Лекция 6 Элементы общей алгебры и теории чисел

Содержание лекции 

 Основные понятия теории множеств 

Алгебраические системы 

Числовые системы

План лекции: тема подраздела 

 Основные понятия теории множеств 

Алгебраические системы 

Числовые системы

Основные понятия теории множеств Интуитивная теория множеств (Георг Кантор) Множество – это произвольная совокупность определённых предметов, отличимых друг от друга и представимых как единое целое W. Любой предмет, входящий в состав множества – элемент множества (w ∈ W). Пусть U – некоторое универсальное множество, тогда B (U) – множество всех подмножеств множества U (множество-степень, булеан множества U). Если множество V – объединение подмножеств V1, V2, … Vn, …, то совокупность подмножеств {V1, V2, … Vn, …} называется покрытием множества V. Если совокупность подмножеств покрытия множества V такова, что Vi ∩ Vj = ∅ при i ≠ j, то совокупность {V1, V2, … Vn, …} называется разбиением множества V, а подмножества Vi – классами этого разбиения, i = 1, 2, … n, …

Отношения Отношение, определённое (заданное) на множествах X1, X2, … Xn – это произвольное подмножество декартова произведения указанных множеств: R ⊆ X1 x X2 x … x Xn Элемент отношения R – это кортеж (последовательность) элементов множеств: ( x1, x2, … xn ), где xi ∈ Xi, 1 ≤ i ≤ n Пусть R1 ⊆ X1 x X2, R2 ⊆ X2 x X3 – два отношения. Отношение R1-1, заданное на множестве X2 x X1, называется обратным к R, если: R1-1 = { ( x2, x1 ) | x1 R x2 }. Отношение R2 ° R1, заданное на множестве X1 x X3 называется композицией (произведением, суперпозицией) отношений R1 и R2, если: R2 ° R1 = { ( x1, x3) | x1 ∈ X1 & x3 ∈ X3 & ( ∃ x2 ∈ X2 ) ( x1 R1 x2 & x2 R2 x3) }

Бинарные отношения Декартово произведение множеств X1 , X2 ,…Xn , для которых выполнено равенство X1 = X2 = … = Xn = X, называется декартовым произведением n-й степени множества X(Xn ), а отношение R, заданное на Xn, т.е. R ⊆ Xn n-арным отношением на множестве X. Наиболее часто используемые отношения (n – арность):

 • нульарные (n = 0)

 • унарные (n = 1)

 • бинарные (n = 2)

 • тернарные (n = 3) Отношение IX, заданное на декартовом квадрате множества X, т.е. IX ⊆ X2, элементами которого являются бинарные кортежи (пары) вида (x, x), где x ∈ X, называется отношением тождества (диагональю, идеалом). Для любого бинарного отношения R ⊆ X2 имеет место равенство: IX ° R = R ° IX = R

Отношение эквивалентности

 Лемма 1. Всякое разбиение множества X на классы задаёт на этом множестве отношение эквивалентности.

Лемма 2. Всякое отношение эквивалентности R, определяемое на множестве X, задаёт разбиение этого множества на классы.

Теорема 1. Между разбиениями множества на классы и отношениями эквивалентности, заданными на этом множестве, существует взаимно однозначное соответствие.

Теорема 2. Если R1 и R2 – отношения эквивалентности, заданные на множестве X, то: (1) R1-1 – отношение эквивалентности на X (2) R2 ° R1 – отношение эквивалентности на X тогда и только тогда, когда R2 ° R1 = R1 ° R2 (3) R2 ∩ R1 – отношение эквивалентности на X (4) R1` (дополнение множества R1 в множестве X2) не является отношением эквивалентности на X.

Теорема 3. Объединение R2 ∪ R1 отношений эквивалентности R1 и R2 является эквивалентностью тогда и только тогда, когда пересечение любого класса эквивалентности по R1 с любым классом эквивалентности по R2 либо совпадает с одним из них, либо пусто. Если R2 ∪ R1 – эквивалентность, то R2 ∪ R1 = R2 ° R1.

