2 Експериментальні методи визначення статистичних характеристик та перевірки гіпотез

2.1 Про завдання математичної статистики

Реальні процеси енергетичної галузі часто можна розглядати як випадкові і аналізувати їх за допомогою імовірнісних методів. Досліджуваний процес при цьому вважається реалізацією деякої випадкової зміною *Х*, і для його опису необхідно знати функцію *F(х)* розподілу ймовірностей, функцію щільності розподілу *f(х)*, або математичне очікування, дисперсію і інші моменти розподілу змінної *Х*. Однак зазвичай на практиці вид і параметри функції розподілу точно не відомі і інформація про характеристики випадкової величини повинна бути отримана за допомогою експерименту.

Завдання математичної статистики в загальному вигляді можна сформулювати наступним чином: вивчення випадкових явищ, коли відсутня інформація про розподіли ймовірностей випадкових величин, що породжують ці явища, може бути отримана з експерименту.

Нехай результат експерименту (досвіду, спостереження) представляється деякою випадковою змінною *Х*. Вважаємо, що експеримент може багаторазово повторюватися. Реалізація *n* експериментів дає конкретний ряд значень *х1 ... хn*. При цьому говорять, що отримана реалізація *(х1, х2 ..., хn)* вибірки обсягу *n* із заданої генеральної сукупності. На основі цієї вибірки необхідно побудувати оцінки певних параметрів розподілу випадкової змінної *Х*. Так, значення

може використовуватися в якості оцінки математичного очікування *m* випадкової змінної *Х*.

Можна сказати, що математична статистика серед інших проблем вивчає питання про те, наскільки добре деякий параметр *α*, справжнє значення *α* якого не відомо, може бути оцінений за допомогою реалізації певної вибіркової функції

Ряд питань подібного типу, що відносяться до статистичної оцінки параметрів розподілу, розглянутий нижче в розд. 2.3. Для отримання практично корисної відповіді на питання про властивості оцінок конкретні експериментальні результати *хі* розглядаються як реалізації випадкової змінної *Х*. Вводиться в розгляд вектор *(Х1, Х2..Хn)* випадкових величин з однаковими розподілами, що збігаються з розподілом змінної *Х*, який являє собою вибірку, а також вибіркова функція властивості якої повинні бути досліджені. При цьому *(x1,x2,…,xn)* є конкретна реалізація вибірки, а *Ψ(x1,x2,…,xn)* - реалізація вибіркової функції. Суворе визначення понять "вибірка", "вибіркова функція" і деяких інших, важливих для всіх наступних розділів, буде дано в розд. 2.2.

При дослідженні випадкових явищ часто висловлюються деякі припущення, іншими словами, формулюються деякі гіпотези *Н*. Такими гіпотезами можуть бути, наприклад, такі твердження:

1. Деяка випадкова величина розподілена за нормальним законом.

2. Випадкова змінна має математичне очікування *m* і (або) дисперсію *σ2*.

3. Дві випадкові величини *Х* і *Y* мають одине і те ж математичне очікування *m* і (або) однакову дисперсію *σ2*.

Питання перевірки цих гіпотез на основі вибіркових даних викладаються в розд.2.4.

В рамках цієї глави, звісно, неможливо в повному обсязі охопити всі порушені вище питання. Тому нижче завдання і методи їх вирішення розглянуті тільки з тим ступенем деталізації, яка необхідна для розуміння подальших розділів книги. Це представляється доцільним і з тієї причини, що обговорювані в розд. 2 методи і їх практичне застосування досить добре освітлені у відповідній літературі.

Один з найважливіших розділів математичної статистики - регресійний аналіз - викладається досить детально в розд.3.

2.2 Вибірка і вибіркові функції

У цьому розділі ми дамо строгі визначення понять, что приведені вище.

Визначення 2.1

Сукупність *(Х1, Х2, ... Хn)* *n* незалежних випадкових величин *Хі*, розподілених по одному і тому ж закону, що збігається з законом розподілу випадкової величини *Х*, називається вибіркою обсягу *n* з генеральної сукупності *Х* (величини *Хі* представляють *n* примірників однієї й тієї ж випадкової величини *Х*).

Визначення 2.2

Якщо *(Х1, Х2, ..., Хn)* - вибірка, згідно з визначенням 2.1, то послідовність чисел *(х1, х2, ..., хn)* називається реалізацією цієї вибірки.

Найважливіше значення для опису деякої випадкової змінної *Х* має функція розподілу ймовірностей

Якщо функція розподілу не відома, можна на основі реалізації *(х1, х2,...,хn)* вибірки обсягу *n* з генеральної сукупності *Х* побудувати деяке наближення до *F(х)* за допомогою функції

де *n(x)* – число значень *хі*, меньших, ніж *х*. Ця функція являє собою реалізацію емпіричної функції розподілу *Wn(х)*.

