Лекція 13. Інтегрування тригонометричних та ірраціональних функцій

13.1. Інтеграли типу 1.

13.2. Інтеграли типу 2.

13.3. Інтеграли типу 3.

13.4. Інтегрування деяких ірраціональних функцій за допомогою тригонометричних підстановок.

13.5. Інтегрування ірраціональних функцій.

13.6. Інтеграли типу 4.

13.7. Інтеграли типу 5. Підстановки Ейлера.

13.1. Інтеграли типу 1

$$\int R(\sin x, \cos x)dx$$

Раціоналізація вказаного в заголовку інтеграла досягається за допомогою підстановки

$$u = tg\frac{x}{2} \quad (-\pi < x < \pi)$$

13.1. Інтеграли типу 1

$$\int R(\sin x, \cos x)dx$$

Приклад 1.

$$\int \frac{dx}{2-\sin^2 x} = \left| \begin{array}{l} u = tgx, \\ x = arctgu, \\ dx = \dfrac{du}{1+u^2}, \\ \sin^2 x = \dfrac{u^2}{1+u^2} \end{array} \right| = \int \frac{du}{\left(2 - \dfrac{u^2}{1+u^2}\right)(1+u^2)} =$$

$$= \int \frac{du}{2+u^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} arctg \frac{u}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}} arctg\left(\frac{tgx}{\sqrt{2}}\right) + C.$$

13.2. Інтеграли типу 2

$$\int \sin^m x \cos^n x dx$$

Нехай *m* і *n* – раціональні числа.

Інтеграл $\int \sin^m x \cos^n x dx$ **з** допомогою підстановок $u = \cos x$ або $u = \sin x$ зводиться до інтеграла від диференціального бінома.

13.2. Інтеграли типу 2

$$\int \sin^m x \cos^n x dx$$

Якщо обидва показники *m* і *n* додатні і парні (або один з них нуль), то доцільно застосувати формули

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

13.2. Інтеграли типу 2

$$\int \sin^m x \cos^n x dx$$

Приклад 2

$$\int \cos^2 x dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$$

13.3. Інтеграли типу 3

$$\int \sin^m x \cos^n x dx$$

Вказані в заголовку пункту інтеграли безпосередньо обчислюються, якщо в них підінтегральні функції перетворити за формулами

$$\sin \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x\right]$$

$$\sin \alpha x \sin \beta x = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)x - \cos(\alpha+\beta)x\right]$$

$$\cos \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)x + \cos(\alpha-\beta)x\right]$$

13.3. Інтеграли типу 3

$$\int \sin^m x \cos^n x dx$$

Приклад 3

$$\int \sin 2x \cos x dx = \frac{1}{2}\int (\sin 3x + \sin x) dx = -\frac{1}{6}\cos 3x - \frac{1}{2}\cos x + C$$

13.4. Інтегрування деяких ірраціональних функцій за допомогою тригонометричних підстановок

Метод перетворення інтеграла

до інтеграла типу $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx$

$$\int R(\sin z, \cos z)dz$$

Які розглянуті в пункті 13.1

13.4. Інтегрування деяких ірраціональних функцій за допомогою тригонометричних підстановок

Перетворення тричлена, який знаходиться під коренем $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)$

Зробимо заміну змінної, поклавши $x+\frac{b}{2a}=t$, $dx=dt$. Тоді $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{at^2+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)}$.

13.4. Інтегрування деяких ірраціональних функцій за допомогою тригонометричних підстановок

Розглянемо всі можливі випадки

1⁰. Нехай $a > 0$, $c - \frac{b^2}{4a} > 0$. Введемо позначення $a = m^2$, $c - \frac{b^2}{4a} = n^2$.

В цьому випадку матимемо $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{m^2 t^2 + n^2}$.

2⁰. Нехай $a > 0$, $a = m^2$, тоді $c - \frac{b^2}{4a} < 0$, $c - \frac{b^2}{4a} = -n^2$.

Отже, $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{m^2 t^2 - n^2}$.

13.4. Інтегрування деяких ірраціональних функцій за допомогою тригонометричних підстановок

3⁰. Нехай $a<0$, $c-\frac{b^2}{4a}>0$. Тоді $a=-m^2$, $c-\frac{b^2}{4a}=n^2$.

Отже, $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{n^2-t^2m^2}$.

4⁰. Нехай $a<0$, $c-\frac{b^2}{4a}<0$. В цьому випадку $\sqrt{ax^2+bx+c}$ є комплексним числом при будь-якому значенні *x*.