Замыкание отношений Пусть R – некоторое бинарное отношение на множестве X. Тогда: Рефлексивным замыканием R i отношения R называется отношение R ∪ i, где i – отношение тождества (диагональ) на X. Симметричным замыканием R s отношения R называется отношение R ∪ R-1, т.е. если (x1, x2) ∈ R, то (x1, x2) ∈ R s и (x2, x1) ∈ R s. Транзитивным замыканием R t отношения R называется отношение R t = R ∪ R2 ∪ R3 ∪ … ∪ Rn ∪ …, т.е. если (x1, x2) ∈ R t тогда и только тогда, когда существуют элементы y1, y2, y3, … yn ∈ R, причём y1 = x1 и yn = x2, такие, что ( y1 R y2 , y2 R y3 , y3 R y4 , … yn-1 R yn ). Если некоторое отношение содержит свои рефлексивное, симметричное и транзитивное замыкания, то оно является отношением эквивалентности и наоборот.

Отношение частичного порядка С каждым отношением частичного порядка ≤ связано отношение строгого порядка < и наоборот: ( x1 < x2 ) ⇔ x1 ≤ x2 и x1 ≠ x2 ( x1 ≤ x2 ) ⇔ x1 < x2 или x1 = x2 С каждым отношением квазипорядка << связаны отношения строгого порядка < и эквивалентности ~ : ( x1 < x2 ) ⇔ x1 << x2 и ¬ ( x1 << x2 ) ( x1 ~ x2 ) ⇔ x1 << x2 и x1 << x2 Любое отношение квазипорядка <<< x2

Операции Отношение F, заданное на множествах X1, X2, … Xn, Y, называется функциональным, если для любого элемента ( x1, x2, … xn ) из декартова произведения X1 x X2 x … x Xn существует не более одного элемента y из Y такого, что ( x1, x2, … xn , y ) ∈ F. Отношение F, заданное на множествах X1, X2, … Xn, Y, называется (частичным) отображением или (частичной) функцией из X1 x X2 x … x Xn в Y, если F – функциональное и (частично определённое, т.е. Dom (F) ⊂ X1 x X2 x … x Xn) полностью определённое, т.е. Dom (F) = X1 x X2 x … x Xn. Dom (F) – область определения отображения F. Im (F) – область значений отображения F. Если F: Xn → Y, то • F – n-арная функция из X в Y; • F – n-арный предикат на множестве X, если Y = { 0, 1 }; • F – n-арная операция на множестве X, если Y = X. Операция F называется частичной (частично определённой), если F – частичная функция.

Свойства бинарных операций Пусть на множестве X определена бинарная операция, обозначаемая ◊. Бинарная операция ◊ называется : ассоциативной, если для любых x, y, z ∈ X верно: ( x ◊ y ) ◊ z = x ◊ ( y ◊ z ) коммутативной, если для любых x, y ∈ X верно: x ◊ y = y ◊ x идемпотентной, если для любого x ∈ X верно: x ◊ x = x Элемент 0 множества X называется левым (правым) нулём относительно данной операции, если для любого x ∈ X верно 0 ◊ x = 0 ( x ◊ 0 = 0). Нуль, являющийся одновременно и левым и правым, называется просто нулём. Элемент 1 множества X называется левым (правым) нейтральным элементом относительно данной операции, если для любого x ∈ X верно 1 ◊ x = x ( x ◊ 1 = x). Нейтральный элемент, являющийся одновременно и левым и правым, называется просто нейтральным элементом.

Аксиоматика теории множеств Георг Кантор: Аксиомы объёмности и «математической свободы». Эрнст Цермело, Абрахам Френкель (ZFC-система): Аксиомы объёмности, свёртки, пары, объединения, бесконечности, булеана, выбора, подстановки. Джон фон Нейман (Пауль Бернайс, Курт Гёдель): Аксиома регулярности (основания, фундирования).