Наведемо ще такі визначення:

Визначення 2.3

Функція вибірки *(Х1, Х2, .... Хn)* обсягу *n*

 (2.1)

де *N(х)* - число тих *Хі*, для яких має місце *Хі < х*, називається емпіричною функцією розподілу вибірки. Якщо *(х1, х2, .., хn)* - реалізація вибірки, то функція

 (2.2)

де *n(х)* - число значень *хі* в розглянутій реалізації, менших *х*, називається реплізаціей емпіричної функції розподілу *Wn(х).*

У розд. 2.1 у зв'язку з питаннями оцінки параметрів було введено поняття вибіркової функції. Тут ми дамо визначення цього поняття.

Визначення 2.4

Нехай *(Х1, Х2, ..., Хn)* – деяка вибірка, а *(х1, х2, ..., хn)* - реалізація цієї вибірки. Функція *n* змінних *Хі*

 (2.3)

називається вибірковою функцією, а її конкретне значення для реалізації вибірки

 (2.4)

називається реалізацією вибіркової функції (2.3). Величина в (2.4) являє собою реалізацію цієї випадкової змінної.

Розглянемо тепер дві спеціальні вибіркові функції - середнє значення і дисперсію вибірки - і їх властивості.

Визначення 2.5

Нехай *(Х1, Х2, ... Хn)* - деяка вибірка, а *(х1, х2, ..., хn)* - її реалізація. Тоді вибіркова функція

 (2.5)

називається вибірковим середнім, а

 (2.6)

реалізацією вибіркового середнього.

Зв'язок між середнім вибірки і математичним очікуванням генеральної сукупності стає зрозумілим з наступних затверджень:

Затвердження 2.1

Нехай вибірка вилучається з генеральної сукупності випадкової змінної *Х* з математичним очікуванням

 (2.7)

Тоді

 (2.8)

Д о в е д е н н я. Справедливість твердження безпосередньо випливає з наступного:

Визначення 2.6

Нехай *(Х1, Х2, ..., Хn)* - деяка вибірка, а *(х1, х2, ..., хn)* - її реалізація. Тоді вибіркова функція

 (2.9)

називається вибірковою дисперсією, а

 (2.10)

- реалізацією вибіркової дисперсії.

Необхідність використання в знаменнику виразів (2.9) і (2.10) величини *(n-1)*, а не величини випливає із затвердження 2.2.

Затвердження 2.2

Нехай у визначенні 2.6 вибірка вилучається з генеральної сукупності з математичним очікуванням і дисперсією

 (2.11)

Тоді

 (2.12)

Д о в е д е н н я. Маємо

В силу того, що

отримуємо

Отже,

У разі якщо б вибіркова дисперсія визначалася як

 (2.13)

ми отримали б

 (2.14)

Властивість (2.12), в силу якого вибіркова функція (2.9) виявляється переважніше функції (2.13) і яка в розд. 2.3 визначена як властивість незміщеність оцінок, безпосередньо пов'язане з поняттям числа ступенів свободи деякої суми квадратів. Нехай серед випадкових змінних Y1, Y2, ..., Yn є рівно до попарно незалежних, а решта (n-k) лінійно пов'язані [іншими словами, існує (n-k) лінійних залежностей, що пов'язують змінні Yi]. Тоді кажуть, що сума квадратів

має k ступенів свободи. У розглянутому вище випадку між випадковими змінними Yi= Хi- існує одна лінійна зв'язок (2.5). Тому в даному випадку сума квадратів пов'язана не з n, а з k = n-1 ступенями свободи.

Якщо суму квадратів розділити на число ступенів свободи, то отримана величина буде не усунутою оцінкою дисперсії .

Повернемося ще раз до вибіркової функції (2.5) і наведемо без доведення фундаментальну "центральну граничну теорему".

Затвердження 2.3 (центральна гранична теорема)

Арифметичне середнє деякої вибірки розподілено асимптотично нормально з

 (2.15)

і

 (2.16)

Таким чином, випадкова змінна в (2.5) має функцію розподілу, яка при *n* прагнути до нормального закону з математичним очікуванням і дімперсіей */n* незалежно від того, з якої генеральної сукупності була витягнута вибірка.

Затвердження 2.4

Всі моменти емпіричної функції розподілу (2.1) мають асимптотично нормальний розподіл.

Цією властивістю володіють також і інші симетричні вибіркові функції виду (2.3), значення яких залишаються незмінними при довільній зміні порядку вибіркових змінних. Такі симетричні вибіркові функції мають важливе значення при статистичній оцінці параметрів, так як оцінки, звісно, повинні залежати тільки від значень, а не від порядку вибіркових змінних.

