} \frac{1}{e}.$$

Звідки випливає, що,

$$\text{для } \varepsilon < \frac{1}{2e}, \ \forall n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{для } n = n_0, \quad \text{для } x_n = 1 - \frac{1}{n} \in [0,1] \quad \text{вірно } |f_n(x) - f(x)| \ge \varepsilon.$$

Отже, виконується заперечення рівномірної збіжності, тобто послідовність збігається нерівномірно на відрізку $[0,1]$. ■

Приклад 2.3 Дослідимо послідовність $f_n(x) = \dfrac{x}{1 + n^2 x^2}$ на рівномірну збіжність на відрізку $[0,1]$.

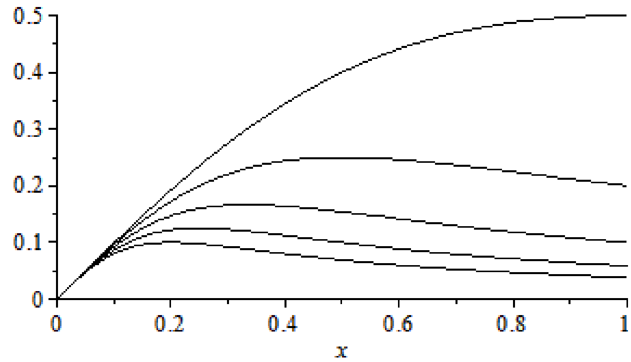


Рис. 2.2

Розв'язання. На рис. 2.2 зображено графіки декілька членів-функцій даної послідовності на відрізку $[0,1]$.

Знайдемо поточкову границю:

$$\lim_{n} f_n(x) = \lim_{n} \frac{x}{1+n^2x^2} = 0 \quad \forall x \in [0,1].$$

Доведемо, що $f_n(x) \underset{[0,1]}{\rightrightarrows} f(x))$, тобто

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall x \in [0,1] \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Розглянемо нерівність $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Для будь-якого $x \in [0,1]$ отримаємо:

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{x}{1+n^2x^2} = \frac{1}{2n} \cdot \frac{2nx}{1+n^2x^2} \leq \left\| \begin{array}{l} (1-nx)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 1+n^2x^2 \geq 2nx \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \dfrac{2nx}{1+n^2x^2} \leq 1 \end{array} \right\| \leq \frac{1}{2n} \cdot 1 < \varepsilon.$$

Остання нерівність виконується, починаючи з номера $n_0 = \left[\frac{1}{2\varepsilon}\right] + 1$. Знайдено номер n_0, що залежить лише від ε, однак від $x \in [0,1]$ не залежить. Тому дана послідовність рівномірно збігається на відрізку $[0,1]$. ■

Приклад 2.4 Дослідимо послідовність $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ на рівномірну збіжність на відрізку $[0,1]$.

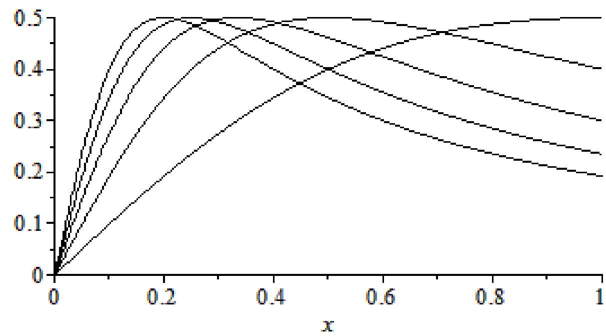


Рис. 2.3.

Розв'язання. На рис. 2.3 зображено декілька членів даної послідовності на відрізку $[0,1]$.

Аналогічно прикладу 2.3 переконуємося у тому, що на цьому відрізку поточковою границею даної послідовності є функція $f(x) = 0$.

Спробуємо оцінити функцію $|f_n(x) - f(x)|$ зверху для $x \in (0,1]$:

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{n\,x}{1+n^2x^2} < \frac{n\,x}{n^2x^2} = \frac{1}{n\,x} < \varepsilon.$$

Звідки $n_0(\varepsilon, x) = \left|\frac{1}{\varepsilon\, x}\right| + 1$. Це підтверджує той факт, що функція $f(x) = 0$ є границею послідовності в кожній окремій точці відрізка. Однак, спільного номера серед $n_0 = n_0(\varepsilon, x)$ знайти не можна, оскільки $\sup\limits_{x \in [0,1]} \frac{1}{\varepsilon\, x} = \infty$.

Із зазначеної оцінки НЕ можна зробити висновків щодо нерівномірної збіжності на відрізку $[0,1]$. Для цього потрібно проводити оцінювання знизу:

$$\left|f_n(x)-f(x)\right| = \frac{nx}{1+n^2x^2} \ge \left.\frac{nx}{1+n^2x^2}\right|_{x=\frac{1}{n}} = \frac{1}{2},$$

тоді

для $\varepsilon < \frac{1}{2}$, $\forall n_0 \in \mathbb{N}$ для $n = n_0$, для $x_n = \frac{1}{n} \in [0,1]$ вірно $\left|f_n(x)-f(x)\right| \ge \varepsilon$. ■

Зауваження 2.1 $f_n(x) \underset{X}{\rightarrow} f(x)) \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{X} \left|f_n(x)-f(x)\right| = 0.$

Сформульоване зауваження є наслідком означення рівномірної збіжності на множині.

Зауваження 2.2 Перепишемо означення 2.5 рівномірної збіжності послідовності $\{f_n(x)\}$ до функції $f(x)$ на множині A

$$f_n(x) \underset{A}{\rightarrow} f(x) \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n \ge n_0 \quad \underline{\forall x \in A} \quad \left|f_n(x)-f(x)\right| < \varepsilon$$

у термінах ε-околів. А саме: усі члени функціональної послідовності, починаючи з деякого номера, знаходяться в ε-околі функції $f(x)$. При цьому вони у всіх точках x множини A задовольняють нерівність

$$f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon. \quad (2.3)$$

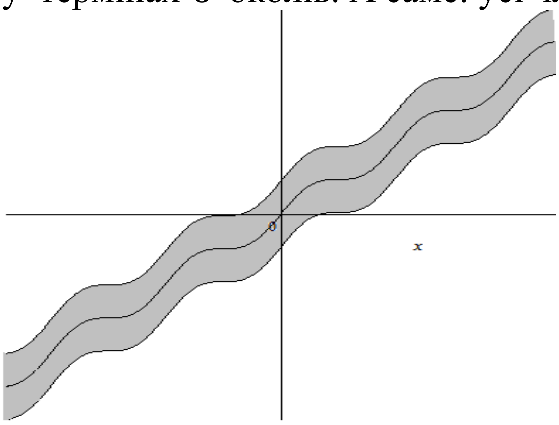
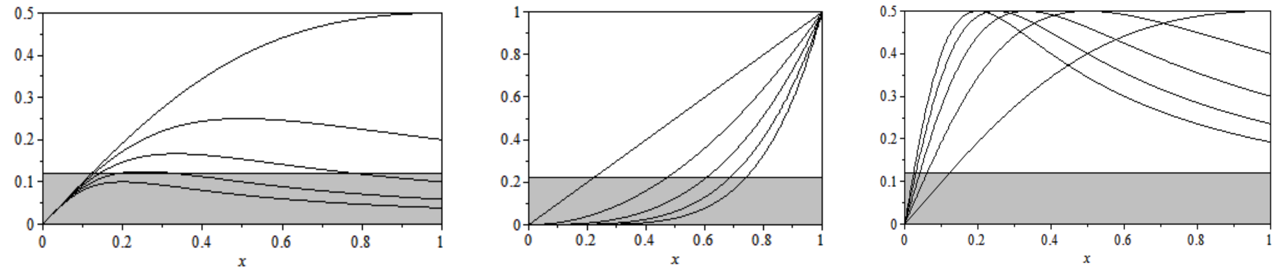


Рис. 2.4

Графіки функцій $y = f(x) - \varepsilon$ і $y = f(x) + \varepsilon$ можна отримати зсувом графіка функції $y = f(x)$ відповідно на ε вниз і вверх. Графіки функцій $y = f_n(x)$, що задовольнять нерівність (2.3), знаходяться поміж графіками функцій $y = f(x) - \varepsilon$ і $y = f(x) + \varepsilon$. Кажуть, що вони лежать всередині *«ε-труби»* функції $f(x)$ (див. рис. 2.4).

Можна бачити, що у випадку прикладу 2.3 (див. рис. 2.5, а) функції із послідовності все ближче наближаються усіма точками до функції $f(x) = 0$, потрапляючи у її «ε-трубу». Цього не можна стверджувати для прикладів 2.2 і 2.4, в яких незалежно від $\varepsilon < \frac{1}{2}$ поза межами «ε-труби» будуть завжди знаходитися деякі точки графіків усіх функцій-членів послідовності. Так, для прикладу 2.2 (рис. 2.5, б) це будуть точки графіків функцій-членів з абсцисами, близькими до 1, а для прикладу 2.4 (рис. 2.5, в) – ті точки графіків, ординати яких близькі до $\frac{1}{2}$.



а б в

Рис. 2.5

Означення 2.6 Функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ називають *рівномірно збіжним* до $S(x)$ на множині A, якщо функціональна послідовність його часткових сум $\left\{ S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \right\}$ рівномірно збігається на A, тобто якщо

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \underset{A}{\rightrightarrows} S(x) \overset{def}{\Leftrightarrow} S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \underset{X}{\rightrightarrows} S(x).$$

Приклад 2.5 Довести, що ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ на [*-a,a*] є рівномірно збіжним до $S(x) = e^x$.

*Розв'язання***.** Розглянемо часткову суму даного ряду $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$. Згідно з формулою Маклорена,

$$S(x) = S_n(x) + R_n(x),$$

де $R_n(x)$ – залишковий член в формулі Маклорена у . Оскільки

$$|S_n(x) - S(x)| = |R_n(x)|,$$

$$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1} \right| = \left| \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} \cdot x^{n+1} \right|,$$

то

$$0 \le \sup_{[-a,a]} |S_n(x) - S(x)| = e^a \cdot \frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \sup_{[-a,a]} |S_n(x) - S(x)| = 0.$$

Отже,

$$S_n(x) \underset{[-a,a]}{\rightrightarrows} S(x) \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \underset{[-a,a]}{\rightrightarrows} e^x. \blacksquare$$

§2 Достатні умови рівномірної збіжності

1. Критерії рівномірної збіжності

Теорема 2.1 *(критерій Коші рівномірної збіжності функціональної послідовності).* Для того, щоб функціональна послідовність $\{f_n(x)\}$ рівномірно збігалась до функції $f(x)$ на множині A (тобто $f_n(x)\underset{A}{\rightrightarrows} f(x)$), необхідно і достатньо, щоб

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists n_0\in\mathbb{N} \quad \forall n\ge n_0 \quad \forall p\in\mathbb{N} \quad \forall x\in A \quad \left|f_{n+p}(x)-f_n(x)\right|<\varepsilon. \qquad (2.4)$$

Доведення. *Необхідність.* За означенням,

$$f_n(x)\underset{A}{\rightrightarrows} f(x) \quad \Leftrightarrow$$

$$\forall\varepsilon>0:\exists n_0\in\mathbb{N} \quad \forall n\ge n_0 \quad \forall x\in A \qquad \left|f_n(x)-f(x)\right|<\varepsilon/2 \qquad \Rightarrow$$

тим більше,

$$\forall p\in\mathbb{N} \quad \left|f_{n+p}(x)-f(x)\right|<\varepsilon/2.$$

Звідки

$$\left|f_{n+p}(x)-f_n(x)\right|\le\left|f_{n+p}(x)-f(x)\right|+\left|f_n(x)-f(x)\right|\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Достатність. Нехай виконується твердження (2.4). Тоді у кожній фіксованій точці $x\in A$ числова послідовність $\{f_n(x)\}$ є фундаментальною. Тому, за критерієм Коші збіжності числової послідовності [1, с.115], числові послідовності $\{f_n(x)\}$ збігаються для кожного $x\in A$. Це дозволяє знайти поточкову граничну функцію $f(x)$ функціональної послідовності $\{f_n(x)\}$ за правилом:

$$f:\ x\ \underset{A}{\rightarrow}\ \lim_{n} f_n(x).$$

Здійснимо граничний перехід при $p\to\infty$ в нерівності (2.4). Отримаємо:

$$\forall n\ge n_0 \quad \forall x\in A \quad \lim_{p\to\infty}\left|f_{n+p}(x)-f_n(x)\right|=\left|f(x)-f_n(x)\right|\le\varepsilon.$$

Отже,

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists n_0\in\mathbb{N} \quad \forall n\ge n_0 \quad \forall x\in A \quad \left|f(x)-f_n(x)\right|\le\varepsilon. \ \blacksquare$$

Теорема 2.2 *(критерій Коші рівномірної збіжності функціонального ряду).* Для того, щоб функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ збігався рівномірно до функції $S(x)$ на множині A (тобто $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\underset{A}{\rightrightarrows} S(x)$), необхідно і достатньо, щоб

$$\forall\varepsilon>0:\exists n_0\in\mathbb{N} \quad \forall n\ge n_0 \quad \forall p\in\mathbb{N} \quad \forall x\in A \quad \left|\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k(x)\right|<\varepsilon.$$

Ця теорема є наслідком критерію Коші рівномірної збіжності функціональної послідовності і означення рівномірної збіжності функціонального ряду.

Наслідок 2.1 Функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ збігається рівномірно на множині A (тобто $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\underset{A}{\rightrightarrows}$) тоді і тільки тоді, коли послідовність його залишків $\left\{ r_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right\}$ рівномірно збігається до нульової функції $\theta(x) \equiv 0$ на цій множині, тобто $r_n(x) \underset{A}{\rightarrow} \theta(x)$.

Доведення цього наслідку здійснюється аналогічно випадку числових рядів. Провести доведення самостійно ✍!

2. Ознаки рівномірної збіжності функціональних рядів

Теорема 2.3 *(ознака Вейєрштрасса).* Розглянемо функціональний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, заданий на множині A. Якщо існує числовий збіжний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ з невід'ємними членами, що мажорує функціональний ряд на множині A, тоді функціональний ряд рівномірно збігається на A. Тобто

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x), \text{ заданий на множині } A; \\ 2)\ \exists \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n \text{ збігається, } c_n \ge 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}; \\ 3)\ |u_n(x)| \le c_n \quad \forall x \in A; \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) \underset{A}{\rightrightarrows}$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ називають *мажорантним рядом.*

Доведення. Оскільки числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ збігається, то за критерієм Коші

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \ \forall n \ge n_0 \ \ \forall p \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k < \varepsilon .$$

В наслідок нерівності трикутника і нерівностей 2) і 3), отримаємо

$$\forall n \ge n_0 \ \ \forall p \in \mathbb{N} \ \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k(x)| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k < \varepsilon \ \ \forall x \in X \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \underset{A}{\rightrightarrows}. \ \blacksquare$$

Приклад 2.6 Дослідити ряд на рівномірну збіжність на множині *X:* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}, \quad X = \mathbb{R}$.

*Розв'язання***.** Застосуємо ознаку Вейєрштрасса:

$$\left.\begin{array}{l} \left| \dfrac{\sin nx}{n^2} \right| \ \le \ \dfrac{1}{n^2} \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n^2} \underset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} \underset{озн.В.}{\Leftarrow} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} зб. \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ряд } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2} \text{ рівномірно збігається на } \mathbb{R}.$$

У даному прикладі мажорантним виступає узагальнений гармонічний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ із показником степеня знаменника 2, тому він збіжний. ■

Зауваження 2.3 Не завжди ознаку Вейєрштрасса можна застосовувати. Може статися, що ряд рівномірно збігається на деякій множині, але його не можна мажорувати числовим збіжним рядом на цій множині. Наприклад, розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots,\quad x\in[0,1]\ .$$

Оскільки

$$\sup_{[0,1]}\left|\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}\right|=\sup_{[0,1]}\frac{x^n}{n}=\frac{1}{n},$$

а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ розбігається, то жодного висновку про рівномірну збіжність на відрізку $[0,1]$ зробити не можна. Тому ознаку Вейєрштрасса не можна застосовувати.

Доведемо рівномірну збіжність на відрізку $[0,1]$ даного ряду в інший спосіб. Із формули Маклоренна випливає, що

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}+R_n(x)=\ln(1+x),\quad x\in[0,1].$$

Позначимо $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}x^k}{k}$, $S(x)=\ln(1+x)$, тоді

$$S(x)=S_n(x)+R_n(x).$$

Для функції $f(x)=\ln(1+x)$ застосуємо форму Лагранжа залишкового члена $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}\cdot x^{n+1},\quad 0<\theta<1$: Оскільки $f^{(n+1)}(x)=\frac{(-1)^n\cdot n!}{(1+x)^{n+1}}$, то

$$R_n(x)=\frac{(-1)^n n!}{(1+\theta x)^{n+1}}\cdot\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Оцінимо залишковий член

$$|R_n(x)|=\left|\frac{(-1)^n n!}{(1+\theta x)^{n+1}}\cdot\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|=\frac{|x|^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}(n+1)}\le\frac{1}{n+1}\quad\forall x\in[0,1].$$

Отже,

$$\lim_n\sup_{x\in[0,1]}|S_n(x)-S(x)|\le\lim_n\frac{1}{n+1}=0.$$

Це означає, що

$$S_n(x)\underset{[0,1]}{\rightrightarrows}S(x)\quad\Rightarrow\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}\underset{[0,1]}{\rightrightarrows}S(x).$$

Висновок: однієї лише ознаки Вейєрштрасса не достатньо для дослідження рядів на рівномірну збіжність на деякій множині.

Пригадаємо перетворення Абеля і наступну лему (див. лему 1.1):

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \{\alpha_n\}_{i=1}^m - \text{монотонна множина;} \\ 2)\ \{\beta_n\}_{i=1}^m \text{ така, що множина } \left\{B_n = \sum\limits_{k=1}^n \beta_k\right\}_{n=1}^m - \\ \text{обмежена зверху за модулем числом } L>0, \end{array}\right\} \Rightarrow \left|\sum_{i=1}^m \alpha_i\beta_i\right| \le L\cdot\left(|\alpha_1| + 2|\alpha_m|\right).$$

Теорема 2.4 *(ознака Абеля рівномірної збіжності функціонального ряду).*

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows}; \\ 2)\ \{a_n(x)\} - \underline{\text{поточково}} \text{ нестрого монотонна на } X; \\ 3)\ \{a_n(x)\} - \underline{\text{рівномірно}} \text{ обмежена на } X, \text{тобто} \\ \quad \exists\mu>0: \forall n\in\mathbb{N}\ \ \forall x\in X\ \ |a_n(x)|\le\mu, \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows}.$$

Доведення. Оскільки $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows}$, то за критерієм Коші збіжності числових рядів

$$\forall\varepsilon>0: \exists n_0\in\mathbb{N}\quad \forall n\ge n_0\quad \forall p\in\mathbb{N}\quad \forall x\in X\quad \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} b_k(x)\right| < \varepsilon.$$

Застосуємо лему, яку наведено вище:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)b_k(x)\right| \le \left|\sum_{i=1}^{p} a_{n+i}(x)b_{n+i}(x)\right| \le \left\|\begin{array}{l} m=p, \\ \alpha_i = a_{i+n}(x), \\ \beta_i = a_{i+n}(x), \\ L=\varepsilon \end{array}\right\| \le$$

$$\le \varepsilon\cdot\left(|a_{n+1}(x)| + 2|a_{n+p}(x)|\right) \le 3\mu\varepsilon.$$

Отже, відповідно до критерію Коші рівномірної збіжності функціональних рядів, маємо $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows}$. ■

Теорема 2.5 *(ознака Діріхле рівномірної збіжності функціонального ряду)*

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \{b_n(x)\} \text{ така, що } \left\{B_n(x) = \sum\limits_{k=1}^n b_k(x)\right\} - \\ \underline{\text{рівномірно}} \text{ обмежена на множині } X, \text{ тобто} \\ \exists\mu>0: \forall n\in\mathbb{N}\ \ \forall x\in X\ \ |B_n(x)|\le\mu, \\ 2)\ \{a_n(x)\} - \underline{\text{поточково}} \text{ незростаюча на } X, \\ 3)\ a_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} \theta(x)\ \ (\theta(x)\equiv 0), \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows}.$$

Доведення. Оскільки $a_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} \theta(x)$, то за означенням

$$\forall\varepsilon>0: \exists n_0\in\mathbb{N}\quad \forall n\ge n_0\quad \forall x\in X\qquad |a_n(x)-\theta(x)| < \varepsilon,$$

тим більше

$$\forall p\in\mathbb{N}\qquad |a_{n+p}(x)| < \varepsilon.$$

Застосуємо лему, яку наведено вище:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)b_k(x)\right| \le \left\|\begin{matrix} m=p, \\ \alpha_i = a_{i+n}(x), \\ \beta_i = a_{i+n}(x), \\ L=\mu \end{matrix}\right\| \le \mu\left(\left|a_{n+1}(x)\right| + 2\left|a_{n+p}(x)\right|\right) < 3\mu\varepsilon \quad \forall x\in X \quad \forall n\ge n_0.$$

Отже, згідно з критерієм Коші $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x) \underset{X}{\rightarrow}$. ■

Зауваження 2.4 Іноді члени функціонального ряду можна подати як добуток членів деякої числової і деякої функціональної послідовностей (рядів). У цьому випадку числова послідовність (ряд) не потребує дослідження «рівномірних властивостей» як такі, що не залежать від x.

Приклад 2.7 Розглянемо ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^s \sin nx$ і $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^c \cos nx$ на множині $X=[\delta, 2\pi-\delta]$ (тут $\delta>0$) у припущенні, що $\left\{a_n^s\right\}$ і $\left\{a_n^c\right\}$ незростаючі послідовності, які прямують до 0..

*Розв'язання***.** Застосуємо ознаку Діріхле:

$$\left.\begin{aligned} &\left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| \le \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|} \le \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}, \\ &\left|\sum_{k=1}^{n} \cos kx\right| \le \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|} \le \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}, \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{B_n^s = \sum_{k=1}^{n} \sin kx\right\} \text{ і } \left\{B_n^c = \sum_{k=1}^{n} \cos kx\right\}$$ – рівномірно обмежені.

Послідовності $\left\{a_n^s\right\}$ і $\left\{a_n^c\right\}$ заздалегідь задовольняють умовам ознаки Діріхле. Отже, ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^s \sin nx$ і $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^c \cos nx$ рівномірно збігаються на X в зазначених припущеннях.

Наприклад, ряди $\sum_{n} \frac{\sin nx}{n^p}$ і $\sum_{n} \frac{\cos nx}{n^p}$ при $p>0$ рівномірно збігаються на $X=[\delta, 2\pi-\delta]$, де $\delta>0$.

§3 Функціональні властивості сум рядів та граничних функцій функціональних послідовностей

1. Теореми про перехід до границі в рядах. Неперервність суми функціонального ряду

Зауваження 2.5 Функціональна послідовність і ряд взаємопов'язані. Властивості, що далі будуть розглянуті, виконуються як для послідовностей, так і для рядів. Однак, для рядів застосовується частіше. Тому спочатку саме для рядів вивчимо їх детально.

Теорема 2.6 *(про неперервність суми функціонального ряду).*

Розглянемо функціональний ряд $\sum_{n} u_n(x)$ на множині X.

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ u_n(x) - \text{неперервна в точці } x_0 \in X \quad \forall n \in \mathbb{N}; \\ 2)\ \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} S(x), \end{array}\right\} \Rightarrow S(x) - \text{неперервна в точці } x_0$$

Доведення.

1) $u_n(x)$ – неперервна в точці x_0 $\Rightarrow$

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) - \text{неперервна в точці } x_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \ \forall x \in X \ \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |S_n(x) - S_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}; \quad (2.5)$$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} \underset{\text{Наслідок 1.1}}{\Rightarrow} r_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} \theta(x) \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \ge n_0\ \forall x \in X \quad |r_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (2.6)$$

Зокрема,

$$\forall n \ge n_0 \quad |r_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (2.7)$$

3) Знаючи, що

$$S(x) = S_n(x) + r_n(x),$$
$$S(x_0) = S_n(x_0) + r_n(x_0),$$

застосуємо нерівності (2.5) – (2.7) і нерівність трикутника:

$$|S(x) - S(x_0)| \le |S_n(x) - S_n(x_0)| + |r_n(x)| + |-r_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Отже,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \ \forall x \in X \ \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |S(x) - S(x_0)| < \varepsilon,$$

тобто $S(x)$ – неперервна в точці x_0. ■

Із теореми випливають *необхідні умови рівномірної збіжності ряду з неперервними членами* на відрізку, а саме, неперервність суми такого ряду на цьому відрізку.

Наслідок 2.2 Якщо сума функціонального ряду з неперервними членами на множині X не є неперервною в точці $x_0 \in X$, тоді і функціональний ряд не буде рівномірно збігатися на відрізку $[a,b]$.

Одночасно ця теорема дає *достатні умови неперервності суми функціонального ряду*. Такими умовами є рівномірна збіжність цього ряду і неперервність його членів на множині X.

Розглянемо випадок, коли рівномірна збіжність є необхідною.

Теорема 2.7 *(теорема Діні).*

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \underset{[a,b]}{\overset{\text{Поточ.}}{=}} S(x); \\ 2)\ S(x) - \text{неперервна на } [a,b]\ ; \\ 3)\ u_n(x) - \text{неперервна на } [a,b]\ \forall n \in \mathbb{N}; \\ !!!\ 4)\ u_n(x) \ge 0 \ \ \forall x \in [a,b] \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n} u_n(x) \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} S(x).$$

Зауважимо, що умова 4 є обов'язковою. Саме завдяки їй стає можливим виконання цієї теореми. Однак, цю умову можна замінити на умову $u_n(x) \le 0 \ \ \forall x \in [a,b] \ \forall n \in \mathbb{N}$. Тобто важливою умовою є знакопостійність функцій-членів ряду.

Окрім того, зазначимо, що відрізок $[a,b]$ рівномірної збіжності функціонального ряду можна замінити на обмежену замкнену множину X.

Доведення.

1) Розглянемо послідовність залишків

$$r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_n(x), \quad u_n(x) \ge 0 \quad \forall x \in [a,b] \quad \Rightarrow$$

$$r_1(x) \ge r_2(x) \ge \ldots \ge r_n(x) \ge \ldots \quad \forall x \in [a,b] \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{r_n(x)\} \searrow \text{поточково на } [a,b].$$

2) За умовою функціональний ряд $\sum\limits_n u_n(x)$ поточково збігається на $[a,b]$. Тоді

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \underset{[a,b]}{\overset{Поточ.}{=}} S(x) \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} r_n(x) \underset{[a,b]}{\overset{Поточ.}{=}} \theta(x).$$

3) <u>Довести</u>: $\sum\limits_n u_n(x) \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} S(x) \quad \Leftrightarrow \quad r_n(x) \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} \theta(x)$.

Тобто потрібно $\forall \varepsilon > 0$ <u>знайти хоча б один номер</u> $n_0 \in \mathbb{N}$ такий, щоб виконувалась нерівність

$$r_{n_0}(x) < \varepsilon \quad \forall x \in [a,b].$$

Одного номера n_0 достатньо, оскільки для $n \ge n_0$ в наслідок незростання послідовності залишків будемо мати $r_n(x) \le r_{n_0}(x) < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad r_n(x) < \varepsilon \quad \forall n \ge n_0$.

<u>Припустимо супротивне:</u> нехай послідовність $\{r_n(x)\}$ – збіжна, але нерівномірно на $[a,b]$. Для даної послідовності залишків, яка задовольняє зазначеним властивостям, це буде означати, що

$$\exists \varepsilon > 0 \ \underline{\underline{\forall n \in \mathbb{N}}} \ \exists \, x_n \in [a,b]: \quad r_n(x_n) \ge \varepsilon.$$

(Зверніть увагу на взаємно протилежні твердження, підкреслені двома лініями!)

Оскільки $\{x_n\} \subset [a,b]$, то за теоремою Больцано-Вейєрштрасса [1, с. 110] $\exists \ \{x_{n_k}\}: \lim\limits_k x_{n_k} = x$. Оскільки

$$\left.\begin{array}{l} u_n(x) - \text{неперервна на } [a,b] \, \forall n \in \mathbb{N}; \\ S(x) - \text{неперервна на } [a,b], \end{array}\right\} \Rightarrow r_n(x) = S(x) - \sum_{k=1}^{n} u_k(x) - \text{неперервна на } [a,b],$$

тоді

$$\left.\begin{array}{l} r_m(x) - \text{неперервна на } [a,b], \\ \lim\limits_k x_{n_k} = x^*, \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_k r_m(x_{n_k}) = r_m(x^*).$$

Для будь-якого $m \in \mathbb{N}$ існує $k \in \mathbb{N}$, що $m < n_k$. Тоді в силу незростання послідовності залишків $r_m(x) \ge r_{n_k}(x) \quad \forall x \in [a.b]$. Зокрема, $r_m(x_{n_k}) \ge r_{n_k}(x_{n_k})$. За побудовою послідовності $\{x_{n_k}\}$ маємо $r_{n_k}(x_{n_k}) \ge \varepsilon$, тому $r_m(x_{n_k}) \ge \varepsilon$. Здійснимо граничний перехід:

$$\lim_k r_m(x_{n_k}) = r_m(x^*) \ge \varepsilon \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Отримане суперечить поточковій збіжності до нульової функції, зокрема в точці x^*. ■

Розглянемо **приклад** ряду, з якого видно, що *не завжди можливо робити почленний перехід до границі.*

Розглянемо ряд $\sum_{n=0}^{\infty} x^n(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty}(x^n - x^{n+1})$ на відрізку $[0,1]$. Його члени $u_n(x) = x^n(1-x)$ – неперервні на $[0,1]$. Знайдемо суму цього ряду:

$$S_n(x) = 1 - x + x - x^2 + x^2 - x^3 + \ldots + x^n - x^{n+1} = 1 - x^{n+1} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,\ 1); \\ 0, & x = 1. \end{cases}$$

Функція $S(x)$, що є сумою цього ряду, розривна. Тому за теоремою про неперервність суми функціонального ряду, цей ряд збігається нерівномірно на відрізку $[0,1]$.

Здійснимо граничний перехід при $x \to 1-0$:

1) для суми ряду $\lim\limits_{x\to 1-0}\sum_{n=0}^{\infty}(x^n - x^{n+1}) = \lim\limits_{x\to 1-0} S(x) = 1$,

2) формальний по членний граничний перехід: $\sum_{n=0}^{\infty}\lim\limits_{x\to 1-0}(x^n - x^{n+1}) = \sum_{n=0}^{\infty}(1-1) = 0$.

Отже,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\lim_{x\to 1-0}(x^n - x^{n+1}) = 0 \ne 1 = \lim_{x\to 1-0}\sum_{n=0}^{\infty}(x^n - x^{n+1}).$$

<u>Висновок 1:</u> причина отриманого результату про неможливість здійснення почленного граничного переходу в нерівномірній збіжності ряду на відрізку $[0,1]$.

Розглянемо $[0, \alpha]$, $\alpha \in (0, 1)$. Застосуємо теорему Діні:

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(x) \underset{[0,\alpha]}{\overset{\text{Поточ.}}{=}} S(x), \\ S(x) - \text{неперервна на } [0,\alpha], \\ u_n(x) - \text{неперервна на } [0,\alpha]\ \forall n \in \mathbb{N}\cup\{0\}, \\ u_n(x) \ge 0 \quad \forall x \in [0,\alpha] \quad \forall n \in \mathbb{N}\cup\{0\}, \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(x^n - x^{n+1}) \underset{[0,\alpha]}{\rightrightarrows} S(x).$$

Розглянемо можливість граничного переходу в точці $\beta \in [0, \alpha]$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to\beta}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(x^n - x^{n+1}) = \lim\limits_{x\to\beta} S(x) = S(\beta) = 1, \\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}\lim\limits_{x\to\beta}(x^n - x^{n+1}) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(\beta^n - \beta^{n+1}) = 1 - \beta + \beta - \beta^2 + \beta^2 - \beta^3 + \ldots = 1, \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\lim_{x\to\beta}(x^n - x^{n+1})}_{=1} = 1 = \lim_{x\to\beta}\sum_{n=0}^{\infty}(x^n - x^{n+1}).$$

Висновок 2: граничний перехід у будь-якій точці відрізка $[0,\alpha]$ можливий, і має місце рівномірна збіжність ряду на $[0,\alpha]$.

Теорема 2.8 (*почленний граничний перехід під знаком суми функціонального ряду*).

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)\underset{X}{\rightrightarrows}S(x); \\ 2)\ a-\text{гранична точка множини } X; \\ 3)\ \lim\limits_{x\to a}u_n(x)=C_n, \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \mathrm{I})\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}C_n = C; \\ \mathrm{II})\ \lim\limits_{x\to a}S(x)=C. \end{array}\right.$$

Другий висновок теореми можна переписати в такий спосіб:

$$\boxed{\lim_{x\to a}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to a}u_n(x)},$$

що і означає почленний граничний перехід.

Доведення.

1) За умовою $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)\underset{X}{\rightrightarrows}S(x)$, тому за Критерієм Коші рівномірної збіжності функціонального ряду

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\, n_0\in\mathbb{N}\,\forall n\ge n_0\,\forall p\in\mathbb{N}\,\forall x\in X \quad \left|\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k(x)\right|<\frac{\varepsilon}{3},$$

тобто

$$\left|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\ldots+u_{n+p}(x)\right|<\frac{\varepsilon}{3} \quad \forall n\ge n_0\,\forall p\in\mathbb{N}\,\forall x\in X\ . \tag{2.8}$$

2) Під знаком нерівності (2.8) здійснимо граничний перехід при $x\to a$:

$$\left|C_{n+1}+C_{n+2}+\ldots+C_{n+p}\right|\le\frac{\varepsilon}{3}<\varepsilon\ ,$$

тому числовий ряд $\sum\limits_{n}C_n$ збігається (критерій Коші збіжності числового ряду); значення границі позначимо через C (висновок (I) підтверджено!). Тоді

$$C=\overline{C_n}+\gamma_n,\ \text{де}\ \ \overline{C_n}=\sum_{k=1}^{n}C_k\ ,\quad \gamma_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}C_k\ . \tag{2.9}$$

3) Оскільки $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)\underset{X}{\rightrightarrows}S(x)$, то $S(x)=S_n(x)+r_n(x)$, і після граничного переходу в (2.8) при $p\to\infty$ отримаємо

$$\left|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\ldots\right|=\left|r_n(x)\right|\le\frac{\varepsilon}{3} \quad \forall n\ge n_0\ \forall x\in X\ . \tag{2.10}$$

4) Граничний перехід при $x\to a$ в останній нерівності і (2.9) дозволяють отримати

$$\left|\gamma_n\right|\le\frac{\varepsilon}{3}\ \ \forall n\ge n_0\ . \tag{2.11}$$

5) Оскільки $S_n(x) = u_1(x) + \ldots + u_n(x)$, то

$$\lim_{x\to a} S_n(x) = C_1 + \ldots + C_n = \overline{C_n}.$$

За означенням границі функції в точці

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in X\ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow \left|S_n(x) - \overline{C_n}\right| < \frac{\varepsilon}{6}. \qquad (2.12)$$

5) З урахуванням (2.10) – (2.12), має місце оцінка:

$$|S(x) - C| \le \left|S_n(x) - \overline{C_n}\right| + |r_n(x)| + |\gamma_n| \le \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

Висновок:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in X\ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |S(x) - C| < \varepsilon.$$

Це означає, що $\lim\limits_{x\to a} S(x) = C$ (висновок (II) підтверджено!). ■

2. Теореми про почленне інтегрування та диференціювання функціональних рядів

Теорема 2.9 *(почленне інтегрування функціональних рядів).*

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ u_n(x) \text{ - неперервна на } [a,b]\ \forall n \in \mathbb{N}; \\ 2)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} S(x), \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{I) } \exists \int\limits_a^b S(x)dx; \\ \text{II) } \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^b u_n(x)\,dx - \text{збігається;} \\ \text{III) } \boxed{\int\limits_a^b \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)\,dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^b u_n(x)\,dx} \end{array}\right.$$

Доведення.

$$\left.\begin{array}{l} u_n(x) \text{ - неперервні на } [a,b]\ \forall n \in \mathbb{N}; \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n(x) \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} S(x), \end{array}\right\} \Rightarrow S(x) \text{ – неперервна на } [a,b] \Rightarrow$$

[6, с. 83] інтегровна на $[a,b]$ $\Rightarrow$ $\exists \int\limits_a^b S(x)dx$ (висновок (I) підтверджено!).