ZFC - система Аксиома объёмности. Два множества равны тогда и только тогда, когда они состоят из одних и тех же элементов. Аксиома свёртки. Любое свойство P (x) определяет некоторое множество A с помощью условия: элементами множества A являются те и только те предметы a, которые имеют свойство P. Аксиома пары. Если a и b – различные предметы, то существует множество { a, b }, которое состоит в точности из предметов a и b. Аксиома объединения. Для произвольного множества A существует множество B, которое состоит в точности из всех элементов, входящих в множество A. Аксиома бесконечности. Существует хотя бы одно бесконечное множество – множество натуральных чисел N. Аксиома булеана. Для любого множества A существует множество B (A) всех подмножеств множества A. Аксиома выбора. Если дано множество A, то существует функция f, которая ставит в соответствие каждому непустому подмножеству B из множества A один определённый элемент f (B) из множества B. Аксиома подстановки. Для любого множества A и однозначной функции f, определённой на множестве A, существует множество, которое состоит в точности из элементов f (x) для x ∈ A.

Универсальные алгебры Универсальной Ω-алгеброй (или просто алгеброй) называется система G = (A, Ω), состоящая из некоторого непустого множества A (основное множество или носитель алгебры) и множества определённых на A операций Ω = { ω1k1, ω2k2, … ωnkn, … } (сигнатура алгебры), где k i – арность операции ω i, k i ∈ N , ar ( ω i ) = k i (функция арности), i = 1, 2, … , n, … Операции из множества Ω называются основными операциями алгебры. Подмножество A’ ⊆ A называется замкнутым относительно операции ω∈Ω , если для любых a1, a2, … an из A’ истинно ω (a1, a2, … an) ∈ A’. Система (A’, Ω) называется подалгеброй алгебры (A, Ω), если A’ ⊆ A и A’ замкнуто относительно любой основной операции алгебры (A, Ω). Теорема. Пересечение произвольной совокупности подалгебр универсальной алгебры, если оно не пусто, будет подалгеброй этой алгебры.

Конечно-порождённые алгебры Следствие из предыдущей теоремы: Для произвольного подмножества D ⊆ A алгебры G существует однозначно определённая подалгебра { D } , минимальная среди подалгебр, включающих множество D. Это будет пересечение всех подалгебр из G , включающих D. Если { D } = G , то D называется системой образующих для G. Алгебра G = { D } называется конечно-порождённой, если множество D конечно. Примеры. С помощью операции сложения можно породить следующие множества:

• множество натуральных чисел из множества D = { 0, 1 }

 • множество целых чисел из множества D = { -1, 1 }

 Понятие алгебраической системы А.И. Мальцев обобщил понятие «(универсальная) алгебра» до понятия «алгебраическая система». Алгебраической системой A = ( A, Ω F, Ω P ) называется система, состоящая из трёх множеств:

(1) непустого множества A (носитель алгебраической системы);

(2) множества алгебраических операций Ω F , определённых на множестве A;

(3) множества отношений Ω P , определённых на множестве A. Если алгебраическая система не содержит операций, то она называется моделью. Если алгебраическая система не содержит отношений, то она называется алгеброй. Типом алгебраической системы называется кортеж арностей операций и отношений. Операции и отношения в типе алгебраической системы составляют пару отдельных наборов, а внутри каждого набора расположены в порядке убывания значений арностей.