Визначення 2.7

Вибіркова функція

 (2.17)

називається симетричною, якщо

 (2.18)

де *(Y1, Y2, ..., Yн)* - довільна перестановка елементів вибірки *(Х1, Х2, ..., Хн)*.

2.3 Статистична оцінка параметрів

Перейдемо тепер до розгляду питання про те, як на основі деякої вибірки *(Х1, Х2,...,Хn)* знайти оцінку певного параметра (наприклад, математичного очікування або дисперсії) розподілу випадкової змінної *Х*. Для кращого розуміння деяких введених вище позначень наведемо тут їх визначення.

Визначення 2.8

Істинне значення деякого параметра α надалі позначається через , а його оцінка за допомогою деякої вибіркової функції - через , а реалізація вибіркової функції - через (див .розд. 2.2, визначення 2.4).

Для оцінки деякого параметра *α*, природно, може використовуватися цілий ряд різних вибіркових функцій, проте "гарна" оцінка повинна відповідати певним вимогам.

Властивості, що характеризують якості оцінок, наведені в наступному визначенні:

Визначення 2.9

Оцінка (2.17)

деякого параметра α називається симетричною, якщо вибіркова функція *Ψ(Х1, Х2, .., Хn)* є симетричною (див. розд. 2.2, визначення 2.7).

Оцінка (2.17) називається незміщеною, якщо

 (2.19)

Оцінка (2.17) називається асимптотично незміщеною, якщо

 при (2.21)

Оцінка (2.17) називається ефективною, якщо серед всіх інших можливих оцінок вона має найменшу дисперсією:

 (2.21)

Затвердження 2.5

Оцінка (2.5) для математичного очікування деякої випадкової змінної *Х* є симетричною, обґрунтованою і незміщеною, а для випадку, коли величина *Х* розподілена за нормальним законом, також і ефективною.

Затвердження 2.6

Оцінка (2.9) для дисперсії випадкової змінної *Х* є симетричною, обґрунтованою і незміщеною, а в разі нормального розподілу величини *Х* також і ефективною.

Затвердження 2.7

Оцінка (2.13) для дисперсії випадкової змінної *Х* є зміщеною; однак ця оцінка обґрунтована і асимптотично незміщена.

Перейдемо тепер до питання про те, як для параметра α або вектора параметрів1)

 (2.23)

1) Штрихом тут і далі позначається операція транспонування.

побудувати деяку відповідну оцінку. для цієї мети може бути використаний метод максимальної правдоподібності, розроблений Р.А. Фішером.

Визначення 2.10

Нехай *f(х, α)* - функція щільності розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини *Х*, залежна від вектора параметрів α [див. (2.23)]. Тоді функція

 (2.24)

називається функцією правдоподібності.

Якщо *Х* - дискретна випадкова величина, що приймає значення *yі* з ймовірністю *pi(α), i* = 1,2, ..., *k*, а *q1* - число появ значення *уі* в реалізації *(х1, х2, .... хn)*, то функція правдоподібності має вигляд

(2.25)

Оцінку

 (2.26)

називають максимально правдоподібною оцінкою параметра α, якщо вона відповідає максимальному значенню функції правдоподібності (2.24) або (2.25). Оцінка при цьому визначається з умови

 (2.27)

Приклад 2.1

Нехай *Х* - нормально розподілена випадкова величина, невідоме математичне очікування і дисперсію якої потрібно оцінити. Позначимо і введемо ці позначення в вираз щільності ймовірностей нормального розподілу (див. розд. 15.2):

Функція правдоподібності має вигляд

з умов

знаходимо

 (2.28)

Отримані вирази збігаються з оцінкою (2.5) для середнього та оцінкою (2.13) для дисперсії.

Отримана за допомогою деякої вибіркової функції конкретна оцінка параметра α не дає, однак, можливості судити про те, як точно знайдена оцінка відтворює справжнє значення параметра α, навіть якщо вона є незміщеною і ефективною. Зрозуміло, величину різниці не можна визначити точно, якщо розподіл *Х* і величина не відомі, так як є всього лише реалізація випадкової величини . Однак можна знайти деяку область, яка з ймовірністю *Р* містить істинне значення параметра α. Якщо, наприклад, *F(х)* - функція розподілу величини , то можна розрахувати ймовірність

 (2.29)

Якщо δ задано, то *Р* визначає ймовірність того, що випадкова змінна відрізняється від менш ніж на δ, або ймовірність того, що істинне значення параметра менш ніж на δ відрізняється від оцінки 1).

1) Тут і нижче реалізації оцінок (тобто значення ) називаються просто оцінками.