Почленно проінтегруємо рівність $S(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + r_n(x)$, отримуємо

$$\int\limits_a^b S(x)dx = \int\limits_a^b u_1(x)dx + \ldots + \int\limits_a^b u_n(x)dx + \int\limits_a^b r_n(x)dx \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Для того, щоб отримати останні два висновки теореми, потрібно довести: $\int\limits_a^b r_n(x)dx \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Оскільки

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} \ \Rightarrow\ r_n(x) \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} 0 \ \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in n_0\ \forall x \in [a,b]\ |r_n(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a},$$

отже, за властивостями інтеграла, що виражаються нерівностями [6, с. 98-100]

$$\left|\int_a^b r_n(x)dx\right| \le \int_a^b |r_n(x)|dx \le \frac{\varepsilon}{b-a}\cdot(b-a) = \varepsilon \quad \forall n \in n_0 .$$

Це означає справедливість висновків (II) і (III) теореми. ■

Приклад 2.8 Перевірити можливість почленного інтегрування на відрізку $[0,1]$ під знаком суми ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\left(2xn^2e^{-n^2x^2} - 2x(n-1)^2e^{-(n-1)^2x^2}\right)$.

*Розв'язання***.**

1) Дослідимо цей ряд на рівномірну збіжність на відрізку $[0,1]$ за означенням. Для цього знайдемо його часткові суми:

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n}\left(2xk^2e^{-k^2x^2} - 2x(k-1)^2e^{-(k-1)^2x^2}\right) =$$
$$= \underline{2xe^{-x^2}} + \underline{\underline{2x2^2e^{-2^2x^2}}} - \underline{2xe^{-x^2}} + \underline{\underline{\underline{2x3^2e^{-3^2x^2}}}} - \underline{\underline{2x2^2e^{-2^2x^2}}} + \ldots +$$
$$+2xn^2e^{-n^2x^2} - \underline{\underline{\underline{2x(n-1)^2e^{-(n-1)^2x^2}}}} = 2xn^2e^{-n^2x^2}.$$

2) Тепер дослідимо на рівномірну збіжність послідовність $\{S_n(x)\}$ на відрізку $[0,1]$.

2.1) Спочатку знайдемо поточному границю послідовності $\{S_n(x)\}$:

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} 2xn^2e^{-n^2x^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{2xn^2}{e^{n^2x^2}} = 0 \quad (x \in [0,1] - fix).$$

2.2) Далі перевіримо справедливість рівності $\lim_{n\to\infty}\sup_{[0,1]}|S_n(x) - S(x)| \overset{?}{=} 0$.

А) Знайдемо $\sup_{[0,1]}\left(2xn^2e^{-n^2x^2} - 0\right)$. Супремум неперервної функції досягається або в критичних точках відрізка, або на його кінцях. Знайдемо критичні точки:

$$\left(2xn^2e^{-n^2x^2}\right)' = \left(2n^2\cdot\frac{x}{e^{n^2x^2}}\right)' = 2n^2\cdot\frac{e^{n^2x^2} - x2n^2xe^{n^2x^2}}{e^{2n^2x^2}} = 2n^2\cdot\frac{e^{n^2x^2}(1-2n^2x^2)}{e^{2n^2x^2}} = 0;$$

$$1 - 2x^2n^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{n\sqrt{2}}.$$

Знайдемо значення функції $2xn^2e^{-n^2x^2}$ в критичних точках і на кінцях відрізка:

$$2xn^2e^{-n^2x^2}\Big|_{x=0} = 0;$$

$$2xn^2e^{-n^2x^2}\Big|_{x=1} = 2n^2e^{-n^2} = \frac{2n^2}{e^{n^2}};$$

$$2xn^2e^{-n^2x^2}\Big|_{x=\frac{1}{n\sqrt{2}}} = 2\frac{1}{n\sqrt{2}}n^2e^{-n^2\frac{1}{2n^2}} = \frac{n\sqrt{2}}{\sqrt{e}}.$$

Отже, $\sup_{[0,1]}\left(2xn^2e^{-n^2x^2} - 0\right) = \frac{n\sqrt{2}}{\sqrt{e}}$.

Б) Обчислюємо границю:

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{[0,1]}\left|S_n(x)-S(x)\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{2}}{\sqrt{e}}=+\infty\neq 0\,.$$

Висновок: ряд збігається нерівномірно на відрізку $[0,1]$.

3) Бувають такі випадки, коли нерівномірно збіжний ряд на відрізку числової прямої можна почленно інтегрувати на цьому відрізку. Перевіримо, чи має даний ряд таку властивість.

3.1) Здійснимо почленне інтегрування формально:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\left(2xn^2e^{-n^2x^2}-2x(n-1)^2e^{-(n-1)^2x^2}\right)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\left(e^{-n^2x^2}d(n^2x^2)-\int_0^1 e^{-(n-1)^2x^2}d(x^2(n-1)^2)\right)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-e^{-n^2x^2}\Big|_0^1+e^{-(n-1)^2x^2}\Big|_0^1\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-e^{-n^2}+e^{-(n-1)^2}\right).$$

Знайдемо часткові суми $\overline{S_n}$ отриманого ряду та їх границю:

$$\overline{S_n}=-e^{-1}+e^0-e^{-4}+e^{-1}+\ldots-e^{-n}+e^{-(n-1)^2}=1-e^{-n^2}\underset{n\to\infty}{\to}1\,.$$

3.2) Оскільки раніше було знайдено $S(x)=0$, то і цю функцію проінтегруємо:

$$\int_0^1 S(x)dx=\int_0^1 0dx=0\,.$$

3.3) Отже,

$$\int_0^1\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(2xn^2e^{-n^2x^2}-2x(n-1)^2e^{-(n-1)^2x^2}\right)\right]dx=\int_0^1 S(x)\,dx=0\neq$$

$$\neq 1=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\left(2xn^2e^{-n^2x^2}-2x(n-1)^2e^{-(n-1)^2x^2}\right)dx\,.$$

Загальний висновок: в цьому випадку нерівномірно збіжний ряд не можна інтегрувати почленно. ■

Приклад 2.9 Ряд $\sum_{n=0}^{\infty}x^n(1-x)$ на $[0,1]$ нерівномірно збігається, але його можна почленно інтегрувати.

*Розв'язання***.** 1) Той факт, що ряд нерівномірно збігається доведено на початку пункту 2 цього параграфу. Там же отримано поточкову суму даного ряду на $[0,1]$:

$$S(x)=\begin{cases}1,\ x\in[0,\ 1);\\ 0,\ x=1.\end{cases}$$

2) Із зазначеного випливає, що

$$\int_0^1\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n(1-x)\right)dx=\int_0^1 S(x)\,dx=1\,.$$

3) Формально почленно проінтегруємо цей ряд:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1\left(x^n(1-x)\right)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=$$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\ldots=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+2}\right)=1.$$

Отже,

$$\int_0^1\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n(1-x)\right)dx=1=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1\left(x^n(1-x)\right)dx\,.$$

Висновок: У ЦЬОМУ КОНКРЕТНОМУ ПРИКЛАДІ нерівномірно збіжний ряд можна інтегрувати почленно. Звертаємо увагу, що у загальному випадку такий висновок є хибним! ■

Теорема 2.10 (*узагальнена теорема про почленне інтегрування*).

$$\left.\begin{array}{l}1)\ u_n(x)-\text{ інтегровні на }[a,b]\ \forall n\in\mathbb{N};\\ 2)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)\underset{[a,b]}{\rightarrow}S(x),\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{I)}\ S(x)-\text{інтегровна на }[a,b];\\ \text{II)}\ \boxed{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_a^b u_n(x)dx=\int\limits_a^b\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n(x))dx.}\end{array}\right.$$

Доведення. 1) За умовою $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)\underset{X}{\rightarrow}S(x)$, тому

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\, n_0\in\mathbb{N}\,\forall n\geq n_0\ \forall x\in X\quad \left|S_n(x)-S(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Оскільки $u_n(x)-$інтегровні на $[a,b]$ $\forall n\in\mathbb{N}$, то $S_{n_0}(x)=\sum\limits_{k=1}^{n_0}u_k(x)$ – інтегровна на $[a,b]$. Оскільки

$$\left|S_n(x)-S(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)},$$

то

$$S_{n_0}(x)-\frac{\varepsilon}{2(b-a)}<S(x)<S_{n_0}(x)+\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\quad(x\in[a,b]).$$

2) Розглянемо $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$. Позначимо $M=\sup\limits_{[\alpha,\beta]}S_{n_0}(x),\quad m=\inf\limits_{[\alpha,\beta]}S_{n_0}(x)$, тоді

$$m-\frac{\varepsilon}{2(b-a)}<S(x)<M+\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\quad(x\in[\alpha,\beta]),$$

а коливання $S(x)$ на $[\alpha,\beta]$

$$\omega_S<M+\frac{\varepsilon}{2(b-a)}-m+\frac{\varepsilon}{2(b-a)}=M-m+\frac{\varepsilon}{b-a}=\omega_{S_{n_0}}+\frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Звідки

$$\sum_{k=1}^{N}\omega_k\Delta x_k<\sum_{k=1}^{N}\left(\omega_k^{S_{n_0}}+\frac{\varepsilon}{b-a}\right)\Delta x_k=\sum_{k=1}^{N}\omega_k^{S_{n_0}}\Delta x_k+\varepsilon\,. \qquad (2.13)$$

3) Із доведеного вище (пункт 1), функція $S_{n_0}(x)-$ інтегрована на $[a,b]$, тому

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}\omega_k^{S_{n_0}}\Delta x_k=0 \quad\Leftrightarrow\quad \forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0:\ \forall\{x_k\}\ d<\delta\ \Rightarrow\ \sum_{k=1}^{N}\omega_k^{S_{n_0}}\Delta x_k<\varepsilon. \qquad (2.14)$$

Із (2.13) і (2.14) випливає, що

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0:\ \forall\{x_k\}\ d<\delta\ \Rightarrow\ \sum_{k=1}^{N}\omega_k\Delta x_k<\sum_{k=1}^{N}\omega_k^{S_{n_0}}\Delta x_k+\varepsilon<2\varepsilon.$$

В наслідок критерію Дарбу інтегрованості функції [6, с. 80], функція $S(x)$ – інтегровна на $[a,b]$.

Завершення доведення щодо другого висновку теореми здійснюється аналогічно попередній теоремі. ■

Теорема 2.11 *(почленне диференціювання функціональних рядів).*

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ u_n(x)\ \text{неперервно диференційовні на } [a,b]\ \forall n\in\mathbb{N};\\ 2)\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)\underset{[0,\alpha]}{\overset{\text{Поточ.}}{=}}S(x);\\ 3)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)\underset{[a,b]}{\rightrightarrows}; \end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l} \text{I) } \exists S'(x) \text{ на } [a,b];\\ \boxed{\text{II) } \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)=S'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right)'} \end{array}$$

У позначенні Коші друге співвідношення можна записати в інший спосіб, якщо ввести позначення $Df(x)=f'(x)$:

$$\boxed{D\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}Du_n(x)}.$$

Доведення. Нехай $\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)\underset{[a,b]}{\rightrightarrows}S^*(x)$. Доведемо, що $S^*(x)=S'(x)$.

1) Оскільки $\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)\underset{[a,b]}{\rightrightarrows}S^*(x)$ і $u_n(x)$ неперервно диференційовні на $[a,b]$ $\forall n\in\mathbb{N}$, то

2) $S^*(x)$ – неперервна на $[a,b]$ (теорема про неперервність суми функціонального ряду);

3) ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$ можна почленно інтегрувати вздовж будь-якого відрізка, що лежить всередині $[a,b]$, а саме:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x u_n'(x)dx \qquad\qquad = \int_a^x S^*(x)dx,$$

$$\underset{\text{(формула Ньютона-Лейбніца)}}{//}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}[u_n(x)-u_n(a)]=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)-\sum_{n=1}^{\infty}u_n(a)\underset{\text{умова 2)}}{=}S(x)-S(a)\ \ (x\in[a,b]).$$

2) Тоді

$$\int_a^x S^*(x)\,dx=S(x)-S(a).$$

3) Оскільки $S^*(x)$ – неперервна на $[a,b]$, то (за властивістю інтеграла із змінною верхньою межею [6, с.104]) функція $S(x)=\int\limits_a^x S^*(x)\,dx$ – диференційовна на $[a,b]$ (висновок (I) підтверджується), причому

$$S^*(x)=\left(\int\limits_a^x S^*(x)\,dx\right)'=\left(S(x)-S(a)\right)'=S'(x)\quad\Rightarrow\quad S^*(x)=S'(x)\ \ (x\in[a,b]).$$

Отже,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)\underset{[a,b]}{\rightrightarrows}S'(x)},$$

зокрема

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)=S'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right)'\quad\forall x\in[a,b].$$

Таким чином, висновок (II) підтверджується. ■

Приклад 2.10 Чи можна почленно диференціювати ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos n^2x}{n^2}$?

*Розв'язання***.** Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos n^2x}{n^2}$ рівномірно збіжний на $\mathbb{R}$, оскільки (за ознакою Вейєрштрасса)

$$\left|\frac{\cos n^2x}{n^2}\right|\quad\le\quad\frac{1}{n^2}\ .$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n^2x}{n^2}\underset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows}\quad\underset{озн\ В.}{\Leftarrow}\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}зб.$$

Формально даний ряд почленно продиференціюємо:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos n^2x}{n^2}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-\sin n^2x\cdot n^2}{n^2}=-\sum_{n=1}^{\infty}\sin n^2x\,.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin n^2x$ розбігається в кожній точці $x\in\mathbb{R}$, оскільки не виконується необхідна умова збіжності ряду.

Отже, даний ряд рівномірно збіжний на $\mathbb{R}$, однак не є рівномірно збіжним ряд із його похідних, і даний ряд не можна диференціювати почленно. ■

Теорема 2.12 (*узагальнена про почленне диференціювання*).

1) $u_n(x)$ диференційовні на $[a,b]$ $\forall n\in\mathbb{N}$;

2) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ збігається хоча б в одній точці відрізку $[a,b]$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n'(x)\underset{[a,b]}{\rightrightarrows}$;

$\Rightarrow$ $I)$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n'\underset{[a,b]}{\rightrightarrows}S(x)$; $II)$ $S(x)$ визначається рівністю $S'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$.

За бажанням розглянути доведення самостійно ✍ [2, с. 90-93])!

3. Функціональні властивості граничних функцій функціональних послідовностей

На початку пункту 2.3 зазначалося, що властивості, доведені для функціональних рядів у цьому пункті, справедливі й для функціональних послідовностей. Наведемо теореми, які доводяться аналогічно відповідним теоремам попереднього пункту.

Теорема 2.13 *(про неперервність границі функціональної послідовності).*

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ f_n(x) - \text{неперервні в точці } x_0 \in X \ \ \forall n \in \mathbb{N}; \\ 2)\ f_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} f(x); \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{r} f(x) - \text{неперервна} \\ \text{в точці } x_0 \end{array}}$$

Теорема 2.14 *(теорема Діні)*.

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \lim\limits_n f_n(x) \overset{\text{Поточково}}{\underset{[a,b]}{=}} f(x); \\ 2)\ f(x) - \text{неперервна на } [a,b]; \\ 3)\ f_n(x) - \text{неперервна на } [a,b] \ \forall n \in \mathbb{N}; \\ !!!4)\ f_n(x) \nearrow (\searrow); \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{f_n(x) \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)}.$$

Теорема 2.15 (*почленний граничний перехід*).

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ f_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} f(x); \\ 2)\ a - \text{гранична точка множини } X; \\ 3)\ \lim\limits_{x\to a} f_n(x) = C_n; \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} I)\ \ \exists \lim\limits_n C_n = C; \\ II)\ \ \exists \lim\limits_{x\to a} f(x); \\ III)\ \lim\limits_{x\to a} f(x) = C. \end{array}\right.$$

Другий і третій висновки теореми можна переписати в такий спосіб:

$$\boxed{\lim_{x\to a}\lim_n f_n(x) = \lim_n \lim_{x\to a} f_n(x)},$$

що і означає почленний граничний перехід.

Теорема 2.16 *(почленне інтегрування функціональних послідовностей).*

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \ \forall n \in \mathbb{N}\ f_n(x) \text{ - інтегровна} \\ \quad \text{на } [a,b]; \\ 2)\ f_n(x) \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x); \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} I) \exists \int\limits_a^b f(x)dx; \quad II) \int\limits_a^b f_n(x)dx - \text{збігається}; \\ III) \boxed{\lim\limits_n \int\limits_a^b f_n(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b \lim\limits_n f_n(x)dx} \end{array}\right..$$

Теорема 2.17 *(почленне диференціювання функціональних послідовностей).*

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ f_n(x) \quad \text{диференційовані на} \\ \quad [a,b] \ \ \forall n \in \mathbb{N}\ ; \\ 2)\ \text{послід. } \{f_n(x)\} \text{ збіжна хоча} \\ \text{б в одній точці відрізка } [a,b]; \\ 3)\ f_n'(x) \underset{[a,b]}{\rightrightarrows}; \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} I)\ f_n(x) \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x); \\ II)\ f(x) \text{ - диференційовна на } [a,b]; \\ 3)\ f(x) \text{ визначається} \\ \quad \text{рівністю } f'(x) = \lim\limits_n f_n(x)\cdot \end{array}$$

В позначенні Коші третє співвідношення можна записати в інший спосіб:

$$\boxed{D\left(\lim_n f_n(x)\right) = \lim_n D\left(f_n(x)\right)}.$$

§4 Поняття степеневого ряду. Радіус збіжності, інтервал і область збіжності степеневого ряду

1. Степеневі ряди. Радіус і область збіжності. Теорема Коші-Адамара

🗀**Означення 2.7** Функціональний ряд вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

називають *степеневим рядом*, а числа $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ – *коефіцієнтами степеневого ряду*.

Очевидно, що кожен степеневий ряд збігається в точці x=0. Тому область збіжності D степеневого ряду містить точку нуль, тобто $D \supseteq \{0\}$.

Приклад 2.11 Довести, що ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n = 1 + x + 2!\, x^2 + 3!\, x^3 + \ldots + n!\, x^n + \ldots$$

має область збіжності $D = \{0\}$.

Розв'язання. Включення $D \supseteq \{0\}$ виконується для всіх степеневих рядів. Оскільки

$$\lim_{n\to\infty} n! x^n = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{(1/x)^n} = \infty, & |x| < 1, \quad x \neq 0; \\ \infty, & |x| \geq 1; \end{cases} = \infty \neq 0,$$

то необхідна умова не виконується $\forall x \neq 0$. *Висновок*: $D = \{0\}$. ■

Приклад 2.12 Знайти область збіжності ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Розв'язання. Цей ряд було розглянуто в параграфі «Поняття числового ряду», де було доведено той факт, що $\forall x \in \mathbb{R}$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} = e^x$. *Висновок*: $D = \mathbb{R}$. ■

Приклад 2.13 Знайти область збіжності ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$.

Розв'язання. Дослідимо його на абсолютну збіжність. Застосуємо ознаку порівняння для ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left|\dfrac{x^n}{n}\right|$:

$$|u_n(x)| = \left|\frac{x^n}{n}\right|, \qquad |u_{n+1}(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{n+1},$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x| n}{n+1} = |x|.$$

Висновок:

$|x| < 1 \Rightarrow$ ряд абсолютно збігається,

$|x|>1 \Rightarrow$ необхідна умова не виконується (за доведенням ознаки Даламбера у випадку $|q|>1$),

$x=1 \Rightarrow \left.\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right|_{x=1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}$ – розбігається,

$x=-1 \Rightarrow \left.\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right|_{x=-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ – умовно збігається.

Відповідь: $D=[1,-1)$ – область збіжності ряду $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n}$. ■

Теорема 2.18 *(теорема Абеля)*. Якщо степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ збігається в точці x_1, тоді

$\forall x:\ |x|<|x_1|\ \sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ – збігається абсолютно в точці x.

Доведення. Оскільки ряд $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x_1)^n$ збігається, то для нього виконується необхідна умова збіжності, тому

$$\lim_{n\to\infty}a_n(x_1)^n=0 \Rightarrow \text{ послідовність } \left\{a_n(x_1)^n\right\} \text{ – обмежена} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \exists M>0:\ \forall n\in N\bigcup\{0\}\quad \left|a_n(x_1)^n\right|\le M.$$

Дослідимо ряд $\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|\cdot|x|^k$ на збіжність, якщо $|x|<|x_1|$. Згідно з критерієм збіжності знакопостійних рядів, ряд $\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|\cdot|x|^k$ збігається тоді і тільки тоді, коли послідовність його часткових сум $\left\{S_n=\sum_{k=0}^{n}|a_k|\cdot|x|^k\right\}$ є обмеженою. Отже, потрібно дослідити послідовність $\{S_n\}$ на обмеженість. Проведемо оцінювання:

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}|a_k||x|^k=|a_0|+|a_1|\cdot|x|+|a_2|\cdot|x|^2+|a_3|\cdot|x|^3+\ldots+|a_n|\cdot|x|^n\le \qquad /\,|x|<|x_1|\,/$$
$$\le|a_0|+|a_1|\cdot|x_1|\cdot\frac{|x|}{|x_1|}+|a_2|\cdot|x_1|^2\cdot\frac{|x|^2}{|x_1|^2}+\ldots+|a_n|\cdot|x_1|^n\cdot\frac{|x|^n}{|x_1|^n}\le$$
$$\le M\left(1+\left|\frac{x}{x_1}\right|+\left|\frac{x}{x_1}\right|^2+\ldots+\left|\frac{x}{x_1}\right|^n\right)\le\left[|x|<|x_1|\Rightarrow\left|\frac{x}{x_1}\right|<1\right]\le M\cdot\frac{1}{1-\left|\frac{x}{x_1}\right|}=const.$$

Висновок: ряд $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ збігається абсолютно $\forall|x|<|x_1|$. ■

🗀**Означення 2.8** *Радіусом збіжності степеневого ряду* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ називають значення величини

$$r = \sup\{|x| : x \in D\},$$

де D - область збіжності степеневого ряду.

Твердження 2.1 Якщо $|x| < r$, тоді ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ в точці x абсолютно збігається. Якщо $|x| > r$, тоді ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ в точці x розбігається.

Доведення:

1). Нехай $|x| < r = \sup\{|x| : x \in D\}$, тоді $\exists x_1 \in D : |x| < |x_1| \le r$. Оскільки $x_1 \in D$, то

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$ збігається $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ збігається абсолютно $\forall |x| < |x_1|$ (теорема Абеля),

зокрема, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ абсолютно збігається в точці x.

2). Нехай $|x| > r = \sup\{|x| : x \in D\} \Rightarrow x \notin D \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ розбігається. ■

🗀**Означення 2.9** Інтервал $(-r; r)$ називають *інтервалом збіжності* степеневого ряду, де r – радіус збіжності степеневого ряду.

На кінцях інтервалу збіжності, тобто в точках $(-r)$ і r, ряд може як збігатися, так і розбігатись. Збіжність у цих точках потрібно перевіряти окремо. Отже, можливі варіанти для області збіжності степеневого ряду:

$$D = \{0\},\ D = \mathbb{R},\ D = (-r; r),\ D = [-r; r),\ D = (-r; r].$$

Навести самостійно ✍ приклади рядів, які мають область збіжності, що відповідає кожному із наведених випадків.

Теорема 2.19 *(теорема Коші-Адамара)*. Розглянемо степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Позначимо $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = L$, тоді

I) $L = \infty \Rightarrow$	II) $L < \infty \wedge L \ne 0 \Rightarrow$	III) $L = 0 \Rightarrow$
степеневий ряд розбігається при $x \ne 0$,	1) $\forall x \in \left(-\frac{1}{L}; \frac{1}{L}\right)$ даний ряд абсолютно збігається, 2) $\forall x \in \left(-\infty; -\frac{1}{L}\right) \cup \left(\frac{1}{L}; +\infty\right)$ даний ряд розбігається,	степеневий ряд збігається на $\mathbb{R}$,
тобто $D = \{0\}$, $r = 0$ – радіус збіжності;	тобто $\left(-\frac{1}{L}; \frac{1}{L}\right)$ – інтервал збіжності, $r = \frac{1}{L}$ – радіус збіжності;	тобто $D = \mathbb{R}$, $r = \infty$ – радіус збіжності

Доведення. *Випадок I.* Нехай $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=L=\infty$, тоді

$$\left\{\sqrt[n]{|a_n|}\right\} \text{ – необмежена послідовність } \Rightarrow$$

$$\left\{\sqrt[n]{|x|\cdot|a_n|}=|x|\cdot\sqrt[n]{|a_n|}\right\} \text{ – необмежена послідовність } \Rightarrow$$

$$\forall n\in\mathbb{N}\ \exists k_n\in\mathbb{N}:\quad |x|\cdot\sqrt[k_n]{\left|a_{k_n}\right|}>n.$$

Звідки $|x|^{k_n}\cdot\left|a_{k_n}\right|>n^{k_n}>1\quad \forall n\in\mathbb{N}$, тому $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\left|a_{k_n}\right|\cdot|x|^{k_n}=\infty\neq 0$. Це означає, що $\forall x\neq 0$ для ряду не виконується необхідна умова. Отже, $\forall x\neq 0$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ розбігається.

Випадок II. Нехай $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=L<\infty$ і $L\neq 0$.

1) Нехай спочатку $|x|<\dfrac{1}{L}$, тоді $\exists\varepsilon>0:|x|=\dfrac{1}{L+\varepsilon}$. Оскільки $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=L$, то із означення верхньої границі випливає, що $\forall\varepsilon>0$ справа від $L+\varepsilon$ лежить скінченна множина членів послідовності $\left\{\sqrt[n]{|a_n|}\right\}$, а тому зліва – всі члени, починаючи з деякого номера, тобто

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists n_0\in\mathbb{N}:\ \forall n\geq n_0\quad \sqrt[n]{|a_n|}<L+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Маємо:

$$\left.\begin{aligned}&|x|=\frac{1}{L+\varepsilon},\\ &\forall n\geq n_0\quad \sqrt[n]{|a_n|}<L+\frac{\varepsilon}{2},\end{aligned}\right\}\Rightarrow\ |x|\cdot\sqrt[n]{|a_n|}<\frac{L+\frac{\varepsilon}{2}}{L+\varepsilon}=q<1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sqrt[n]{|a_n||x|^n}=|x|\cdot\sqrt[n]{|a_n|}<q<1.$$

Тому за радикальною ознакою Коші (у загальному формулюванні) ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ абсолютно збігається при $|x|<\dfrac{1}{L}$.

2) Тепер розглянемо $|x|>\dfrac{1}{L}$, тоді $\exists\varepsilon>0:|x|=\dfrac{1}{L-\varepsilon}$. Оскільки $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=L$, то за теоремою Больцано-Вейєрштрасса існує підпослідовність $\left\{\sqrt[n_k]{\left|a_{n_k}\right|}\right\}$, яка збігається до L, тоді

$$\forall\varepsilon>0\ \exists k_0:\forall k\geq k_0\ \left|\sqrt[n_k]{\left|a_{n_k}\right|}-L\right|<\varepsilon,$$

звідки

$$L-\varepsilon<\sqrt[n_k]{\left|a_{n_k}\right|}<L+\varepsilon\qquad\forall k\geq k_0.$$

Отже,

$$\sqrt[n_k]{\left|a_{n_k}\right|\cdot|x|^{n_k}}=|x|\cdot\sqrt[n_k]{\left|a_{n_k}\right|}>\frac{L-\varepsilon}{L-\varepsilon}=1\quad\forall k\ge k_0\quad\Rightarrow$$

$$\left|a_{n_k}\right|\cdot|x|^{n_k}>1\ \ \forall k\ge k_0.$$

Тоді послідовність $\left\{a_n x^n\right\}$ не є нескінченно малою, тобто для ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ не виконується необхідна умова при $|x|>\dfrac{1}{L}$, і ряд є розбіжним.

Випадок III. Нехай $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=L$ $=0$ і $x\ne 0$. У наслідок того, що $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=0$ і $\sqrt[n]{|a_n|}\ge 0\quad\forall n\in\mathbb{N}$, приходимо до висновку: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=0$. Оскільки

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=0,\\ |x|\ne 0\Rightarrow\varepsilon=\dfrac{1}{2|x|}>0,\end{array}\right\}\Rightarrow\exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall n\ge n_0\ \sqrt[n]{|a_n|}<\varepsilon=\frac{1}{2|x|}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ |x|\cdot\sqrt[n]{|a_n|}<\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ \sqrt[n]{|a_n||x|^n}<\frac{1}{2}=q,$$

то за радикальною ознакою Коші у загальному формулюванні, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ абсолютно збігається при $x\ne 0$. Оскільки степеневі ряди завжди збігаються при $x=0$, тому степеневий ряд збігається на $\mathbb{R}$, то $D=\mathbb{R}$. ■

Наслідок 2.3 Формула для обчислення радіуса збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$:

$$\boxed{r=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}}}.$$

Можна отримати іншу формулу за умови, що $a_n\ne 0\ \forall n\in\mathbb{N}$:

$$\boxed{r=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|}.$$

§5 Властивості степеневого ряду

1. Неперервність суми степеневого ряду. Почленне диференціювання та інтегрування степеневих рядів

Лема 2.1 Нехай r – радіус збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$, тоді $\forall\rho\in(0,r)$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ рівномірно збігається на відрізку $\left[-\rho;\rho\right]$.

Доведення. Нехай $\rho\in(0,r)$ – фіксоване, тоді $\exists x_1\in\left(\rho;r\right)$. В точці x_1 із інтервалу збіжності степеневий ряд збігається абсолютно, тобто числовий ряд

$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n||x_1|^n$ збігається. Цей ряд є мажорантним рядом для функціонального ряду $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ на $[-\rho;\rho]$, а саме:

$$\left|a_n x^n\right| \le |a_n||x_1|^n \quad \forall x \in [-\rho;\rho].$$

Отже, за ознакою Вейєрштрасса, ряд $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ рівномірно збігається на $[-\rho;\rho]$. ■

Теорема 2.20 *(теорема про неперервність суми степеневого ряду).* Сума степеневого ряду $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ є неперервною функцією на інтервалі збіжності $(-r;r)$, де r - радіус збіжності степеневого ряду.

Доведення. Нехай x_1 – довільна точка інтервалу збіжності $(-r;r)$. Доведемо, що $S(x)$ – неперервна в точці x_1.

Нехай ρ задовольняє нерівності $|x_1|<\rho<r$, тоді $x_1 \in [-\rho;\rho]$. Маємо:

1) за лемою 2.1, ряд $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ рівномірно збігається на $[-\rho;\rho]$ до $S(x)$,

2) члени ряду $u_n(x)=a_n x^n$ – неперервні функції на $[-\rho;\rho]$

Тому $S(x)$ неперервна в точці x_1 (за теоремою про неперервність суми функціонального ряду на $[-\rho;\rho]$). ■

Теорема 2.21 *(теорема про інтегрування степеневих рядів).* Степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ можна почленно інтегрувати на $[0;x]\subset(-r;r)$ (r – радіус збіжності), крім того, радіус збіжності отриманого почленним інтегруванням степеневого ряду буде той самий, що і у вихідного ряду, тобто r.

Доведення. Нехай r – радіус збіжності степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$. Розглянемо $[0;x]\subset(-r;r)$, а ρ задовольняє нерівності $|x_1|<\rho<r$. Маємо:

1) $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ рівномірно збігається на $[-\rho;\rho]$ (за лемою 2.1),

2) $u_n(x)=a_n x^n$ неперервні на $[-\rho;\rho]$ функції,

Тому за теоремою про почленне інтегрування функціональних рядів, ряд $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ можна почленно інтегрувати на будь-якому відрізку $[0;x]\subset(-r;r)$, до того ж

$$\int_0^x \sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x a_n x^n dx = \sum_{n=1}^{\infty}a_n \cdot \left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_0^x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}\cdot x^{n+1}.$$

Коефіцієнт отриманого степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ має вигляд $b_n = \frac{a_{n-1}}{n}$, тому радіус збіжності цього ряду дорівнює

$$r^* = \frac{1}{\overline{\lim_n} \sqrt[n]{\left| \frac{a_{n-1}}{n} \right|}}.$$

Оскільки для вихідного ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$$\frac{1}{r} = \overline{\lim_n} \sqrt[n-1]{\left| a_{n-1} \right|},$$

то

$$\overline{\lim_n} \frac{\sqrt[n]{\left| a_{n-1} \right|}}{\sqrt[n]{n}} = \overline{\lim_n} \left(\sqrt[n-1]{\left| a_{n-1} \right|} \right)^{\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{r},$$

$$r^* = \frac{1}{1/r} = r. \quad \blacksquare$$

Теорема 2.22 *(теорема про диференціювання степеневих рядів)*. Степеневий ряд можна почленно диференціювати всередині інтервалу збіжності, при цьому, отриманий почленним диференціюванням ряд має той самий радіус збіжності, що й вихідний ряд.

Доведення. Нехай $x \in (-r : r)$, а ρ задовольняє нерівності $|x_1| < \rho < r$. Формально почленно продиференціюємо даний ряд:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot n \cdot x^{n-1}.$$

Коефіцієнт отриманого степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ має вигляд $b_k = a_{n+1} \cdot (n+1)$, тому радіус збіжності цього ряду дорівнює

$$r^* = \frac{1}{\overline{\lim_n} \sqrt[n]{|b_n|}};$$

$$\overline{\lim_n} \sqrt[n]{|b_n|} = \overline{\lim_n} \sqrt[n]{|a_{n+1}| \cdot (n+1)} = \overline{\lim_n} \sqrt[n]{n+1} \cdot \sqrt[n+1]{|a_{n+1}|} = \frac{1}{r} = \frac{1}{r^*} \quad \Rightarrow \quad r^* = r.$$

Оскільки

1) $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ рівномірно збігається на $[-\rho; \rho]$, тоді за лемою ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n x^n \right)'$ рівномірно збігається на $[-\rho; \rho]$,

2) $u_n(x) = a_n x^n$ – неперервно диференційовна на $[-\rho; \rho]$,

тобто (за теоремою про почленне диференціювання функціональних рядів) даний степеневий ряд можна було почленно диференціювати. $\blacksquare$

Наслідок 2.4 Степеневий ряд можна почленно диференціювати скільки завгодно разів. Всі ряди, отримані n-кратними диференціюваннями, будуть мати той самий радіус збіжності, що й вихідний ряд.