 Морфизмы универсальных алгебр Универсальные алгебры G (A, Ω) и Q (B, Ω’) называются однотипными алгебрами, если между элементами сигнатур Ω и Ω’ можно установить такое взаимно однозначное соответствие, при котором любая операция ω из Ω и соответствующая ей операция ω’ из Ω’ будут иметь одну и ту же арность. Очевидно, что в однотипных алгебрах задана одна и та же сигнатура операций. Для однотипных алгебр определены следующие морфизмы (отображения носителей алгебр, сохраняющие свойства операций, входящих в их сигнатуры) : Гомоморфизм – это отображение h : A → B такое, что для всех элементов a1, a2, … an из A и любой n-арной операции ω из Ω справедливо равенство : h ( ω ( a1 , a2 , … an ) ) = ω ( h (a1) , h (a2) , … h (an) ) Изоморфизм – это взаимно однозначное отображение алгебры G на алгебру Q (G ~ Q). Эпиморфизм (мономорфизм) – это гомоморфизм алгебры на (в) себя, т.е. h : G → G Автоморфизм – это изоморфизм алгебры на себя. Если алгебра G изоморфна некоторой подалгебре алгебры G’ , то говорят, что алгебра G изоморфно вкладывается в алгебру G’.

 Пример изоморфизма универсальных алгебр Пусть G = ( D + , Ω ) – алгебра положительных вещественных чисел. Носитель алгебры: D + = { x ∈ D | x > 0 } Сигнатура алгебры Ω состоит из следующих операций: Бинарная операция умножения ( \* ); Унарная операция взятия обратного элемента ( -1 ); Нульарная операция, фиксирующая единичный элемент ( 1 ). Пусть G’ = ( D , Ω’)– алгебра, носитель которой D – множество всех вещественных чисел. Сигнатура алгебры Ω’ состоит из следующих операций: Бинарная операция сложения ( + ); Унарный минус ( - ); Нульарная операция, фиксирующая нулевой элемент ( 0 ). Отображение f = lg (десятичный логарифм) – изоморфизм алгебры G на G’ : lg ( a \* a ‘ ) = lg a + lg a ’ lg ( 1 / a ) = lg ( 1 ) –lg ( a ) = 0 – lg ( a ) = -lg ( a ) lg 1 = lg ( a \* ( 1 / a ) ) = lg ( a ) – lg ( a ) = 0

 Операционные структуры: определения Полугруппой называется множество S с ассоциативной бинарной операцией ⊗: x ⊗ ( y ⊗ z ) = ( x ⊗ y ) ⊗ z , для всех x, y, z ∈ S Моноидом называется множество M, на котором задана ассоциативная бинарная операция (обычно именуемая умножением) и в которой существует такой элемент e, называемый единицей, что e ⊗ x = x ⊗ e = x , при любом x ∈ M Иными словами, моноид – это полугруппа с единицей. В любом моноиде существует ровно одна единица. Если в моноиде бинарная операция коммутативна, то её обычно называют сложением, а единицу – нулём. Группой G называется множество элементов с ассоциативной бинарной операцией, для которой существует единица (см. моноид) и каждому элементу x ∈ G соответствует обратный к нему (по отношению к ⊗) элемент y ∈ G такой, что x ⊗ y = e = y ⊗ x (если абелева группа, иначе правый и левый обратные элементы)

 Операционные структуры: примеры Пример 1. Пусть A = { a, b, c, d, … x, y, z } – латинский алфавит, т.е. элементы множества A – это символьные имена (символы) букв алфавита. Определим A\* как множество всех (не обязательно конечных) строк символов из алфавита A. Определим на A\* бинарную операцию конкатенации \_ (символ подчёркивания) следующим образом: если α, β ∈ A\* , то α \_ β = αβ Пусть символ Λ обозначает пустую строку. Очевидно, что Λ ∈ A\*. Система ( A\* , \_ , Λ ) является моноидом, т.к. Λ – единица: Λ \_ α = α \_ Λ = α Пример 2. Множество всех отображений произвольного множества в себя является моноидом относительно операции суперпозиции отображений. Пример 3. Множество целых чисел является абелевой группой по сложению.