Істинне значення з ймовірністю *Р*, що задається виразом (2.29), знаходиться між і , тобто в інтервалі , що представляє собою реалізацію інтервалу

 (2.30)

Інтервал називають зазвичай довірчим, а ймовірність *Р* довірчою ймовірністю.

Поняття довірчого інтервалу можна кілька узагальнити, розповсюдивши його на інтервали, кінці яких розташовуються несиметрично щодо .

Визначення 2.11

Нехай і - вибіркові функції, для яких

 (2.31)

Тоді інтервал

 (2.32)

називається довірчим інтервалом для параметра α, відповідним довірчої ймовірності *Р*.

Приклад 2.2

Оцінювання за допомогою довірчого інтервалу математичного очікування *m* нормально розподіленої випадкової величини *Х* з відомою дисперсією *σ2*.

В якості вибіркової функції приймемо арифметичне середнє (2.5):

 (2.33)

Величина розподілена по нормальному закону з математичним очікуванням i дисперсією *σ2/n*. Отже, величина

 (2.34)

має нормований нормальний розподіл (див. розд. 15.2) і таким чином,

 (2.35)

Тут *Ф(х)* - функція нормованого нормального розподілу. Для будь-якої заданої ймовірності *Р* за допомогою табл.15.1 можна знайти відповідне значення *ε = ε (P)*. При цьому довірчий інтервал визначається як

 (2.36)

де

 . (2.37)

Нехай з нормальної генеральної сукупності з невідомим середнім *m* і невідомої дисперсією *σ2* = 25 вилучена вибірка обсягом *n* = 16. На основі цієї вибірки розрахована оцінка = 20.

Потрібно побудувати довірчий інтервал для *m* з довірчою ймовірністю *Р=* = 0,95. За табл. 15.1 з умови = *P*/2=0,475 знаходимо *ε* = 1,961) . При цьому за допомогою (2.37) отримуємо

Отже, математичне очікування з 95% -ою надійністю лежить в інтервалі

Приклад 2.3

Оцінювання за допомогою довірчого інтервалу математичного очікування *m* нормально розподіленої випадкової величини *Х* з невідомою дисперсією *σ2*.

В якості вибіркової функції для оцінювання *m* використовуємо арифметичне середнє (2.5):

 (2.38)

а для оцінювання *σ2* - відповідно (2.9):

 (2.39)

1) де φ(x) - щільність нормованого нормального розподілу.

Величина

 (2.40)

при цих умовах має *t*-розподіл (див. розд. 15.4) з числом ступенів свободи *n*-1. Можна записати вираз

 (2.41)

де *S* - функція розподілу величини . Для будь-якого заданого значення довірчої ймовірності *Р* за допомогою табл. 15.3 можна визначити відповідне значення Довірчий інтервал при цьому дорівнює

 (2.42)

де

 (2.43)

Нехай з нормальної генеральної сукупності витягнута вибірка обсягом *n* = 10, за допомогою якої розраховані оцінки = 20 і . Тоді для побудови довірчого інтервалу з ймовірністю *P* = 0,99 знаходимо за допомогою табл.15.3 величину *ε*= 3,25. Використовуючи вираз (2.43), обчислюємо

Отже, справжнє значення *m* з 99% -ної надійністю знаходиться в інтервалі

Приклад 2.4

Оцінювання за допомогою довірчого інтервалу дисперсії нормально розподіленої випадкової величини *Х* при невідомому математичному очікуванні.

В якості вибіркових функцій для оцінювання *m* і *σ2* виберемо, як і вище, функції (2.38) і (2.39) відповідно. Відомо (див. pозд. 15.3), що за цих умов випадкова величина

 (2.44)

розподілена за законом *χ2* з *n*-1 ступенями свободи. Тут необхідно використовувати розширене поняття довірчого інтервалу, введене в визначення 2.11, так як застосовується вище вираз типу

для знаходження довірчого інтервалу в даному випадку не має сенсу в силу невід'ємності . Позначимо

 (2.45)

і знайдемо з табл. 15.2 два числа *ε1* і *ε2* з умови

 (2.46)

тоді

 (2.47)

При довірчій ймовірності *Р* довірчий інтервал для *σ2*

 (2.48)

де

 (2.49)

З поняттям довірчого інтервалу і довірчої ймовірності пов'язані три основних типи завдань. Перше завдання полягає в тому, щоб при заданому інтервалі визначити відповідну йому довірчу ймовірність. Особливого практичного значення це завдання не має. У цьому випадку спочатку встановлюється інтервал, а потім питається, наскільки ймовірним є те, що справжнє значення параметра знаходиться в цьому інтервалі.