2. Розвинення функцій в степеневі ряди.

🗀**Означення 2.10** Кажуть, що *функція* $f(x)$ на $(-r;r)$ (на множині $\{x\}$) *може бути розвиненою в степеневий ряд*, якщо існує степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, який поточково збігається до $f(x)$ на $(-r;r)$, тобто

$$\exists \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n : \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x) \quad \forall x \in (-r;r) \quad (x \in \{x\}).$$

В більш загальному випадку

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = f(x) \quad \forall x \in (-r + x_0; r + x_0).$$

Твердження 2.2 *(необхідна умова розвинення функції в степеневий ряд)*. Для того, щоб функцію $f(x)$ можна було розвинути в степеневий ряд на $(-r;r)$ (на множині $\{x\}$) *необхідно*, щоб функція $f(x)$ мала на цьому інтервалі неперервні похідні будь-якого порядку.

Зауваження 2.6. Якщо функція $f(x)$ може бути розвинена на множині A в степеневий ряд, то вона є аналітичною. Зокрема, аналітична функція має неперервні похідні будь-якого порядку.

Доведення твердження. Функція $f(x)$ може бути розвинена в степеневий ряд на $(-r;r)$ (на $\{x\}$), тоді існує степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, який збігається до $f(x)$, тобто $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$ $\forall x \in (-r;r)$ ($x \in \{x\}$)). Відповідно до наслідку 2.4, степеневий ряд можна почленно диференціювати скільки завгодно разів, при цьому будуть отримані степеневі ряди з тими самими радіусами збіжності, що і вихідний ряд:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n x^n\right)^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_{n,k} x^n = f^{(k)}(x) \;\; \forall x \in (-r;r) \;\; (x \in \{x\}).$$

При цьому, за теоремою про неперервність суми степеневого ряду, $f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{n,k} x^n$ являють собою неперервні функції на $(-r;r)$, як суми степеневих рядів всередині їх інтервалів збіжності. ■

Зауваження 2.7 Ця теорема дає лише необхідні умови можливості розвинення функції в степеневий ряд. Ці умови не є достатніми.

Приклад 2.14 Розглянемо функцію

$$f\left(x\right)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, x\neq 0; \\ 0,\ x=0. \end{cases}. \tag{2.15}$$

Ця функція має неперервні похідні будь-якого порядку на $\left(-r;r\right)\forall r>0$, однак вона не може бути розвиненою в степеневий ряд. Пояснення наведемо після Твердження 2.3.

Твердження 2.3 Функція $f\left(x\right)$ може бути розвинена в степеневий ряд єдиним чином.

Доведення. Якщо функція $f\left(x\right)$ може бути розвинена в степеневий ряд на $\left(-r;r\right)$ ($\left\{x\right\}$), то

$$\exists \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f\left(x\right) \text{ на } \left(-r;r\right),$$

тоді

$$f\left(x\right)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+...+a_nx^n+..., \tag{2.16}$$

звідки

$$f\left(0\right)=a_0.$$

Продиференціюємо (2.16) декілька разів і знайдемо значення похідних в точці нуль:

$$f'\left(x\right)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+....+na_nx^{n-1}+..., \qquad f'\left(0\right)=a_1,$$

$$f''\left(x\right)=2a_2+3\cdot 2a_3x+4\cdot 3\cdot 2a_4x^2+...+n\left(n-1\right)a_nx^{n-2}+..., \qquad f''\left(0\right)=2a_2,$$

$$f''\left(x\right)=3\cdot 2a_3+4\cdot 3\cdot 2a_4x+...+n\left(n-1\right)\left(n-2\right)a_nx^{n-3}+..., \qquad f'''\left(0\right)=3!a_3,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$f^{(n)}\left(x\right)=n\left(n-1\right)\left(n-2\right)\cdot...\cdot 2\cdot 1\cdot a_n+..., \qquad f^{(n)}\left(0\right)=n!a_n.$$

Звідки

$$\boxed{a_n=\frac{f^{(n)}\left(0\right)}{n!} \quad \forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\}.} \tag{2.17}$$

Отримано формулу для обчислення коефіцієнтів степеневого ряду, за якою вони можуть бути обчисленими однозначно, отже, і степеневий ряд визначається однозначно. ■

🗁**Означення 2.11** Степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, коефіцієнти якого обчислюються за формулою (2.17), називають *рядом Тейлора*.

Пояснення щодо прикладу 2.14. Доведемо спочатку неперервність функції $f\left(x\right)$ на $\mathbb{R}$. Розглянемо функцію $g\left(x\right)=e^{-\frac{1}{x^2}}$.

$$\left.\begin{array}{l} t = h(t) = \dfrac{1}{x^2} - \text{неперервна на } \mathbb{R}\setminus\{0\}; \\ \varphi(t) = e^t - \text{неперервна на } \mathbb{R}; \end{array}\right\} \Rightarrow g(x) = \varphi(h(t)) \text{ – неперервна на}$$

$\mathbb{R}\setminus\{0\}$ як складена. Оскільки $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \left[e^{-\infty}\right] = 0 = f(0)$, то функція неперервна в точці $x = 0$. Отже, $f(x)$ неперервна на $\mathbb{R}$.

Функція $g'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \dfrac{1}{x^3}$ – неперервна на $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ як добуток функції $g_1(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ і $g_2(x) = \dfrac{1}{x^3}$, неперервних на $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Крім того,

$$\lim_{x\to 0} g'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x^3}}{e^{\frac{1}{x^2}}} = \left\| t = \frac{1}{x} \right\| = \lim_{t\to\infty} \frac{t^3}{e^{t^2}} = 0,$$

оскільки знаменник швидше прямує до нескінченності за чисельник,

$$f'(0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{\Delta x^2}} - 0}{\Delta x} = 0. \qquad (2.18)$$

Отже, похідна даної функції

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^3} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

є неперервною функцією на $\mathbb{R}$. Неперервність кожної похідної $f^{(n)}(x)$ $(n = 2,3,4,...)$ на $\mathbb{R}$ доводиться за допомогою принципу математичної індукції (довести самостійно ✍!).

Тепер пояснимо, чому цю функцію неможливо розвинути в степеневий ряд. Застосуємо формулу (2.17) для знаходження коефіцієнтів степеневого ряду, за якими ряд визначається однозначно. Із (2.15) і (2.18) випливає, що

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0.$$

За індукцією доводяться рівності:

$$f''(0) = f'''(0) = ... = f^{(n)}(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Звідки і із (2.17) отримаємо

$$a_n = 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}.$$

Це означає, що

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \Theta(x) \neq f(x),$$

тут $\Theta(x) \equiv 0$.

Отже, існування на інтервалі неперервних похідних у функції забезпечує лише необхідну умову розвинення функції в степеневий ряд. Таким чином, потрібно сформулювати ще й достатню умову можливості розвинення функції в степеневий ряд.

Теорема 2.23 *(необхідна і достатня умови можливості розвинення функції в степеневий ряд)*. Для того, щоб функцію $f(x)$ можна було розвинути в степеневий ряд на $(-r;r)$, *необхідно і достатньо*, щоб залишковий член у формулі Тейлора, що відповідає цій функції, збігався до функції $\Theta(x)\equiv 0$ на $(-r;r)$ поточково.

Доведення. Розглянемо ряд Тейлора функції $f(x)$:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=S_n(x)+R_n(x),$$

де $S_n(x)$ – часткова сума ряду Тейлора, яка також є сумою в розкладі за формулою Тейлора; $R_n(x)$ – залишковий член ряду Тейлора, який одночасно є залишковим членом у формулі Тейлора.

Згідно з наслідком із критерію Коші збіжності числового ряду (наслідок 1.1) , в кожній точці x_0 інтервалу $(-r;r)$ числовий ряд збігається $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x_0^n$ тоді і лише тоді, коли послідовність його залишків $\{R_n(x_0)\}$ прямує до нуля. Це означає, що $R_n(x)\xrightarrow[(-r;r)]{}\Theta(x)$, тобто залишковий член в формулі Тейлора поточково збігається до функції $\Theta(x)\equiv 0$ на $(-r;r)$. ■

3. Розвинення деяких елементарних функцій в степеневі ряди.

Пригадаємо, що нами на початку в параграфі «Поняття числового ряду» було отримано

$$\boxed{e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\quad \forall x\in\mathbb{R}}, \qquad (2.19)$$

оскільки $R_n(x)\to\theta(x)\quad\forall x\in\mathbb{R}$. Навіть має місце рівномірна збіжність цього ряду на $[-L,L]$, оскільки (див. Приклад 2.5)

$$R_n(x)\xrightarrow[{[-L,L]}]{}\theta(x)\quad\forall L\in\mathbb{R}.$$

В тій же темі було доведено, що мають місце розвинення

$$\boxed{\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+...\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}\quad\forall x\in\mathbb{R}}, \qquad (2.20)$$

$$\boxed{\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{5!}+...\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\quad\forall x\in\mathbb{R}}. \qquad (2.21)$$

Знаючи розклад функції $\ln(1+x)$ за формулою Маклорена, розглянемо ряд

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+...=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}.$$

У зауваженні 2.3 було доведено рівномірну збіжність

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}\xrightarrow[{[0,1]}]{}\ln(1+x)$$

через обґрунтування рівномірної збіжності залишкового члена у формі Лагранжа до $\Theta(x)\equiv 0$ на відрізку $[0,1]$. Пригадаємо, як було проведено оцінювання, щоб зрозуміти чи можливо розширити ці оцінювання на інтервал $(-1;0)$.

Отже, залишковий член у формі Лагранжа має вигляд

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}\cdot x^{n+1},\quad 0<\theta<1.$$

Оскільки $f^{(n+1)}(\theta x)=\dfrac{(-1)^n n!}{(1+\theta x)^{n+1}}$, то на $[0,1]$ маємо $1+\theta x\ge 1$, звідки

$$\left|R_{n+1}(x)\right|=\frac{n!\cdot x^n}{(1+\theta x)^{(n+1)}(n+1)!}\le\frac{n!\cdot 1^n}{1^{(n+1)}(n+1)!}=\frac{1}{n+1}\xrightarrow[{[0,1]}]{}0.$$

Якщо $x\in(-1,0)$, то суму $1+\theta x$ знизу можна оцінити лише нулем, тобто $1+\theta x>0$. Цю оцінку застосовувати в знаменнику не можна. Отже, форма Лагранжа не може бути застосована для дослідження на збіжності ряд на множині $(-1,0)$. Будемо застосовувати на $(-1,0)$. форму Коші залишкового члену:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}\cdot(1-\theta)^n x^{n+1},\quad 0<\theta<1.$$

Маємо:

$$\left|R_n(x)\right|=\frac{n!(1-\theta)^n|x|^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}n!}=\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n\cdot\frac{|x|}{(1+\theta x)}\cdot|x|^n\le$$

$$\le\left\|\begin{array}{l}1+\theta x\ge 1-|\theta x|>1-|x|,\\ q(x,\theta)=\dfrac{1-\theta}{1+\theta x},\end{array}\right\|\le\left(q(x,\theta)\right)^n\cdot\frac{|x|}{1-|x|}\cdot|x|^n.$$

Оскільки $0<\theta<1$, $x\in(-1,0)$, то $1+\theta x\ge 1-\theta|x|>1-\theta>0$, тому $0<q(x,\theta)<1$. Отже, для всіх $x\in(-1,0)$

$$\lim_{n\to\infty}|x|^n=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(q(x,\theta)\right)^n=0 \text{ не залежно від } \theta\in(0;1),$$

$$\frac{|x|}{1-|x|}-\text{не залежить від } n.$$

Звідки випливає, що

$$0 \le \left|R_n(x)\right| \le \left(q(x,\theta)\right)^n \cdot \frac{|x|}{1-|x|} \cdot |x|^n$$

$$\searrow \quad \Downarrow \quad \swarrow \qquad \forall x \in (-1;0)$$

$$0$$

Таким чином, послідовність залишків поточково на інтервалі $(-1;0)$ збігається до функції $\Theta(x) \equiv 0$, тобто

$$R_n(x) \xrightarrow[(-1;0)]{} \Theta(x).$$

Приходимо до висновку:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} = \ln(1+x) \text{ на } [-1;1]} \tag{2.22}$$

Самостійно розглянути доведення існування наступного розвинення [2, с 100]✍:

$$\boxed{\begin{aligned}(1+x)^{\alpha} &= 1+\alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots + \\ &+ \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots \quad \text{на } [-1;1]\end{aligned}} \tag{2.23}$$

Зупинимося на окремих випадках останньої формули. Якщо $\alpha = -1$, то

$$\boxed{\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \text{ на } (-1,1)} \tag{2.24}$$

Розклад цієї функції простіше запам'ятати як суму нескінчнної спадної геометричної прогресії, де

$$b_1 = 1, \quad q = -x, \quad S = \frac{b_1}{1-q}.$$

Якщо покласти $b_1 = 1, \quad q = x$, то отримаємо

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \text{ на } (-1,1)} \tag{2.25}$$

Приклад 2.15 Отримати розклад функції $f(x) = \operatorname{arctg} x$ у степеневий ряд. Вказати інтервал збіжності.

*Розв'язання***.** Отримаємо розклад похідної даної функції, застосовуючи розклад (2.24):

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(x^2\right)^n \text{ на } (-1,1).$$

Всередині інтервалу збіжності, тобто на $(-1;1)$, степеневий ряд можна інтегрувати почленно, отже

$$\int_0^x f'(\overline{x})\,d\overline{x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x \overline{x}^{2n}d\overline{x},$$

$$f(\overline{x})\big|_0^x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left.\frac{\overline{x}^{2n+1}}{2n+1}\right|_0^x,$$

$$f(x)-f(0)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

$$\operatorname{arctg}0=0,$$

звідси

$$\boxed{\operatorname{arctg}x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\ \text{на}\ (-1,1)} \tag{2.26}$$

(при почленному інтегруванні інтервал збіжності зберігається). ■

Із розвинення (2.22) маємо:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}\ \text{ на }(-1,1],$$

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\ldots-\frac{x^n}{n}-\ldots=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\ \text{ на }[-1,1).$$

Звідки

$$\boxed{\begin{aligned}\ln\frac{1+x}{1-x}&=\ln(1+x)-\ln(1-x)=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots\right)=\\&=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\ \text{на}\ (-1,1).\end{aligned}} \tag{2.27}$$

4. Формула Стірлінга.

В розкладі (2.27) покладемо $x=\dfrac{1}{2n+1}\in(-1,1)$, одержимо:

$$\ln\frac{1+\dfrac{1}{2n+1}}{1-\dfrac{1}{2n+1}}=\ln\frac{2n+2}{2n}=\ln\frac{n+1}{n}=$$

$$=2\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+\ldots+\frac{1}{(2k-1)(2n+1)^{2k-1}}+\ldots\right).$$

Тобто

$$\ln\frac{n+1}{n}=\frac{2}{2n+1}\left(1+\frac{1}{3(2n+1)^2}+\frac{1}{5(2n+1)^4}+\ldots\right). \tag{2.28}$$

Помножимо обидві частини останньої рівності на $\dfrac{2n+1}{2}=n+\dfrac{1}{2}$, отримаємо:

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\frac{n+1}{n}=1+\frac{1}{3(2n+1)^2}+\frac{1}{5(2n+1)^4}+\ldots$$

Проведемо оцінювання:

$$1\le\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\frac{n+1}{n}\le1+\frac{1}{3(2n+1)^2}+\frac{1}{3(2n+1)^4}+\ldots=$$

$$=1+\frac{1}{3}\cdot\frac{\frac{1}{(2n+1)^2}}{1-\frac{1}{(2n+1)^2}}=1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4n^2+4n}=1+\frac{1}{12n(n+1)},$$

тобто

$$1\le\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}\le1+\frac{1}{12n(n+1)},$$

$$1\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{e}\le e^{\frac{1}{12n(n+1)}}.$$

Розглянемо послідовність $\left\{a_n=\frac{n!\cdot e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}\right\}$. Оскільки $\frac{a_{n+1}}{a_n}=e\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+\frac{1}{2}}$, то справедливими є нерівності

$$1\underset{(1)}{\le}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{e}\underset{(2)}{\le}e^{\frac{1}{12n(n+1)}},$$

з яких випливає:

$$(1)\Rightarrow a_n\ge a_{n+1}\Rightarrow\left.\begin{cases}\{a_n\}\searrow,\\ a_n\ge0\Rightarrow\{a_n\}-\text{обмежена знизу}\end{cases}\right\}\Rightarrow\exists\lim_n a_n=a\Rightarrow a\le a_n;$$

$$(2)\Rightarrow\frac{a_n}{a_{n+1}}\le e^{\frac{1}{12n(n+1)}}.$$

Оскільки $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$, то друга нерівність може набути вигляду:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}\le\frac{e^{-\frac{1}{12n(n+1)}}}{e^{-\frac{1}{12n}}},\qquad\frac{a_n\cdot e^{-\frac{1}{12n}}}{a_{n+1}\cdot e^{-\frac{1}{12n(n+1)}}}\le1.$$

Із останньої нерівності випливає, що послідовність $\left\{a_n\cdot e^{-\frac{1}{12n}}\right\}$ зростає. Отже,

$$\left.\begin{array}{l}\left\{a_n\cdot e^{-\frac{1}{12n}}\right\}\nearrow;\\ \lim\limits_n a_n=a;\\ \lim\limits_n e^{-\frac{1}{12n}}=1;\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_n a_n\cdot e^{-\frac{1}{12n}}=a\Rightarrow a_n\cdot e^{-\frac{1}{12n}}\le a.$$

Зважаючи на те, що $a\le a_n$, в результаті отримаємо:

$$a_n\cdot e^{-\frac{1}{12n}}\le a\le a_n.$$

Отже,

$$\exists\theta_n\in(0;1):\ a=a_n\cdot e^{-\frac{\theta_n}{12n}},$$

тобто

$$a=\frac{n!\cdot e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}\cdot e^{-\frac{\theta_n}{12n}}.$$

Таким чином,

$$n!=a\cdot n^{n+\frac{1}{2}}\cdot e^{-n}\cdot e^{\frac{\theta_n}{12n}}\quad 0<\theta_n<1. \tag{2.29}$$

Знайдемо a, застосувавши формулу Валіса [6, с. 110],

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\cdot\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2=\frac{\pi}{2}$$

та отриману рівність (2.28);

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{\left[(2n)!!\right]^4}{\left[(2n)!\right]^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{2^{4n}(n!)^4}{\left[(2n)!\right]^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{2^{4n}\cdot a^4\cdot n^{4n}\cdot n^2\cdot e^{-4n}\cdot e^{-\frac{\theta_n}{3n}}}{a^2\cdot(2n)^{4n}\cdot(2n)\cdot e^{-4n}\cdot e^{\frac{\theta_{2n}}{12n}}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a^2\cdot n}{(2n+1)\cdot 2}=\frac{a^2}{4}.$$

Тобто $\frac{\pi}{2}=\frac{a^2}{4}\Rightarrow a=\sqrt{2\pi}$.. Підставляючи знайдене значення a у рівність (2.29), отримаємо формулу Стірлінга[1]:

$$\boxed{n!=\sqrt{2\pi n}\cdot n^n\cdot e^{(-n)}\cdot e^{\frac{\theta_n}{12n}},\quad 0<\theta_n<1} \tag{2.30}$$

[1] **Джеймс Стірлінг** (англ. *James Stirling*; травень 1692— † 5 грудня 1770) —шотландський математик

§6 Застосування функціональних і степеневих рядів

1. Обчислення значень функцій та інтегралів за допомогою степеневих рядів

Припустимо, що функція $f(x)$ допускає розвинення у степеневий ряд

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n, \qquad x\in(-r,r),$$

де r – його радіус збіжності. Нехай $x_0\in\left(-r,r\right)$ (у випадку, коли кінець інтервалу збіжності є точкою збіжності степеневого ряду, то x_0 можна обрати рівним йому). Потрібно знайти $f(x_0)$.

Оскільки в точці x_0 ряд збігається, то

$$f(x_0)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x_0^n=\underbrace{a_0+a_1x_0+\ldots+a_nx_0^n}_{S_n-\text{часткова сумма}}+\underbrace{r_n}_{\text{залишок}}.$$

Будемо наближено замінювати $f(x_0)$ частковою сумою останнього ряду, тобто $f(x_0)\approx S_n$. Яка точність цієї наближеної рівності? Відповідь на це запитання дає оцінка залишку ряду $\left|r_n\right|$. Мета: оцінити $\left|r_n\right|$. Можливі такі два типи числового ряду $\sum_{m=0}^{\infty}a_n x_0^n$:

1) ряд знакопочережний, Лейбніцевого типу,
2) ряд іншого типу.

У першому випадку, коли ряд є рядом Лейбніцевого типу, тобто рядом типу $\sum(-1)^n C_n:\ \left\{C_n\right\}\searrow\wedge C_n\to 0$, тоді залишок цього ряду не перевищує модуля першого відкинутого члена, тобто $\left|r_n\right|\le c_{n+1}=\left|a_{n+1}x_0^{n+1}\right|$.

У другому випадку потрібно застосувати штучний спосіб, як правило, оцінюючи сумою геометричної прогресії.

Точність наближеного обчислення буде дорівнювати сумі похибок округлення кожного із членів ряду в частковій сумі і оцінки зверху залишку ряду. Тому, якщо обчислення ведуться до 10^{-2}, округлення членів ряду краще робити до значущого знаку з номером, більшим за 2.

Приклад 2.16 Знайти наближене значення $\cos 5^0$ з точністю 10^{-4}.

Розв'язання.

$$\cos 5^0=\cos\frac{\pi}{36}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\left(2n\right)!}\cdot\left(\frac{\pi}{36}\right)^{2n}=1-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{36}\right)^2+r_1\approx$$
$$\approx 1-0{,}003808=0{,}99619\quad\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\cos 5^0\approx 0{,}99619.$$

Знайдемо точність наближеного значення. Оскільки $\left\{C_n = \frac{1}{(2n)!}\cdot\left(\frac{\pi}{36}\right)^n\right\}\searrow$, $C_n \to 0$, то цей ряд Лейбницевого типу. Оцінимо його залишок, що відповідатиме оцінці точності:

$$|r_1| \le \left|\frac{(-1)^3}{(2\cdot 2)!}\cdot\left(\frac{\pi}{36}\right)^{2\cdot 2}\right| = \frac{1}{24}\cdot\left(\frac{\pi}{36}\right)^4 < 10^{-5}.$$

Відповідь: $\cos 5^0 \approx 0{,}9962 \pm 10^{-4}$. ■

При наближеному обчисленні $\cos x$ аргумент x вважається малим, таким що $|x|<1$. Якщо аргумент x – великий, то потрібно застосувати формули зведення або інші тригонометричні формули.

Наприклад, щоб знайти наближене значення, можна спочатку зробити такі перетворення

$$\cos 50^0 = \cos\left(45^0 + 5^0\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\underbrace{\cos 5^0}_{\text{наближено обчислене}} - \underbrace{\sin 5^0}_{\text{аналогічно можна обчислити}}\right) = \ldots,$$

а потім обчислити наближені значення $\cos 5^0$ і $\sin 5^0$ так, як одне з них було отримано в прикладі 2.16.

При розв'язанні наступного прикладу корисною буде теорема.

Теорема 2.24 *(теорема Абеля)* [13, с. 82]. Якщо дійсний степеневий ряд збігається в точці $x=r$, $r>0$, тоді його сума $S(x)$ являє собою значення неперервної зліва функції в цій точці, тобто

$$S(r) = \lim_{x\to r-0} S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n.$$

Аналогічне твердження є справедливим й для лівого кінця інтервалу збіжності.

Приклад 2.17 Обчислити наближено значення числа π з точністю 0,01.

*Розв'язання***.** Застосовуємо формулу (2.26) розвинення в степеневий ряд функції $f(x) = \operatorname{arctg} x$:

$$f(x) = \operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1},\ x\in(-1;1).$$

Цей ряд збігається в точці x_0=1, тобто в правому кінці інтервалу збіжності (за ознакою Лейбніца), функція $f(x)$ неперервна (зліва) в цій точці. Звідки випливає (за теоремою 1ю24), що значення функції в точці x_0=1 буде збігатися із значенням суми степеневого ряду в цій точці. Отже,

$$\pi = 4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} \underset{\text{точно до } 10^{-2}}{\approx} \underbrace{4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}\right)}_{n-\text{часткова сума}}.$$

Тут $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k C_k$, $\left\{C_k = \frac{1}{2k+1}\right\}\searrow$, $C_k \to 0$. Цей ряд Лейбницевого типа. Знайдемо кількість n доданків для досягнення зазначеної точності $0{,}01$:

$$|r_n| \le \left|\frac{(-1)^{n+2}}{2n+3}\right| = \frac{1}{2n+3} < 10^{-2} = \frac{1}{100}$$

$$2n+3 > 100,$$
$$n \ge 49.$$

Тобто, якщо взяти 49+1 доданків в частковій сумі, то отримаємо точність 0,01:

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{99}\right) \pm 10^{-2} = 3{,}14 \pm 10^{-2}. \ \blacksquare$$

Приклад 2.18 Виписати схему наближеного обчислення значення $\lg 11$.

*Розв'язання***.** Спочатку зробимо перетворення:

$$\lg 11 = \lg(1+10) = \lg 10\left(1+\frac{1}{10}\right) = \lg 10 + \lg\left(1+\frac{1}{10}\right) = 1 + \frac{1}{\ln 10}\cdot\ln\left(1+\frac{1}{10}\right).$$

Для обчислення шуканого значення потрібно обчислити:

1) $\ln\left(1+\frac{1}{10}\right)$.

2) $\ln 10$,

Для розв'язання першої із зазначених задач застосуємо розклад (2.22):

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n, \quad x \in (-1,1].$$

Оскільки $\frac{1}{10} << 1$, то $\ln\left(1+\frac{1}{10}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\frac{1}{10^n}$. Цей ряд Лейбніцевого типу:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n C_n, \ \left\{C_n = \frac{1}{n\cdot 10^n}\right\}\searrow, \ C_n \to 0,$$

тому наближена рівність

$$\ln\left(1+\frac{1}{10}\right) \underset{\uparrow}{\approx} \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{2\cdot 10^2} + \frac{1}{3\cdot 10^3}\right) \approx 0{,}0953$$

має точність

$$\left|r_3^{1,1}\right| \le \left|\frac{(-1)^5}{4\cdot 10^4}\right| < 10^{-4}.$$

Висновок 1: $\ln\left(1+\frac{1}{10}\right) = 0{,}0953 \pm 0{,}0001$

Для реалізації другої задачі скористаємось наступною схемою обчислення $\ln n$, $n \in \mathbb{N}$. Застосуємо формулу (2.28):

$$\ln\frac{1+n}{n} = \frac{2}{2n+1}\left(1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(2n+1)^4} + \ldots + \frac{1}{2k+1}\cdot\frac{1}{(2n+1)^{2k}} + \ldots\right).$$

Покладемо спочатку $n=1$, тоді

$$\ln 2\approx\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^4}+\ldots+\frac{1}{2k+1}\cdot\frac{1}{3^{2k}}\right).$$

Цей ряд не є знакопочережним, тому його залишок будемо мажорувати геометричною прогресією:

$$r_k^2=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2k+3}\cdot\frac{1}{3^{2k+2}}+\frac{1}{2k+5}\cdot\frac{1}{3^{2k+4}}+\ldots\right)\le\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2k+3}\left(\frac{1}{3^{2k+2}}+\frac{1}{3^{2k+4}}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2k+3}\cdot\frac{1/3^{2k+2}}{1-1/9}.$$

При $k=8$ оцінка залишку набуде вигляду:

$$r_8^2\le\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{19}\cdot\frac{1/3^{18}}{1-1/9}<\frac{2}{10^{10}}<10^{-9}.$$

Таким чином,

$$\ln 2=\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^4}+\ldots+\frac{1}{2\cdot 8+1}\cdot\frac{1}{3^{16}}\right)\pm10^{-9}=0,693147181\pm10^{-9}. \quad (2.31)$$

Підставляємо $n=2$ в (2.28):

$$\ln\frac{3}{2}=\ln 3-\ln 2=\frac{2}{5}\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^2}+\ldots\right)\;\Rightarrow\;\ln 3=\ln 2+\frac{2}{5}\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^2}+\ldots\right).$$

Таким чином можна знайти значення $\ln 3$. Припустимо, що значення $\ln(N-1)$ вже відоме, тоді в (2.28) підставляємо $n=N-1$, звідки

$$\ln N=\ln\left(N-1\right)+\frac{2}{2N-1}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\cdot\frac{1}{\left(2N-1\right)^{2k}}. \quad (2.32)$$

Це дасть можливість отримати значення $\ln N$. Формула (2.32)є рекурентною формулою обчислення таких значень. Зокрема, для обчислення $\ln 10$ проведемо наступні викладки:

$$\ln 10=\ln 2+\ln 5\overset{(1.32)}{=}\ln 2+\ln 4+\frac{2}{2\cdot5-1}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\cdot\frac{1}{\left(2\cdot5-1\right)^{2k}}\approx$$

$$\approx 3\cdot\ln 2+\frac{2}{9}\cdot\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9^2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{9^4}\right)\overset{(1.31)}{\approx}3\cdot0,693147+0,223143=2,302584;$$

$$r_k^{10}=\frac{2}{9}\left(\frac{1}{2k+3}\cdot\frac{1}{9^{2k+2}}+\frac{1}{2k+5}\cdot\frac{1}{9^{2k+4}}+\ldots\right)\le\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{2k+3}\cdot\frac{1/9^{2k+2}}{1-1/81};$$

$$r_2^{10}\le\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1/9^6}{1-1/81}<10^{-7};$$

$$\ln 10=2,30258\pm10^{-5}.$$

Отже, $\lg 11=\lg(1+10)=1+\dfrac{1}{\ln 10}\cdot\ln\left(1+\dfrac{1}{10}\right)=1+\dfrac{0,0953\pm10^{-4}}{2,30258\pm10^{-5}}=1,0414\pm10^{-4}$. ■

Приклад 2.19 Описати схему наближеного обчислення $\lg 5,1$.

*Розв'язання***.** Для обчислення значення $\lg 5{,}1$ робимо спочатку перетворення:

$$\ln 5{,}1 = \lg(5+0{,}1) = \lg 5 + \ln\left(1+\frac{0{,}1}{5}\right) = \frac{\ln 5}{\ln 10} + \frac{1}{\ln 10}\cdot\ln\left(1+0{,}02\right) = \\ = \frac{\ln 10 - \ln 2}{\ln 10} + \frac{1}{\ln 10}\cdot\ln\left(1+0{,}02\right) = 1 - \frac{1}{\ln 10}\left(\ln\left(1+0{,}02\right) - \ln 2\right).$$

У попередньому прикладі було отримано наближені значення $\ln 2$ і $\ln 10$. Для наближеного обчислення $\ln\left(1+0{,}02\right)$ потрібно застосувати (2.22), а точність наближення отримати оцінкою залишку ряду Лейбніцевого типу. ■

Приклад 2.20 Наближено обчислити значення числа e.

*Розв'язання***.** В розкладі (2.19) $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, $x\in\mathbb{R}$ обираємо $x=1$:

$$e^1 = e = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots.$$

Випишемо наближену рівність

$$e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!},$$

знайдемо її точність:

$$r_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\cdot\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)} + \ldots\right) <$$

$$< \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{\left(n+2\right)^2} + \frac{1}{\left(n+2\right)^3} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{n+2}} = \frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{n!}\cdot\frac{n+2}{\left(n+1\right)^2} = \left[n=5\right] = \frac{1}{120}\cdot\frac{7}{36} < \frac{1}{100}.$$

Маємо: $e = \left(2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!}\right) \pm 10^{-2} = 2{,}72 \pm 10^{-2}$. ■

Для обчислення такого інтеграла отримуємо розклад його підінтегральної функції $f(x)$ в степеневий ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Припустимо, що такий ряд має інтервал збіжності, що містить в собі відрізок інтегрування, тобто $\left[a,b\right]\subset\left(-r,r\right)$, де r - радіус збіжності. Тоді (за теоремою про інтегрування степеневих рядів) на такому відрізку ряд можна проінтегрувати почленно. В результаті отримаємо певний числовий ряд:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}.$$

Суму цього ряду наближено замінюємо частковою суму, а залишок оцінюємо так, як зазначено в попередньому пункті.

Приклад 2.21 Наближено обчислити інтеграл $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ з точністю 0,001.

*Розв'язання***.** Цей інтеграл не береться в елементарних функціях. Застосовуємо до його обчислення зазначений алгоритм.

Скористаємося розкладом (2.19) $e^t = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!};\ \ t\in\mathbb{R}$ при $t = x^2$. Оскільки $t = x^2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$, то інтервалом збіжності є вся числова пряма $(-\infty;\infty)$. Відрізок інтегрування лежить всередині інтервалу збіжності ($[0,1]\subset(-\infty;\infty)$), тому на відрізку $[0,1]$ степеневий ряд можна почленнно інтегрувати. Маємо:

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-x^2\right)^n}{n!}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\cdot\left.\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right|_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!(2k+1)} =$$

$$= 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2!\cdot5}-\frac{1}{3!\cdot7}+\frac{1}{4!\cdot9}+\ldots$$

Цей ряд задовольняє ознаці Лейбніца, тому

$$|r_n| \le \frac{1}{(n+1)!(2n+3)} < [n=5] < 10^{-3}.$$

Висновок: $\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2!\cdot5}-\frac{1}{3!\cdot7}+\frac{1}{4!\cdot9}-\frac{1}{5!\cdot11} = 0,747$ з точністю 0,001. ■

2. Приклади неперервних ніде недиференційованих функцій

Приклад Коші. Першість в наведенні такого прикладу належить Коші. Він розглянув функцію, що є сумою ряду

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{a^n\cdot\cos\left(b^n\cdot\pi x\right)}_{u_n(x)},\qquad 0<a<1,$$

тут b – непарне натуральне число таке, що $b-a>1+3/2\pi$.

$$\left.\begin{array}{ccc} \left|a^n\cdot\cos\left(b^n\cdot\pi x\right)\right| & \le & a^n\ ; \\ \overset{\to}{\underset{\mathbb{R}}{\to}} & \underset{\text{(озн. Вейєрштрасса)}}{\Leftarrow} & \underset{\text{збігається}}{\sum_m a^n} \\ u_n(x) - \text{неперервна на } \mathbb{R}; & & \end{array}\right\} \underset{\substack{\text{теорема}\\ \text{про непер. суми}\\ \text{функц. ряду}}}{\Rightarrow} f(x) - \text{неперервна на } \mathbb{R}.$$

Якщо неперервність функції Коші перевіряється нескладно, то її властивість ніде недиференційовность є нелегкою вправою. Полишимо цей приклад и розглянемо більш простий приклад ван-дер-Вардена.