 Арифметические структуры : кольца

Кольцом называется множество R с двумя определёнными на нём бинарным операциями – сложением ( ⊕ ) и умножением ( ⊗ ), которые обладают следующими свойствами: (1) относительно операции сложения множество R является абелевой группой; (2) операции сложения и умножения связаны законами дистрибутивности: x ⊗ ( y ⊕ z ) = ( x ⊗ y ) ⊕ ( x ⊗ z ) , ( x ⊕ y ) ⊗ z = ( x ⊗ z ) ⊕ ( y ⊗ z ) , для всех x, y, z ∈ R Замечание. Умножение, определённое в кольце, не обязано быть ни ассоциативным, ни коммутативным. Кольцо с ассоциативным умножением называется ассоциативным, а если умножение к тому же ещё и коммутативно – коммутативным (абелевым). Алгеброй Ли называется кольцо с антикоммутативным умножением (обычно обозначаемым [a, b] ), удовлетворяющим тождеству Карла Густава Якоби: [ a, [ b, c ] ] ⊕ [ b, [ a, c ] ] ⊕ [ c, [ a, b ] ] = 0 , для любых a, b, c ∈ R Причём, для любого a ∈ R выполнено условие : [ a, a ] = 0

 Кольца: примеры

 Пример 1. Все целые, рациональные, вещественные, комплексные числа являются коммутативными кольцами.

Пример 2. Множество всех многочленов с вещественными коэффициентами и операциями сложения и умножения вещественных чисел (называемых далее для краткости – обычными) является коммутативным кольцом.

Пример 3. Множество всех квадратных матриц n-го порядка, состоящих из вещественных чисел, по отношению к обычным операциям сложения и умножения является ассоциативным (но не коммутативным !) кольцом.

Пример 4. Множество всех векторов трёхмерного пространства с обычным сложением и векторным умножением является кольцом Ли.

 Арифметические структуры : области целостности Аддитивной группой кольца называется абелева группа, которая получится, если в кольце рассмотреть только операцию сложения. Нулевой элемент такой группы называется нулём кольца. Если для элементов a, b кольца R верно равенство: a ⊗ b = 0 , где a ≠ 0 , b ≠ 0 то a и b называются делителями нуля. Если R – не коммутативное кольцо, то a – левый, b – правый делители нуля. Если в кольце R нет делителей нуля, то R называется кольцом без делителей нуля. Областью целостности D называется коммутативное кольцо с единицей, не имеющее делителей нуля. Замечание. Каждая конечная область целостности является полем. Однако существуют примеры бесконечных областей целостности, не являющихся полями.

 Области целостности: примеры Пример 1. Коммутативные кольца целых, рациональных, вещественных и комплексных чисел являются областями целостности. Пример 2. Все функции, определённые и непрерывные на отрезке [ - 1, +1 ] относительно обычных операций сложения и умножения образуют коммутативное кольцо с делителями нуля. Делителями нуля являются следующие функции : f1 (x) = { 0 , если x ∈ [ -1, 0 ] ; x , если x ∈ [ 0, 1 ] } f2 (x) = { x , если x ∈ [ -1, 0 ] ; 0 , если x ∈ [ 0, 1 ] } Указанные функции являются делителями нуля, т.к. во-первых, ни одна из них не равна нулю рассматриваемого кольца, во-вторых, их произведение равно этому нулю.

 Арифметические структуры : кольцасединицей Элемент u кольца R называется единицей кольца, если для любого элемента a ∈ R верны равенства : a ⊗ u = u ⊗ a = a Замечание. Единицы в кольце может и не быть. Если в кольце R есть единица, то R называется кольцом с единицей. В кольце с единицей u для элемента a ≠ 0 этого кольца может существовать элемент b такой, что верны равенства : a ⊗ b = b ⊗ a = u Тогда b называют (правым, левым) обратным к a элементом : b = a -1 Замечание. Обратного элемента может и не быть. Элементы кольца с единицей, для которых обратный элемент существует, называются (правым, левым) делителями единицы.

 Кольца с единицей: примеры

Пример 1. Кольцо всех целых чисел является кольцом с единицей.