Друге завдання полягає в тому, щоб по заданій величині довірчої ймовірності побудувати відповідний їй довірчий інтервал. У цьому випадку спочатку задаються ступенем статистичної надійності *Р*, а потім з'ясовують питання про точність оцінки з цієї надійністю. Цей тип завдань має важливе практичне значення. У розглянутих вище прикладах 2.2-2.4 завдання формулювалася саме таким чином.

До сих пір обсяг вибірки вважався заданим. Проте довірча ймовірність для деякого інтервалу істотно залежить від *n*. При заданому інтервалі ймовірність

є монотонно зростаюча функція натуральних чисел *n* = 1,2,3, ... . Так як *n*-число експериментів і збільшення *n* часто пов'язано зі значним зростанням витрат, слід прагнути до того, аби число експериментів не перевищувало мінімального числа, необхідного для досягнення необхідної точності при заданому ступені надійності.

Третя основна задача, пов'язана з проблемою визначення обсягу вибірки, полягає в тому, щоб при заданій надійності *Р* знайти найменше натуральне число *n*, для якого

Приклад 2.5

Повернемося до прикладу 2.2. У цьому прикладі була побудована така оцінка середнього генеральної сукупності, що її відхилення від істинного значення з 95% -ою надійністю не перевищувало величини δ = 2,45. Якщо така точність не достатня і з 95% -ної надійністю потрібно забезпечити помилку , виникає питання про те, який мінімальний обсяг вибірки для цього буде потрібно. Завдання третього типу тут може бути поставлено ​​так: знайти мінімальне ціле число *n*, для якого з імовірністю *Р* = 0,95 відхилення . З (2.37) отримуємо

Таким чином, для досягнення необхідної точності тут потрібно зробити близько 100 дослідів.

2.4 Статистична перевірка гіпотез

У розд. 2.1 ми вже відзначали, що поряд зі статистичною оцінкою параметрів завдання перевірки гіпотез складають один з найважливіших розділів математичної статистики. Нижче ми покажемо, що обидва згаданих розділи математичної статистики тісно взаємопов'язані.

Під гіпотезою *Н* ми в загальному випадку будемо розуміти деяке припущення щодо випадкової величини *Х* (наприклад, про вид функції розподілу, параметри розподілу і т.п.). Шляхом статистичної перевірки необхідно встановити, наскільки дані, отримані з вибірки *(Х1, Х2, ..., Хn)*, узгоджуються з висловленою гіпотезою, тобто чи можна на їх підставі прийняти або відкинути гіпотезу.

Абсолютно надійне рішення відносно гіпотези, що перевіряється, взагалі кажучи, отримати не можна. Необхідно заздалегідь допустити можливість помилкового рішення. Позначимо через α ймовірність того, що гіпотеза *Н* буде відкинута, хоча насправді вона правильна. Цю ймовірність називають також рівнем значущості перевірки гіпотези. При перевірці гіпотези величина α або величина *Р =1-α*, що характеризує статистичну надійність, повинна бути обрана експериметатором. При вирішенні технічних і економічних проблем в більшості випадків вибирають α = 0,5 або α = 0,01 (що відповідає рівням значимості 5 і 1%), в медичних дослідженнях α часто приймають рівною 0,001 (рівень значущості 0,1%). Процедура перевірки гіпотези полягає в наступному: вибирається деяка відповідна вибіркова функція (критерій перевірки гіпотези – Testgröβe) *Т* *(Х1, Х2, ..., Хn; Н)*, яка визначається вибіркою та висунутою гіпотезою *Н*. Потім встановлюється область К, в яку в випадку справедливості гіпотези *Н* значення функції *Т* потрапляє з ймовірністю *Рн*, рівній заданій величині α. Область *К* називається критичною областю. Якщо конкретне значення *Т (х1, х2, ..., хn; Н)* потрапляє в критичну область *К*, гіпотеза *Н* відхиляється; в іншому випадку вважається, що підстав для відхилень гіпотези немає. При цьому ймовірність того, що гіпотеза *Н* буде відхилена а в разі, коли насправді вона правильна, виявляється рівною заданій ймовірності α.

При будь-якому значенні α існує безліч різних можливостей для вибору критичної області. На графіку 2.1 як приклад приведена функція щільності розподілу



Графік 2.1. Симетрична критична Графік 2.2. Квазісімметрічная область критична область

*f (t)* для деякого критерію *Т*

яка симетрична відносно нуля і близька по виду до кривої нормального або *t*-розподілу. Критична область також обрана тут симетричною відносно нуля:

Ця область розташована під заштрихованими ділянками, площа кожного з яких дорівнює α/2.