Ідея прикладу ван-дер-Вардена полягає у наступному. В прикладі Коші членами ряду є тригонометричні функції, що коливаються. В цьому прикладі тригонометричні функції, що коливаються замінюються ламаними $u_n(x)$, що коливаються, а шукана неперервна, ніде недиференційована функція є сумою ряду, що утворена з них: $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n(x)$.

Приклад ван-дер-Вардена. Розглянемо функцію

$$u_0(x)=\min\{x-[x];\ [x]+1-x\}.$$

Оскільки $[x]\le x\le [x]+1$, то $u_0(x)$ – це відстань між x і найближчим до нього цілим числом. Функція $u_0(x)$ має період 1. Її графік має вигляд ламаної.

Нехай $u_n(x)=\dfrac{u_0(4^n\cdot x)}{4^n}$, тоді ця функція

1) періодична з найменшим періодом $T_n=\dfrac{1}{4^n}$,

2) лінійна на кожному з відрізків: $\left[\dfrac{s}{2\cdot 4^n},\dfrac{s+1}{2\cdot 4^n}\right]$, $s\in\mathbb{Z}$,

3) $|u_n(x)|\le\dfrac{1}{2\cdot 4^n}$ $\forall x\in\mathbb{R}$,

4) $u_n(x)$ - неперервна на $\mathbb{R}$.

Розглянемо функцію $\boxed{f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n(x)}$.

$$\left.\begin{array}{l} |u_n(x)| \quad \le \quad \dfrac{1}{2\cdot 4^n}; \\ \underset{\mathbb{R}}{\overrightarrow{\rightarrow}} \quad \underset{\text{(озн. Вейєрштрасса)}}{\Leftarrow} \quad \text{зб.} \\ u_n(x)-\text{неперервна на}\,\mathbb{R}; \end{array}\right\}\Rightarrow f(x)$$

– неперервна на $\mathbb{R}$ (за теоремою про неперервність суми функціонального ряду).

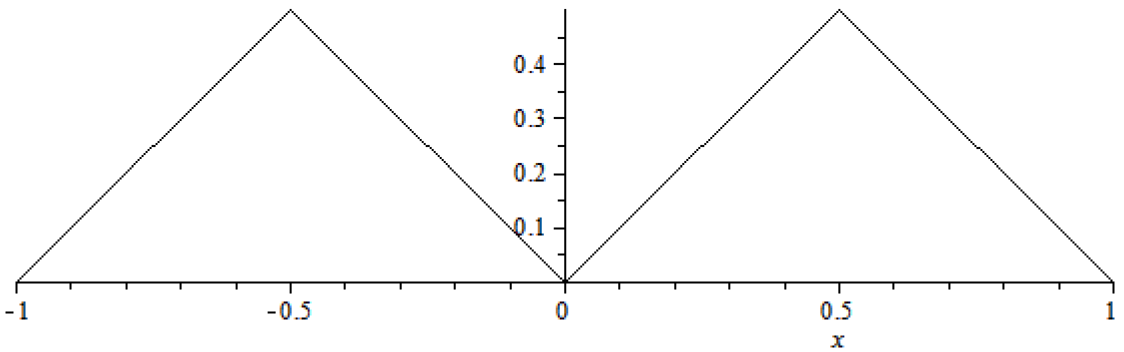


Рис. 2.6 Графік функції $y=u_0(x)$

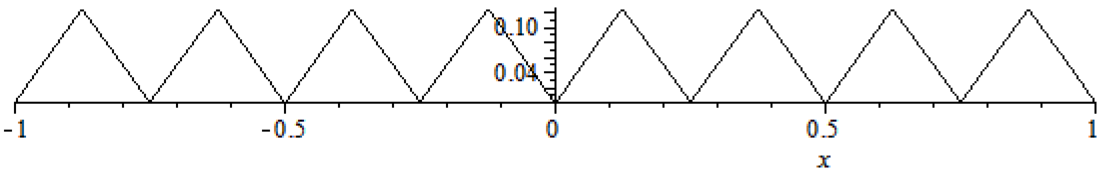


Рис. 2.7 Графік функції $y=u_1(x)$

Нехай $x_0\in\mathbb{R}$ – довільна фіксована точка. Знайдемо відрізок лінійності кожної функції $u_n(x)$, якому належить ця точка, тобто

$$\forall\, n\in\mathbb{N}\ \exists\ s_n\in\mathbb{Z}:\ x_0\in\left[\frac{s_n}{2\cdot 4^n},\frac{s_n+1}{2\cdot 4^n}\right].$$

В кожному із знайдених відрізків $\left[\frac{s_n}{2\cdot 4^n},\frac{s_n+1}{2\cdot 4^n}\right]$ відшукаємо точку x_n, віддалену від x_0 на половину довжини цього відрізка, тобто

$$\exists x_n\in\left[\frac{s_n}{2\cdot 4^n},\frac{s_n+1}{2\cdot 4^n}\right]:\quad |x_n-x_0|=\frac{1}{4^{n+1}}.$$

Утворена послідовність $\{x_n\}$ збігається до x_0.

Розглянемо різницеве відношення

$$\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{u_k(x_n)-u_k(x_0)}{x_n-x_0}.$$

Функція $u_{n+1}(x)$ має період в 4 рази менший за період функції $u_n(x)$. Тому $\forall\, k>n\Rightarrow T_k=\frac{1}{4^{k-n}}\cdot T_n$. Отже, точки x_n і x_0 розташовуються так, що відстань між ними дорівнює періоду кожної з функцій $u_k(x)$ при $k>n$, тому $\forall k>n$ значення функцій $u_k(x)$ в точках x_n і x_0 збігаються, тобто

$$u_k(x_n)=u_k(x_0)\ \forall\, k>n\ .$$

Звідки випливає, що всі члени ряду різницевого відношення дорівнюють нуль, починаючи з номера $n+1$, і

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{u_k(x_n)-u_k(x_0)}{x_n-x_0}=\sum_{k=0}^{n}\frac{u_k(x_n)-u_k(x_0)}{x_n-x_0}.$$

Ланки ламаної, що відповідають графіку функції $u_n(x)$, мають кути нахилу або 45^0, або 135^0, тому тангенси цих кутів дорівнюють ±1. Оскільки відношення $\frac{u_k(x_n)-u_k(x_0)}{x_n-x_0}$ характеризує тангенс кута нахилу тієї ланки ламаної функції u_k, якому відповідають точки x_n і x_0, то $\frac{u_k(x_n)-u_k(x_0)}{x_n-x_0}=\pm1$.

Приходимо до висновку:

$$\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}=\sum_{k=0}^{n}(\pm1)=z_n.$$

Отримана послідовність $\{z_n\}$ – це послідовність цілих чисел. Отже:

якщо n – парне, тоді z_n – непарне ціле число;

якщо n – непарне тоді z_n – парне.

Такий висновок пояснюється тим, що для непарного n маємо суму із парної кількості ± 1, яка буде парним числом; аналогічно для парного n.

Послідовність цілих чисел в чергуванні «парне-непарне» не може бути збіжною, тому що послідовність цілих чисел збігається тоді і лише тоді, коли вона є стаціонарною.

Висновок: послідовність $\{z_n\}=\left\{\dfrac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}\right\}$ є розбіжною, а отже, функція $f(x)$ в точці x_0 – недиференційовна. Таким чином, $f(x)$ – недиференційовна в кожній точці дійсної осі, тому вона ніде недиференційовна, хоча неперервна скрізь. ■

3. Теорема Вейєрштрасса про рівномірне наближення неперервної функції послідовністю многочленів

Теорема 2.25 (*теорема Вейєрштраса про рівномірне наближення неперервної функції послідовністю многочленів*).

$\forall\ f(x)-$ неперервна на $[a;b]$ $\exists\{P_n(x)\}-$ послідовність многочленів, яка рівномірно збігається до даної функції на відрізку $[a;b]$, тобто $P_n(x)\underset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$.

Доведення. Етап I.

а) Розглянемо $\varphi:[0,1]\to[a,b]$ – таку функцію, що переводить відрізок $[0,1]$ в відрізок $[a,b]$, наприклад, $x=\varphi(t)=a+t(b-a)$. Тоді складена функція $f(\varphi(t))$ задається на $[0,1]$ і неперервна на цьому відрізку як композиція неперервних функцій $f(x)$ і $\varphi(t)$.

Висновок 1: без обмеження загальності міркувань (Б.О.З.М.) можна вважати, що $\boxed{f(x) \text{ задана і неперервна на відрізку } [0,1]}$.

б) Розглянемо $q(x)=f(x)-f(0)-x\cdot(f(1)-f(0))$, тоді

$q(1)=f(1)-f(0)-1\cdot(f(1)-f(0))=0$,

$q(0)=f(0)-f(0)-0=0$.

Побудуємо послідовність многочленів $\{F_n(x)\}$, яка рівномірно збігається на $[0,1]$ до $f(x)$, тобто $F_n(x)\underset{[0,1]}{\rightrightarrows} f(x)$. Розглянемо послідовність $\{G_n(x)=F_n(x)+f(0)+x\cdot[f(1)-f(0)]\}$. Оскільки $\{F_n(x)\}$ – послідовність многочленів, а $f(0)+x\cdot[f(1)-f(0)]$ – многочлен 1 степеня, то $\{G_n(x)\}$ – послідовність многочленів. Окрім того,

$$G_n(x)=F_n(x)+f(0)+x\cdot[f(1)-f(0)]\underset{[0,1]}{\rightrightarrows} f(x)-f(0)+x\cdot[f(1)-f(0)]=q(x),$$

тобто $G_n(x) \underset{[0,1]}{\rightrightarrows} q(x)$.

Висновок 2: Б.О.З.М. можна вважати, що $\boxed{f(0) = f(1) = 0}$, причому це обмеження не впливає на рівномірну збіжність на $[0,1]$ послідовності многочленів до $f(x)$.

в) Продовжимо задану функцію на всю числову пряму:

$$f(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0,1]; \\ 0, & x \notin [0,1]. \end{cases}$$

Така функція – неперервна на $\mathbb{R}$.

Висновок 3: Б.О.З.М. можна вважати, що $f(x)$ задана і $\boxed{\text{неперервна на } \mathbb{R}, \text{ а зовні } [0,1] \text{ обертається в нуль.}}$

<u>*Етап II*</u>. Розглянемо допоміжну послідовність многочленів степеня $2n$:

$$Q_n(x) = C_n\left(1 - x^2\right)^n.$$

<u>По-перше</u>, оцінимо C_n зверху за умови, щоб $\int\limits_{-1}^{1} Q_n(x)dx = 1$.

а) Доведемо справедливість нерівності

$$\left(1 - x^2\right)^n \geq 1 - nx^2 \quad \forall\ x \in [-1,1],$$

яка еквівалентна нерівності

$$(1-t)^n \geq 1 - nt \quad \forall\ t \in [0,1]$$

(де $t = x^2$).

Для цього введемо функцію $\psi(t) = (1-t)^n - 1 + nt$, яку дослідимо на монотонність:

$$\psi'(t) = -n(1-t)^{n-1} + n = n(1-(1-t)^{n-1}) > 0 \qquad \forall\ t \in [0,1],$$

$$\Rightarrow \quad \psi(t) \nearrow \text{ на } [0,1].$$

Звідси маємо:

$$\left.\begin{array}{l} \psi(0) = 0, \\ t \geq 0, \\ \psi(t) \nearrow, \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi(t) \geq \psi\left(0\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(1-t\right)^n - 1 + nt \geq 0 \quad \forall\ t \in [0,1].$$

б) Оцінимо інтеграл

$$\int\limits_{-1}^{1}\left(1 - x^2\right)^n dx = 2\int\limits_{0}^{1}\left(1 - x^2\right)^n dx \geq 2\int\limits_{0}^{1/\sqrt{n}}\left(1 - x^2\right)^n dx \geq$$

$$\geq 2\int\limits_{0}^{1/\sqrt{n}}\left(1 - nx^2\right) dx = 2\left(x - n\frac{x^3}{3}\bigg|\right)\Bigg|_{0}^{1/\sqrt{n}} = 2\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{n}{3n\sqrt{n}}\right) = \frac{4}{3\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Висновок: якщо $\int\limits_{-1}^{1} Q_n(x)dx = 1$, то

$$1=\int_{-1}^{1}Q_n(x)dx=\int_{-1}^{1}C_n\left(1-x^2\right)^n dx\ge C_n\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\quad\Rightarrow\quad\boxed{C_n\le\sqrt{n}}.$$

<u>По-друге</u>, розглянемо $x\in[-1;-\delta]\cup[\delta;1]$, тобто $\delta\le|x|\le 1$, і дослідимо функціональну послідовність $\left\{Q_n(x)=C_n\left(1-x^2\right)^n\right\}$ на рівномірну збіжність до $\Theta(x)\equiv 0$:

$$0\le\sup_{x\in[-1;-\delta]\cup[\delta;1]}\left|Q_n(x)-\Theta(x)\right|=\sup_{x\in[-1;-\delta]\cup[\delta;1]}C_n\left(1-x^2\right)^n\le\sqrt{n}\left(1-\delta^2\right)^n$$

$$\searrow\qquad\downarrow\qquad\swarrow\qquad n\to\infty$$

$$0$$

Висновок: $\boxed{Q_n(x)\underset{[-1;-\delta]\cup[\delta;1]}{\longrightarrow}\Theta(x)\equiv 0}$.

<u>*Етап III.*</u> Розглянемо $P_n(x)=\int_{-1}^{1}f(x+t)Q_n(t)dt$.

а) Доведемо, що $P_n(x)$ – многочлен степеня $2n$. В наслідок висновків етапу I, співвідношення $f(x+t)\ne 0$ має місце, якщо $t\in[-x;1-x]$, тому

$$P_n(x)=\int_{-1}^{1}f(x+t)Q_n(t)dt=$$

$$=\int_{-x}^{1-x}f(x+t)\cdot Q_n(t)dt=\left|\begin{array}{ll}u=x+t & t=u-x\\ \begin{array}{c|c|c}t&-x&1-x\\ \hline u&0&1\end{array} & dt=du\end{array}\right|=\int_{0}^{1}f(u)Q_n(u-x)du.$$

Зовнішня змінна x знаходиться під знаком многочлена Q_n. Оскільки $\deg Q_n=2n$, то після інтегрування за змінною u, отримаємо многочлен $P_n(x)$ степені $2n$ відносно змінної x. *Висновок:* $\deg P_n(x)=2n$.

б) Доведемо, що $P_n(x)\underset{[0,1]}{\longrightarrow}f(x)$. Знаючи, що $\int_{-1}^{1}Q_n(x)dx=1$, проведемо перетворення:

$$\underline{\underline{\left|P_n(x)-f(x)\right|}}=\left|\int_{-1}^{1}f(x+t)Q_n(t)dt-f(x)\underbrace{\int_{-1}^{1}Q_n(t)dt}_{=1}\right|\le$$

$$\le\int_{-1}^{1}\left|f(x+t)-f(x)\right|Q_n(t)dt=\int_{-1}^{\delta}+\int_{-\delta}^{\delta}+\int_{\delta}^{1}\quad.\qquad(2.33)$$

Для визначення δ зауважимо, що
$f(x)$ – неперервна на $[-1;1]\Rightarrow f(x)$ – рівномірно неперервна на $[-1;1]$:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\forall\ x',x''\in[-1,1]\quad|x'-x''|<\delta\Rightarrow\left|f(x')-f(x'')\right|<\frac{\varepsilon}{2}.\qquad(2.34)$$

Під знаком другого інтеграла (2.33) можна застосувати нерівність (2.34):

$$\left.\begin{array}{l} x''=x, \\ x'=x+t, \\ |t|<\delta, \end{array}\right\} \Rightarrow \left|f(x+t)-f(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.35}$$

Знайдемо діапазон зміни аргументів під знаком функції f в першому і третьому інтегралах (2.33): $x\in[0,1]$, $t\in[-1,1]$, $x+t\in[-1,2]$. Це дозволяє застосувати висновок 3 етапу I. А саме: $f(x)$ – неперервна на $[-1;2]\Rightarrow$ обмежена на $[-1;2]\Rightarrow$

$$\exists\, A>0:\forall\, x\in[-1;2]\ \ |f(x)|\le A. \tag{2.36}$$

Зафіксуємо знайдене δ і на тій же множині $[-1;-\delta]\cup[\delta;1]$ застосуємо висновок етапу II:

$$Q_n(x)\underset{[-1;\delta]\cup[\delta;1)}{\longrightarrow}\Theta(x)\Rightarrow \underline{\underline{\forall\varepsilon>0\ \exists\, n_0\in N\quad \forall n\ge n_0}}$$

$$|Q_n(x)|<\frac{\varepsilon}{8A}\ \ \forall x\in[-1;-\delta]\cup[\delta;1]. \tag{2.37}$$

Отже, для продовження оцінки в (2.33) застосуємо нерівності (2.35)–(2.37):

$$\underline{\underline{|P_n(x)-f(x)|}}\le\int_{-1}^{\delta}+\int_{-\delta}^{\delta}+\int_{\delta}^{1}\ \le\int_{-\delta}^{\delta}\underbrace{|f(x+t)-f(x)|}_{<\varepsilon/2\quad(1.35)}\,Q_n(t)dt+$$

$$+\int_{-1}^{-\delta}\underbrace{|f(x+t)-f(x)|}_{\le 2A\quad(1.36)}Q_n(t)dt+\int_{\delta}^{1}\underbrace{|f(x+t)-f(x)|}_{\le 2A\quad(1.36)}\,Q_n(t)dt\le$$

$$\le\frac{\varepsilon}{2}\underbrace{\int_{-\delta}^{\delta}Q_n(t)dt}_{\le\int_{-1}^{1}Q_n(t)dt=1}+2A\left(\int_{-1}^{-\delta}\underbrace{Q_n(t)}_{<\frac{\varepsilon}{8A}\quad(3)}dt+\int_{\delta}^{1}\underbrace{Q_n(t)}_{<\frac{\varepsilon}{8A}\quad(3)}dt+\right)<\frac{\varepsilon}{2}+2A\cdot\frac{\varepsilon}{4A}\underbrace{(1-\delta)}_{<1}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\underline{\underline{\varepsilon}}.$$

Та частина доведення, що підкреслена подвійною лінією, означає рівномірну збіжність побудованої послідовності многочленів на $[0,1]$ до $f(x)$, тобто $P_n(x)\underset{[0,1]}{\longrightarrow}f(x)$. ■

4. Формула Ейлера.

Мають місце розвинення (2.19) – (2.21)

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots,\ \ x\in\mathbb{R},$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + .. + \frac{\left(-1\right)^{n-1} x^{2n}}{\left(2n\right)!} + .., \quad x \in \mathbb{R},$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7!} + .. + \frac{x^n}{n!} + .., \quad x \in \mathbb{R},$$

Тоді для $\varphi \in \mathbb{R}$

$$e^{i\varphi} = 1 + i\varphi - \frac{\varphi^2}{2!} - i\frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + i\frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^6}{6} - i\frac{\varphi^7}{7!} + ... = i\sin\varphi + \cos\varphi \quad ,$$

$$e^{-i\varphi} = 1 - i\varphi - \frac{\varphi^2}{2!} + i\frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} - i\frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^6}{6} + i\frac{\varphi^7}{7!} + ... \quad ,$$

де $i^2 = -1$. Отже,

$$\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \quad \text{- формула Ейлера}}. \tag{2.38}$$

$$e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = 2\left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6} + ...\right) = 2\cos\varphi, \Rightarrow \boxed{\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}}, \tag{2.39}$$

$$e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} = 2\left(i\varphi - i\frac{\varphi^3}{3!} + i\frac{\varphi^5}{5!} - i\frac{\varphi^7}{7!} + ...\right) = 2i\sin\varphi, \Rightarrow \boxed{\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}}. \tag{2.40}$$

Останні дві формули можна було вивести інакше, застосовуючи лише формулу Ейлера. Пропонуємо читачеві це зробити самостійно.

5. Аналітичне означення тригонометричних функцій.

В шкільному курсі математики давалося геометричне означення тригонометричних функцій. Тригонометричні функції $S(x) = \sin x$ і $C(x) = \cos x$ аналітично можна визначити як такі функції, що є сумами рядів

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-1\right)^{n-1} x^{2n-1}}{\left(2n-1\right)!}, \quad C\left(x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-1\right)^{n} x^{2n}}{\left(2n\right)!}.$$

Із цього означення можна вивести властивості $S\left(x\right)$ і $C\left(x\right)$ через закономірності в добутках і сумах абсолютно збіжних рядів:

$$C(x+y) = C(x)C(y) - S(x)S(y),$$

$$S(x+y) = S(x)C(y) + C(x)S(y),$$

$$C(-x) = C(x), \quad S(-x) = S(x),$$

$$C(0) = 1, \quad S(0) = 0,$$

як наслідок, $S^2(x) + C^2(x) = 1$.

Внаслідок теореми про неперервність суми степеневого ряду на інтервалі його збіжності, функція $C\left(x\right)$ неперервна на $\mathbb{R}$, зокрема, на відрізку $[0;2]$.

Відповідно до теореми Коші про проходження неперервної функції через нуль при зміні знаків [1, с. 183], можна знайти нуль функції $C(x)$:

$$\left.\begin{array}{l} C(0)=1, \\ C(2)<0, \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\ x^{**} \in (0,2) : C(x^{**}) = 0 .$$

Це число позначають як $\dfrac{\pi}{2} = x^{**}$, але поки що не пов'язуючи його із числом, яке дорівнює відношенню довжини кола до його діаметра. Потім можна довести, що $S\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.

Після обґрунтування періодичності введених функцій можна встановити зв'язок нуля косинуса з числом π. Тільки після цього можна вивести геометричний зміст функцій $S(x)$ і $C(x)$.

Більш детально можна ознайомитися з цією темою в [3, с. 477].

2.3 ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ВИКОНАННЯ

Завдання 2.1 Визначити множини збіжності (абсолютної та умовної) функціональних рядів.

1. а) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{1-2x}{1+2x}\right)^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x^2+\sqrt{n}}$.

2. а) $\sum_{n=1}^{\infty}n^2\left(\frac{2x-3}{2x}\right)^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+x)^n}{n^n}$.

3. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(x+n)^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(x^2-6x+12\right)^n}{4^n\left(n^2+1\right)}$.

4. а) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n}{n^2-4}\left(\frac{x-2}{2x+1}\right)^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n+x}$.

5. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[5]{x+n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(tg\ x)^n}{n^2+4}$.

6. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3^n}\left(x^2-4x+6\right)^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$.

7. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\frac{1}{\left(3x^2+4x+2\right)^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n\left(n+e^x\right)}$.

8. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 2^n}{n+1}\frac{1}{\left(3x^2+8x+6\right)^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{x^2+n}$.

9. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+3}\left(\frac{x+1}{1-x}\right)^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+x}{xn^x}$.

10. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\left(25x^2+1\right)^n}{2^n\left(n^2+1\right)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(x^2-5x+11\right)^n}{5^n\left(n^2+5\right)}$.

11. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+x^n}{1-x^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{n^2}+\sqrt{n}+1\right)^{2x+1}}$.

12. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\ln^n(x+2)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{x}}{3^{nx}+2}$.

13. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n^3}{n^2+2}\frac{1}{\left(3x^2+10x+9\right)^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n-x}}$.

14. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(x+n)^5}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n\sqrt{n}}$.

15. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+x^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!(x+4)^n}$.

16. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x(x+n)}{n}\right)^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(x+7)^n}$.

17. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+n)^n}{n^{n+x}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{e^{nx}}$.

18. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n2^n}{(x-3)^{2n}}$; б) $\sum_{n=0}^{\infty}x^n\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}$.

19. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1-x^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n(n-1)}$.

20. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^3}{n+x^3}$; б) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n-3)(2n-2)}$.

Завдання 2.2 Дослідити функціональні послідовності на рівномірну збіжність на вказаних множинах $X_1,\ X_2$.

1. $f_n(x)=\frac{nx^2}{1+n^2x^4}$, $X_1=[0;1]$; $X_2=[1;+\infty)$.

2. $f_n(x)=\operatorname{arctg}\frac{n}{x}$, $X_1=(0;a)$; $X_2=[0;+\infty)$, $a>0$.

3. $f_n(x)=\frac{nx^2}{n^3+x^3}$, $X_1=[0;1]$; $X_2=[0;+\infty)$.

4. $f_n(x) = \frac{x}{n}\ln\frac{x}{n}$, $X_1 = (0;2)$; $X_2 = [0;+\infty)$.

5. $f_n(x) = \ln\left(x^2 + \frac{1}{n}\right)$, $X_1 = (0;+\infty)$; $X_2 = (a;+\infty)$, $a > 0$.

6. $f_n(x) = \frac{nx^2}{1 + 2n + x}$, $X_1 = [0;2]$; $X_2 = [1;+\infty)$.

7. $f_n(x) = e^{-(x-n)^2}$, $X_1 = [-2;2]$; $X_2 = (-\infty;+\infty)$.

8. $f_n(x) = n\,\mathrm{arctg}\frac{1}{n^x}$, $X_1 = (1;2)$; $X_2 = (2;+\infty)$.

9. $f_n(x) = \frac{x}{n + x}$, $X_1 = [0;a]$, $0 < a < +\infty$; $X_2 = [0;+\infty)$.

10. $f_n(x) = \frac{(n+x)^2}{x^2 + n^2 - nx}$, $X_1 = [0;2)$; $X_2 = (2;+\infty)$.

11. $f_n(x) = n\ln\left(1 + \frac{1}{nx}\right)$, $X_1 = (0;2)$; $X_2 = (2;+\infty)$.

12. $f_n(x) = \cos\frac{1}{nx}$, $X_1 = (0;\pi)$; $X_2 = (\pi;+\infty)$.

13. $f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$, $X_1 = (-a;a)$, $a > 0$; $X_2 = (-\infty;+\infty)$.

14. $f_n(x) = \ln\left(x + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, $X_1 = (0;+\infty)$; $X_2 = (5;+\infty)$.

15. $f_n(x) = \mathrm{arctg}\frac{\sqrt{n}}{x}$, $X_1 = \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$; $X_2 = [0;+\infty)$.

16. $f_n(x) = \sin\frac{1}{nx}$, $X_1 = (0;\pi)$; $X_2 = (\pi;+\infty)$.

17. $f_n(x) = \mathrm{arctg}\frac{x}{n^2}$, $X_1 = [0;5]$; $X_2 = [0;+\infty)$.

18. $f_n(x) = \ln\left(1 + \frac{x^2}{n^2}\right)$, $X_1 = [0;1]$; $X_2 = [1;+\infty)$.

19. $f_n(x) = \frac{nx^2}{1 + \sqrt[2]{n^5}\,x^6}$, $X_1 = (0;1)$; $X_2 = (1;+\infty)$.

20. $f_n(x) = \frac{\sqrt{nx^3}}{x^2 + n^2}$, $X_1 = (0;1)$; $X_2 = (1;+\infty)$.

Завдання 2.3 Довести неперервність функції $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ на заданій множині X.

1. $u_n(x)=\ln\left(1+\dfrac{x}{n\ln^2(n+1)}\right)$, $X=[0;2]$.
2. $u_n(x)=x^n\sin\dfrac{1}{3^n}$, $X=[-2;2]$.
3. $u_n(x)=(-1)^n n^{-x}$, $X=[4;+\infty)$.
4. $u_n(x)=\dfrac{(-1)^n}{x+\sqrt{n^3}}$, $X=[0;+\infty)$.
5. $u_n(x)=\dfrac{(x-1)^{2n}}{n9^n}$, $X=[-1;3]$.
6. $u_n(x)=\dfrac{n!(x+3)^n}{n^n}$, $X=[-5;-1]$.
7. $u_n(x)=x^{n!}$, $X=\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$.
8. $u_n(x)=\dfrac{(x+1)\sin^2 nx}{n\sqrt{n+1}}$, $X=[-3;0]$.
9. $u_n(x)=\dfrac{(x-2)^n}{2^n(2n-1)x}$, $X=[1;3]$.
10. $u_n(x)=\dfrac{(\pi-x)\cos^2 nx}{\sqrt[4]{n^7+1}}$, $X=[0;\pi]$.
11. $u_n(x)=\dfrac{\sin^n x}{n(n+1)}$, $X=[0;1]$.
12. $u_n(x)=\dfrac{x^{n-1}}{n3^n\ln^2 n}$, $X=[-3;3]$.
13. $u_n(x)=\dfrac{\sqrt{x}\sin nx}{n^2+1}$, $X=[0;10]$.
14. $u_n(x)=\ln\left(1+\dfrac{x}{n\ln n}\right)$, $X=[0;4]$.
15. $u_n(x)=x^n\sin\dfrac{3}{7^n}$, $X=[-3;3]$.
16 $u_n(x)=\dfrac{(-1)^n}{x+\sqrt[3]{n^4}}$, $X=[0;+\infty)$.
17. $u_n(x)=\dfrac{(x+2)\cos^2 nx}{n^2\sqrt{n+5}}$, $X=[-4;0]$.
18. $u_n(x)=\dfrac{(-1)^n}{x+\sqrt[5]{n^6}}$, $X=[0;+\infty)$.
19. $u_n(x)=\dfrac{(x-2)^{2n}}{n4^n}$, $X=[-1;2]$.
20. $u_n(x)=\dfrac{(1-x)\sin^2 nx}{\sqrt[5]{2n^8+3}}$, $X=[0;1]$.

Завдання 2.4 Дослідити функціональний ряд на рівномірну збіжність на заданій множині X.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^n}{5n-6}$, $X=[0;1]$.
1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^2e^{-nx}$, $X=[0;+\infty)$.
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^n}{8n-12}$, $X=[0;1]$.
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^n}{\sqrt{n+1}}$, $X=[0;1]$.
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x}{e^{nx}}$, $X=[1;+\infty)$.
6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{4n+7}$, $X=[0;1]$.
7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{\sqrt[3]{8n^3-12}}$, $X=[0;1]$.
8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x}{4+n^3x^2}$, $X=[0;2]$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{x^2}{1+nx^3}\right)^3$, $X=[0;+\infty)$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{1}{\sqrt{n}}\operatorname{arctg}\dfrac{3x}{x^3+n^3}$, $X=[0;+\infty)$.

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^n}{7n-13}$, $X=[0;1]$.

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x}{1+n^4x^3}$, $X=[0;+\infty)$.

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{x^2+n^3}$, $X=(-\infty;+\infty)$.

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{nx^n}{n^2+1}$, $X=[0;1]$.

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^2}{1+n^2x^3}$, $X=[0;3]$.

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-(n-x)^2}$, $X=[0;1]$.

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^n}{\sqrt[4]{3n^7+5}}$, $X=[0;1]$.

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^n}{n\sqrt{n+2}}$, $X=[0;1]$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^n}{11n-6}$, $X=[0;1]$.

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x}}{n(1+2nx^2)}$, $X=(-\infty;+\infty)$.

Завдання 2.5 Розкласти функцію в ряд Тейлора за степенями x. Вказати область збіжності отриманого ряду.

1. $f(x)=\dfrac{9}{20-x-x^2}$.

2. $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{4-5x}}$.

3. $f(x)=\ln(1-x-6x^2)$.

4. $f(x)=2x\cos^2\dfrac{x}{2}-x$.

5. $f(x)=\dfrac{\operatorname{sh}(2x)}{x}-2$.

6. $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt[3]{27-2x}}$.

7. $f(x)=(x-1)\sin 5x$.

8. $f(x)=\dfrac{\operatorname{ch}(2x)-1}{x^2}$.

9. $f(x)=\dfrac{6}{8+2x-x^2}$.

10. $f(x)=\dfrac{6}{6+x-x^2}$.

11. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[4]{16-3x}}$.

12. $f(x)=\ln(-x^2+20x-99)$.

13. $f(x)=(x+2)\cos 3x$.

14. $f(x)=2x\sin^2\dfrac{x}{2}-x$.

15. $f(x)=\dfrac{3}{-6+7x-x^2}$.

16. $f(x)=\dfrac{x^4}{\sqrt{2+7x}}$.

17. $f(x)=\ln(-x^2-5x+14)$.

18. $f(x)=\dfrac{5}{x^2+2x-35}$.

19. $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt[5]{9-2x}}$.

20. $f(x)=\dfrac{1}{x^2-18x+77}$.

Завдання 2.6 Побудувати розклад функції в ряд Маклорена. Знайти радіус збіжності ряду.

1. а) $f(x)=x\ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)$; б) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{3-4x^2}{6+2x^2}$.

2. а) $f(x)=\ln\left(x^3+\sqrt{x^6+9}\right)$; б) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{2-x}{1+2x}$.

3. а) $f(x)=\ln\left(x^3+\sqrt{x^6+64}\right)$; б) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{2x-3}{x+6}$.

4. а) $f(x)=x\ln\left(x^2+\sqrt{x^4+9}\right)$; б) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{2+x^2}{2-x^2}$.

5. а) $f(x)=\left(x^2-1\right)\arcsin\left(2x^2\right)$; б) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{x-\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}}$.

6. а) $f(x)=x^2\arccos(2x)$; б) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1-x}{x+1}$.

7. а) $f(x)=\ln\left(1-x-12x^2\right)$; б) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{x+25}{x-25}$.

8. а) $f(x)=x^2\ln\left(4+x^2\right)$; б) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{x^2+6}{x^2-6}$.

9. а) $f(x)=\left(x^2+1\right)\arccos(2x)$; б) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{2-\frac{x^3}{2}}{1+x^3}$.

10. а) $f(x)=x\ln\left(x^2+\sqrt{x^4+16}\right)$; б) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{\frac{1}{3}+3x^2}{x^2-1}$.

11. а) $f(x)=x\ln\left(x+\sqrt{x^2-7}\right)$; б) $f(x)=\operatorname{arcctg}\dfrac{3-4x^2}{6+2x^2}$.

12. а) $f(x)=\left(x^2+4\right)\arcsin\left(x^2\right)$; б) $f(x)=\operatorname{arcctg}\dfrac{2-x}{1+2x}$.

13. а) $f(x)=\ln\left(x^4-\sqrt{x^8-4}\right)$; б) $f(x)=\operatorname{arcctg}\dfrac{2x-3}{x+6}$.

14. а) $f(x)=x\ln\left(x^3-\sqrt{x^6-4}\right)$; б) $f(x)=\operatorname{arcctg}\dfrac{2+x^2}{2-x^2}$.

15. а) $f(x)=\left(x^2-8\right)\arccos(4x)$; б) $f(x)=\operatorname{arcctg}\dfrac{x-\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}}$.

16. а) $f(x)=\ln\left(x^3+\sqrt{x^6+64}\right)$; б) $f(x)=\operatorname{arcctg}\dfrac{1-x}{x+1}$.

17. а) $f(x)=x\ln\left(x-\sqrt{x^2-9}\right)$; б) $f(x)=\operatorname{arcctg}\dfrac{x+25}{x-25}$.

18. а) $f(x)=\left(x^2+2\right)\arccos\left(\dfrac{x}{2}\right)$; б) $f(x)=\operatorname{arcctg}\dfrac{x^2+6}{x^2-6}$.

19. а) $f(x)=x\ln\left(x-\sqrt{x^2+3}\right)$; б) $f(x)=\operatorname{arcctg}\dfrac{2-\frac{x^3}{2}}{1+x^3}$.

