Тема: Сучасна портфельна теорія

Лабораторна робота: Побудова оптимального портфелю

Мета: навчитися формувати оптимальний портфель цінних паперів.

Завдання: сформувати портфелі з цінних паперів з заданими ефективностями та ризиками. Побудувати графік. Знайти парето-оптимальні портфелі. За методом Лагранжа знайти мінімальний за ризиком портфель з ЦП. Знайти максимальний за прибутковістю портфель. Сформувати портфель Тобіна.

Основні позначення

$X=(x_1;...;x_N)$ — структура портфеля активів;

x_i — частка капіталу, інвестованого в обтяжений ризиком актив i-го виду ($i=1,...,N$);

$X^*=(x_1^*;...;x_N^*)$ — структура оптимального портфеля;

$\tilde{X}=(x_0;X)=(x_0;x_1;...;x_N)$ — структура портфеля, складеного з безризикових та обтяжених ризиком активів;

x_0 — частка капіталу, вкладеного у безризикові активи;

$R_0=r_0$ — норма прибутку безризикового активу (детермінована величина);

$R_i=(r_{i1};...;r_{in})$ — норма прибутку активу i-го виду (випадкова величина, яка набуває свого значення r_{ij} з імовірністю q_j, $i=1,...,N$; $j=1,...,n$);

$R=(r_{ij}: i=1,...,N;\ j=1,...,n)$ — матриця норм прибутку активів, що складають портфель (функціонал оцінювання);

$m_0=M(R_0)=r_0$ — сподівана норма прибутку безризикового активу;

$\sigma_{il}=\text{cov}(R_i;R_l)=\sigma_i\sigma_l\rho_{il}$ — коваріація між нормами прибутків активів i-го та l-го видів ($i=1,...,N$; $l=1,...,N$);

$\rho_{il}=\rho(R_i;R_l)$ — коефіцієнт кореляції між нормами прибутків активів i-го та l-го видів ($i=1,...,N$; $l=1,...,N$);

$R_\Pi=\sum_{i=1}^{N}x_iR_i$ — норма прибутку (випадкова величина) портфеля активів зі структурою X;

$R_\Pi^*=\sum_{i=1}^{N}x_i^*R_i$ — норма прибутку (випадкова величина) портфеля активів з оптимальною структурою X^*;

$m_\Pi=M(R_\Pi)=\sum_{i=1}^{N}x_im_i$ — сподівана норма прибутку портфеля активів;

$m_{\Pi}^{*} = M(R_{\Pi}^{*}) = \sum_{i=1}^{N} x_i^{*} R_i$ — сподівана норма прибутку портфеля активів, якої він досягає за оптимальної структури X^{*};

m_{Π}^{0} — фіксоване значення сподіваної норми прибутку портфеля активів;

$\sigma_{\Pi}^{2} = D(R_{\Pi}) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{l=1}^{N} x_i x_l \sigma_{il} = XCX^{T}$ — величина ризику (дисперсія норми прибутку) портфеля, складеного з N активів;

$\sigma_{\Pi} = \sqrt{D(R_{\Pi})}$ — середньоквадратичне відхилення норми прибутку портфеля активів від його сподіваної норми прибутку;

σ_{Π}^{0} — фіксоване значення середньоквадратичного відхилення портфеля активів;

$\sigma_{\Pi}^{*}(m_{\Pi}^{0})$ — мінімальне значення середньоквадратичного відхилення (ризику) за фіксованого значення m_{Π}^{0} сподіваної норми прибутку цього портфеля;

$(\sigma_{\Pi}^{*})^{2}$ — мінімальне значення рівня ризику портфеля активів;

$C = \mathrm{cov}(R_{\Pi}) = (\sigma_{ij} : i = 1,\dots, N;\ \ j = 1,\dots, N)$ — коваріаційна матриця між нормами прибутку активів, що складають портфель (функціонал оцінювання);

$\Delta_X = \{X = (x_1;\dots;x_N) : \sum_{i=1}^{N} x_i = 1;\ x_i \ge 0,\ \ i = 1,\dots, N\}$ — множина допустимих структур портфелів активів;

$M(m_{\Pi};\sigma_{\Pi})$ — позначення точки у системі координат «$m — \sigma$» (m — вісь абсцис, σ — вісь ординат);

$\Pi_X(m_{\Pi};\sigma_{\Pi})$ — позначення точки у системі координат «$m — \sigma$», що відповідає портфелю зі структурою X;

$\Pi = \{\Pi_X(m_{\Pi};\sigma_{\Pi}) :\ X = (x_1;\dots;x_N) \in \Delta X\}$ — множина допустимих портфелів активів.