Графік 2.3. Однобічна критична область

На графіку 2.2 і 2.3. наведені функції щільності розподілу, близькі по виду до *χ2*- або *F*-розподілів. На графіку 2.3 показана однобічна критична область, розташована в діапазоні великих значень критерію:

Заштрихована частина, розташована над критичною областю, має площу, рівну α. На графіку 2.2. показана квазісиметрична критична область

одна частина якої розташовується правіше нуля, а інша - в області великих значень критерію. Кожна з заштрихованих частин, розташованих над відрізками, відповідними критичної області, має площу, рівну α / 2.

Перш ніж перейти до конкретних завдань вибору критичних областей, сформулюємо наведені вище міркування у вигляді визначення і розглянемо деякі приклади.

Визначення 2.12

Нехай *(Х1, Х2, ..., Хn)* - вибірка обсягу *n* з генеральної сукупності значень випадкової змінної *Х*, а *(х1, х,2, .., хn)* - реалізація вибірки. Припустимо, що висунута гіпотеза *Н* і обраний критерій перевірки (Testgröβe)

 (2.50)

залежить від вибірки і від висловленої гіпотези. Задамося ймовірністю α (рівнем значущості) або статистичною надійністю

 (2.51)

Підобласть *K* області зміни критерію *Т* називається критичною областю обсягу α, якщо ймовірність того, що в разі справедливості гіпотези *Н T* потрапляє в область *К*, дорівнює α:

 (2.52)

Якщо вибіркове значення значення критерію

 (2.53)

потрапляє в область , то гіпотеза *Н* відкидається. Подібна процедура називається статистичною перевіркою гіпотези.

Приклад 2.6

Перевірка гіпотези про середнє значення (математичне очікування) нормально розподіленої випадкової величини *Х* з відомою дисперсією *σ2* (див. розд. 2.3, приклад 2.2).

Гіпотеза *Н* стверджує, що середнє значення *Х* рівне заданій величині *m0*,тобто

 (2.54)

B якості критерію перевірки оберемо функцію

 (2.55)

де

 (2.56)

Критерій в разі справедливості гіпотези *Н* має нормований нормальний розподіл. Критичну область *К*, що відповідає рівню значущості α, оберемо симетричною згідно гр.2.1:

Для визначення *ε* необхідно вирішити рівняння [див. (2.35)]

 (2.57)

Якщо значення

 (2.58)

потрапляє в область *К*, гіпотеза (2.54) відкидається.

Нехай з нормальною сукупності з дисперсією *σ2* = 25 залучена вибірка обсягу *n* = 16, за допомогою якої отримана оцінка середнього = 22. Потрібно привірити гіпотезу *m* = 20. Для цього виконаємо наступне.

При обраному значенні α = 0,05 (це відповідає *Р* = 1 – 0,05 = 0,95) знайдемо величину *ε* з рівняння (2.57), використовуючи табл. 15.1:

При цьому

В даному випадку

Звідси випливає, що гіпотеза *Н* не відхиляється.

Приклад 2.7

Перевірка гіпотези про середнє значення нормально розподіленої випадкової величини *Х* з невідомою дисперсією (див. розд. 2.3, приклад 2.3).

Перевіряється та ж гіпотеза, що і в прикладі 2.6:

 (2.59)

В якості критерію перевірки обираємо функцію

 (2.60)

де

 (2.61)

i

 (2.62)

Критерій в разі справедливості гіпотези *Н* має *t*-розподіл з числом ступенів свободи *n*-1. Оберемо критичну область симетричною відносно нуля

 (2.63)

і знайдемо величину ε з рівняння

 (2.64)

де *S* - функція розподілу Стьюдента (*t*-розподілу). Значення *ε*, що задовольняє умові (2.64), будемо називати критичним значенням *t*-розподілу при числі ступенів свободи *n*-1 і рівні значущості α і позначимо його *tкр*.

Нехай з нормально розподіленої генеральної сукупності витягнута вибірка обсягу *n* = 10, за допомогою якої знайдені оцінка середнього = 24 і оцінка середньоквадратичного відхилення При цьому величина критерію для перевірки гіпотези *m* = 20 виявляється рівною

З умови (2.64) за допомогою табл. 15.3 для рівня значущості α= 0,01 (або відповідно *Р* = 0,99) знаходимо

Так як , то потрапляє в критичну область і гіпотезу *m* = 20 слід відхилити.

Приклад 2.8

Перевірка гіпотези про значення дисперсії *σ2* нормально розподіленої випадкової величини *Х* при невідомому середньому значенні (див. розд. 2.3, Приклад 2.4).

Перевіряється гіпотеза

 (2.65)

В якості критерія використовуємо функцію

 (2.66)

Ця величина, в разі коли *Н* справедлива, підпорядковується *χ2*-розподілу з числом ступенів свободи *n*-1. Критичну область, що відповідає рівню значущості α, виберемо квазісімметрічной, згідно з графіком 2.2. З табл. 15.2 знайдемо значення *ε1* і *ε2*, відповідні умові

 (2.67)

Якщо вибіркове значення потрапляє в критичну область

 (2.68)

то гіпотезу (2.65) слід відкинути.