20. а) $f(x)=\ln\left(x^4+\sqrt{x^8+16}\right)$; б) $f(x)=\operatorname{arcctg}\dfrac{\frac{1}{3}+3x^2}{x^2-1}$.

Завдання 2.7 Знайти радіус і область збіжності степеневого ряду.

1. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\left(\cos\dfrac{1}{n}\right)^{2n}x^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}4^{n^2}(x+1)^{n^2}$.

2. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{15x^n}{n^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}3^n\left(n^3+2\right)(x+1)^{2n}$.

3. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(\sqrt{2}\right)^n x^n}{n2^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-5)^n}{n^3 3^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!e^{-n^2}x^n$.

4. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}5^n x^{3n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{(n!)^5}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt[3]{2n+1}-\sqrt[3]{2n-1}}{\sqrt{n}}(3+x)^n$.

5. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+1}{3n^2+2}(x-1)^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+1)^n}{\sqrt{n+1}}\ln\dfrac{3n-2}{3n+2}$.

6. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n(x+1)^n}{n\ln^2(n+1)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+1)^2}{3^n}x^{5n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^n+(-3)^n}{n+1}x^n$.

7. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}3n^2x^{n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\dfrac{n^4+3}{n^3+4n}}(x+2)^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(2n+3)}{3n^2+4}x^{2n+1}$.

8. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2(x-1)^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n!}x^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}\left(\dfrac{x-1}{3}\right)^n$.

9. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}3^n(x+1)^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{x}{n}\right)^n n!$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n x^{4n}}{n^2}$.

10. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n+1}{2n+3}\right)^n x^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{x}{\sqrt{n}}\right)^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^n}{2n+1}$.

11. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)(x-2)^n}{4^{n+2}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}2^{\ln^2 n}(x-3)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^n(x+2)^n$.

12. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{n^2}}{n^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}3^n x^n \operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

13. а) $\sum_{n=1}^{\infty}n^n x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n}\left(\frac{n+2}{n+5}\right)^{n^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n\sqrt{n}}$.

14. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{n2^n\sqrt{5n+1}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{2n^3}x^n$.

15. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\left(\frac{x-1}{3}\right)^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(x-7)^{2n}}{n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{5^n\ln(n+2)}$.

16. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n x^n}{9^n\sqrt[4]{n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^{2n-1}}{n5^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^3x^n}{9^n}$.

17. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{4^{n-1}\sqrt{4n+3}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3(x+8)^{2n+1}}{(n+1)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{5n+4}$.

18. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-8)^{2n}}{(n+2)\ln(n+2)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{4^{n-1}\sqrt{12n-4}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n x^n$.

19. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-7)^n}{n3^n\sqrt{2n+1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}10^n x^n \operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+3)(x-8)^n}{6^{n+2}}$.

20. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{14n+6}{n!}x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}x^n}{(n+1)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^{2n-1}}{5^n(n+2)}$.

Завдання 2.8 Обчислити суму ряду.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n-1)(2n+1)}$. 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\ln^n x}{2^n n!}$. 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$. 4. $\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n+1}$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)x^n$. 6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2n+1}$. 7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^n x}{n!}$. 8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n+1)}$.

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)x^{n-1}}{n(n+1)}$. 10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$. 11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{2^{2n}(2n-1)}$. 12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{n+1}}{n(n+1)}$.

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$. 14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^n x}{n!}$. 15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n4^n}$. 16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{(n+1)(n+2)}$.

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n(2n-1)}$. 18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\ln^{2n-1}x}{2n+1}$. 19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{n+2}}{n}$. 20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+(-1)^n)x^{2n-1}}{2n-1}$.

Розділ 3. РЯДИ ФУР'Є

3.1 ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

§1 Деякі поняття евклідових просторів

1. Евклідів простір кусково-неперервних на відрізку функцій. Ортогональні і ортонормовані системи. Тригонометрична система

Повторити означення лінійного векторного простору (ЛВП) ✍!

🗁**Означення 3.1** *Евклідовим простором (ЕП)* називають такий ЛВП над полем $\mathbb{R}$ разом з функцією $g: X\times X\to\mathbb{R}$, яка задовольняє аксіомам

1c. $g(x,y)=g(y,x)\quad \forall x,y\in X$,

2c. $g(\lambda x,y)=\lambda g(x,y)\quad \forall x,y\in X\ \ \forall\lambda\in\mathbb{R}$,

3c. $g(x+y,z)=g(x,z)+g(y,z)\ \ \forall\, x,y,z\in X$,

4c. $g(x,x)\geq 0\ \ \forall x\in X\quad \wedge\quad (g(x,x)=0\Leftrightarrow x=0)$.

Функцію $g(x,y)$ називають скалярним добутком.

Приклад 3.1 Розглянемо множину кусково-неперервних функцій на $[a,b]$ разом з функцією

$$(f,g)=\int_a^b f(x)\ g(x)dx,$$

де $f(x)$ і $g(x)$– кусково-неперервні функції на $[a,b]$. Знайдемо умови, за яких ця множина буде утворювати евклідовий простір.

*Розв'язання***.** Нескладно довести, що ця множина утворює ЛВП (доведіть ✍!). Перевіримо задану функцію щодо виконання для неї аксіом скалярного добутку. За властивостями інтеграла Рімана аксіоми 1c,2c,3c виконуються. Зупинимося детальніше на аксіомі 4c.

Нерівність $(f,f)=\int_a^b [f(x)]^2dx\geq 0$ за властивістю інтеграла Рімана є вірною для кожної кусково-неперервної функції, оскільки $[f(x)]^2\geq 0$. Розглянемо другу частину аксіоми 4c. З одного боку,

$$\forall x\in[a,b]\ \ f(x)=0\Rightarrow\left(f,f\right)=\int_a^b 0^2dx=0.$$

З іншого боку,

$$(f,f)=0\Rightarrow\int_a^b [f(x)]^2dx=0\ ,$$

Причому підінтегральна функція невід'ємна на $[a,b]$, тобто $[f(x)]^2\geq 0\ \ \forall x\in[a,b]$. Розглянемо точки розриву функції $f(x)$: $\left\{x_k\right\}_{k=0}^{n}=\{a=x_0<x_1<x_2<...<x_k<...<x_n=b)$, тоді

$$0=\int_a^b [f(x)]^2 dx=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\left[f(x)\right]^2 dx \;\Leftrightarrow\; \int_{x_k}^{x_{k+1}}\left[f(x)\right]^2 dx=0\;\;\forall\, k=\overline{0,n-1}.$$

Функція $f(x)$ неперервна на інтервалі $\left(x_k,x_{k+1}\right)$ і має скінченні граничні значення $f(x_k+0)$ і $f(x_{k+1}-0)$ на його кінцях, якими й перевизначимо цю функцію. В результаті, перевизначена функція буде неперервною на відрізку $\left[x_k,x_{k+1}\right]$. Оскільки $\int_{x_k}^{x_{k+1}}\left[f(x)\right]^2 dx=0$, підінтегральна функція неперервна і невід'ємна, то $f(x)=0\;\forall x\in\left(x_k,x_{k+1}\right)$ і $f(x_k+0)=f(x_{k+1}-0)=0$.

Отже, функція $f(x)$ дорівнює 0 у всіх точках відрізка $[a,b]$, за винятком скінченної множини точок розриву $\left\{x_k\right\}_{k=0}^{n}$. Для того, щоб виконувалася аксіома 4с, потрібно, щоб $f(x_k)=0\;\forall k$. Для виконання цього, повинна виконуватися додаткова умова

$$f(x_k)=\frac{f(x_k+0)+f(x_k-0)}{2}=0$$

в точках розриву x_k, які є внутрішніми точками відрізка $[a,b]$, а на кінцях відрізка функція повинна бути неперервною.

🗁**Означення 3.2** Точку c розриву називають *регулярною*, якщо в ній виконується співвідношення

$$\boxed{f(c)=\frac{f(c+0)+f(c-0)}{2}},$$

тобто значення функції дорівнює півсумі границь справа і зліва.

Висновок: якщо на множині кусково-неперервних функції, усі точки розриву яких є регулярними, можна задати функцію

$$\left(f,g\right)=\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx,$$

то ця функція буде скалярним добутком, а цей простір – евклідовим. Цей простір будемо позначати $R_0[a,b]$.■

<u>Деякі властивості евклідового простору.</u>

Властивість 1. Має місце *нерівність Коші-Буняковського*

$$\boxed{\left(x,y\right)\le\sqrt{\left(x,x\right)}\cdot\sqrt{\left(y,y\right)}}$$

Доведення. В силу 4с аксіоми $\left(x-\lambda y,x-\lambda y\right)\ge 0$, тоді за аксіомами 1с і 2с

$$\left(x,x\right)-\lambda\left(y,x\right)-\lambda\left(x,y\right)+\lambda^2\left(y,y\right)\ge 0,$$

а за аксіомою 3с –

$$\left(x,x\right)-2\lambda\left(y,x\right)+\lambda^2\left(y,y\right)\ge 0.$$

Знайдемо дискримінант квадратного тричлена. Щоб остання нерівність була вірною, потрібно, щоб завжди виконувалась умова:

$$\frac{D}{4} = (x,y)^2 - (x,x)\cdot(y,y) \le 0,$$

тобто

$$(x,y)^2 \le (x,x)\cdot(y,y). \blacksquare$$

🗀**Означення 3.3** ЛВП над полем $\mathbb{R}$, на якому задана функція $P: X \to \mathbb{R}$, що задовольняє аксіомам:

1н. $P(x) \ge 0\ \forall x \in X \wedge \left(p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0\right)$,

2н. $P(\lambda x) = |\lambda| \cdot P(x)\ \forall x \in X\ \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$,

3н. $P(x+y) = P(x) + P(y)\ \ \forall x, y \in X$ – нерівність трикутника,

називається *нормованим простором*, а функція $P(x)$ називається *нормою.* Частіше норму позначають так: $P(x) = \|x\|$, читається «норма ікс».

В такому позначенні аксіоми норми будуть записані наступним чином:

1н. $\|x\| \ge 0\ \forall x \in X \wedge \left(\|x = 0 \Leftrightarrow x = 0\|\right)$,

2н. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|\ \forall x \in X\ \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$,

3н. $\|x+y\| < \|x\| + \|y\|\ \forall x, y \in X$ – нерівність трикутника.

Властивість 2. Має місце імплікація:

$$\boxed{\text{ЕП – Евклідовий простір} \Rightarrow \text{НП – нормований простір.}}$$

Доведення можна провести, якщо в ЕП задати функцію $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ і довести, що ця функція визначає норму

1. $\|x\| = \sqrt{(x,x)} \ge 0$ (4с); $\quad \|x\| = \sqrt{(x,x)} \ge 0 \Leftrightarrow (x,x) \Leftrightarrow x = 0$ (4с);

2 $\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} \overset{(2c),(4c)}{=} \sqrt{\lambda^2 (x,x)} = |\lambda| \sqrt{(x,x)} = |\lambda| \|x\|$;

3 $\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + 2(x,y) + (y,y) \le [\text{нерівність К-Б}]$

$\le \|x\|^2 + 2\sqrt{(x,x)} \cdot \sqrt{(y,y)} + \|y\|^2 = \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = \left(\|x\| + \|y\|\right)^2$. ■

Нерівність Коші- Буняковського можна переписати в такий спосіб:

$$\boxed{|(x,y)| \le \|x\| \cdot \|y\|.}$$

У просторі $R_0[a,b]$ норма буде визначатися формулою

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b [f(x)]^2 dx}.$$

Нерівність Коші- Буняковського в $R_0[a,b]$:

$$\int_a^b f(x) g(x) dx \le \sqrt{\int_a^b [f(x)]^2 dx} \cdot \sqrt{\int_a^b [g(x)]^2 dx},$$

Нерівність трикутника в $R_0[a,b]$:

$$\sqrt{\int_a^b [f(x)+g(x)]^2\,dx} \le \sqrt{\int_a^b [f(x)]^2\,dx} + \sqrt{\int_a^b [g(x)]^2\,dx}\,.$$

🗁**Означення 3.4** Функціональну послідовність $\{f_n(x)\}\subset R_0[a,b]$ називають *збіжною в середньому*, якщо $\lim\limits_n \|f_n - f\| = 0$. Тобто

$\{f_n(x)\}\subset R_0[a,b]$ *збігається в середньому*

$$\overset{def}{\Leftrightarrow} \exists\ f(x)\in R_0[a,b]:\ \lim_{n\to\infty}\int_a^b [f_n(x)-f(x)]^2 dx = 0\,.$$

🗁**Означення 3.5** Два елементи x і y в ЕП X називають *ортогональними*, якщо $(x,y)=0$.

Система $\{\varphi_n\}\subset X$ – *ортогональна*, $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $(\varphi_n,\varphi_m)=0 \quad \forall n\ne m$.

Система $\{\varphi_n\}\subset X$ – *ортонормована*, $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ 1) ортогональна,

2) $\|\psi_n\|=1 \quad \forall n\in N$.

Останнє означення можна записати інакше:

система $\{\varphi_n\}\subset X$ – *ортонормована*, $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $(\varphi_n,\varphi_m)=\delta_n^m\ \forall n,m$,

де $\delta_n^m = \begin{cases} 0, & n\ne m, \\ 1, & n=m \end{cases}$ – символ Кронекера.

Твердження 3.1 Якщо система $\{\varphi_n\}\subset X$ в ЕП X є ортогональною, то система $\left\{\psi_n = \dfrac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|}\right\}$ є ортонормованою.

Доведення. $(\psi_n,\psi_m) = \left(\dfrac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|}, \dfrac{\varphi_m}{\|\varphi_m\|}\right) = \begin{cases} 0, & m\ne n; \\ \dfrac{(\varphi_n,\varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2}=1, & n=m. \end{cases}$ ■

Наведемо в просторі $R_0[-\pi;\pi]$ ортогональну (ортонормовану) систему. Розглянемо <u>систему тригонометричних функцій</u>

$$\boxed{1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \cos 3x,\ \sin 3x,\ldots,\cos nx,\ \sin nx,\ldots,}\,. \qquad (3.1)$$

1) Дослідимо її на ортогональність:

$$(1,\cos nx) = \int_{-\pi}^{\pi}(1\cdot\cos nx)\,dx = \frac{1}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 \quad \forall n\ne 0\,,$$

$$\left(\cos nx, \cos mx\right) = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\cos nx \cdot \cos mx\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left[\cos (n+m)x + \cos (n-m)x\right] dx = 0 \quad \forall n \neq m$$

аналогічно $\left(\sin nx, \sin mx\right) = 0 \quad \forall n \neq m$,

$$\left(\sin nx, \cos mx\right) = .\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \cos mx \, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\sin (n+m)x - \sin (n-m)x\right) dx =$$

$$= 0 - 0 = 0 \quad \forall n \neq m,$$

$$\left(1, \sin nx\right) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = -\frac{1}{n}\cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} = -\frac{1}{n}\left(\cos n\pi - \cos\left(-n\pi\right)\right) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ортогональність доведено.

2) Побудуємо тепер ортонормовану систему в цьому просторі. Для цього обчислимо норми елементів тригонометричної системи (3.1):

$$\|1\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot 1 \cdot d\varphi} = \sqrt{1 \cdot 2\pi} = \sqrt{2\pi},$$

$$\|\cos nx\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx = \frac{1}{2} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 + \cos 2nx\right) dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2n} \cdot \sin 2nx\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \pi,$$

$$\|\cos nx\| = \sqrt{\pi},$$

аналогічно

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\pi}.$$

Застосуємо твердження 3.1 до системи (3.1). Таким чином, <u>ортонормована система тригонометричних функцій в</u> $R_0[-\pi;\pi]$ має вигляд:

$$\boxed{\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}\right\}_{n=1}^{\infty}}. \tag{3.2}$$

§2 Основна теорема теорії рядів Фур'є

1. Поняття ряду Фур'є

Розглянемо тригонометричний ряд. Спочатку припустимо, що він рівномірно збігається до функції $f(x)$:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \underset{[-\pi;\pi]}{\rightrightarrows} f(x). \tag{3.3}$$

Рівномірно збіжний ряд з неперервними членами можна почленно інтегрувати. Проінтегруємо почленно (3.3) на відрізку $[-\pi;\pi]$:

$$\frac{a_0}{2} \cdot 2\pi + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx\right) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \Rightarrow \quad \pi \cdot a_0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx}. \tag{3.4}$$

Помножимо обидві частини (3.3) на $\cos kx$:

$$\frac{a_0}{2}\cdot\cos kx + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx \cos kx + b_n \sin nx \cos kx) \underset{[-\pi;\pi]}{\rightrightarrows} ?\ f(x)\cdot\cos kx\ . \tag{3.5}$$

Дослідимо останній ряд на рівномірну збіжність. Нехай $S_n(x)$ – часткова сума ряду (3.3). За умовою відомо, що $S_n(x) \underset{[-\pi;\pi]}{\rightrightarrows} f(x)$. Доведемо, що функціональна послідовність $\{S_n(x)\cdot\cos kx\}$ часткових сум ряду (3.5) рівномірно збігається:

$$0 \le \lim_n \sup_{x\in[-\pi;\pi]} |S_n(x)\cdot\cos kx - f(x)\cdot\cos kx| = \lim_n \sup_{x\in[-\pi;\pi]} (|S_n(x) - f(x)|\cdot|\cos kx|) \le$$

$$\le \lim_n \sup_{x\in[-\pi;\pi]} |S_n(x) - f(x)| = 0.$$

Отже, $S_n(x)\cdot\cos kx \underset{[-\pi;\pi]}{\rightrightarrows} f(x)\cdot\cos kx$.

Отриманий висновок про рівномірну збіжність ряду (3.5) дає змогу почленно його проінтегрувати:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\cos kxdx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos kxdx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos kxdx\right) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx;$$

$$0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pi \delta_n^k = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx;$$

$$a_k\cdot\pi = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx;$$

$$\boxed{a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx \quad \forall k\in\mathbb{N}}. \tag{3.6}$$

Аналогічно,

$$\boxed{b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kxdx \quad \forall k\in\mathbb{N}}. \tag{3.7}$$

🗁**Означення 3.6** *Рядом Фур'є* функції $f(x)$ називають ряд вигляду

$$\boxed{f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)}, \tag{3.8}$$

коефіцієнти якого визначаються формулами (3.4), (3.6), (3.7).

Символ «~» читається в записі (3.8) як «співставляється», тобто функції $f(x)$ співставляється ряд з коефіцієнтами (3.4), (3.6), (3.7), про який ми поки що не знаємо, збігається він до функції $f(x)$ чи ні. При виведенні формул (3.4), (3.6), (3.7) ми навіть припускали рівномірну збіжність, про це ми тим більше не можемо поки нічого сказати.

Подальша мета – перевірити збіжність ряду Фур'є до функції $f(x)$.

2. Попередні леми.

Лема 3.1 Нехай функція $f(x)$ кусково-неперервна на $\mathbb{R}$, (тобто вона кусково-неперевна на будь-якому відрізку, що лежить в $\mathbb{R}$), крім того, $f(x)$ – має період *T*, тоді

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx .$$

Тобто інтеграл на відрізку, довжина якого дорівнює періоду, дорівнює $\int_0^T f(x)dx$.

Доведення. Подамо даний інтеграл у вигляді:

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^0 f(x)dx + \int_0^T f(x)dx + \int_T^{a+T} f(x)dx . \tag{3.9}$$

Розглянемо третій інтеграл

$$\int_T^{a+T} f(x)dx = \left\| \begin{matrix} t = x - T; \\ dt = dx; \\ x = T \Rightarrow t = 0; \\ x = a + T \Rightarrow t = a \end{matrix} \right\| = \int_0^a f(t+T)dt = \int_0^a f(t)dt = \int_0^a f(x)dx .$$

Підставимо знайдене значення в (3.9), отримаємо:

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^0 f(x)dx + \int_0^T f(x)dx + \int_T^{a+T} f(x)dx = -\int_0^a f(x)dx + \int_0^T f(x)dx + \int_0^a f(x)dx =$$

$$= \int_0^T f(x)dx . \ \blacksquare$$

Лема 3.2 Якщо функція $f(x)$ кусково-неперервна на $\mathbb{R}$, то

$$\lim_{p\to\infty} \int_a^b f(x)\cos pxdx = \lim_{p\to\infty} \int_a^b f(x)\sin pxdx = 0 .$$

Доведення. Має місце оцінка:

$$\left| \int_a^b \cos pxdx \right| = \left| \frac{1}{p} \sin px \Big|_a^b \right| = \left| \frac{1}{p}(\sin pb - \sin pa) \right| \le \frac{|\sin pb| + |\sin pa|}{p} \le \frac{2}{p},$$

тобто

$$\left| \int_a^b \cos pxdx \right| \le \frac{2}{p} . \tag{3.10}$$

Розглянемо розбиття

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

і домовимося, що точки розбиття містять усі точки розриву функції $f(x)$ на $[a,b]$. Подамо даний інтеграл сумою

$$\int_a^b f(x)\cos pxdx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\cos pxdx .$$

Перевизначимо функцію $f(x)$ на кінцях відрізків $[x_{k-1}, x_k]$ значеннями $f(x_{k-1}) = f(x_{k-1}+0),\ f(x_k) = f(x_k - 0)$, відповідно. Тоді можна буде вважати, що ця функція на кожному відрізку розбиття буде неперервною, тому на цих відрізках можна застосувати другу теорему Вейєрштрасса [1, с. 188]:

$$m_k = \inf_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x) = \min_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x),$$

$$M_k = \sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x) = \max_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x).$$

Позначимо через $\omega_k = M_k - m_k$ коливання функції на k-му відрізку розбиття. Проведемо попередні оцінювання:

$$\left|\int_a^b f(x)\cos pxdx\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\cos pxdx\right| \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} \left|\int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x)\cos px - m_k \cos px)dx\right| + \left|\int_{x_{k-1}}^{x_k} m_k \cos pxdx\right| \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \underbrace{|\cos px|}_{\le 1} \cdot \underbrace{|f(x) - m_k|}_{\le \omega_k} dx + \sum_{i=1}^{n} |m_k| \cdot \underbrace{\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k} \cos pxdx\right|}_{\le \frac{2}{p}\ (1.51)} \le \sum_{k=1}^{n} \omega_k \cdot \underbrace{\int_{x_{k-1}}^{x_k} dx}_{\Delta x_k} + \frac{2}{p}\sum_{k=1}^{n} |m_k| . \quad (3.11)$$

Нехай $\{c_i\}_{i=1}^{N}$ – множина точок розриву $f(x)$, перенумерована у порядку зростання їх значень

$$a = c_0 < c_1 < \ldots < c_N = b .$$

Розглянемо відрізок $[c_{i-1}, c_i]$. На початку доведення функція $f(x)$ була довизначена до неперервної на $[c_{i-1}, c_i]$. Для кожного i на відрізку $[c_{i-1}, c_i]$ застосовуємо наслідок із теореми Кантора, згідно з яким [1, с. 194]

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_i > 0 : \forall P_{[c_{i-1},c_i]} = \{x_k^i\} - \text{розбиття відрізка } [c_{i-1}, c_i]:$$

$$d\left(P_{[c_{i-1},c_i]}\right) = \max_k \left(\Delta x_k^i\right) < \delta_i \Rightarrow \omega_k < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \forall k.$$

Таким чином, знайдено $\delta_i, \ldots, \delta_N$. Нехай $\delta = \min\{\delta_1, \ldots, \delta_i, \ldots, \delta_N\}$, тоді якщо розглянуте спочатку розбиття відрізка $[a,b]$ за допомогою точок $\{x_k\}$, яке включало в себе точки розриву $\{c_i\}_{i=1}^{N}$, має діаметр менший за δ, тоді коливання функції на кожному із відрізків розбиття менше за $\dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$.

Оскільки кількість точок розбиття фіксована, то значення величини $\dfrac{2}{p}\sum_{k=1}^{n}|m_k|$ можна зробити як завгодно малим, тобто

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists P \quad \forall p\ge P \quad \frac{2}{p}\sum_{k=1}^{n}|m_k|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Отже, продовжимо оцінювання (3.11):

$$\left|\int_a^b f(x)\cos pxdx\right| \le \sum_{k=1}^{n}\omega_k\,\Delta x_k+\frac{2}{p}\sum_{k=1}^{n}|m_k|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\cdot\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k}_{=b-a}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon .$$

Висновок: $\lim\limits_{p\to\infty}\int_a^b f(x)\cos pxdx=0$. Аналогічно $\lim\limits_{p\to\infty}\int_a^b f(x)\sin pxdx=0$.■

Наслідок 4.5 Коефіцієнти ряду Фур'є утворюють нескінченно малу послідовність, тобто

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=0 .$$

3. Подання часткових сум ряду Фур'є функції $f(x)$.

Проведемо попередні перетворення часткової сум ряду Фур'є, застосовуючи формули (3.4), (3.6), (3.7) для обчислення його коефіцієнтів і тригонометричні формули:

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dt+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left(\cos kx\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos kt\,dt+\sin kx\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin kt\,dt\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,dt+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)(\cos kt\cdot\cos kx+\sin kt\cdot\sin kx)\,dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos k(t-x)\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right]dt.$$

Спростимо вираз в квадратних дужках:

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k\alpha=\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k\alpha\right)\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{1}{2}\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\alpha\sin\frac{\alpha}{2}+\cos2\alpha\sin\frac{\alpha}{2}+\ldots+\cos n\alpha\sin\frac{\alpha}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{1}{2}\sin\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}\sin\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\sin\frac{3\alpha}{2}-\frac{1}{2}\sin\frac{3\alpha}{2}+\sin\frac{5\alpha}{2}+\ldots+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\alpha-\frac{1}{2}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha\right)=\frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha.$$

Тоді часткова сума набуде вигляду:

$$S_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-x)}{\sin\frac{t-x}{2}}dt=\left\|\begin{array}{l}u=t-x,\\ du=dt,\\ t=-\pi\Rightarrow u=-\pi-x,\\ t=\pi\Rightarrow u=\pi-x,\end{array}\right\|=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{u}{2}}f(u+x)\,du.$$

Доведемо, що функція $g(u)=\dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{u}{2}}$ має період 2π:

$$g(u+2\pi)=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(u+2\pi)}{\sin\frac{2\pi+u}{2}}=\frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)u+2\pi n+\pi\right]}{\sin\left(\pi+\frac{u}{2}\right)}=\frac{-\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{-\sin\frac{u}{2}}=g(u).$$

Будемо припускати, що функція $f(x)$ має період 2π, тоді підінтегральна функція за змінною u має період 2π. Згідно з лемою 4.2, значення інтегралів на відрізках довжини періоду рівні (відрізок $[-\pi-x,\pi-x]$ має довжину 2π), отже,

$$S_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(u+x)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{u}{2}}du.$$

Подамо останній інтеграл сумою $\int\limits_{-\pi}^{\pi} = \int\limits_{-\pi}^{0} + \int\limits_{0}^{\pi}$. Розглянемо другий із них:

$$\int\limits_{-\pi}^{0} \frac{f(u+x)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{u}{2}}du = \left\|\begin{matrix} t=-u, \\ dt=-du, \end{matrix}\right\| = \int\limits_{\pi}^{0} \frac{f(x-t)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)(-t)\right]}{\sin\left(-\frac{t}{2}\right)}(-dt) =$$

$$= \int\limits_{0}^{\pi} \frac{f(x-t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}dt.$$

Отже, часткова сума ряду Фур'є подається у вигляді:

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\left[f(x+t)+f(x-t)\right]dt. \qquad (3.12)$$

4. Основна теорема Фур'є. Розвинення кусково-диференційовних 2π-періодичних функцій з регулярними точками розриву

🗀**Означення 3.7** Функцію $f(x)$ називають *кусково-диференційовною на* відрізку $[a;b]$, якщо цей відрізок можна розбити на скінченну кількість таких відрізків $[\alpha;\beta]$, що функція $f(x)$ диференційована на інтервалі $(\alpha;\beta)$, а на його кінцях $\exists f'(\alpha+0)$, $\exists f(\alpha+0)$, $\exists f'(\beta-0)$, $\exists f(\beta-0)$.

Функцію $f(x)$ називають *кусково-диференційовною на* $\mathbb{R}$, якщо вона кусково-диференційовна на будь-якому відрізку із $\mathbb{R}$.

Теорема 3.1 (*основна теорема теорії рядів Фур'є*) Якщо функція $f(x)$

1) кусково-диференційовна на $\mathbb{R}$,
2) з регулярними точками розриву,
3) 2π-періодична,

тоді ряд Фур'є цієї функції поточково збігається до цієї функції, тобто в будь-якій точці $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x_0) = f(x_0) = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}.$$

Доведення. Розглянемо $g(x) \equiv 1$. Вона є розкладом самої себе в ряд Фур'є, тоді $\forall n \;\; S_n(x) = 1$. Тоді із подання часткових сум ряду Фур'є матимемо:

$$1 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}} \cdot 2dt. \qquad (3.13)$$

Помножимо обидві частини (3.13) на $S_0 = \dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$:

$$S_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}} \cdot \left[f\left(x_0+0\right)+f\left(x_0-0\right)\right]dt,$$

а отриману рівність віднімемо із рівності (3.12):

$$S_n\left(x\right)-S_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \underbrace{\frac{t}{\sin\frac{t}{2}} \cdot \left[\frac{f\left(x_0+t\right)-f\left(x_0+0\right)}{t} + \frac{f\left(x_0-t\right)-f\left(x_0-0\right)}{t}\right]}_{\psi(t)} \cdot \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)tdt.$$

Розглянемо функцію $\psi\left(t\right) = \dfrac{t}{\sin\frac{t}{2}} \cdot \left[\dfrac{f\left(x_0+t\right)-f\left(x_0+0\right)}{t} + \dfrac{f\left(x_0-t\right)-f\left(x_0-0\right)}{t}\right]$:

1) якщо $t \neq 0$, то кожен дріб, що задає $\psi\left(t\right)$ є таким, що утворює функцію

$$\frac{\text{чисельник}}{\underset{t\neq 0}{\text{знаменник}}} = \frac{\text{кусково-неперервна}}{\underset{t\neq 0}{\text{неперервна} \neq 0}} = \text{кусково-неперервна};$$

2) якщо $t = 0$, то

$$\lim_{t\to+0} \frac{t}{\sin\frac{t}{2}} = 2,$$

$$\lim_{t\to+0} \frac{f\left(x_0+t\right)-f\left(x_0+0\right)}{t} = f'\left(x_0+0\right), \quad \lim_{t\to+0} \frac{f\left(x_0-t\right)-f\left(x_0-0\right)}{t} = f'\left(x_0-0\right),$$

звідки

$$\lim_{t\to+0} \psi\left(t\right) = 2\cdot\left[f'\left(x_0+0\right)-f'\left(x_0-0\right)\right],$$

тобто в точці $u = 0$ функція $\varphi(u)$ має усувний розрив.

Висновок: $\varphi(u)$ – кусково-неперервна на $\mathbb{R}$. Вимоги леми 4.3 виконуються, тому $\forall x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \psi\left(t\right)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)tdt = \lim_{p\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \psi\left(t\right)\sin pt\cdot dt = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty}\left(S_n\left(x_0\right)-S_0\right) = 0. \blacksquare$$

Наведемо деякі теореми, що мають місце, доведення яких пропонується розглянути самостійно ✍ за бажанням.

Теорема 3.2 *(про збіжність в середньому ряду Фур'є)* **.**

Якщо $f(x)$ – кусково-неперервна на $\left[-\pi;\pi\right]$, тоді її ряд Фур'є збігається в середньому до $f(x)$, тобто

$$\lim_{n\to\infty} \| S_n - f \|^2 = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \left[S_n(x)-f(x)\right]^2 dx = 0,$$

тут $S_n(x)$ – часткова сума ряду Фур’є.

Теорема 3.3 (*про почленне інтегрування ряду Фур’є)*.

Якщо $f(x)$ кусково-неперервна на $\left[-\pi;\pi\right]$, тоді її ряд Фур’є можна почленно інтегрувати.

Теорема 3.4 *(про рівномірну збіжність ряду Фур’є на* $\left[-\pi;\pi\right]$**).**

Якщо функція $f(x)$

1) неперервна на $\left[-\pi;\pi\right]$,

2) має кусково-неперервну похідну на $\left[-\pi;\pi\right]$;

3) $f(-\pi)=f(\pi)$,

тоді ряд Фур’є функції $f(x)$ рівномірно збігається на $\left[-\pi;\pi\right]$ до функції $f(x)$.

Теорема 3.5 *(про рівномірну збіжність ряду Фур’є на* $\mathbb{R}$**).**

Якщо функція $f(x)$

1) неперервна на $\mathbb{R}$,

2) має кусково-неперервну похідну на $\mathbb{R}$,

3) $f(x)$ – 2π- періодична,

тоді її ряд Фур’є рівномірно збігається на $\mathbb{R}$ до $f(x)$.

Теорема 3.6 (*теорема про почленне диференціювання ряду Фур’є)*. Якщо

1) $f^{(n+1)}(x)$ кусково-неперервна на $\left[-\pi;\pi\right]$;

2) $\forall \kappa=0,1,.....,n \ \ f^{(k)}(x)$ – неперервні на $\left[-\pi;\pi\right]$,

3) $\forall \kappa=0,1,.....,n \ \ f^{(k)}(-\pi)=f^{(k)}(\pi)$,

тоді ряд Фур’є функції $f(x)$ можна почленно диференціювати n разів у будь-якій точці $x_0\in\left[-\pi;\pi\right]$. Утворений при цьому ряд буде збігатися до $f^{(n)}(x_0)$.

§3. Розвинення функцій в ряд Фур’є

1. Ряди Фурь'є неперіодичних функцій, що задані на $\left(-\pi;\pi\right)$

<u>Випадок 1.</u> Нехай функція $f(x)$ *задана на* $\left(-\pi;\pi\right)$, причому

- $f(x)$ кусково-диференційовна на $\left[-\pi;\pi\right]$,
- на інтервалі $\left(-\pi;\pi\right)$ має регулярні точки розриву (якщо це не так, то їх потрібно регуляризувати).

Ряд Фур’є такої функції $f(x)$ буде поточково збігатися до 2π-періодичної функції $f^*(x)$, яка є періодичним продовженням функції $f(x)$, тобто

1) $f^*(x)$ дорівнює функції $f(x)$ на $\left(-\pi;\pi\right)$ (окрім, можливо, точок розриву),

2) на ділянках $\left(-\pi+2\pi k;\pi+2\pi k\right),\quad k\in\mathbb{Z}$ значення функції $f^*(x)$ збігаються з відповідними значеннями функції $f(x)$ на $\left(-\pi;\pi\right)$:

$$f^*(x)=f(x-2\pi k),\ x\in\left(-\pi+2\pi k;\pi+2\pi k\right),\quad k\in\mathbb{Z},$$

3) якщо функція-продовження в точках $\pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, має розриви, її потрібно довизначити за регулярністю

$$f^*(\pi + 2\pi k) = \frac{f^*(\pi + 2\pi k + 0) + f^*(\pi + 2\pi k - 0)}{2} = \frac{f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)}{2}.$$

На рис. 3.1 – 3.2 схематично зображено графік даної функції $f(x)$ на інтервалі $(-\pi;\pi)$ і графік функції $f^*(x)$, яка є сумою ряду Фур'є функції $f(x)$.