Пример 2. Кольцо всех чётных чисел является кольцом без единицы.

Пример 3. В кольце всех квадратных матриц n-го порядка единицей является единичная матрица, а её делителями являются все невырожденные матрицы.

Пример 4. Система ( Z m , \*, +) , где множество Z m порождено отображением ρ : Z → Z m (ставящим в соответствие каждому целому числу z ∈ Z его остаток от деления на натуральное число m), является коммутативным кольцом с единицей для любого m ∈ N. Z m не имеет делителей нуля тогда и только тогда, когда m – простое число.

 Арифметические структуры : кольцасидеалами Подкольцо I кольца R называется левым идеалом кольца R, если оно вместе с каждым элементом a содержит все элементы следующего вида : r ⊗ a , r – любой элемент кольца R. Аналогично, подкольцо J кольца R называется правым идеалом кольца R, если оно вместе с каждым элементом a содержит все элементы следующего вида : a ⊗ r , r – любой элемент кольца R. Элемент нуль в любом кольце является двухсторонним идеалом. Если других идеалов в кольце нет, то оно называется простым кольцом.

 Векторные пространства Линейным ( векторным ) пространством V (F) над полем F называется непустое множество V, на котором определены следующие операции: (1) операция сложения, т.е. каждой паре элементов x , y ∈ V ставится в соответствие элемент того же множества, обозначаемый x + y ∈ V (2) операция умножения на скаляр ( т.е. элемент поля F ), которая любому элементу λ ∈ F и любому элементу x ∈ V ставит в соответствие единственный элемент из V (F), обозначаемый λ x ∈ V (F) Метрическим ( векторным ) пространством M называется множество точек (векторов), с фиксированной функцией расстояния (метрикой) d : M x M → R , удовлетворяющей следующим аксиомам : d (x , y) = 0 ⇔ x = y – аксиома тождества d (x , y) = d (y , x) – аксиома симметрии d (x , z) ≤ d (x , y) + d (y , z) – аксиома треугольника для любых x , y , z ∈ R , где R – множество вещественных чисел.

 Топологические пространства Пусть X – некоторое множество. Система T его подмножеств называется топологией на X, если выполнены следующие аксиомы: (1) объединение произвольного семейства множеств, принадлежащих T, принадлежит T (2) пересечение конечного семейства множеств, принадлежащих T, принадлежит T (3) X , ∅ ∈ T Пара ( X , T ) называется топологическим пространством. Множества, принадлежащие T, называются открытыми множествами. Множество E называется топологическим векторным пространством, если : (1) E – векторное пространство над полем вещественных или комплексных чисел; (2) E – топологическое пространство; (3) операции сложения и умножения на скаляр непрерывны относительно заданной в E топологии.

 ( Частично ) - упорядоченные множества Множество, на котором определено отношение ( частичного ) порядка, называется ( частично ) - упорядоченным множеством. Элемент a частично-упорядоченного множества A называется нижней ( верхней ) гранью для подмножества B ⊆ A, если между a и любым x ∈ B определено отношение частичного порядка : a ≤ x ( для нижней грани ), x ≤ a ( для верхней грани ). Нижнюю ( верхнюю ) грань a называют наибольшей нижней ( наименьшей верхней ) гранью – ННГ ( НВГ ) , что обозначается a = inf B ( a = sup B ), если для любой другой нижней ( верхней ) грани a’ подмножества B выполняется условие : a’ ≤ a ( a ≤ a’ ). Если у данного множества существует ННГ и/или НВГ, то они единственны. Элемент a частично-упорядоченного множества A называют наименьшим – нулём 0 ( наибольшим – единицей 1), если для любого x ∈ A выполняется : a ≤ x ( x ≤ a ).