13.4. Інтегрування деяких ірраціональних функцій за допомогою тригонометричних підстановок

Таким чином інтеграл $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$ перетвориться до одного з наступних типів інтегралів.

$$\int R(t,\sqrt{m^2t^2+n^2})dt$$

$$\int R(t,\sqrt{m^2t^2-n^2})dt$$

$$\int R(t,\sqrt{n^2-m^2t^2})dt$$

13.5. Інтегрування ірраціональних функцій

$$R(u_1,u_2,\ldots,u_n)=\frac{P(u_1,\ldots,u_n)}{Q(u_1,\ldots,u_n)}$$

де P і Q – многочлени від змінних $u_1,\ldots,u_n$, а змінні $u_i=\varphi_i(x)$ є функціями змінної x: називається ***раціональною функцією*** від функцій .

13.5. Інтегрування ірраціональних функцій

Якщо змінні $u_1,\ldots,u_n$ є елементарними тригонометричними функціями, то складна функція, яка отримується, називається ***раціональною*** відносно елементарних тригонометричних функцій.

Прикладом такої функції є:

$$\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^3 x + \cos x} = R(\sin x, \cos x)$$

13.6. Інтеграли типу 4

$$\int R\left[x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1},\ldots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_s}\right]dx$$

Сталі $r_1,\ldots,r_s$ раціональні, і $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ (a, b, c, d – сталі). Нехай m – спільний знаменник чисел $r_1,\ldots,r_s$: $r_i = \dfrac{p_i}{m}$, p_i - ціле, $i = 1,2,\ldots,s$

13.6. Інтеграли типу 4

$$\int R\left[x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1},\ldots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_s}\right]dx$$

Приклад 4

$$\int \frac{1}{(x-1)^2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}dx = \left| \begin{array}{l} \dfrac{x+1}{x-1} = t^3, x = \dfrac{t^3+1}{t^3-1} \\ dx = \dfrac{-6t^2dt}{(t^3-1)^2}, x-1 = \dfrac{2}{t^3-1} \end{array} \right| =$$

$$= \int t\frac{-6t^2}{(t^3-1)^2}\frac{(t^3-1)^2}{4}dt = -\frac{3}{2}\int t^3dt = -\frac{3}{8}t^4 + C =$$

$$= -\frac{3}{8}\left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\right)^4 + C$$

13.6. Інтеграли типу 4

$$\int R\left[x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1},\ldots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_s}\right]dx$$

Приклад 5

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=\left|\begin{matrix}x=t^6\\ dx=6t^5dt\end{matrix}\right|=6\int\frac{t^5}{t^2+t^3}dt=$$

$$=6\left[\int(t^2-t+1)dt-\int\frac{dt}{t+1}\right]=2t^3-3t^2+6t-$$

$$-\ln|1+t|+C=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln(\sqrt[6]{x}+1)+C$$

13.7. Інтеграли типу $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$, Підстановки Ейлера

Звідси випливає, що в цьому випадку або під коренем стоїть від'ємна при всіх значеннях $x \neq x_1$ величина, тобто цей корінь приймає тільки чисто уявні вирази (цей випадок має місце при $a < 0$); або при $a \geq 0$ після вказаного елементарного перетворення одержимо, що змінна x не входить під знак кореня, тобто під інтегралом стоїть просто раціональна функція від x .

13.7. Інтеграли типу $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$. Підстановки Ейлера

Приклад 6

$$\int \frac{(1-\sqrt{1+x+x^2})^2}{x^2\sqrt{1+x+x^2}}dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{1+x+x^2} = xt+1 \\ x = \dfrac{2t-1}{1-t^2}, dx = \dfrac{2t^2-2t+2}{(1-t^2)^2}dt \\ \sqrt{1+x+x^2} = \dfrac{t^2-t+1}{1-t^2} \\ 1-\sqrt{1+x+x^2} = -\dfrac{2t^2+t}{1-t^2} \end{array} \right| =$$

13.7. Інтеграли типу 5 $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$, Підстановки Ейлера

Продовження до прикладу 6

$$= \int \frac{(-2t^2+t)^2(1-t^2)^2(1-t^2)(2t^2-2t+2)}{(1-t^2)^2(2t-1)^2(t^2-t+1)(1-t^2)^3}dt =$$

$$= 2\int \frac{t^2}{1-t^2}dt = -2t + \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C = -\frac{2(\sqrt{1+x+x^2}-1)}{x} +$$

$$+ \ln\left|\frac{x+\sqrt{1+x+x^2}-1}{x-\sqrt{1+x+x^2}+1}\right| + C$$