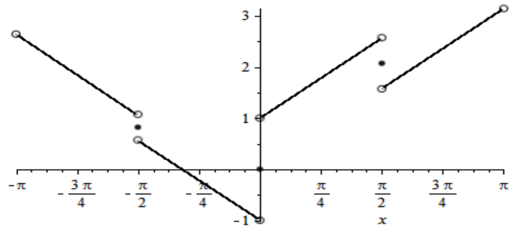


Рис. 3.1 Графік кусково-диференційовної на $[-\pi;\pi]$ функції $f(x)$ з регулярними точками розриву на $(-\pi;\pi)$

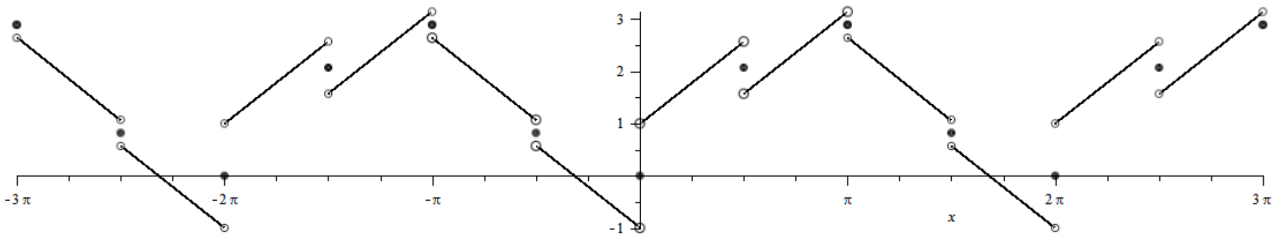


Рис. 3.2 Графік функції $f^*(x)$, що є періодичним продовженням функції $f(x)$ з регуляризованими точками $\pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

2. Ряди Фурь'є парних і непарних функцій, функцій, що задані на $(0;\pi)$

Зауваження 4.8 Якщо деяка кусково-неперервна на відрізку $[-a;a]$ функція $g(x)$ є непарною, тоді

$$\int_{-a}^{0} g(x)dx = \left\| \begin{matrix} t = -x, \ dt = -dx, \\ x = -a \Rightarrow t = a, \\ x = 0 \Rightarrow t = 0, \end{matrix} \right\| = -\int_{a}^{0} g(-t)dt = -\int_{0}^{a} g(t)dt,$$

тому

$$\int_{-a}^{a} g(x)dx = \int_{-a}^{0} g(x)dx + \int_{0}^{a} g(x)dx = 0.$$

Якщо $g(x)$ – парна, тоді

$$\int_{-a}^{0} g(x)dx = \int_{0}^{a} g(t)dt, \ \Rightarrow \quad \int_{-a}^{a} g(x)dx = 2\int_{0}^{a} g(x)dx.$$

<u>**Випадок 2а.**</u> Нехай $f(x)$ – *парна*, кусково-диференційована на $\mathbb{R}$ з регулярними точками розриву, 2π-періодична. Тоді

$$b_n = 0 \quad \forall n = 1,2,... \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx dx \quad \forall n = 0,1,2,..., \qquad (3.14)$$

тобто парна функція розкладається в ряд Фур'є за косинусами кратних дуг:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx\,. \tag{3.15}$$

<u>Випадок 2б.</u> Нехай $f(x)$ – *непарна,* кусково-диференційована на $\mathbb{R}$, з регулярними точками розриву, 2π-періодична. Тоді коефіцієнти її ряду Фур'є будуть мати вигляд:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos nx dx = 0 \qquad \forall n = 0,1,2,\ldots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx dx \qquad \forall n = 1,2,\ldots$$

Висновок: $f(x)$ – *непарна* $\Rightarrow$

$$a_n = 0 \quad \forall n = 0,1,2,\ldots,\ b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx dx \quad \forall n = 1,2,\ldots, \tag{3.16}$$

тобто непарна функція розкладається в ряд Фур'є за синусами кратних дуг:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx\,. \tag{3.17}$$

<u>Випадок 3.</u> Функція $f(x)$ – *задана на* $(0;\pi)$, причому

- $f(x)$ кусково-диференційовна на $[0;\pi]$,
- на інтервалі $(0;\pi)$ має регулярні точки розриву (якщо це не так, то їх потрібно регуляризувати).

<u>Випадок 3а.</u> Потрібно *розвинути таку функцію в ряд Фур'є за косинусами кратних дуг.*

Після обчислення коефіцієнтів ряду Фур'є за формулами (3.14) ряд Фур'є (3.15) функції $f(x)$ буде поточково збігатися до 2π-періодичної функції $f_c(x)$, яка є парним періодичним продовженням функції $f(x)$, тобто

1) $f_c(x)$ дорівнює функції $f(x)$ на $(0;\pi)$ (окрім, можливо, точок розриву),

2) на $(-\pi;0)$ функція $f_1(x)$ є парним продовженням функції $f(x)$, тобто

$$f_1(x) = f(-x),\ x \in (-\pi;0),$$

графік функції $f_1(x)$ симетричний відносно осі ординат,

3) на ділянках $(-\pi + 2\pi k;\pi + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$ функція $f_c(x)$ є 2π-періодичним продовженням функції $f_1(x)$ і значення функції $f_c(x)$ на ділянках $(-\pi + 2\pi k;\pi + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$ збігаються з відповідними значеннями функції $f_1(x)$ на $(-\pi;\pi)$:

$$f_c(x) = f_1(x - 2\pi k),\ x \in (-\pi + 2\pi k;\pi + 2\pi k),\quad k \in \mathbb{Z},$$

4) якщо функція-продовження в точках πk, $k \in \mathbb{Z}$, має розриви, її потрібно довизначити за регулярністю

$$f_c(\pi+2\pi k)=\frac{f_c(\pi+2\pi k+0)+f_c(\pi+2\pi k-0)}{2}=\frac{f_c(-\pi+0)+f_c(\pi-0)}{2}=$$
$$=\frac{f(\pi-0)+f(\pi-0)}{2}=f(\pi-0);$$

$$f_c(2\pi k)=\frac{f_c(2\pi k+0)+f_c(2\pi k-0)}{2}=\frac{f_c(+0)+f_c(-0)}{2}=\frac{f(+0)+f(+0)}{2}=f(+0).$$

Отже, функція $f_c(x)$ в точках πk, $k\in\mathbb{Z}$ є неперервною.

На рис. 3.3 – 3.5 схематично зображено графік деякої функції $f(x)$ на інтервалі $(0;\pi)$, її парного продовження $f_1(x)$ на інтервал $(-\pi;0)$ і продовження $f_c(x)$ за періодом 2π на всю числову пряму. Тобто графік функції $f_c(x)$ є сумою ряду Фур'є функції $f(x)$ за косинусами кратних дуг.

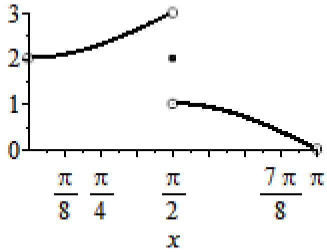


Рис. 3.3 Графік кусково-диференційовної на $[0;\pi]$ функції $f(x)$ з регулярними точками розриву на $(0;\pi)$

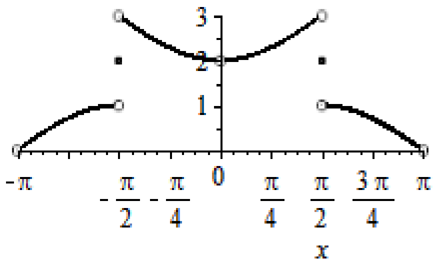


Рис. 3.4 Графік функції $f_1(x)$, що продовжена парним чином на $(-\pi:0)$

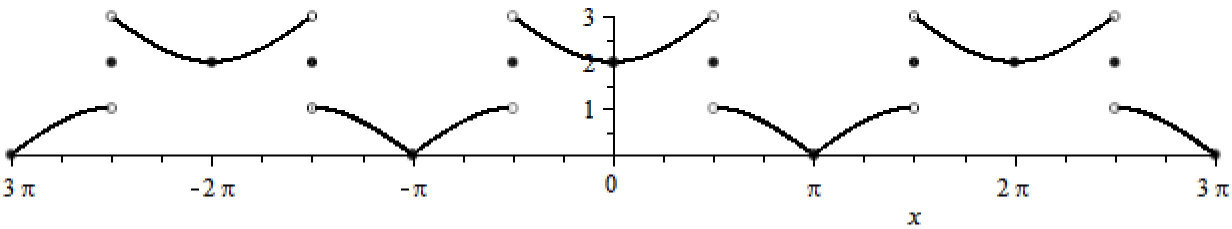


Рис. 3.5 Графік функції $f_c(x)$, що є періодичним продовженням функції $f_1(x)$ $f(x)$ з регуляризованими точками πk, $k\in\mathbb{Z}$

Випадок 3б. Потрібно *розвинути таку функцію в ряд Фур'є за синусами кратних дуг.*

Після обчислення коефіцієнтів ряду Фур'є за формулами (3.16) ряд Фур'є (3.17) функції $f(x)$ буде поточково збігатися до 2π-періодичної функції $f_s(x)$. є непарним періодичним продовженням функції $f(x)$, тобто

1) $f_s(x)$ дорівнює функції $f(x)$ на $(0;\pi)$ (окрім, можливо, точок розриву),

2) на $(-\pi;0)$ *функція* $f_2(x)$ є непарним продовженням функції $f(x)$, тобто

$$f_2(x)=-f(-x),\ x\in(-\pi;0),$$

3) на ділянках $(-\pi+2\pi k;\pi+2\pi k)$, $k\in\mathbb{Z}$ значення функції $f_s(x)$ збігаються з відповідними значеннями функції $f_2(x)$ на $(-\pi;\pi)$:

$$f_s(x) = f_2(x - 2\pi k),\ \ x \in \left(-\pi + 2\pi k; \pi + 2\pi k\right), \quad k \in \mathbb{Z},$$

4) якщо функція-продовження в точках πk, $k \in \mathbb{Z}$, має розриви, її потрібно довизначити за регулярністю

$$f_c(\pi + 2\pi k) = \frac{f_c(\pi + 2\pi k + 0) + f_c(\pi + 2\pi k - 0)}{2} = \frac{f_c(-\pi + 0) + f_c(\pi - 0)}{2} = \\ = \frac{-f(\pi - 0) + f(\pi - 0)}{2} = 0;$$

$$f_c(2\pi k) = \frac{f_c(2\pi k + 0) + f_c(2\pi k - 0)}{2} = \frac{f_c(+0) + f_c(-0)}{2} = \frac{f(+0) - f(+0)}{2} = 0.$$

Отже, значення функція $f_s(x)$ в точках πk, $k \in \mathbb{Z}$ дорівнює 0.

На рис. 3.6 – 3.8 схематично зображено графік деякої функції $f(x)$ на інтервалі $(0;\pi)$, її непарного і 2π-періодичного продовжень спочатку на інтервал $(-\pi;0)$, а потім на всю числову пряму. Тобто графік функції $f_s(x)$ є сумою ряду Фур'є функції $f(x)$ за синусами кратних дуг.

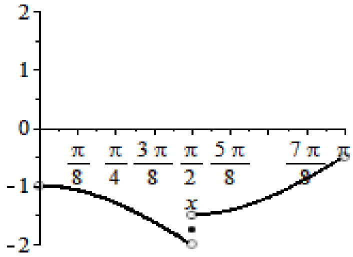


Рис. 3.6 Графік функції $f(x)$, що *задана на* $(0;\pi)$, кусково-диференційовна на $[0;\pi]$, з регулярними точками розриву на $(0;\pi)$

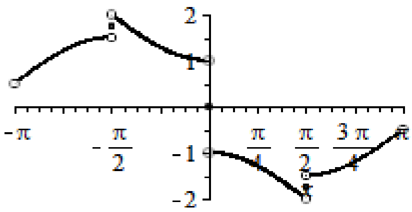


Рис. 3.7 Графік функції $f_2(x)$, що продовжена непарним чином на $(-\pi:0)$

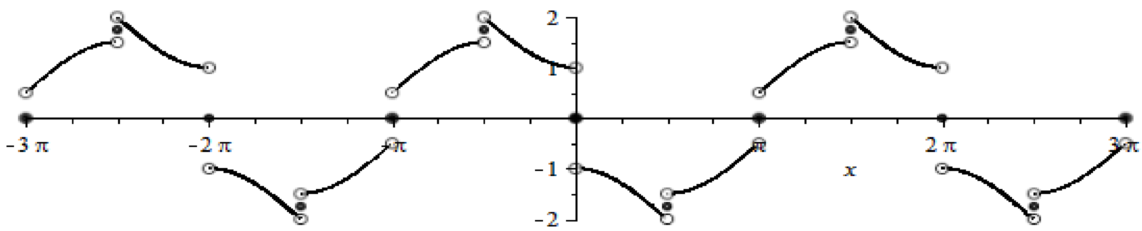


Рис. 3.8 Графік функції $f_s(x)$, що є періодичним продовженням функції $f_2(x)$ з регуляризованими точками πk, $k \in \mathbb{Z}$

2. Ряди Фурь'є неперіодичних функцій, що задані на $\left(-l;l\right)$, на $(0;l)$, на (a,b)

<u>**Випадок 4.**</u> Функція $f(x)$ – кусково-диференційовна на $\left(-l;l\right)$, з регулярними точками розриву. Сумою відповідного ряду Фур'є буде функція $f^*(x)$ $-2l$ - періодична.

Заміна $x=\dfrac{ly}{\pi}, y=\dfrac{\pi x}{l}$ призведе до функції $f^*\left(\dfrac{ly}{\pi}\right)=g^*(y)$, а якщо $x\in(-l,l)$, то $y\in\left(-\pi;\pi\right)$. Тому задачу зведено до випадку 1:

$$g^*(y)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos ny+b_n\sin ny\right),$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g^*(y)\cos ny dy=\left\|x=\frac{ly}{\pi},\ dy=\frac{\pi}{l}dx\right\|=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx\,.$$

Висновок:

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx \qquad (n=0,1,2,...), \tag{3.18}$$

аналогічно

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \qquad (n\in\mathbb{N}), \tag{3.19}$$

при цьому, враховуючи заміну $y=\dfrac{\pi x}{l}$, ряд Фур'є функції $f(x)$ матиме вигляд:

$$f^*\left(x\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right). \tag{3.20}$$

Зауваження 4.9 Аналогічні часткові випадки можна розглядати для функцій, що задані на $\left(0;l\right)$, розкладаючи її за косинусами або синусами кратних дуг. Також можна розглядати функції $f(x)$, які початково визначаються на довільних інтервалах $\left(a,b\right)$, розглядаючи як півперіод $T=(b-a)/2=l$.

§4. Підсумовування рядів Фур'є

1. Підсумовування тригонометричних рядів за допомогою аналітичних функцій комплексної змінної.

Мета: підсумувати, тобто подати елементарними функціями, наступні ряди

$$\frac{q_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}q_n\cos nx\,. \tag{C}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}q_n\sin\cdot nx\,. \tag{S}$$

Ейлер і Лагранж застосовували для цього аналітичні функції комплексної змінної (АФКЗ).

Припущення:
ряди (C) і (S) на відрізку $[0,2\pi]$ збігаються у всіх точках окрім, можливо, скінченої кількості.

Розглянемо довільний ряд комплексної змінної

$$\frac{q_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} q_n \cdot z^n \text{, де } z \in \mathbb{C}. \tag{3.21}$$

Нехай $|z|=1$, тоді $z^n = e^{inx} = \cos nx + i\sin nx$. Із припущення робимо висновок, що степеневий ряд комплексної змінної

$$\frac{q_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} q_n \cdot z^n = \frac{q_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} q_n \cos nx + i\sum_{n=1}^{\infty} q_n \sin nx$$

збігається у всіх точках одиничного кола комплексної площини, окрім скінченої кількості. Тоді за теоремою Абеля степеневий ряд $\frac{q_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} q_n z^n$ абсолютно збігається у всіх точках z комплексної площини, для яких $|z|<1$.

Позначимо суму ряду (3.21) через $f(z)$ у всіх точках кола $|z|=1$, окрім скінченої кількості, тоді

$$f(z)=\frac{q_0}{2}+\sum_{nn=1}^{\infty} q_n \cos nx + i\sum_{n=1}^{\infty} q_n \sin nx = \varphi(x)+i\varphi(x),$$
$$\varphi(x)=\operatorname{Re} f(z), \quad \psi(x)=\operatorname{Im} f(z).$$

Приклад 3.2 Підсумувати ряди $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$ і $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$.

*Розв'язання***.** Перевіримо припущення:

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$ збігається на $[0,2\pi]$ за ознакою Діріхле,
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ збігається на $[0,2\pi]\setminus\{0,2\pi\}$ за ознакою Діріхле.

Доведіть самостійно ✍!

Отже, підсумовувати ці ряди можна за допомогою АФКЗ.

Порівнюючи (C) і (S) з даними рядами, приходимо до висновку, що $q_n=\frac{1}{n}$, $q_0=0$. Отже, ряд (3.21) набуде вигляду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$. Знаючи, що

$$\ln(1+z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}z^n}{n},$$

$$\ln(1-z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n=1}(-1)^n z^n}{n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n},$$

Приходимо до висновку:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}=-\ln(1-z).$$

Виділимо дійсну і уявну частину цієї функції:

$$1-z=1-\cos x-i\sin x=2\sin^2\frac{x}{2}-i2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}=2\sin\frac{x}{2}\cdot\left(\sin\frac{x}{2}-i\cos\frac{x}{2}\right)=$$

$$=2\sin\frac{x}{2}\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)\right)=2\sin\frac{x}{2}\cdot\left(\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\right)=$$

$$=2\sin\frac{x}{2}\cdot e^{i\frac{x-\pi}{2}},$$

$$\ln(1-z)=\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right)+i\frac{x-\pi}{2},\ \operatorname{Re}\left(\ln(1-z)\right)=\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right),\ \operatorname{Im}\left(\ln(1-z)\right)=\frac{x-\pi}{2}.$$

Звідки приходимо до *висновку:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}=-\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right);\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\frac{\pi-x}{2}.\ \blacksquare$$

Приклад 3.3 Підсумувати наступні ряди: $1+\sum_{n+1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n!},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n!}.$

*Розв'язання***.** Перевіримо припущення, застосовуючи ознаку порівняння:

$$\underset{зб\ \Leftarrow\ зб}{\frac{|\cos nx|}{n!}\le\frac{1}{n!}}\qquad \underset{зб\ \Leftarrow\ зб}{\frac{|\sin nx|}{n!}\le\frac{1}{n!}}$$

Отже, обидва ряди збігаються абсолютно на $[0,2\pi]$. Підсумуємо степеневий ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=e^z=e^{\cos+i\sin x}=e^{\cos x}\cdot e^{i\sin x}=e^{\cos x}\left(\cos(\sin x)+i(\sin x)\right).$$

Висновок: $\varphi(x)=e^{\cos x}\cdot\cos(\sin x),\quad \psi(x)=e^{\cos x}\cdot\sin(\sin x).$ $\blacksquare$

2. Комплексна форма рядів Фур'є.

Нехай $f(x)$ – кусково-диференційована на $\mathbb{R}$ з регулярними точками розриву; 2π-періодична, тоді її ряд Фур'є має вигляд

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right).$$

За формулами Ейлера

$$\cos nx=\frac{e^{inz}+e^{-inz}}{2},\quad \sin x=\frac{e^{inz}-e^{-inz}}{2i}=-\frac{i}{2}\left(e^{inz}-e^{-inz}\right),$$

звідки

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cdot\frac{1}{2}\left(e^{inz}+e^{-inz}\right)+b_n\cdot\frac{i}{2}\left(e^{-inz}-e^{inz}\right)\right)=$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{inz}\frac{a_n-ib_n}{2}+e^{-inz}\frac{a_n+ib_n}{2}\right).$$

Отриманий ряд дозволяє запис у вигляді

$$f(x)=C_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_ne^{inx}+C_{-n}e^{-inx}\right)$$

або

$$\boxed{f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_ne^{inx}}$$ – <u>комплексна форма ряду Фур'є.</u>

За означенням, ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}C_ne^{inx}$ збігається $\overset{def}{\Leftrightarrow}\exists\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=-n}^{n}C_ke^{ikx}$.

Зокрема, нескладно довести, що із збіжності рядів $\sum\limits_{n=1}^{\infty}C_ne^{inx}$ і $\sum\limits_{m=1}^{\infty}C_{-m}e^{-inx}$ випливає збіжність ряду $\sum\limits_{m=-\infty}^{+\infty}C_me^{inx}$. Зворотне твердження не справджується.

Обчислимо коефіцієнти комплексної форми ряду Фур'є. Нехай $n\in\mathbb{N}$, тоді

$$C_n=\frac{a_n-ib_n}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx-i\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)(\cos nx-i\sin nx)dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\left(\cos(-nx)+i\sin(-nx)\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}dx;$$

$$C_{-n}=\frac{a_n+ib_n}{2}=\overline{C}_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{inx}dx.$$

$$C_0=\frac{a_0}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-i0x}dx$$

Отже, формула для коефіцієнту $C_n=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}dx$ справедлива для всіх $n\in\mathbb{Z}$

Висновок:

$$\boxed{f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_ne^{inx}\text{, де }C_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}dx\quad(n\in\mathbb{Z})}.\tag{3.22}$$

3.2 ПРАКТИКУМ ІЗ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

§1 Основна теорема теорії рядів Фур'є

1. Розвинення кусково-диференційовних 2π-періодичних функцій з регулярними точками розриву. Ряди Фурь'є неперіодичних функцій, що задані на (-π;π), на (-*l*;*l*)

Задача 3.1 (№Д2937). Яким буде ряд Фур'є для тригонометричного многочлена

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(a_k \cos kx + b_n \sin kx \right)?$$

Розв'язання. Ряд Фур'є – це розвинення функції в тригонометричний ряд за косинусами та синусами кратних дуг. Тригонометричний многочлен є скінченною лінійною комбінацією таких функцій. Таким чином, рядом Фур'є даної функції є $P_n(x)$. ■

Задача 3.2 Побудувати розклад функції в ряд Фур'є функції $f(x)$, указати проміжки, в яких сума ряду дорівнює функції $f(x)$, побудувати графіки 6-ої часткової суми ряду, функції, що є сумою ряду Фур'є, і знайти суму ряду у вказаній точці x_0, якщо

а) $f(x) = \begin{cases} -3, & -\pi < x < 0; \\ 2, & 0 < x < \pi; \end{cases}$ $x_0 = 0$**;** **б)** $f(x) = \begin{cases} 2x, & -1 < x < 0; \\ -3x, & 0 < x < 1; \end{cases}$ $x_0 = 1$.

Для розв'язання цього прикладу корисними можуть бути розклади, наведені в Додатку В.

Розв'язання. **а)** Обчислимо коефіцієнти ряду Фур'є за формулами (3.4), (3.6) і (3.7):

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} (-3)\,dx + \int_{0}^{\pi} 2\,dx \right) = \frac{1}{\pi}\left(-3\pi + 2\pi\right) = -1;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} (-3)\cos nx\,dx + \int_{0}^{\pi} 2\cos nx\,dx \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{3}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{2}{n}\sin nx\Big|_{0}^{\pi} \right) = 0;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} (-3)\sin nx\,dx + \int_{0}^{\pi} 2\sin nx\,dx \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{3}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{2}{n}\cos nx\Big|_{0}^{\pi} \right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{5}{n} - \frac{5}{n}\cos \pi n \right) = \frac{5}{\pi n}\left(1 - (-1)^n\right) =$$

$$=\begin{cases} \dfrac{10}{\pi(2k-1)}, & n=2k-1; \\ 0, & n=2k; \end{cases} \qquad n,k\in\mathbb{N}$$

Підставимо знайдені коефіцієнти до розкладу (3.8). Функцію, що є сумою ряду Фур'є, позначимо $f^*(x)$, отримаємо:

$$f^*(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx=$$

$$=-\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(0\cdot\cos nx+\frac{5}{\pi n}\left(1-(-1)^n\right)\cdot\sin nx\right)=-\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{10}{\pi(2k-1)}\cdot\sin(2k-1)x. \quad (3.23)$$

Згідно з основною теоремою теорії рядів Фур'є, функція $f^*(x)$ збігається з функцією $f(x)$ у точках її неперервності, тобто в точках $x\in(-\pi;0)\bigcup(0;\pi)$. Функція $f^*(x)$ є 2π-періодичним подовженням функції $f(x)$. Вона має регулярні точки розриву, тобто значення в точках розриву дорівнює

$$f^*(\pi n)=\frac{f^*(\pi n+0)+f^*(\pi n-0)}{2}=\frac{f^*(-\pi+0)+f^*(\pi-0)}{2}=\frac{2+(-3)}{2}=-\frac{1}{2},\quad n\in\mathbb{N},$$

зокрема, в точці $x_0=0$ маємо $f^*(1)=-\dfrac{1}{2}$. Перевіримо справедливість рівності $f^*(0)=-\dfrac{1}{2}$, підставляючи значення $x_0=0$ в ряд Фур'є (3.23):

$$f^*(0)=-\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{10}{\pi(2k-1)}\cdot 0=-\frac{1}{2}.$$

Таким чином,

$$f^*(x)=\begin{cases} -3, & -\pi+2\pi m<x<2\pi m; \\ 2, & 2\pi m<x<\pi+2\pi m; \\ -\dfrac{1}{2}, & x=\pi m, \end{cases} \qquad m\in\mathbb{Z}.$$

Графік 6-ої часткової суми одержаного ряду Фур'є

$$S_6(x)=-\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{6}\frac{10}{\pi(2k-1)}\cdot\sin(2k-1)x$$

побудовано на рис. 3.9. Графік функції $y=f^*(x)$ зображено на рис. 3.10.

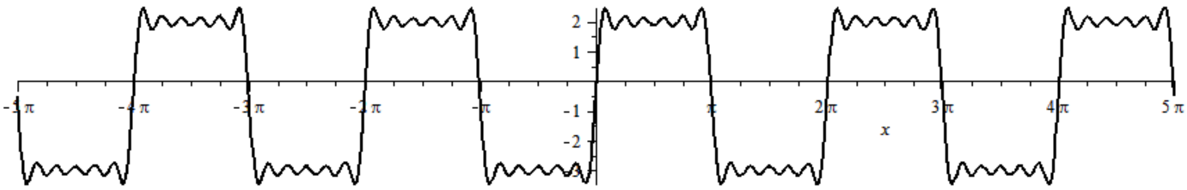
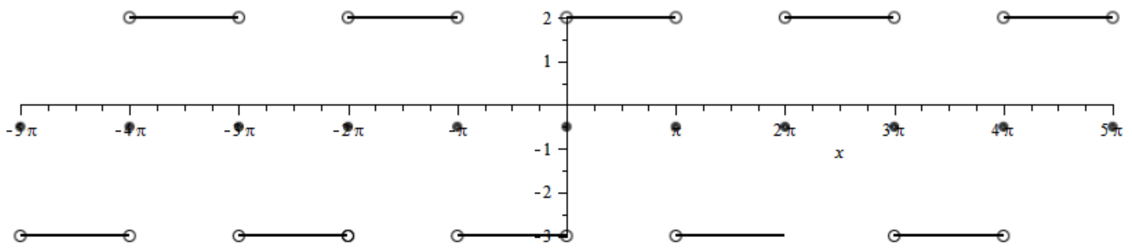


Рис. 3.9



■

Рис. 3.10

б) Обчислимо коефіцієнти ряду Фур'є функції $f(x)=\begin{cases}2x, & -1<x<0;\\ -3x, & 0<x<1;\end{cases}$ $x_0=0$ за формулами (3.18) і (3.19), поклавши $l=1$ із застосуванням формули інтегрування частинами:

$$a_0=\frac{1}{1}\left(\int_{-1}^{0}2x\,dx+\int_{0}^{1}(-3x)\,dx\right)=-\frac{5}{2};$$

$$a_n=\frac{1}{1}\left(\int_{-1}^{0}2x\cos\frac{\pi nx}{1}\,dx+\int_{0}^{1}(-3x)\cos\frac{\pi nx}{1}\,dx\right)=\left\|\begin{matrix}u=x, & du=dx,\\ dv=\cos\pi nx\,dx, & v=\dfrac{1}{\pi n}\sin\pi nx,\end{matrix}\right\|=$$

$$=2\left(\frac{x}{\pi n}\sin\pi nx\bigg|_{-1}^{0}-\frac{1}{\pi n}\int_{-1}^{0}\sin\pi nx\,dx\right)-3\left(\frac{x}{\pi n}\sin\pi nx\bigg|_{0}^{1}-\frac{1}{\pi n}\int_{0}^{1}\sin\pi nx\,dx\right)=$$

$$=-\frac{5}{\pi^2n^2}\left(\cos\pi n+\pi n\sin\pi n-1\right)=-\frac{5\left((-1)^n-1\right)}{\pi^2n^2}=\begin{cases}\dfrac{10}{\pi^2(2k-1)^2}, & n=2k-1;\\ 0, & n=2k;\end{cases}$$

$$b_n=\frac{1}{1}\left(\int_{-1}^{0}2x\sin\frac{\pi nx}{1}\,dx+\int_{0}^{1}(-3x)\sin\frac{\pi nx}{1}\,dx\right)=\frac{1}{\pi^2n^2}\left(-\sin\pi n+\pi n\cos\pi n\right)=\frac{(-1)^n}{\pi n};$$

$$n,k\in\mathbb{N}.$$

Підставимо знайдені коефіцієнти до розкладу (3.20), отримаємо:

$$f^*(x)=-\frac{5}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{5\left((-1)^n-1\right)}{\pi^2n^2}\cdot\cos\pi nx+\frac{(-1)^n}{\pi n}\cdot\sin\pi nx\right)=$$

$$=-\frac{5}{4}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{10}{\pi^2(2k-1)^2}\cdot\cos\pi(2k-1)x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\pi n}\cdot\sin\pi nx. \qquad (3.24)$$

Згідно з основною теоремою теорії рядів Фур'є, функція $f^*(x)$ збігається з функцією $f(x)$ у точках її неперервності, тобто в точках $x\in(-1;0)\bigcup(0;1)$. Функція $f^*(x)$ є 2-періодичним подовженням функції $f(x)$. Вона має регулярні точки розриву, тобто значення в точках розриву дорівнює

$$f^*(1+2n)=\frac{f^*(1+2n+0)+f^*(1+2n-0)}{2}=\frac{f^*(-1+0)+f^*(1-0)}{2}=$$

$$=\frac{2\cdot(-1)+(-3)\cdot 1}{2}=-\frac{5}{2};$$

$$f^*(2n) = \frac{f^*(2n+0)+f^*(2n-0)}{2} = \frac{f^*(+0)+f^*(-0)}{2} = \frac{(-3)\cdot 0 + 2\cdot 0}{2} = 0;\, n\in\mathbb{N},$$

зокрема, в точці $x_0 = 1$ маємо $f^*(1) = -\frac{5}{2}$. Перевіримо справедливість останньої рівності, підставляючи значення $x_0 = 1$ в ряд Фур'є (3.24):

$$f^*(1) = -\frac{5}{4} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{10}{\pi^2(2k-1)^2}\cdot\underbrace{\cos\pi(2k-1)}_{=-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\pi n}\cdot\underbrace{\sin\pi n}_{=0} = -\frac{5}{4} - \frac{10}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}.$$

Потрібне значення суми числового ряду можна знайти в доданку В, а саме: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$. Звідки одержимо:

$$f^*(1) = -\frac{5}{4} - \frac{10}{\pi^2}\cdot\frac{\pi^2}{8} = -\frac{5}{2}.$$

Таким чином,

$$f^*(x) = \begin{cases} 2(x-2m), & -1+2m < x \le 2m; \\ -3(x-2m), & 2m < x < 1+2m; \\ -\frac{5}{2}, & x = 1+2m; \end{cases} \quad m\in\mathbb{Z}.$$

Графік 6-ої часткової суми одержаного ряду Фур'є (3.24)

$$S_6(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{6}\frac{(-1)^n}{\pi n}\cdot\sin\pi n x + \sum_{k=1}^{3}\frac{10}{\pi^2(2k-1)^2}\cdot\cos\pi(2k-1)x$$

побудовано на рис. 3.11. Графік функції $y = f^*(x)$ зображено на рис. 3.12.

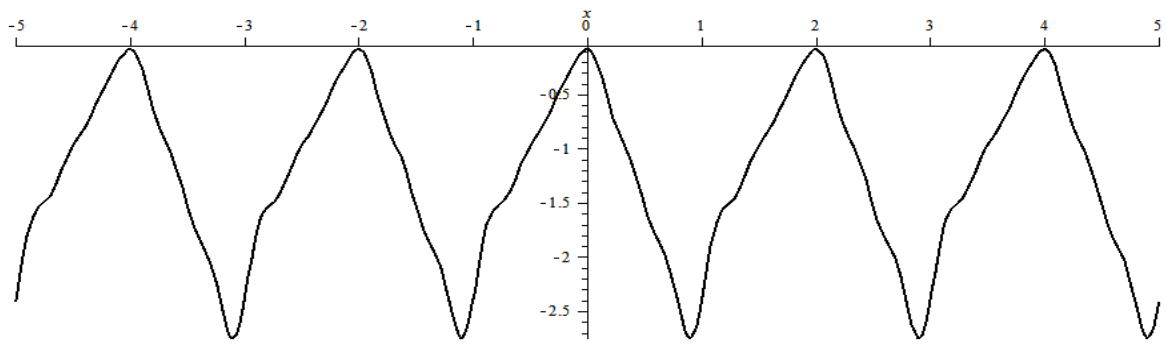


Рис. 3.11

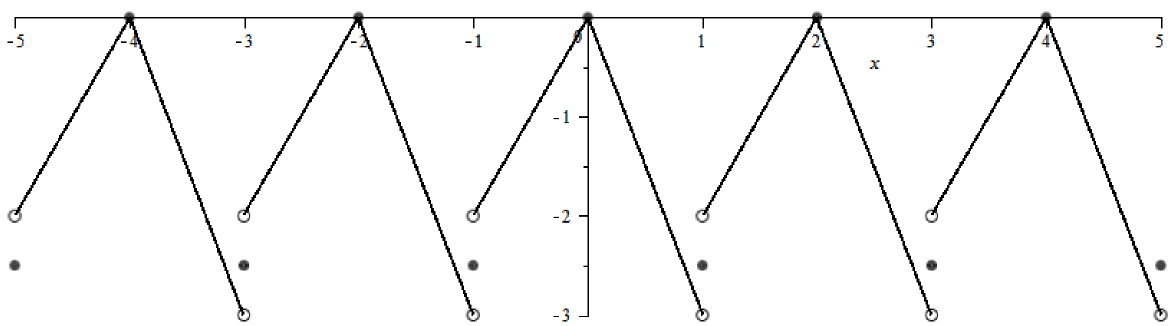


Рис. 3.12

■

Задача 3.3 Розвинути в ряд Фур'є функцію, що задана графічно.