 Решётки

Алгебра G = ( A , Ω ) называется решёткой (или структурой), если на множестве A определены две бинарные операции – верхняя грань (∨) и нижняя грань (∧) т.е. Ω = ( ∨ , ∧ ). Аксиомы решётки : для любых a , b , c ∈ A выполняются соотношения : a ∨ a = a ∧ a = a – идемпотентность a ∨ b = b ∨ a , a ∧ b = b ∧ a – коммутативность a ∨ ( b ∨ c)= ( a ∨ b ) ∨ c , a ∧ ( b ∧ c ) = ( a ∧ b ) ∧ c – ассоциативность a ∨ ( a ∧ b ) = a, a ∧ (a ∨ b ) = a – поглощение Если на множестве A задана только операция ∨ ( ∧ ) , то алгебра G = ( A , Ω ) называется верхней (нижней) полурешёткой (или полуструктурой). Решётка называется дистрибутивной, если для операций ∨ и ∧ выполняются соотношения взаимной дистрибутивности : a ∨ ( b ∧ c)= (a ∨ b ) ∧ ( a ∨ c), a ∧ ( b ∨ c ) = (a ∧ b ) ∨ ( a ∧ c )

 Булевы алгебры

В решётке с нулём 0 и единицей 1 дополнением элемента a называют элемент ¬ a , удовлетворяющий следующим условиям : a ∧ ¬ a = 0 a ∨ ¬ a = 1 Очевидно, что ¬ 1 = 0 и ¬ 0 = 1. Решётка с нулём и единицей называется решёткой с дополнениями, если каждый её элемент имеет хотя бы одно дополнение. В дистрибутивной решётке выполняется свойство : ни один элемент не может иметь двух различных дополнений. Всякая дистрибутивная решётка с дополнениями называется булевой решёткой. Булева решётка, рассматриваемая как алгебра вида ( A , ∨ , ∧ , ¬ , 0 , 1 ), называется булевой алгеброй.

 Нечёткие алгебры

Алгебра вида ( A , ∨ , ∧ , ¬ , 0 , 1 ), в которой выполняются аксиомы дистрибутивной решётки (идемпотентность, коммутативность, ассоциативность, поглощение и дистрибутивность), а также следующие аксиомы : x ∧ 1 = x – нейтральность единицы x ∨ 0 = x – нейтральность нуля ¬ ( x ∨ y ) = ¬ x ∧ ¬ y ¬ ( x ∧ y ) = ¬ x ∨ ¬ y – аксиомы Огастеса де Моргана ¬ ¬ x = x – аксиома двойного дополнения x ∧ ¬ x ∨ ( y ∨ ¬ y ) = y ∨ ¬ y ( x ∧ ¬ x ) ∧ ( y ∨ ¬ y ) = x ∧ ¬ x – аксиомы Стивена Коула Клини называется нечёткой алгеброй ( алгеброй Клини ). Аксиома Клини является более слабым условием, чем аксиома дополнения.

 Обобщения алгебраических систем 

Частичные и многоосновные алгебры В частичных алгебрах используются операции, частично определённые на носителе алгебры. В многоосновных алгебрах используется несколько различных носителей, на которых определены операции над элементами одного или нескольких носителей. Например, многоосновными алгебрами являются алгебры алгоритмов В.М. Глушкова.  Функциональные системы Это алгебры, носителями которых являются множества функций. Например, функциональной системой является булева алгебра характеристических функций подмножеств некоторого множества.  Категории Каждая категория состоит из (алгебраических) объектов и морфизмов, определённых над этими объектами. Например, категория множеств использует в качестве объектов всевозможные множества, авкачестве морфизмов – всевозможные отображения.

Числовые системы

 Делимость чисел Пусть a , b ∈ Z. Число a делится на число b (a кратно b), если найдётся такое число q ∈ Z, что a = q \* b. Отношение делимости b | a (b делит a), заданное на N, является рефлексивным, антисимметричным и транзитивным, т.е. отношением частичного порядка. Наибольшее (наименьшее) целое число, на которое делятся (которое делится на) заданные целые числа a , b , c , …, n ∈ Z называется их наибольшим общим делителем – НОД (наименьшим общим кратным – НОК) и обозначается ( a , b , c , …, n ) для НОД, [ a , b , c , …, n ] для НОК. Если ( a , b , c , …, n ) = 1 , то числа a , b , c , …, n называются взаимно простыми. Количество чисел ряда 0 , 1 , 2 , … , a – 1 взаимно простых с числом a называется функцией Леонарда Эйлера, которая обозначается ϕ (a).