Нехай з нормально розподіленої сукупності витягнута вибірка обсягу *n* = 40, за допомогою якої розрахована оцінка дисперсії Величина критерію (2.66) при цьому виявляється рівною

При рівні значущості α = 0,05 знаходимо *ε1* = 24,4; *ε2* = 59,3. Так як не влучає у критичну область (2.68), гіпотеза *σ2* = 20 не відхиляється.

Приклад 2.9

Перевірка гіпотези про рівність дисперсій і двох незалежних нормально розподілених випадкових величин *Х* і *Y* при невідомих середніх значеннях.

Перевіряється гіпотеза

 (2.69)

В якості критерію перевірки oбирають функцію

 (2.70)

Тут

 (2.71)

і

 (2.72)

являють собою незсунені оцінки дисперсій, розраховані, відповідно до формули (2.9), за вибіркою обсягу *n* для змінної *Х* і вибірці обсягу *m* для змінної *Y*. Величини є оцінками середніх значень, які визначаються відповідно до виразу (2.5). У разі коли гіпотеза *Н* справедлива, критерій має *F*-розподіл з числами ступенів свободи *n*-1 і *m*-1.

Позначимо, як і в розд. 15.5, через функцію розподілу Фішера (*F*-розподілу). Тоді, вибираючи квазісиметрічную критичну область згідно гр. 2.2:

 (2.73)

знаходимо для заданого рівня значущості α величини *ε1* i *ε2* з рівняння

 (2.74)

Якщо вибіркове значення попадає в область (2.73), гіпотеза (2.69) відкидається.

З (2.74) випливає, що *ε2=1/ε1* тому в табл. 15.4 і 15.5 містяться тільки значення правих критичних точок *ε2* (величину *ε2* ми нижче іноді будемо позначати також через *Fкр*). При обчисленні критерію в (2.70) в чисельник завжди ставиться бiльша з оцінок і . якщо виявляється більше, ніж *Fкр = ε2*, то гіпотеза (2.69) відкидається.

Зауваження 2.1

При перевірці адекватності моделі використовується *F*-критерій з несиметричною критичною областю виду гр. 2.3. Процедура вирішення цього завдання детально розглядається в розд. 3.2.5 і 3.3.7.

Перейдемо тепер до питання про доцільний вибір критичної області *К*. При цьому проаналізуємо можливі помилки, що виникають при прийнятті або відхиленні гіпотези, і значення цих помилок.

Визначення 2.13

Якщо гіпотеза відхиляється, коли вона насправді вірна, кажуть про помилку першого роду. Якщо гіпотеза не відхиляється, коли вона насправді не вірна, має місце помилка другого роду.

Затвердження 2.8

Рівень значущості α є ймовірність помилки першого роду.

Визначення 2.14

Нехай - альтернативна гіпотеза стосовно гіпотези *Н*. Тоді є ймовірність того, що гіпотеза *Н* відкидається, коли вона не вірна, тобто коли істинною є конкуруюча гіпотеза . Ця ймовірність характеризує вибірковість критерію перевірки, тим менше ймовірність помилки другого роду. При заданій ймовірності помилки першого роду критичну область обирають так, щоб забезпечити максимальну вибірковість критерію:

 (2.75)

Зауваження 2.2

У прикладах 2.7-2.9 критична область обрана найкращим чином в вищевказаному сенсі. Положення оптимальної області *К* в сенсі (2.75) істотно залежить від вибору альтернативної гіпотези . В прикладах 2.6 і 2.7 конкуруючої є гіпотеза , в прикладі 2.8 - а в прикладі 2.9 - Якщо в прикладі 2.8 використовувати альтернативну гіпотезу , то в якості критичної слід обрати область, показану на гр. 2.3. Подібні ж висновки можуть бути зроблені і щодо інших прикладів.

Після розгляду загальних проблем теорії перевірки гіпотез і викладу низки прикладів розглянемо коротко ще кілька важливих завдань перевірки гіпотез. Детальний їх виклад і практичні приклади можна знайти в літературі з математичної статистики.

Приклад 2.10

Перевірка гіпотези про рівність середніх значень *m1* і *m2* двох незалежних нормально розподілених випадкових величин *Х* і *Y* при відомих дисперсіях .

Перевіряється гіпотеза

 (2.76)

В якості критерію перевірки обираємо функцію

 (2.77)

Тут - вибіркові середні для вибірки обсягу *n1* і *n2* відповідно, що визначаються за формулою (2.5). Величина підпорядкована нормованому нормальному закону розподілу. Критична область обирається симетричною, подібно показаної на гр. 2.1.