а)

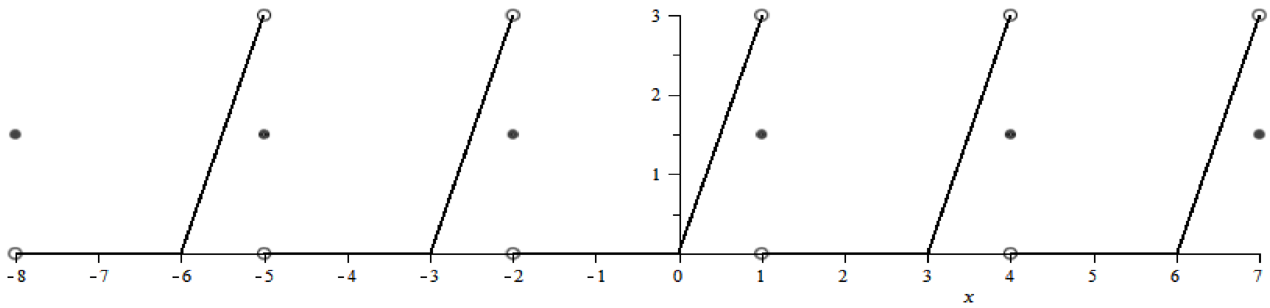


Рис. 3.13

б)

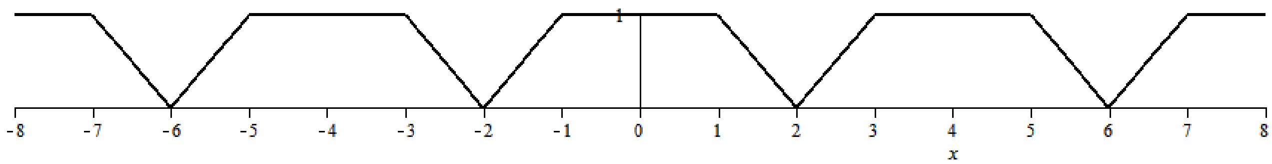


Рис. 3.14

Розв'язання. **а)** Функція, графік якої зображено на рис. 3.13, має період 3, Тобто, у формулах (3.18) – (3.20) потрібно покласти $l = 3/2$, а за відрізок інтегрування обирати будь-який відрізок, довжина якого дорівнює періоду, наприклад, відрізок $[-2;1]$. Запишемо дану функцію в явному вигляді:

$$f(x) = \begin{cases} 3(x-3m), & 3m < x \le 1+3m; \\ 0, & -2+3m < x < 3m; \\ \dfrac{3}{2}, & x = 1+3m; \end{cases} \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Зокрема, на відрізку $[-2;1]$ функція подається у вигляді

$$f(x) = \begin{cases} 3x, & 0 < x \le 1; \\ 0, & -2 < x < 0; \\ 3/2, & x = 1. \end{cases}$$

Отже, за формулами (3.18) і (3.19) і формулою інтегрування частинами обчислюємо коефіцієнти ряду Фур'є:

$$a_0 = \frac{2}{3}\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{2}{3}\left(\int_{-2}^0 0\,dx + \int_0^1 3x\,dx\right) = 1;$$

$$a_n = \frac{2}{3}\int_{-2}^1 f(x)\cos\frac{2\pi nx}{3}\,dx = \frac{2}{3}\int_0^1 3x\cos\frac{2\pi nx}{3}\,dx = \frac{3}{2}\cdot\frac{-3+3\cos\frac{2\pi n}{3} + 2\pi n\sin\frac{2\pi n}{3}}{\pi^2 n^2} =$$

$$=\begin{cases} 0, & n=3k; \\ \dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{-9+2\sqrt{3}\pi(3k-2)}{\pi^2(3k-1)^2}, & n=3k-2; \\ -\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{9+2\sqrt{3}\pi(3k-1)}{\pi^2(3k-2)^2}, & n=3k-1; \end{cases}$$

$$b_n=\frac{2}{3}\int_{-2}^{1} f(x)\sin\frac{2\pi nx}{3}\,dx=\frac{2}{3}\int_{0}^{1} 3x\sin\frac{2\pi nx}{3}\,dx=-\frac{3}{2}\cdot\frac{-3\sin\frac{2\pi n}{3}+2\pi n\cos\frac{2\pi n}{3}}{\pi^2 n^2}=$$

$$=\begin{cases} -\dfrac{1}{\pi k}, & n=3k; \\ \dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{3\sqrt{3}+2\pi(3k-2)}{\pi^2(3k-2)^2}, & n=3k-2; \\ -\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{3\sqrt{3}-2\pi(3k-1)}{\pi^2(3k-1)^2}, & n=3k-1; \end{cases} \quad n,k\in\mathbb{N},$$

а за формулою (3.20) – розклад в ряд Фур'є даної функції:

$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^2 n^2}\left(\left(-3+3\cos\frac{2\pi n}{3}+2\pi n\sin\frac{2\pi n}{3}\right)\cdot\sin\frac{2\pi nx}{3}-\right.$$

$$\left.-\left(-3\sin\frac{2\pi n}{3}+2\pi n\cos\frac{2\pi n}{3}\right)\cdot\cos\frac{2\pi nx}{3}\right)=$$

$$=1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{-9+2\sqrt{3}\pi(3k-2)}{\pi^2(3k-2)^2}\cos\frac{2\pi(3k-2)x}{3}-\frac{3}{4}\cdot\frac{9+2\sqrt{3}\pi(3k-1)}{\pi^2(3k-1)^2}\cos\frac{2\pi(3k-1)x}{3}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\pi k}\sin 3\pi kx+\frac{3}{4}\cdot\frac{3\sqrt{3}+2\pi(3k-2)}{\pi^2(3k-2)^2}\sin\frac{2\pi(3k-2)x}{3}-\frac{3}{4}\cdot\frac{3\sqrt{3}-2\pi(3k-1)}{\pi^2(3k-1)^2}\sin\frac{2\pi(3k-1)x}{3}\right).$$

Згідно з основною теоремою теорії рядів Фур'є , сума отриманого ряду дорівнює функції, графік якої зображено на рис. 3.13. Саме тому ми не вводили нового позначення функції через $f^*(x)$ ■

б) Функція, графік якої зображено на рис. 3.14, має період 4. Це означає, що, $l=2$. Запишемо дану функцію в явному вигляді:

$$f(x)=\begin{cases} |x-2-4m|, & 1+4m\le x\le 3+4m; \\ 1, & -1+4m<x<1+4m; \end{cases} \quad m\in\mathbb{Z}.$$

Зокрема, на відрізку $[0;2]$ функція подається у вигляді

$$f(x)=\begin{cases} 2-x, & 1\le x\le 2; \\ 1, & -1<x<1. \end{cases}$$

З урахуванням того, що дана функція є парною, за формулами (3.18), (3.19) і формулою інтегрування частинами обчислюємо коефіцієнти ряду Фур'є:

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,dx = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 1\,dx + \int_1^2 (x-2)\,dx = \frac{1}{2};$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\cos\frac{\pi n x}{2}\,dx = \int_0^1 \cos\frac{\pi n x}{2}\,dx + \int_1^2 (x-2)\cos\frac{\pi n x}{2}\,dx =$$

$$= \frac{2\sin\frac{\pi n}{2}}{\pi n} - \frac{2\left(2\cos\frac{\pi n}{2} - \pi n\sin\frac{\pi n}{2} - 2\cos\pi n\right)}{\pi^2 n^2} = \begin{cases} 0, & n = 4k; \\ \dfrac{4\left(-1+(4k-3)\pi\right)}{\pi^2(4k-3)^2}, & n = 4k-3; \\ \dfrac{2}{\pi^2(2k-1)^2}, & n = 4k-2; \\ -\dfrac{4\left(1+(4k-1)\pi\right)}{\pi^2(4k-1)^2}, & n = 4k-1; \end{cases}$$

$$b_n = 0;\quad n, k \in \mathbb{N}.$$

Підставляючи їх в розклад (3.20), отримаємо ряд Фур'є даної функції:

$$f(x) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2\sin\frac{\pi n}{2}}{\pi n} - \frac{2\left(2\cos\frac{\pi n}{2} - \pi n\sin\frac{\pi n}{2} - 2\cos\pi n\right)}{\pi^2 n^2}\right)\cdot\cos\frac{\pi n x}{2} =$$

$$= \frac{1}{4} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4\left(-1+(4k-3)\pi\right)}{\pi^2(4k-3)^2}\cos\frac{\pi(4k-3)x}{2} + \frac{2}{\pi^2(2k-1)^2}\cos\pi(2k-1)x - \right.$$

$$\left. - \frac{4\left(1+(4k-1)\pi\right)}{\pi^2(4k-1)^2}\cos\frac{\pi(4k-1)x}{2}\right).$$

Згідно з основною теоремою теорії рядів Фур'є , сума отриманого ряду дорівнює функції, графік якої зображено на рис. 3.14. ■

§2 Розвинення функцій в ряд Фур'є

1. Ряди Фурь'є парних і непарних функцій, функцій, що задані на (-π;π), на (0;π), на (a,b)

Задача 3.4 (№Д2961) Побудувати розклад функції $f(x) = x^2$ в ряд Фур'є

а) в інтегралі $(-\pi;\pi)$ за косинусами кратних дуг;

б) в інтервалі $(0;\pi)$ за синусами кратних дуг;

в) в інтервалі $(0;2\pi)$.

Побудувати графік функції і графік суми рядів Фур'є для випадків а), б), в). Застосовуючи ці розклади, знайти суми числових рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}.$$

Розв'язання. На рис. 3.15 зображено графіки функції $f(x)=x^2$ на інтервалі $(-\pi;\pi)$ (рис. 3.15 а), на інтервалі $(0;\pi)$ (рис. 3.15 б), на інтервалі $(0;2\pi)$ (рис. 3.15 в).

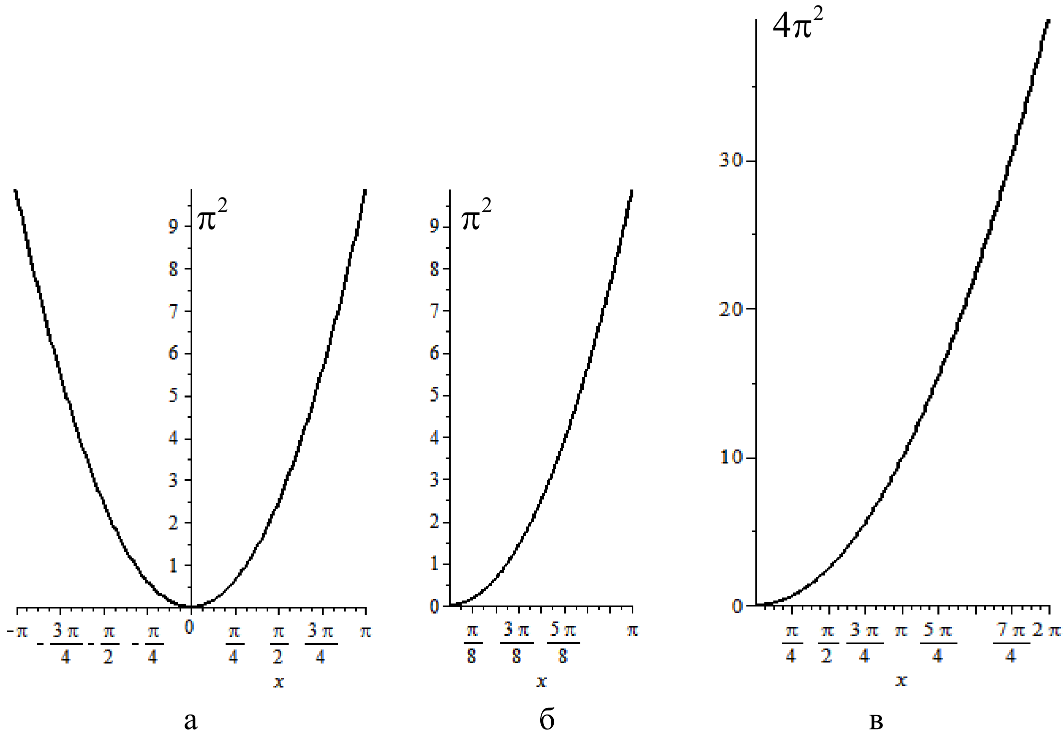


Рис. 3.15

■

а) Оскільки функція $f(x)=x^2$ на інтервалі $(-\pi;\pi)$ є парною, то її ряд Фур'є являє собою розклад за косинусами кратних дуг. За формулами (3.14) обчислимо

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2dx=\frac{2}{3}\pi^2;$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos nx\,dx=\left\|\begin{matrix} u=x^2, & du=2x\,dx,\\ dv=\cos nx\,dx, & v=\dfrac{1}{n}\sin nx,\end{matrix}\right\|=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n}x^2\sin nx\Big|_0^{\pi}-\frac{2}{n}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx\right)=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n}\Big(\pi^2\underbrace{\sin\pi n}_{=0}-0\Big)-\frac{2}{n}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx\right)=$$

$$=-\frac{4}{\pi n}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx=\left\|\begin{matrix} u=x, & du=dx,\\ dv=\sin nx\,dx, & v=-\dfrac{1}{n}\cos nx,\end{matrix}\right\|=$$

$$=-\frac{4}{\pi n}\left(-\frac{1}{n}x\cos nx\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx\right)=\frac{4}{\pi n^2}(\pi\cos\pi n-0)-\frac{4}{\pi n^2}\frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi}=\frac{4(-1)^n}{n^2};$$

$$b_n=0;\quad n\in\mathbb{N}.$$

Підставляючи їх в розклад (3.18), отримаємо ряд Фур'є даної функції:

$$f_c(x)=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cdot\cos nx. \tag{3.25}$$

Будуючи графік функції $y = f_c(x)$

1) Спочатку подовжуємо її за періодом 2π.
2) Помічаємо, що подовжена функція в точках $\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ має рівні односторонні границі $f_c(\pi + 2\pi n + 0) = f_c(\pi + 2\pi n - 0) = \pi^2, n \in \mathbb{Z}$, тому значення в регуляризованих точках розриву $\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ будуть дорівнювати π^2.
3) У результаті отримаємо графік функції $y = f_c(x)$, зображений на рис. 3.16.

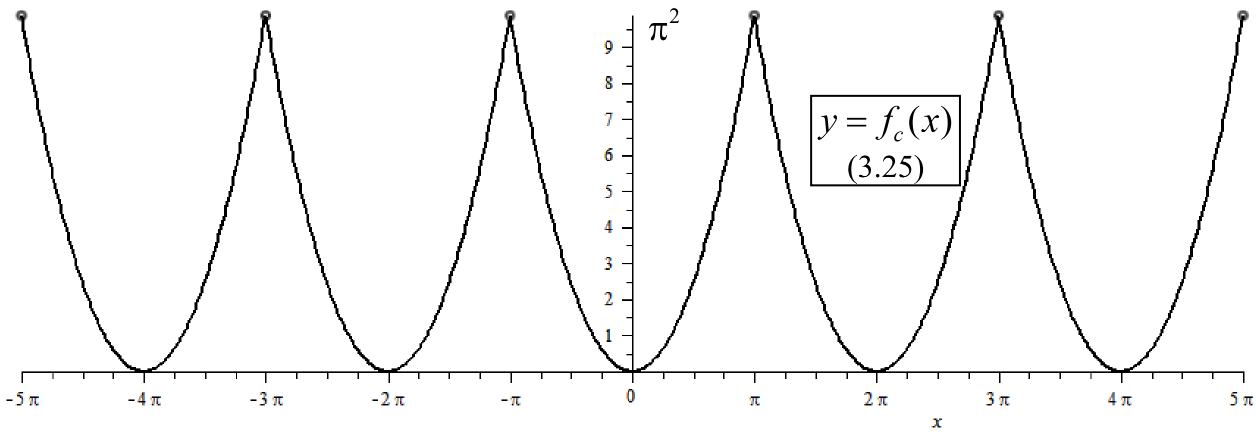


Рис. 3.16

Аналітичне подання функції, що є сумою ряду Фур'є (3.25):

$$f_c(x) = \left\{(x - 2\pi m)^2, \quad -\pi + 2\pi m < x \le \pi + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}\right\}. \quad ■$$

б) Щоб розвинути дану функцію в інтервалі $(0;\pi)$ за синусами кратних дуг, потрібно застосувати формули (3.16):

$$a_0 = 0; \ a_n = 0;$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2 \sin nx\,dx = \left\| \begin{matrix} u = x^2, & du = 2x\,dx, \\ dv = \sin nx\,dx, & v = -\frac{1}{n}\cos nx, \end{matrix} \right\| =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{n}x^2\cos nx\Big|_0^\pi + \frac{2}{n}\int_0^\pi x\cos nx\,dx \right) = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{n}\left(\pi^2\cos\pi n - 0\right) + \frac{2}{n}\int_0^\pi x\cos nx\,dx \right) =$$

$$= -\frac{2\pi}{n}(-1)^n + \frac{4}{\pi n}\int_0^\pi x\cos nx\,dx = \left\| \begin{matrix} u = x, & du = dx, \\ dv = \cos nx\,dx, & v = \frac{1}{n}\sin nx, \end{matrix} \right\| =$$

$$= -\frac{2\pi}{n}(-1)^n + \frac{4}{\pi n}\left(\frac{1}{n}x\sin nx\Big|_0^\pi - \frac{1}{n}\int_0^\pi \sin nx\,dx \right) = -\frac{2\pi}{n}(-1)^n + \frac{4}{\pi n^3}\cdot\left((-1)^n - 1\right); \quad n \in \mathbb{N}.$$

Підставимо ці коефіцієнти до розкладу (3.17), отримаємо ряд Фур'є даної функції за синусами кратних дуг:

$$f_s(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(2\pi\frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{4}{\pi n^3}\cdot\left((-1)^n - 1\right) \right)\cdot\sin nx = .$$

$$= 2\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\sin nx + \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^3}\cdot\sin(2k-1)x. \quad (3.26)$$

Будуємо графік функції $y = f_s(x)$.

1) Спочатку подовжуємо графік даної функції (рис. 3.15б) за непарністю, тобто симетрично відносно точки $O(0,0)$ (рис. 3.17).
2) Потім подовжуємо за періодом 2π.
3) Регуляризуємо точки розриву $\pi n, n \in \mathbb{Z}$:

$$f_s(2\pi n + 0) = f_s(2\pi n - 0) = 0 \Rightarrow f_s(2\pi n) = \frac{1}{2}\left(f_s(2\pi n + 0) + f_s(2\pi n - 0)\right) = 0;$$

$$f_s(\pi + 2\pi n + 0) = -\pi^2, f_s(\pi + 2\pi n - 0) = \pi^2 \Rightarrow f_s(\pi + 2\pi n) = \frac{1}{2}\left(-\pi^2 + \pi^2\right) = 0, n \in \mathbb{Z},$$

4) У результаті отримаємо графік, зображений на рис. 3.18.

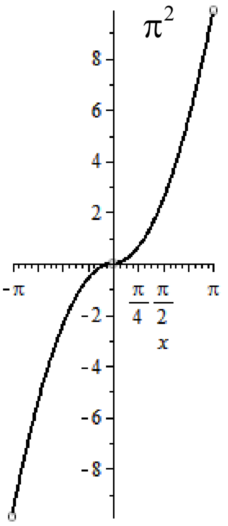


Рис. 3.17

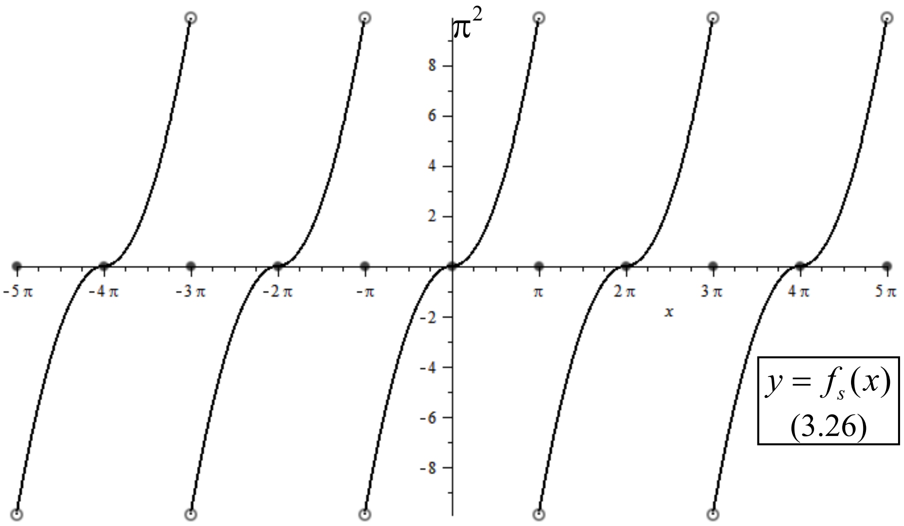


Рис. 3.18

Аналітичне подання функції (3.26):

$$f_s(x) = \begin{cases} (x - 2\pi m)^2, & 2\pi m < x < \pi + 2\pi m; \\ -(x - 2\pi m)^2, & -\pi + 2\pi m < x < 2\pi m; \\ 0, & x = \pi m; \end{cases} \quad m \in \mathbb{Z}.. \quad \blacksquare$$

в) Якщо функція задана на інтервалі $(0;2\pi)$, то можна вважати її півперіод рівним $l = \pi$, а в формулах (3.18) і (3.19) або в формулах (3.4), (3.6), (3.7) інтегрування здійснювати вздовж відрізка $[0;2\pi]$ за допомогою формули інтегрування частинами:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{8}{3}\pi^2;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\cos nx\,dx = \frac{4}{n^2};$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\sin nx\,dx = -\frac{4\pi}{n}; \quad n \in \mathbb{N}.$$

Підставимо ці коефіцієнти до розкладу (3.18) або (3.8), отримаємо ряд Фур'є даної функції:

$$f^*(x) = \frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\cdot\cos nx - \pi\frac{\sin nx}{n}\right). \tag{3.28}$$

Графік функції $y = f^*(x)$ будуємо поетапно. Спочатку подовжуємо графік даної функції за періодом 2π, а потім регуляризуємо точки розриву:

$$f^*(2\pi n) = \frac{f^*(2\pi n+0) + f^*(2\pi n-0)}{2} = \frac{f^*(+0) + f^*(2\pi - 0)}{2} = \frac{0 + 4\pi^2}{2} = 2\pi^2.$$

Результат наведено на рис. 3.19.

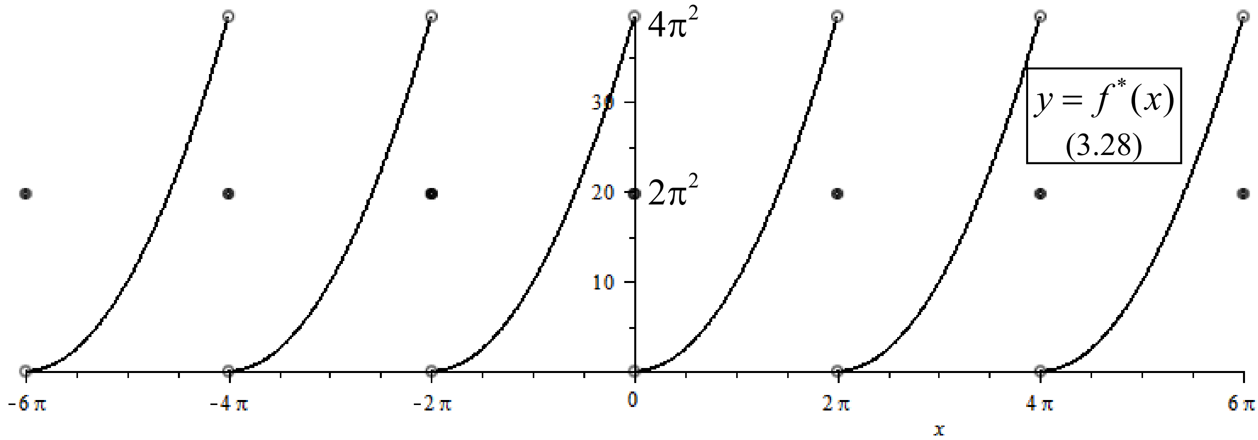


Рис. 3.19

Аналітичне подання функції (3.28):

$$f^*(x) = \begin{cases} (x - 2\pi m)^2, & 2\pi m < x < 2\pi + 2\pi m; \\ 2\pi^2, & x = 2\pi m; \end{cases} \quad m \in \mathbb{Z}.. \quad \blacksquare$$

Тепер знайдемо значення сум рядів, що вимагаються умовою.

Суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ можна знайти, наприклад, із розкладу (3.28). Покладемо в ньому $x = 0$:

$$f^*(0) = \frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\cdot\cos 0 - \pi\frac{\sin 0}{n}\right) = \frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Оскільки $f^*(0) = 2\pi^2$ (див. рис. 3.19), то

$$2\pi^2 = \frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \quad \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ можна знайти із розкладу (3.25). Нехай $x = 0$, тоді

$$f_c(0) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}.$$

Оскільки $f_c(0) = 0$ (див. рис. 3.16), то

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} \quad \Rightarrow -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} \quad \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ знайдемо, застосовуючи отриманий результат: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$. Маємо:

$$\frac{\pi^2}{6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{24}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2};$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi^2}{24}=\frac{\pi^2}{8}.$$

Отримані значення сум числових рядів відповідають формулам, наведеним у додатку В. ■

2. Ряди Фурь'є парних і непарних функцій, функцій, що задані на $(0;l)$

Задача 3.5. Побудувати розклад функції в ряд Фур'є за синусами і за косинусами на вказаних проміжках:

а) $f(x)=\operatorname{sgn}(x-1)(x-2)$ на $(0;2)$; **б)** $f(x)=\begin{cases}\sin\pi x, & 0<x<2;\\ 0, & 2\le x<4;\end{cases}$ на $(0;4)$.

Розв'язання. **а)** Дану функцію можна подати у вигляді

$$f(x)=\begin{cases}2-x, & 0<x\le 1;\\ x-2, & 1<x<2.\end{cases}.$$

Довжина півперіоду у цьому випадку дорівнює $l=2$.

Для розвинення функції в ряд Фур'є за косинусами кратних дуг застосуємо формули (3.14), (3.15):

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,dx=\frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^1(2-x)\,dx+\int_1^2(x-2)\,dx=1;$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}\,dx=\int_0^1(2-x)\cos\frac{\pi nx}{2}\,dx+\int_1^2(x-2)\cos\frac{\pi nx}{2}\,dx=$$

$$=\frac{4\left(1+\pi n\sin\frac{\pi n}{2}-2\cos\frac{\pi n}{2}+\cos\pi n\right)}{\pi^2n^2}=\begin{cases}0, & n=4k;\\ -\frac{4}{\pi(4k-1)}, & n=4k-1;\\ \frac{4}{\pi^2(2k-1)^2}, & n=4k-2;\\ \frac{4}{\pi(4k-3)}, & n=4k-3;\end{cases}$$

$$b_n=0;\quad n,k\in\mathbb{N}.$$

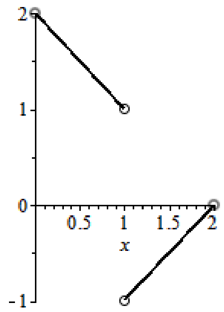
Розклад набуде вигляду:

$$f_c(x)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\left(1+\pi n\sin\frac{\pi n}{2}-2\cos\frac{\pi n}{2}+\cos\pi n\right)}{\pi^2n^2}\cos\frac{\pi nx}{2}=$$

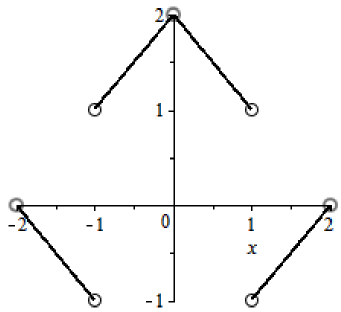
$$=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{4}{\pi(4k-1)}\cos\frac{\pi(4k-1)x}{2}+\frac{4}{\pi^2(2k-1)^2}\cos\pi(2k-1)x+\frac{4}{\pi(4k-3)}\cos\frac{\pi(4k-3)x}{2}\right). \tag{3.29}$$

Щоб побудувати графік функції $y=f_c(x)$, потрібно

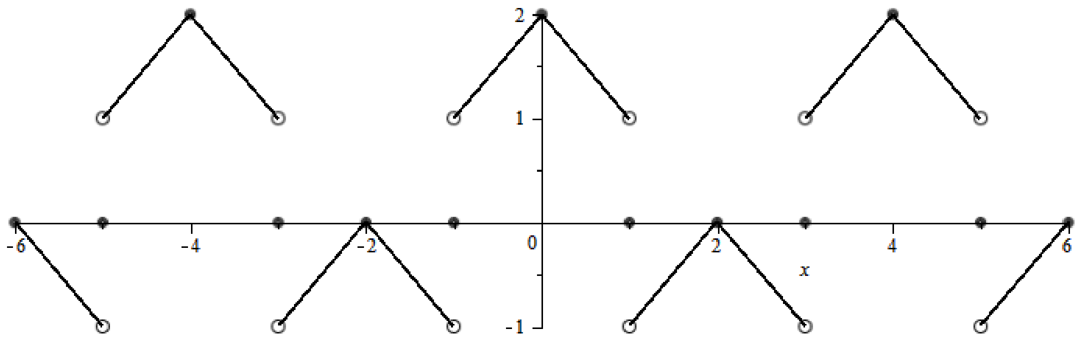
1) спочатку побудувати графік даної функції $y=f(x)$ (рис. 3.20 а),
2) подовжити його парним чином на інтервал $(-2;0)$, тобто симетрично відносно осі ординат (рис. 3.20 б),
3) подовжити отриманий на попередньому кроці графік за періодом довжиною 4 і регуляризувати усі точки розриву (рис. 3.20 в).



а



б



в

Рис. 3.20

Аналітичний запис функції, що є сумою ряду Фур'є (3.29):

$$f_c(x)=\begin{cases} 2-(x-4m), & 4m<x<1+4m; \\ (x-4m)-2, & 1+4m<x<2+4m; \\ 2+(x-4m), & -1+4m<x<4m; \\ -(x-4m)-2, & -4+4m<x<-3+4m; \\ 0, & x=2+4m,\ x=1+2m; \\ 2, & x=4m; \end{cases} \quad m\in\mathbb{Z}.. \quad \blacksquare$$

Для отримання коефіцієнтів розвинення функції в ряд Фур'є за синусами кратних дуг застосуємо формули (3.16):

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}\,dx=\int_0^1(2-x)\sin\frac{\pi nx}{2}\,dx+\int_1^2(x-2)\sin\frac{\pi nx}{2}\,dx=$$

$$=\frac{4\left(\pi n-2\sin\dfrac{\pi n}{2}-\pi n\cos\dfrac{\pi n}{2}\right)}{\pi^2 n^2}=\begin{cases}0, & n=4k;\\ \dfrac{4(2+\pi(4k-1))}{\pi^2(4k-1)^2}, & n=4k-1;\\ \dfrac{4}{\pi(2k-1)}, & n=4k-2;\\ \dfrac{4(-2+\pi(4k-3))}{\pi^2(4k-3)^2}, & n=4k-3;\end{cases}$$

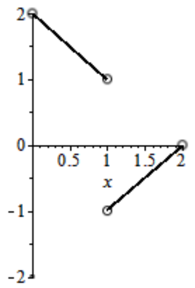
$$a_0=0;\ a_n=0;\quad n,k\in\mathbb{N}.$$

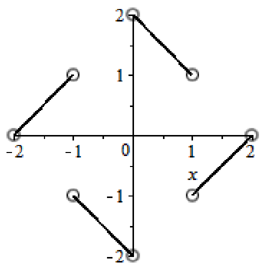
Підставимо ці коефіцієнти до розкладу (3.17), отримаємо ряд Фур'є даної функції за синусами кратних дуг:

$$f_s(x)=\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\pi n-2\sin\frac{\pi n}{2}-\pi n\cos\frac{\pi n}{2}\right)\cdot\sin\frac{\pi nx}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4(2+\pi(4k-1))}{\pi^2(4k-1)^2}\sin\frac{\pi(4k-1)x}{2}+\right.$$
$$\left.+\frac{4}{\pi(2k-1)}\sin\pi(2k-1)x+\frac{4(-2+\pi(4k-3))}{\pi^2(4k-3)^2}\sin\frac{\pi(4k-3)x}{2}\right).\qquad(3.30)$$

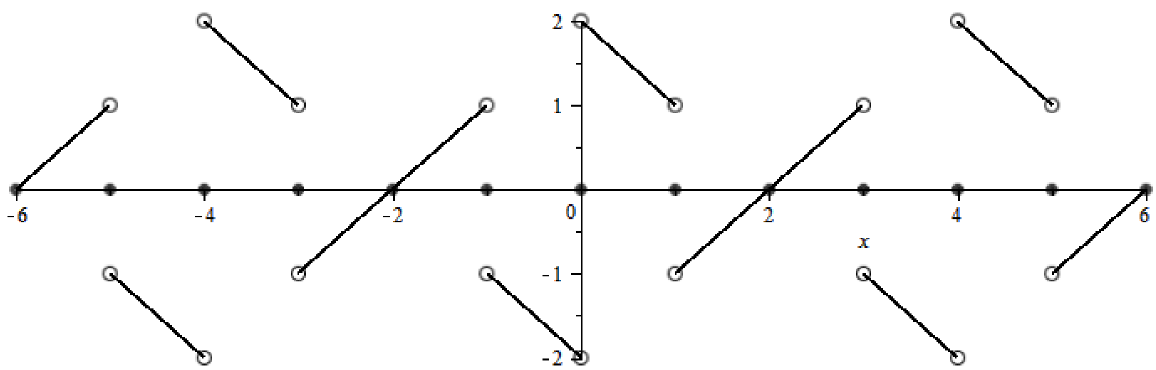
Щоб побудувати графік функції $y=f_s(x)$, потрібно

1) спочатку побудувати графік даної функції $y=f(x)$ (рис. 3.21 а),
2) подовжити його парним чином на інтервал $(-2;0)$, тобто симетрично відносно точки O(0,0) (рис. 3.21 б),
3) подовжити отриманий на попередньому кроці графік за періодом довжиною 4 і регуляризувати усі точки розриву (рис. 3.21 в).