Обчислення сподіваних норм прибутку та ступеня ризику активів

Суть **підходу Марковіца** полягає в тому, що він запропонував розглядати норми прибутку активів і складених з них портфелів як випадкові величини. У **моделі Марковіца** це реалізовується таким чином: активу *i*-го виду ставиться у відповідність випадкова величина $R_i \ (i = 1,\ldots,N)$, реалізації якої є нормами прибутку цього активу для вибраного інвестиційного горизонту (інвестиційного періоду). Значення норми прибутку активу *i*-го виду залежать від стану економічного середовища (ринку). Множина можливих станів ринку може складатися, в принципі, з будь-якої кількості елементів, зокрема й нескінченної (навіть бути континумом). У подальшому вважатимемо її скінченною.

Сподівана норма прибутку:

$$m_i = M(R_i) = \sum_{j=1}^{n} q_j r_{ij}, \ \ i = 1,\ldots,N. \tag{1}$$

Ступінь (рівень) ризику:

$$D(R_i) = \sum_{j=1}^{n} q_j (r_{ij} - m_i)^2 = \sum_{j=1}^{n} q_j r_{ij}^2 - m_i^2, \ \ i = 1,\ldots,N \tag{2}$$

або, як *середньоквадратичне відхилення*:

$$\sigma_i = \sqrt{D(R_i)}. \tag{3}$$

Модель оптимального портфелю Марковіца

Задача 1: збереження капіталу	Задача 2: одержання бажаного (фіксованого) прибутку	Задача 3: забезпечення приросту капіталу
$\sigma_{\Pi}^2 = D(R_{\Pi}) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}(x_i x_l \sigma_{il}) \to \min_{X\in\Delta_X};$ $\sum_{i=1}^{N} x_i = 1;$ (4) $x_i \geq 0, \quad i = 1,\dots,N$	$\sigma_{\Pi}^2 = D(R_{\Pi}) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}(x_i x_l \sigma_{il}) \to \min_{X\in\Delta_X};$ $m_{\Pi} = M(R_{\Pi}) = \sum_{i=1}^{N}(x_i m_i) \geq m_{\Pi}^0;$ $\sum_{i=1}^{N} x_i = 1;$ (5) $x_i \geq 0, \quad i = 1,\dots,N$	$m_{\Pi} = M(R_{\Pi}) = \sum_{i=1}^{N}(x_i m_i) \to \max_{X\in\Delta_X};$ $\sigma_{\Pi}^2 = D(R_{\Pi}) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}(x_i x_l \sigma_{il}) \leq (\sigma_{\Pi}^0)^2;$ $\sum_{i=1}^{N} x_i = 1;$ (6) $x_i \geq 0, \quad i = 1,\dots,N.$

Знаходження рішень задач 1–3 за допомогою функції Лагранжа

Задача 1:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_N, \lambda) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\left(x_i x_l \sigma_{il}\right) + \lambda(x_1 + x_2 + \dots + x_N - 1) \to \min, \qquad \textbf{(7)}$$

де λ – додаткова змінна (множник Лагранжа);

Задача 2:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_N, \lambda_1, \lambda_2) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\left(x_i x_l \sigma_{il}\right) + \lambda_1(x_1 + x_2 + \dots + x_N - 1) + \lambda_2\left(\sum_{i=1}^{N}\left(x_i m_i\right) - m_{\Pi}^{0}\right) \to \min, \qquad \textbf{(8)}$$

де λ_1, λ_2 – додаткові змінні (множники Лагранжа)

Задача3:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_N, \lambda_1, \lambda_2) = \sum_{i=1}^{N}\left(x_i m_i\right) + \lambda_1(x_1 + x_2 + \dots + x_N - 1) + \lambda_2\left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\left(x_i x_l \sigma_{il}\right) - \left(\sigma_{\Pi}^{0}\right)^2\right) \to \max, \qquad \textbf{(9)}$$

де λ_1, λ_2 – додаткові змінні (множники Лагранжа).

Модель оптимального портфелю Тобіна

(з урахуванням безризикових цінних паперів)

$$\begin{aligned}
&\sigma_{\Pi}^{2} = D(R_{\Pi}) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}(x_i x_l \sigma_{il}) \to \min_{X\in\Delta_X};\\
&m_{\Pi} = M(R_{\Pi}) = \sum_{i=1}^{N}(x_i m_i) + x_0 m_0 \ge m_{\Pi}^{0};\\
&\sum_{i=1}^{N} x_i + x_0 = 1;\\
&x_i \ge 0, \quad i = 1,\ldots,N
\end{aligned} \qquad (10)$$