Приклад 2.11

Перевірка гіпотези про рівність дисперсій , *k* незалежних нормально розподілених випадкових величин *Х(1), Х(2), ... Х(k)*.

Перевіряється гіпотеза

 (2.78)

В якості критерію oбирається функція

 (2.79)

Тут - вибіркова дисперсія змінної *Х(i)*, яка визначається відповідно до виразу (2.9) при однаковому обсязі *n* вибірки для кожної *і*-ї змінної. Критичні значення величини при різних значеннях *k* і *n* для ряду значень α можна знайти, наприклад, в [3]. Критична область обирається несиметричною, подібно показаної на гр. 2.3.

Приклад 2.12

Перевірка гіпотези про вид закону розподілу *F(х)* випадкової змінної *Х*.

Якщо закон розподілу ймовірностей *F(х)* деякої випадкової змінної *Х* ніхто не знає, можна отримати уявлення про його форму, побудувавши на основі вибірки емпіричну функцію розподілу *Wn(х)* (див. pозд. 2.2). При цьому виявляється можливим висловити припущення про те, що чинний дозвіл закону розподілу є функція *F0(х)*. Тоді потрібно перевірити гіпотезу

 (2.80)

Для перевірки гіпотези ділять інтервал зміни випадкової змінної *Х* на *k* неперексічних підінтервалів

Нехай *pi* - ймовірність того, що *Х* потрапляє в підінтервал , в припущенні, що закон розподілу *Х* описується функцією *F0(х)*:

 (2.81)

Вочевидь, що

 (2.82)

Позначимо через число значень *хі* у вибірці обсягу *n*, потрапляють в підінтервал Тоді

 (2.83)

Згідно розд. 15.1, випадкові величини в разі справедливості гіпотези *Н0* підпорядковані біноміальному розподілу з параметрами

 (2.84)

 (2.85)

При розподіл прагне до нормального з тими ж моментами.

При правильності гіпотези величини

 (2.86)

також будуть асимптотично розподілені нормально. Ці величини пов'язані між собою співвідношенням

 (2.87)

В якості запобіжного розбіжності вибіркових величин і їх теоретичних значень *nрi* розглянемо величину

 (2.88)

Розподіл випадкової величини при прагнути до *χ2*-розподіленню з числом ступенів свободи *k*-1. Для вибірок досить великого обсягу *n* приймається, що наближено слід *χ2*-розподілу. При цьому для вибрати рівня значущості α і критичної області виду гр. 2.3 за допомогою таблиць *χ2*-розподілу (див. табл. 15.2) визначається величина *ε*, відповідна умові

 (2.89)

Гіпотеза *Н0* відхиляється, якщо

Приклад 2.13

Виявлення аномальних спостережень (Ausreiβertest).

В ряду вимірювань може з'явитися певний результат, який виявляється істотно більшим чи меншим інших значень. При цьому може виникнути підозра, що цей результат є помилковим, не є типовим для вибірки і виник внаслідок грубої помилки при вимірюванні. Такі значення називають зазвичай аномальними (різко виділяються значеннями, або викидами). Для вирішення питання про те, чи є деякие спостереження аномальним чи ні, використовуються спеціальні критерії. Існують різні способи виявлення аномальних спостережень, що відрізняються наявною інформацією про параметри розподілу випадкової величини. У найпростішому випадку, вважаючи, що *Х* підпорядковується нормальному закону з відомою дисперсією *σ2*, для виявлення аномальності може бути використана величина

 (2.90)

яка має нормований нормальний розподіл (при досить великих вибірках, що використовуються для обчислення ).

При заданому рівні значущості α з умови

 (2.91)

може бути знайдена величина *ε*, що визначає положення критичної області виду гр. 2.1. якщо

 (2.92)

спостереження *хі* вважається аномальним.

Приклад 2.14

Перевірка гіпотези про незалежність двох нормально розподілених величин *Х* і *Y*.

При з'ясуванні питання про незалежність нормально розподілених випадкових величин *Х* і *Y* перевіряється гіпотеза

 (2.93)

Де *ρ* - коефіцієнт кореляції. При зазначених вище припущеннях вибірковий коефіцієнт кореляції

 (2.94)

де

 (2.95)

 (2.96)

 (2.97)

розподілений нормально з нульовим середнім і дисперсією

 (2.98)

При цьому величина

 (2.99)

підпорядкована нормованому нормальному розподілу. При заданому рівні значущості α з умови

 (2.100)

може бути знайдено значення *ε*.

Гіпотеза *ρо* = 0 відхиляється, якщо