а б



в

Рис. 3.21

Аналітичний запис функції, що є сумою ряду Фур'є (3.30):

$$f_s(x)=\begin{cases}2-(x-4m), & 4m<x<1+4m;\\ (x-4m)-2, & 1+4m<x<2+4m;\\ -2-(x-4m), & -1+4m<x<4m; \qquad m\in\mathbb{Z}..\\ (x-4m)+2, & -4+4m<x<-3+4m;\\ 0, & x=m;\end{cases} \quad \blacksquare$$

б) Побудуємо спочатку розклад функції $f(x)=\begin{cases}\sin\pi x, & 0<x<2;\\ 0, & 2\le x<4;\end{cases}$ на $(0;4)$ в ряд Фур'є за косинусами кратних дуг. У даному випадку довжина півперіоду дорівнює $l=4$. Коефіцієнти ряду обчислимо за формулами (3.14):

$$a_0=\frac{2}{4}\int_0^4 f(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^2\sin\pi x\,dx=-\frac{1}{2\pi}\cos\pi x\Big|_0^2=0;$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^2\sin\pi x\cos\frac{\pi nx}{4}\,dx=\left\|\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right]\right\|=$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^2\sin\frac{(4-n)\pi x}{4}dx+\frac{1}{4}\int_0^2\sin\frac{(n+4)\pi x}{4}dx=\frac{1}{\pi(n-4)}\cos\frac{(n-4)\pi x}{4}\Big|_0^2-\frac{1}{\pi(n+4)}\cos\frac{(n+4)\pi x}{4}\Big|_0^2=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n-4}\cos\left(\frac{n\pi}{2}-2\pi\right)-\frac{1}{n-4}-\frac{1}{n+4}\cos\left(\frac{n\pi}{2}+2\pi\right)+\frac{1}{n+4}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n-4}\cos\frac{n\pi}{2}-\frac{1}{n+4}\cos\frac{n\pi}{2}-\frac{8}{n^2-16}\right)=\frac{8}{\pi\left(n^2-16\right)}\left(\cos\frac{n\pi}{2}-1\right),\quad n\ne 4;$$

$$a_n=\begin{cases}0, & n=4k,\ k\ne 1;\\ -\dfrac{8}{\pi\left((4k-1)^2-16\right)}, & n=4k-1;\\ -\dfrac{4}{\pi\left((2k-1)^2-4\right)}, & n=4k-2;\\ -\dfrac{8}{\pi\left((4k-3)^2-16\right)}, & n=4k-3;\end{cases}$$

$$a_4=\frac{1}{2}\int_0^2\sin\pi x\cos\pi x\,dx=\frac{1}{4}\int_0^2\sin 2\pi x\,dx=\frac{1}{8\pi}\cos 2\pi x\Big|_0^2=0$$

$$b_n=0;\quad n\in\mathbb{N}.$$

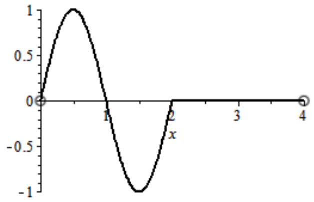
Відповідно до формули (3.15), розклад за косинусами кратних дуг набуде вигляду:

$$f_c(x)=\frac{8}{\pi}\sum_{\substack{n\in\mathbb{N},\\ n\ne 4}}\frac{1}{n^2-16}\left(\cos\frac{n\pi}{2}-1\right)\cos\frac{\pi nx}{4}=$$

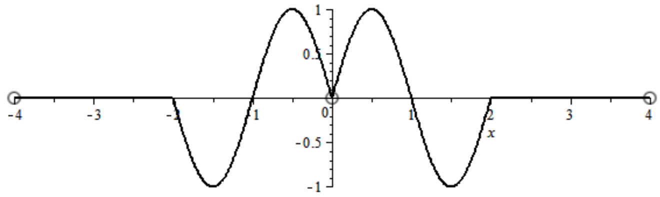
$$=-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{(4k-1)^2-16}\cos\frac{\pi(4k-1)x}{2}+\frac{1}{(2k-1)^2-4}\cos\pi(2k-1)x+\frac{2}{(4k-3)^2-16}\cos\frac{\pi(4k-3)x}{2}\right).$$

Будуємо графік функції $y = f_c(x)$.

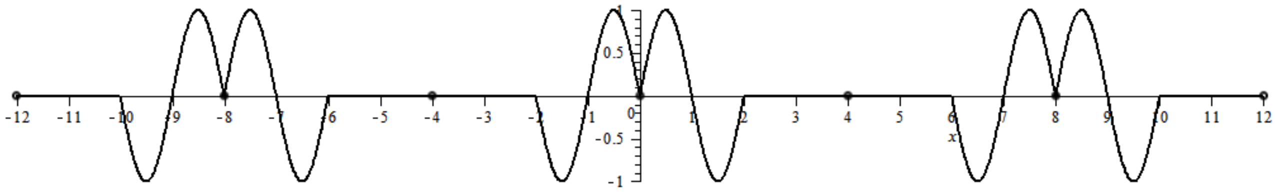
1) Будуємо графік даної функції $y = f(x)$ (рис. 3.22 а),
2) Подовжуємо його парним чином на інтервал $(-4;0)$, тобто симетрично відносно осі ординат (рис. 3.22 б),
3) Отриманий графік подовжуємо за періодом довжиною 8 і регуляризуємо усі точки розриву (рис. 3.22 в).



а



б



в

Рис. 3.22

Аналітичний запис функції, що є сумою отриманого ряду Фур'є:

$$f_c(x) = \begin{cases} \sin\pi(x-8m), & 8m < x < 2+8m; \\ \sin\big(-\pi(x-8m)\big), & -2+8m < x < 8m; \quad m \in \mathbb{Z}.. \\ 0, & 2+8m < x < 6+8m; \end{cases} \quad \blacksquare$$

Коефіцієнтів розвинення функції в ряд Фур'є <u>за синусами кратних дуг</u> обчислюємо за формулою (3.16):

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \sin\pi x \sin\frac{\pi n x}{4}\,dx = \left\| \sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\big[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\big] \right\| =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^2 \cos\frac{(n-4)\pi x}{4}\,dx - \frac{1}{4}\int_0^2 \cos\frac{(n+4)\pi x}{4}\,dx = \frac{1}{\pi(n-4)}\sin\frac{(n-4)\pi x}{4}\Bigg|_0^2 - \frac{1}{\pi(n+4)}\sin\frac{(n+4)\pi x}{4}\Bigg|_0^2 =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n-4}\sin\left(\frac{n\pi}{2}-2\pi\right) - \frac{1}{n+4}\sin\left(\frac{n\pi}{2}+2\pi\right)\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n-4}\sin\frac{n\pi}{4} - \frac{1}{n+4}\sin\frac{n\pi}{4}\right) =$$

$$= -\frac{8}{\pi\left(n^2-16\right)}\sin\frac{n\pi}{2}, \quad n \neq 4;$$

$$b_n = \begin{cases} 0, & n = 2k, \ k \neq 1; \\ \dfrac{8(-1)^{k+1}}{\pi\left((2k-1)^2-16\right)}, & n = 2k-1; \end{cases}$$

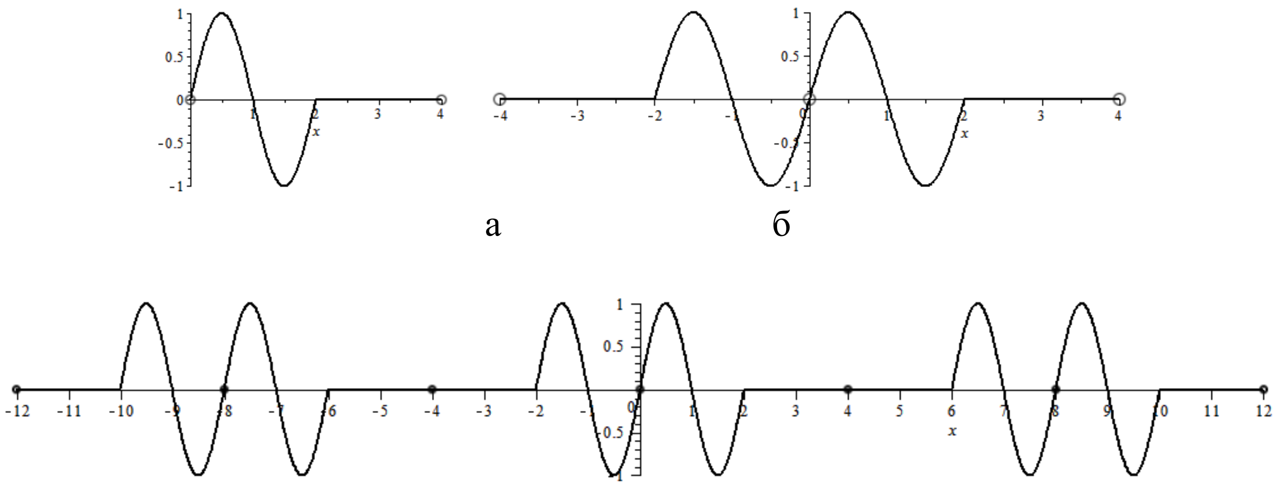
$$b_4 = \frac{1}{2}\int_0^2 \sin^2\pi x\,dx = \frac{1}{4}\int_0^2 (1-\cos 4\pi x)\,dx = \frac{1}{2}; \quad a_0 = 0; \ a_n = 0; \quad n, k \in \mathbb{N}.$$

Підставимо ці коефіцієнти до розкладу (3.17), отримаємо ряд Фур'є даної функції за синусами кратних дуг:

$$f_s(x)=\frac{1}{2}\cos\pi x+\frac{8}{\pi}\sum_{\substack{n\in\mathbb{N},\\ n\neq 4}}\frac{1}{n^2-16}\sin\frac{n\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi nx}{4}=\frac{1}{2}\cos\pi x+\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{\left(2k-1\right)^2-16}\cos\frac{\pi(2k-1)x}{2}.$$

Будуємо графік функції $y=f_s(x)$.

1) Будуємо графік даної функції $y=f(x)$ (рис. 3.23 а),
2) Подовжуємо його парним чином на інтервал $(-4;0)$, тобто симетрично відносно точки O(0,0) (рис. 3.23 б),
3) Отриманий графік подовжуємо за періодом довжиною 8 і регуляризуємо усі точки розриву (рис. 3.23 в).



а б

в

Рис. 3.23

Згідно з основною теоремою теорії рядів Фур'є (теорема 3.1), функцію, що є сумою отриманого ряду Фур'є, можна подати формулою

$$f_s(x)=\begin{cases}\sin\pi(x-8m), & -2+8m<x<2+8m;\\ 0, & 2+8m<x<6+8m;\end{cases}\quad m\in\mathbb{Z}.. \ \blacksquare$$

§3 Підсумовування рядів Фур'є

1. Підсумовування рядів Фурь'є за допомогою аналітичних функцій комплексної змінної

Приклад 3.4 Підсумувати ряд $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n\left(n+1\right)}$.

*Розв'язання***.** Перевіримо припущення:

$$\left|\frac{\cos nx}{n\left(n+1\right)}\right|\le\frac{1}{n^2+n}\le\frac{1}{n^2}$$ (показник степеня знаменника 2>1).

$$\text{зб} \quad \Leftarrow \quad \text{зб}$$

Отже, ряд збігаються абсолютно на $\left[0,2\pi\right]$. Розглянемо $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{z^n}{n\left(n+1\right)}$.

Перепишемо коефіцієнт степеневого ряду через різницю $\frac{1}{n\left(n+1\right)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$, тоді ряд, що розглядається, можна переписати у вигляді

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{z^n}{n\left(n+1\right)}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z^n}{n}-\frac{z^n}{n+1}\right)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}-\frac{1}{z}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{n+1}.$$

Оскільки

$$\ln\left(1-z\right)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}=-\ln\left(1-z\right),$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{n+1}=\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+...=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}-z=-\ln\left(1-z\right)-z.$$

Отже,

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{z^n}{n\left(n+1\right)}=1-\ln\left(1-z\right)+\frac{1}{z}\left(\ln\left(1-z\right)+z\right)=2-\ln\left(1-z\right)\left(1-\frac{1}{z}\right).$$

Виділимо дійсну і уявну частину отриманої функції. У прикладі 3.2 було одержано $1-z=2\sin\frac{x}{2}e^{i\cdot\frac{x-\pi}{2}}$, тому $\ln\left(1-z\right)=\ln 2\sin\frac{x}{2}+i\frac{x-\pi}{2}$. Крім того,

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{e^{ix}}=e^{-ix}=\cos\left(-x\right)+i\sin\left(-x\right)=\cos x-i\sin x.$$

Таким чином,

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n\left(n+1\right)}=2-\left(\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right)+i\frac{x-\pi}{2}\right)\left(1-\cos x-i\sin x\right),$$

$$\operatorname{Re}\left(2-\left(\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right)+i\frac{x-\pi}{2}\right)\left(1-\cos x-i\sin x\right)\right)=2-2\sin^2\frac{x}{2}\cdot\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right)+\frac{x-\pi}{2}\sin x.$$

Отже, для даного ряду маємо:

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n\left(n+1\right)}=2-2\sin^2\frac{x}{2}\cdot\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right)+\frac{x-\pi}{2}\sin x.\ \blacksquare$$

3.3 ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ВИКОНАННЯ

Завдання 3.1 Розвинути функцію $f(x)$ в ряд Фур'є й визначити точки, у яких він збігається до відповідного значення функції $f(x)$. Зобразити графіки функцій.

1. $f(x)=\operatorname{ch} x$, $-\pi \le x \le \pi$.

2. $f(x)=\begin{cases} 0, & x\in(-\pi;0); \\ a, & x\in[0;\pi). \end{cases}$

3. $f(x)=\operatorname{sh} x$, $-\pi \le x \le \pi$.

4. $f(x)=\begin{cases} -2x, & x\in(-\pi;0); \\ 3x, & x\in[0;\pi). \end{cases}$

5. $f(x)=\pi + x$, $-\pi \le x \le \pi$.

6. $f(x)=x+\operatorname{sign} x$, $-\pi \le x \le \pi$.

7. $f(x)=\begin{cases} 1, & x\in\left(-\pi;-\frac{\pi}{2}\right]; \\ 0, & x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right); \\ 1, & x\in\left[\frac{\pi}{2};\pi\right). \end{cases}$

8. $f(x)=\begin{cases} \sin x, & x\in\left(-\pi;-\frac{\pi}{2}\right); \\ \frac{2}{\pi}x, & x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]; \\ \sin x, & x\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right). \end{cases}$

9. $f(x)=\begin{cases} 0, & x\in(-\pi;0); \\ x, & x\in[0;\pi). \end{cases}$

10. $f(x)=\begin{cases} 0, & x\in(-\pi;0); \\ \cos x, & x\in[0;\pi). \end{cases}$

11. $f(x)=e^{2|x|}$, $-\pi \le x \le \pi$.

12. $f(x)=\begin{cases} \sin x, & x\in(-\pi;0); \\ 0, & x\in[0;\pi). \end{cases}$

13. $f(x)=\begin{cases} 5x, & x\in(-\pi;0); \\ -x, & x\in[0;\pi). \end{cases}$

14. $f(x)=|\sin x|$, $-\pi \le x \le \pi$.

15. $f(x)=\begin{cases} 0, & x\in(-\pi;0); \\ \sin x, & x\in[0;\pi). \end{cases}$

16. $f(x)=\begin{cases} \frac{x}{2}, & x\in(-\pi;\pi); \\ 0, & x=\pi. \end{cases}$

17. $f(x)=\begin{cases} -4, & x\in(-\pi;0); \\ 4, & x\in[0;\pi). \end{cases}$

18. $f(x)=\begin{cases} a, & x\in(-\pi;0); \\ b, & x\in[0;\pi). \end{cases}$

19. $f(x)=\frac{x^2}{4}$, $-\pi \le x \le \pi$.

20. $f(x)=e^{3x}$, $-\pi \le x \le \pi$.

Завдання 3.2 Розвинути функцію в ряд Фур'є: а) за синусами; б) за косинусами; в) з періодом $T = 4$. Зобразити графіки функцій.

1. $f(x) = \begin{cases} x, & x \in (0;2]; \\ 2, & x \in (2;4). \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in (0;2]; \\ 4, & x \in (2;4). \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in (0;2]; \\ 6 - x, & x \in (2;4). \end{cases}$

4. $f(x) = \begin{cases} x + 2, & x \in (0;2]; \\ 4, & x \in (2;4). \end{cases}$

5. $f(x) = \begin{cases} -x, & x \in (0;2]; \\ x - 4, & x \in (2;4). \end{cases}$

6. $f(x) = \begin{cases} -x, & x \in (0;2]; \\ -2, & x \in (2;4). \end{cases}$

7. $f(x) = \begin{cases} x, & x \in (0;2]; \\ 4 - x, & x \in (2;4). \end{cases}$

8. $f(x) = \begin{cases} -x, & x \in (0;2]; \\ 2x - 6, & x \in (2;4). \end{cases}$

9. $f(x) = \begin{cases} 2 - 2x, & x \in (0;2]; \\ -2, & x \in (2;4). \end{cases}$

10. $f(x) = \begin{cases} 2 - 2x, & x \in (0;2]; \\ x - 4, & x \in (2;4). \end{cases}$

11. $f(x) = \begin{cases} 2 - 2x, & x \in (0;2]; \\ 2x - 6, & x \in (2;4). \end{cases}$

12. $f(x) = \begin{cases} 2x - 2, & x \in (0;2]; \\ 6 - 2x, & x \in (2;4). \end{cases}$

13. $f(x) = \begin{cases} x, & x \in (0;2]; \\ 6 - 2x, & x \in (2;4). \end{cases}$

14. $f(x) = \begin{cases} 2x - 2, & x \in (0;2]; \\ 2, & x \in (2;4). \end{cases}$

15. $f(x) = \begin{cases} 4 - x, & x \in (0;2]; \\ 2, & x \in (2;4). \end{cases}$

16. $f(x) = \begin{cases} x + 2, & x \in (0;2]; \\ 8 - 2x, & x \in (2;4). \end{cases}$

17. $f(x) = \begin{cases} 4 - 2x, & x \in (0;2]; \\ x - 2, & x \in (2;4). \end{cases}$

18. $f(x) = \begin{cases} 2 - x, & x \in (0;2]; \\ x - 2, & x \in (2;4). \end{cases}$

19. $f(x) = \begin{cases} x - 2, & x \in (0;2]; \\ 0, & x \in (2;4). \end{cases}$

20. $f(x) = \begin{cases} x - 2, & x \in (0;2]; \\ 2 - x, & x \in (2;4). \end{cases}$

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

Основна:

1. *Ильин В.А.* Математический анализ / *В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Бл.Х. Сендов.* – М.:Наука,1979.–720 с.
2. *Ильин В.А.* Математический анализ. Продолжение курса анализ / *В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Бл.Х. Сендов.* – М.:Изд-во МГУ, 1987. – 358 с.
3. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3-х т. / *Г.М. Фихтенгольц.* – Т.2. – М.: Наука, 1966. – 800 с.
4. *Демидович Б.П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу / *Б.П. Демидович.* – М.:Наука, 1990. – 624 с.
5. Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної: Частина І: навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів / Укл. *С.М. Гребенюк, Н.М. Д'яченко, М.І. Клименко, І.В. Красікова, О.О. Тітова, В.В.Леонтьєва.* – Запоріжжя: ЗНУ, 2014. – 232 с.
6. Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної: Частина ІІ: навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів / Укл. *С.М. Гребенюк, Н.М. Д'яченко, М.І. Клименко, І.В. Красікова, О.О. Тітова, В.В. Леонтьєва.* – Запоріжжя: ЗНУ, 2013. – 495 с.

Додаткова:

7. *Берман Г.Н.* Сборник задач по курсу математического анализа / *Г.Н. Берман.* – М.:Наука,1985.–383 с.
8. *Никольский С.М.* Курс математического анализа / *С.М. Никольский.* – Т.1. – 1990. – 528 с.; Т.2. – 1991. – 543 с.
9. *Кудрявцев Л.Д.* Сборник задач по математическому анализу. Т.2 Интегралы. Ряды / *Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов и др.* –М.: Наука,1986. – 528 с.
10. *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа: В 2 т. / *Л.Д. Кудрявцев.* – Т.1. – М.:Высш.шк.,1988. – 712 с.
11. *Ильин В.А.* Основы математического анализа: В 2 ч. / *В.А. Ильин, Э.Г. Позняк.* – М.: Физматлит. – Ч.1. – 2005. – 648 с.; Ч.2. – 2002. – 464 с.
12. Математический анализ в примерах и задачах */ И.И. Ляшко, А.К. Боярчук, Л.Г. Гай, Г.П. Головчак.* – К.:Вища шк. – Ч.2. Ряды, функции нескольких переменных, кратные и криволинейные интегралы. – 1977. – 671 с.
13. *Дюженкова Л.І.,* Математичний аналіз у задачах і прикладах / *Л.І. .Дюженкова, Т.В. Колесник, М.Я. Лященко, Г.О. Михалін, М.І. Шкіль.* – Ч. 1. – К.: Вища школа, 2002. – 462 с.
14. *Дюженкова Л.І.,* Математичний аналіз у задачах і прикладах / *Л.І. Дюженкова, Т.В. Колесник, М.Я. Лященко, Г.О. Михалін, М.І. Шкіль.* – Ч. 2. – К.: Вища школа, 2003. – 470 с.
15. *Шкіль М.І.* Математичний аналіз : У 2 ч.: підручн. для студ. математ. спец. вузів затвердж. МОНУ / *М.І. Шкіль.* – К.: Вища школа. – Ч.1. – 2005. – 447 с.; Ч.2. – 1995. – 510с.

Додаток А ЧИСЛОВІ РЯДИ

🗁**Означення А.1.** Числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називають *збіжним*, якщо збігається числова послідовність його часткових сум $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Число $S = \lim_{n} S_n$ називають сумою ряду (у випадку існування границі); позначення: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$.

🗁**Означення А.2.** Числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називають *абсолютно збіжним*, якщо збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

🗁**Означення А.3.** Числовий ряд називають *умовно збіжним*, якщо він збігається, але не абсолютно.

Теорема А.1 (*необхідна умова збіжності ряду*). Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, тоді $\lim_{n} a_n = 0$.

А.1. Ознаки збіжності знакопостійних рядів

Загальна ознака порівняння. Якщо члени двох рядів $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n \ge 0\ \forall n \in \mathbb{N}$) і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ($b_n \ge 0\ \forall n \in \mathbb{N}$) задовольняють співвідношення $a_n \le b_n\ \forall n \in \mathbb{N}$, то із збіжності другого ряду випливає збіжність першого , а з розбіжності першого – розбіжність другого. Тобто

$$\text{I.}\left.\begin{array}{l} a_n \le b_n\ \forall n \in \mathbb{N}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n - \text{зб.}, \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{зб.};\quad \text{II.}\left.\begin{array}{l} a_n \le b_n\ \forall n \in \mathbb{N}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{розб.}, \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n - \text{розб.}\quad \boxed{\begin{array}{c} a_n \le b_n\ \ \forall n \in \mathbb{N} \\ \text{зб.} \Leftarrow \text{зб.} \\ \text{розб.} \Rightarrow \text{розб.} \end{array}}$$

Ознака порівняння в граничній формі (ОПГФ). Якщо члени рядів $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ з додатними членами задовольняють співвідношення $\lim_{n} \frac{a_n}{b_n} = \text{const} \ne 0$, то обидва ряди збігаються або розбігаються одночасно.

Ознака Д'Аламбера. Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}$).

$$\left.\exists\ \lim_{n} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \ \text{(скінченна або нескінченна)}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{при } q < 1 \text{ ряд збігається,} \\ \text{при } q > 1 \text{ розбігається,} \\ \text{при } q = 1 \text{ про збіжність ряду нічого не можна сказати (сумнівний випадок).} \end{array}$$

Ознака Коші (радикальна): Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}$).

$\exists\ \lim_n \sqrt[n]{a_n} = q$ (скінченна або нескінченна) $\Rightarrow$ при $q < 1$ ряд збігається, при $q > 1$ розбігається, при $q = 1$ – сумнівний випадок.

Ознака Коші-Маклорена (інтегральна). Якщо для членів ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n \ge 0\ \forall n \in \mathbb{N}$) існує така функція $f(x)$, що

1) $f(n) = a_n$ для всіх натуральних $n \ge n_0$,
2) $f(x) - \searrow$ (нестрого) на $[n_0; +\infty)$,

$\Rightarrow$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається або розбігається одночасно з невласним інтегралом $\int_{n_o}^{\infty} f(x)dx$.

Наслідок із інтегральної ознаки Коші-Маклорена .

Узагальнений гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ — збігається при $p > 1$, розбігається при $p \le 1$.

Ознака Раабе .

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ a_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}, \\ \exists \lim_n n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = r, \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} 1) r < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{розбігається}, \\ 2) r > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{збігається}, \\ 3) r = 1 \Rightarrow ???\ \text{(сумнівний випадок)}. \end{cases}$$

Ознака Гаусса.

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} a_n,\quad a_n > 0\ \ \forall n \in \mathbb{N}, \\ q_n = \dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \dfrac{\mu}{n} + \dfrac{\theta_n}{n^2}\ ,\quad 0 < \theta_n < 1, \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} 1)\ \lambda > 1\ \wedge\ (\lambda = 1 \wedge \mu > 1) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{збігається}, \\ 2)\ \lambda < 1\ \wedge (\lambda = 1 \wedge \mu \le 1) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{розбігається}. \end{cases}$$

А.2. Ознаки збіжності знакозмінних рядів

Ознака Лейбніца. Розглянемо знакопочережний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} c_n = c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + ... + (-1)^{n+1} c_n + ...\ ,\quad c_n \ge 0\ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\left.\begin{array}{l} 1)\{c_n\} \searrow \text{(нестрого)}, \\ 2)\lim_n c_n = 0, \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} c_n - \text{ збігається}.$$

Ознака Діріхле. $\left.\begin{array}{l} 1) B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k,\ \{B_n\} - \text{обмежена}, \\ 2)\{a_n\} \searrow,\ 3)\ \lim_n a_n = 0, \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n - \text{збіг}.$

Ознака Абеля. $\left.\begin{array}{l} 1) \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{збігається}, \\ 2) \{b_n\} - \text{монотонна},\ 3) \{b_n\} - \text{обм.}, \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n - \text{збіг}.$

Додаток Б ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ

Область збіжності функціональної послідовності $\{\boldsymbol{f_n(x) = x^n}\}$ – півінтервал $(-1;1]$. Гранична функція (поточкова границя), визначена на цій множині, подається у вигляді: $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-1,1); \\ 1, & x = 1. \end{cases}$

Критерій Коші рівномірної збіжності функціонального ряду.

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \underset{A}{\rightrightarrows} S(x) \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \ge n_0 \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \forall x \in A \quad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon .$$

Ознака Вейєрштрасса *рівномірної збіжності функціонального ряду.*

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x), \text{ заданий на множині } A; \\ 2)\ \exists \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n \text{ збігається, } c_n \ge 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}; \\ 3)\ |u_n(x)| \le c_n \quad \forall x \in A; \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \underset{A}{\rightrightarrows}$$

Ознака Абеля *рівномірної збіжності функціонального ряду*

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows}; \\ 2)\ \{a_n(x)\} - \underline{\text{поточково}} \text{ нестрого монотонна на } X; \\ 3)\ \{a_n(x)\} - \underline{\text{рівномірно}} \text{ обмежена на } X, \text{тобто} \\ \quad \exists \mu > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad |a_n(x)| \le \mu, \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows}$$

Ознака Діріхле *рівномірної збіжності функціонального ряду:*

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \{b_n(x)\} \text{ така, що } \left\{ B_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k(x) \right\} - \underline{\text{рівномірно}} \text{ обмежена} \\ \text{на множині } X, \text{ тобто } \exists \mu > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad |B_n(x)| \le \mu, \\ 2)\ \{a_n(x)\} - \underline{\text{поточково}} \text{ не зростаюча на } X, \\ 3)\ a_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} \theta(x) \quad (\theta(x) \equiv 0), \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} .$$

Теорема про неперервність суми функціонального ряду.

Розглянемо функціональний ряд $\sum\limits_{n} u_n(x)$ на множині X.

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ u_n(x) - \text{неперервна в точці } x_0 \in X \quad \forall n \in \mathbb{N}; \\ 2)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} S(x), \end{array}\right\} \Rightarrow S(x) - \text{неперервна в точці } x_0$$

Почленний граничний перехід під знаком суми функціонального ряду.

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} S(x); \\ 2)\ a - \text{гранична точка множини } X; \\ 3)\ \lim\limits_{x\to a} u_n(x) = C_n, \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{I)}\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} C_n = C; \\ \text{II)}\ \lim\limits_{x\to a} S(x) = C, \text{тобто } \lim\limits_{x\to a} \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lim\limits_{x\to a} u_n(x) \end{array}\right.$$

Почленне інтегрування функціональних рядів.

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ u_n(x) \text{ - неперервна на } [a,b]\ \forall n\in\mathbb{N}; \\ 2)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} S(x), \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{I) } \exists\int\limits_a^b S(x)dx;\ \text{II) } \sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_a^b u_n(x)\,dx - \text{збігається;} \\ \text{III) } \int\limits_a^b \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)\,dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_a^b u_n(x)\,dx. \end{array}\right.$$

Почленне диференціювання функціональних рядів.

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ u_n(x) - \text{неперервно диференційовні на } [a,b]\ \forall n\in\mathbb{N}; \\ 2)\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(x) \underset{[0,\alpha]}{\overset{\text{Поточ.}}{=}} S(x);\ 3)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x) \underset{[a,b]}{\rightrightarrows}; \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{I) } \exists S'(x) \text{ на } [a,b]; \\ \text{II) } \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x) = S'(x) = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' \end{array}$$

🗁**Означення Б.1** Функціональний ряд вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

називають *степеневим рядом*, а числа $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ – *коефіцієнтами степеневого ряду*.

Формули для обчислення радіуса збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$:

формула 1: $r = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}}$; **формула 2:** $r = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ за умови, що $a_n \neq 0\ \forall n\in\mathbb{N}$

Теорема про неперервність суми степеневого ряду. Сума степеневого ряду $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ є неперервною функцією на інтервалі збіжності $(-r; r)$, де r - радіус збіжності степеневого ряду.

Теорема про інтегрування степеневих рядів. Степеневий ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ можна почленно інтегрувати на $[0; x] \subset (-r; r)$ (r - радіус збіжності), крім того, радіус збіжності отриманого почленним інтегруванням степеневого ряду буде той самий, що і у вихідного ряду, тобто r.

Теорема про диференціювання степеневих рядів. Степеневий ряд можна почленно диференціювати всередині інтервалу збіжності, при цьому, отриманий почленним диференціюванням ряд має той самий радіус збіжності, що й вихідний ряд.

Розвинення деяких елементарних функцій в степеневі ряди:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \text{ на } \mathbb{R},$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} \text{ на } \mathbb{R},$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{5!} + \ldots \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \text{ на } \mathbb{R},$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \text{ на } (-1,1],$$

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots \text{ на } (-1;1),$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^n x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \text{ на } (-1,1),$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \text{ на } (-1,1),$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(2n-1)!!}{2^n n!}\cdot x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(2n-1)!!}{(2n)!}\cdot x^n \text{ на } (-1;1),$$

$$\operatorname{arctg} x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \text{ на } (-1,1),$$

$$\arcsin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!\,(2n+1)}x^{2n+1} \text{ на } (-1,1),$$

$$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(2n-1)!!}{(2n)!\,(2n+1)}x^{2n+1} \text{ на } (-1,1).$$

Формула Стірлінга:

$$n!=\sqrt{2\pi n}\cdot n^n\cdot e^{(-n)}\cdot e^{\frac{\theta_n}{12n}},\quad 0<\theta_n<1.$$

Теорема Вейерштраса про рівномірне наближення неперервної функції послідовністю многочленів.
$\forall\ f(x)-$ неперервна на відрізку $[a;b]$ $\exists\{P_n(x)\}-$ послідовність многочленів: $P_n(x)\underset{[a,b]}{\to} f(x)$.

$\boldsymbol{R_0[a,b]}-$ евклідів простір кусково-неперервних функції, усі точки розриву яких є регулярними, зі скалярним добутком $(f,g)=\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx$,

Ортогональна система тригонометричних функцій в просторі $R_0[-\pi;\pi]$:

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \cos 3x,\ \sin 3x,\ldots,\cos nx,\ \sin nx,\ldots, \ .$$

🗁**Означення Б.2** *Рядом Фур'є* функції $f(x)$ називають ряд вигляду $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$, коефіцієнти якого визначаються формулами

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx dx\ \ \forall k\in 0,1,2,3,\ldots,\ \ .\ b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx dx\ \ \forall k=1,2,3,\ldots.$$

Основна теорема теорії рядів Фур'є. Якщо функція $f(x)$

1) кусково-диференційовна на $\mathbb{R}$,
2) з регулярними точками розриву,
3) 2π-періодична,

тоді ряд Фур'є цієї функції поточково збігається до цієї функції, тобто в будь-якій точці $x_0\in\mathbb{R}$ має місце гранична рівність:

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x_0)=f(x_0)=\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$$

Додаток В СУМИ ДЕЯКИХ ЧИСЛОВИХ РЯДІВ

Виписані нижче розвинення наведено у довіднику:
Цыпкин А. Г., Цыпкин Г. Г. Математические формулы. Ал-гебра. Геометрия. Математический анализ: Справочник. Москва: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит- ры, 1985. 128 с.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots=e;$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}=1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots=\frac{1}{e};$$

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}=\cos 1; \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}=\sin 1;$$

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}=\mathrm{ch}1; \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)!}=\mathrm{sh}1;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots=\ln 2$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=2;$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots=\frac{2}{3};$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots=\frac{\pi}{4};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots=1;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots=\frac{1}{2};$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)(n+1)}=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots=\frac{3}{4};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n-1)(4n+1)}=\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{7\cdot 9}+\frac{1}{11\cdot 13}+\ldots=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{8};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots=\frac{1}{4};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{12};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{8};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}=1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{32};$$

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

СПИСОК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$\overset{def}{\Leftrightarrow}$ – позначення, яке слід читати так: «якщо за означенням…» або «називається за означенням…».

$\overset{def}{=}$ – рівність за означенням; величина, що визначається, стоїть у лівій частині рівності

🗐 – повторити

🗁 – означення

■ – завершення доведення твердження чи розв'язання прикладу

✍ – виконати завдання самостійно

$\exists$ – квантор існування

$\forall$ – квантор загальності

$\wedge$ – логічна операція, кон'юнкція

$\vee$ – логічна операція, диз'юнкція

$\left.\begin{matrix}\Rightarrow, \\ \Leftarrow\end{matrix}\right\}$ – логічна імплікація

$\Leftrightarrow$ – логічна еквівалентність (рівносильність)

$\bigcup$ – множинна операція, об'єднання

$\bigcap$ – множинна операція, перетин

$\in$ – символ належності елемента деякій множині

$\varnothing$ – порожня множина

$\mathbb{R}$ – множина дійсних чисел

$\mathbb{Z}$ – множина цілих чисел

$\mathbb{Q}$ – множина раціональних чисел

$\mathbb{N}$ – множина натуральних чисел

$\nearrow$ – зростаюча функція (послідовність)

$\searrow$ – спадна функція (послідовність)

$x_n \to a$ – послідовність $\{x_n\}$ прямує (збігається) до a

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ – границя послідовності $\{x_n\}$ дорівнює a

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ – ряд із елементів x_n

зб. або збіг. – читається так: «ряд збігається»

розб. – читається так: «ряд розбігається»

абс. – читається так: «абсолютно»

обм. – читається так: «обмежений(-а)»

Навчальне видання
(українською мовою)

Д'ЯЧЕНКО НАТАЛІЯ МИКОЛАЇВНА
КРАСІКОВА ІРИНА ВОЛОДИМИРІВНА
ПАНАСЕНКО ЄВГЕН ВАЛЕРІЙОВИЧ

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ – II:
ЧИСЛОВІ ТА ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ

Навчальний посібник
для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра
освітньо-професійних програм
«Математика», «Середня освіта (Математика)»

Рецензент *О.О.Тітова, кандидат технічних наук, доцент*
Відповідальний за випуск *С.М. Гребенюк, доктор технічних наук, завідувач кафедри фундаментальної математики*