 Основная теорема арифметики Число p ∈ N, p ≠ 1 называется простым, если p имеет в точности два положительных делителя: 1 и p. Остальные натуральные числа принято называть составными. Число 1 не является ни простым, ни составным. Замечание 1. Наименьший делитель любого числа a ∈ N , отличный от 1, является простым числом. Замечание 2. Наименьший отличный от 1 делитель любого составного числа a ∈ N не превосходит числа √a. Теорема (Евклид). Простых чисел бесконечно много. Теорема (основная теорема арифметики). Всякое целое число, отличное от -1, 0, 1, единственным образом (с точностью до порядка сомножителей) разложимо в произведение простых чисел. (Справедливость теоремы основана на аддитивной структуре кольца целых чисел).

 Цепные (непрерывные) дроби - 2 Числа q1 , q2, … qn называются неполными частными, причём q1 ∈ Z , q2, … qn ∈ N Числа δ1 = q1 , δ2 = q1 + 1/ q2 и т.д. называются подходящими дробями цепной дроби. Конечная цепная дробь представляет некоторое рациональное число. Теорема. Всякое вещественное число может быть разложено в цепную дробь единственным образом, и всякая конечная или бесконечная цепная дробь имеет своим значением некоторое вещественное число. Всякое иррациональное число если и можно представить, то только с помощью бесконечной цепной дроби.

 Сравнимость чисел - 1 Зафиксируем натуральное число m. Два целых числа a и b называются сравнимыми по модулю m, если остатки от их деления на m одинаковы, что обозначается : a ≡ b ( mod m ) или в другой форме записи : a ≡ m b Если для чисел a и b вышеуказанное соотношение не выполняется, то эти числа называются несравнимыми по модулю m. Сравнимые по модулю m числа образуют множество, называемое классом вычетов по модулю m. Для данного числа m все целые числа распадаются на m классов вычетов. Любое число из данного класса называется представителем этого класса. Если натуральное число d делит число m без остатка, то : a ≡ b ( mod m ) ⇒ a ≡ b ( mod d )

 Сравнимость чисел - 2 Бинарное отношение сравнимости ≡ m (неважно, по какому модулю) является отношением эквивалентности на множестве целых чисел. Говоря алгебраически более строго, отношение сравнимости ≡ m является конгруэнцией кольца Z, фактор-кольцо по которой Z / ≡ m это кольцо вычетов Z m. Кольцо вычетов является полем только если m – простое. Очевидно, что число a сравнимо с числом b по модулю m тогда и только тогда, когда (a–b) делится на m нацело. Свойства сравнений похожи на свойства отношения равенства : (1) сравнения по одинаковому модулю можно почленно складывать и умножать; (2) обе части сравнения можно возвести в одну и ту же степень; разделить на их общий делитель, взаимно простой с модулем и т.д.

 Обобщения базовых числовых систем  Обобщения целых чисел (n ∈ Z , d ∈ N) рациональные числа: m / d алгебраические числа: Алгебраическое число над полем F является корнем многочлена (не равного тождественно нулю) с коэффициентами из F. По умолчанию, в качестве поля используется поле рациональных чисел. Целыми алгебраическими числами являются корни многочленов с целыми коэффициентами и со старшим коэффициентом равным единице.  Обобщения вещественных чисел (x , y , z ∈ R) комплексные числа: C = x + i y , где i = √ ( -1 ) гиперкомплексные числа ( кватернионы ): H = a + i x + j y + k z , где i = j = k = √ ( -1 )